



Projeto

Mestrado em Engenharia Automóvel

***Determinação de respostas dinâmicas não  
medidas***

**André Filipe Peres Oliveira**

Leiria, *setembro* de 2016





Projeto

Mestrado em Engenharia Automóvel

***Determinação de respostas dinâmicas não  
medidas***

**André Filipe Peres Oliveira**

Dissertação de Mestrado realizada sob a orientação do Doutor Fernando da Conceição Batista, Professor da Escola Superior de Tecnologia e Gestão do Instituto Politécnico de Leiria.

Leiria, setembro de 2016



# Agradecimentos

---

Não poderia deixar de agradecer a todos aqueles que permitiram e que me ajudaram na realização deste trabalho pois sem eles não teria sido possível.

Assim, agradeço em especial ao Professor Doutor Fernando da Conceição Batista, orientador deste projeto, a disponibilidade demonstrada ao longo de todo o trabalho bem como todas as sugestões dadas para a elaboração do trabalho e do relatório.

Agradeço também, aos meus pais e à minha irmã por todo o apoio prestado e por me terem dado sempre a motivação necessária para a realização e conclusão deste trabalho.

Por último, agradeço ao Filipe de Carvalho a amizade e companheirismo demonstrado ao longo destes últimos 5 anos, pois com ele este caminho tornou-se mais fácil de percorrer.



# Resumo

---

A determinação das propriedades dinâmicas de uma estrutura é um aspecto bastante importante para a determinação do comportamento dinâmico dessa estrutura. A análise dinâmica do sistema faz já parte do projeto e dimensionamento de uma estrutura pois ao longo dos anos foram surgindo vários problemas com vibrações na estrutura que podem ter várias consequências, fadiga acelerada, desconforto no caso de ser uma estrutura utilizada por pessoas regularmente ou até mesmo a rotura da estrutura. Esta análise, tal como uma análise estática, geralmente parte de um modelo analítico ou numérico, chamados métodos diretos, obtendo depois os resultados que serão esperados na realidade. No entanto, em estruturas complexas, onde possam haver ligações do tipo aparafusadas, rebitadas, soldadas ou ainda apoios elásticos ou cintas, torna-se mais complicado realizar o modelo analítico ou numérico do sistema pois é mais difícil encontrar as propriedades dos vários materiais ou pode mesmo ser complicado chegar a determinada união para medir. Assim, começaram a ser utilizados os chamados métodos inversos, onde se partem de resultados obtidos experimentalmente para assim se conseguir identificar as propriedades do sistema.

As funções de resposta em frequência (FRF) tornaram-se num dos recursos mais usados neste tipo de método pois representam a resposta de um sistema a uma excitação, ou seja, resultados obtidos experimentalmente, e a partir delas é possível determinar todos os modelos do sistema, modal e espacial. Esta ferramenta tem sido bastante estudada e foram já desenvolvidos métodos de acoplamento que permitem ir medindo experimentalmente subestruturas e depois formar a estrutura global. Neste trabalho é abordada a questão onde não se conhecem as respostas dinâmicas da estrutura e se procura estimar essas respostas a partir do conhecimento numérico de parte da estrutura.

**Palavras-chave:** estrutura, acoplamento, MEF, FRF, correlação, respostas não medidas.



# Abstract

---

The determination of the dynamic properties of a structure is a big feature to create a theoretical model of the dynamic behavior of a complex structure. The dynamic analysis of a structure is now part of the design of a structure because over the years the problems with vibrations emerged and they can bring many consequences to the structure, like, the acceleration of fatigue, discomfort in the cases of structures used by people regularly and eventually the total rupture.

This analysis, like the static analysis, usually start from an analytical or numerical model to obtain the results that are expected in reality. However, in some complex structures, where could exist joints like screwed or welded ones or even elastic supports or braces, it becomes more complicated to achieve the numeric model of the structure because it's harder to find the different properties of the materials or to measure the joint. Therefore, it began to be used the inverse methods, where you start from the experimental results to identify the system characteristics.

The FRF (frequency response function) became one of the most used resources in this type of method because they represent the response of a system to an excitation. With the FRF of a structure you could identify all the characteristics of the structure because you can pass from this model to the modal model or the spatial model. This tool has been widely used and there have been developed some coupling methods that allowing a measurement by parts, by creating different substructures that in the end are engaged or the reverse. In this work, the question where you don't know nothing about a substructure but you can measure the global structure is addressed.

**Keywords:** structure, coupling, FEM, FRF, correlation, unmeasured response.



# Lista de figuras

---

Figura 1 - Relação entre os vários modelos dinâmicos [4].....	14
Figura 2 - Esquema do acoplamento de uma subestrutura A e B numa estrutura C [4].....	20
Figura 3 - Esquema de uma estrutura C resultante do acoplamento da subestrutura A e B	24
Figura 4 - Comparação das FRF calculadas pelo método MEF e pelo método de acoplamento de FRF .....	25
Figura 5 - Acoplamento de uma subestrutura A com B formando a estrutura C, divisão das coordenadas i em t e r [11] .....	27
Figura 6 - Comparação entre FRF na coordenada tt ( $H_{1,1}^C$ ) alterando o nível de ruído e o desvio padrão.....	31
Figura 7 - Zoom da Figura 6.....	31
Figura 8 - Comparação entre FRF na coordenada tt ( $H_{1,1}^C$ ) alterando o nível de ruído e o desvio padrão.....	32
Figura 9 - Zoom da Figura 8.....	32
Figura 10 - Acoplamento das subestruturas A1, A2 e B formando a estrutura C .....	33
Figura 11 - Esquema de uma viga do modelo de Euler-Bernoulli [34].....	34
Figura 28 - Deslocamentos num elemento de Timoshenko [34].....	36
Figura 12 - Comparação de uma FRF na coordenada tt ( $H_{13,13}^C$ ) calculada pelo método de acoplamento espacial e pelo método de acoplamento de FRF .....	38
Figura 13 - Comparação de uma FRF na coordenada rr ( $H_{7,7}^C$ ) calculada pelo método de acoplamento de FRF com e sem ruído .....	39
Figura 14 - Comparação de uma FRF na coordenada tj ( $H_{1,13}^C$ ) calculada pelo método de acoplamento de FRF com e sem ruído .....	39
Figura 15 - Comparação de uma FRF na coordenada jj ( $H_{13,13}^C$ ) calculada pelo método de acoplamento de FRF com e sem ruído .....	40
Figura 16 - Correlação LAC entre as FRF calculadas pelo método de acoplamento de FRF com e sem ruído.....	41
Figura 17 - Esquema da viga com a introdução de dois nós no interior do elemento B .....	41
Figura 18 - Correlação LAC entre FRF calculada pelo método de acoplamento de FRF com e sem ruído e com 20 graus de liberdade.....	42

Figura 19 - Correlação LAC entre FRF calculada pelo método de acoplamento de FRF eliminando os graus de liberdade das coordenadas j.....	43
Figura 20 - Viga semelhante à utilizada nos ensaios experimentais .....	45
Figura 21 – a) FRF medida; b) gráfico de coerência.....	47
Figura 22 – a) Comparação entre FRF calculada pelo método de acoplamento espacial e pelo método de acoplamento de FRF usando dados experimentais; b) Zoom junto à terceira frequência natural.....	48
Figura 23 - Novo modelo da viga com 14 nós .....	49
Figura 24 – a) Comparação entre FRF calculada pelo método de acoplamento espacial e pelo método de acoplamento de FRF usando dados experimentais; b) Zoom na terceira frequência natural para o novo modelo.....	50
Figura 25 - Desacoplamento do sensor B da estrutura A .....	51
Figura 26 - Comparação entre a aceleração de uma FRF medida e outra onde é aplicado o cancelamento de massa .....	51
Figura 27 - Zoom da figura anterior na quinta frequência natural .....	52
Figura 29 - Vários módulos de elasticidade e respectivo erro no método Euler-Bernoulli ..	53
Figura 30 - Vários módulos de elasticidade e respectivo erro no método Timoshenko.....	54
Figura 31 - Comparação entre FRF calculada usando o elemento de viga de Timoshenko, o elemento de viga de Euler-Bernoulli e a FRF experimental na coordenada $H_{tt}^C(1,1)$ .....	55
Figura 32 - Comparação da quinta frequência natural usando o elemento de viga de Timoshenko, o de Euler-Bernoulli e a experimental.....	55
Figura 33 - Correlação LAC entre as FRF medidas e as calculadas pelo método de acoplamento de FRF nas coordenadas tt usando o elemento de viga de Euler-Bernoulli ..	56
Figura 34 - Correlação LAC entre as FRF medidas e as calculadas pelo método de acoplamento de FRF nas coordenadas tt usando o elemento de viga de Timoshenko.....	56
Figura 35 - Correlação LAC entre a FRF calculada pelo método de acoplamento espacial e pelo método de acoplamento de FRF usando dados experimentais das coordenadas tt .....	58
Figura 36 - Comparação de uma FRF na coordenada tt ( $H_{1,1}^C$ ) calculada pelo método de acoplamento espacial e pelo método de acoplamento de FRF.....	59
Figura 37 - Comparação de uma FRF na coordenada tr ( $H_{1,2}^C$ ) calculada pelo método de acoplamento espacial e pelo método de acoplamento de FRF.....	59

Figura 38 - Comparação de uma FRF na coordenada rr ( $H_{2,2}^C$ ) calculada pelo método de acoplamento espacial e pelo método de acoplamento de FRF .....	60
Figura 39 - Comparação de uma FRF na coordenada rr ( $H_{2,14}^C$ ) calculada pelo método de acoplamento espacial e pelo método de acoplamento de FRF .....	60
Figura 40 - Comparação de uma FRF na coordenada rj ( $H_{2,7}^C$ ) calculada pelo método de acoplamento espacial e pelo método de acoplamento de FRF .....	61
Figura 41 - Comparação de uma FRF na coordenada jj ( $H_{7,7}^C$ ) calculada pelo método de acoplamento espacial e pelo método de acoplamento de FRF .....	61
Figura 42 - Comparação de uma FRF na coordenada jj ( $H_{8,9}^C$ ) calculada pelo método de acoplamento espacial e pelo método de acoplamento de FRF .....	62
Figura 43 - Correlação LAC entre uma parte da FRF, 5 Hz antes e depois da primeira frequência natural calculada pelo método de acoplamento espacial e pelo método de acoplamento de FRF usando dados experimentais das coordenadas tt .....	63
Figura 44 - Esquema da viga com a introdução de dois nós no interior do elemento B .....	64
Figura 45 - Correlação LAC entre FRF calculada pelo método de acoplamento espacial e pelo método de acoplamento de FRF usando os dados experimentais com 20 graus de liberdade .....	64
Figura 46 - Comparação de uma FRF na coordenada tt ( $H_{1,1}^C$ ) calculada pelo método de acoplamento espacial e pelo método de acoplamento de FRF com 20 graus de liberdade. ....	65
Figura 47 - Comparação de uma FRF na coordenada tr ( $H_{1,2}^C$ ) calculada pelo método de acoplamento espacial e pelo método de acoplamento de FRF com 20 graus de liberdade. ....	65
Figura 48 - Comparação de uma FRF na coordenada rr ( $H_{2,2}^C$ ) calculada pelo método de acoplamento espacial e pelo método de acoplamento de FRF com 20 graus de liberdade. ....	66
Figura 49 - Comparação de uma FRF na coordenada rr ( $H_{2,18}^C$ ) calculada pelo método de acoplamento espacial e pelo método de acoplamento de FRF com 20 graus de liberdade. ....	66
Figura 50 - Comparação de uma FRF na coordenada rj ( $H_{2,9}^C$ ) calculada pelo método de acoplamento espacial e pelo método de acoplamento de FRF com 20 graus de liberdade. ....	67
Figura 51 - Comparação de uma FRF na coordenada tt ( $H_{7,7}^C$ ) calculada pelo método de acoplamento espacial e pelo método de acoplamento de FRF com 20 graus de liberdade. ....	67

Figura 52 - Comparação de uma FRF na coordenada jj ( $H_{9,9}^C$ ) calculada pelo método de acoplamento espacial e pelo método de acoplamento de FRF com 20 graus de liberdade.	68
Figura 53 - Comparação de uma FRF na coordenada jj ( $H_{10,11}^C$ ) calculada pelo método de acoplamento espacial e pelo método de acoplamento de FRF com 20 graus de liberdade.	68
Figura 54 - Correlação LAC entre FRF calculada pelo método de acoplamento espacial e pelo método de acoplamento de FRF usando os dados experimentais com 16 graus de liberdade, removendo as coordenadas j.....	69
Figura 55 -Correlação LAC entre uma parte da FRF, 5 Hz antes e depois da primeira frequência natural calculada pelo método de acoplamento espacial e pelo método de acoplamento de FRF usando dados experimentais das coordenadas tt no novo modelo....	70
Figura 56 - Comparação de uma FRF na coordenada tj ( $H_{1,7}^C$ ) calculada pelo método de acoplamento espacial, pelo método de acoplamento de FRF e a obtida experimentalmente .....	71
Figura 57 - Comparação de uma FRF na coordenada tj ( $H_{3,7}^C$ ) calculada pelo método de acoplamento espacial, pelo método de acoplamento de FRF e a obtida experimentalmente .....	71
Figura 58 - Comparação de uma FRF na coordenada jj ( $H_{7,7}^C$ ) calculada pelo método de acoplamento espacial, pelo método de acoplamento de FRF e a obtida experimentalmente .....	72
Figura 59 - Comparação de uma FRF na coordenada tj ( $H_{1,9}^C$ ) calculada pelo método de acoplamento espacial, pelo método de acoplamento de FRF e a obtida experimentalmente .....	72
Figura 60 - Comparação de uma FRF na coordenada tj ( $H_{3,9}^C$ ) calculada pelo método de acoplamento espacial, pelo método de acoplamento de FRF e a obtida experimentalmente .....	73
Figura 61 - Comparação de uma FRF na coordenada jj ( $H_{9,9}^C$ ) calculada pelo método de acoplamento espacial, pelo método de acoplamento de FRF e a obtida experimentalmente .....	73
Figura 62 - Sensor utilizado nos ensaios experimentais [36].....	86
Figura 63 - Martelo de impacto semelhante ao utilizado nos ensaios experimentais [37]..	86

# Lista de tabelas

---

Tabela 1 - Dados da estrutura anterior.....	24
Tabela 2 - Dados da viga .....	33
Tabela 3 - Características da viga utilizada nos ensaios experimentais .....	45
Tabela 4 - Pontos onde foram realizadas as medições .....	46
Tabela 5 - Erros relativos para as frequências naturais no método Euler-Bernoulli e Timoshenko .....	54



# Abreviaturas

---

FFT	<i>Fast Fourier Transform</i>
FRF	Função de Resposta em Frequência
MAC	<i>Modal Assurance Criterion</i>
LAC	<i>Local Amplitude Correlation</i>

# Lista de símbolos

---

$A(\omega)$	Matriz de aceleração
$[C]$	Matriz de amortecimento
$E$	Módulo de elasticidade
$f(t)$	Vetor de forças
$H(\omega)$	Matriz de receptância
$H^A$	Matriz de receptância da subestrutura A
$H_{ii}^A$	Matriz de receptância da subestrutura A entre a coordenada $i$ e $i$
$H_{ij}^A$	Matriz de receptância da subestrutura A entre a coordenada $i$ e $j$
$H_{jj}^A$	Matriz de receptância da subestrutura A entre a coordenada $j$ e $j$
$H^B$	Matriz de receptância da subestrutura B
$H^C$	Matriz de receptância da subestrutura C
$H_{ii}^C$	Matriz de receptância da subestrutura C entre a coordenada $i$ e $i$
$H_{ij}^C$	Matriz de receptância da subestrutura C entre a coordenada $i$ e $j$

$H_{jj}^C$	Matriz de receptância da subestrutura C entre a coordenada $j$ e $j$
$H_{Aij}(\omega)$	Termo $i$ e $j$ da matriz $H_A(\omega)$
$H_{Xij}(\omega)$	Termo $i$ e $j$ da matriz $H_X(\omega)$
$H_A(\omega)$	FRF calculada numericamente
$H_X(\omega)$	FRF obtida experimentalmente
$H_{pq}(\omega)$	FRF da estrutura que relaciona a resposta na coordenada $p$ com a excitação na coordenada $q$
$\tilde{H}_{pq}(\omega_k)$	FRF perturbada da estrutura que relaciona a resposta na coordenada $p$ com a excitação na coordenada $q$ na frequência $\omega_k$
$[K]$	Matriz de rigidez
$[M]$	Matriz de massa
$x(t)$	Vetor de deslocamentos
$Y(\omega)$	Matriz de mobilidade
$Z(\omega)$	Matriz de rigidez dinâmica
$Z^A$	Matriz de rigidez dinâmica da subestrutura A
$Z^B$	Matriz de rigidez dinâmica da subestrutura B
$Z^C$	Matriz de rigidez dinâmica da subestrutura C
$\rho$	Massa volúmica
$\gamma$	Nível de ruído em percentagem
$[\Phi]$	Matriz modal
$[\Lambda]$	Matriz diagonal dos quadrados das frequências naturais

# Índice

---

<b>AGRADECIMENTOS</b>	<b>III</b>
<b>RESUMO</b>	<b>V</b>
<b>ABSTRACT</b>	<b>VII</b>
<b>LISTA DE FIGURAS</b>	<b>IX</b>
<b>LISTA DE TABELAS</b>	<b>XIII</b>
<b>ABREVIATURAS</b>	<b>XV</b>
<b>LISTA DE SÍMBOLOS</b>	<b>XV</b>
<b>ÍNDICE</b>	<b>XVII</b>
<b>1. INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
1.1. Sistemas mecânicos	1
1.2. História do estudo de vibrações	1
1.3. Importância deste estudo	3
<b>2. ESTADO DA ARTE</b>	<b>5</b>
2.1. Introdução	5
2.2. Procedimento para análise vibrações	5
2.3. Análise modal	6
2.3.1. O que é a análise modal?	7
2.3.2. O que é o teste modal?	8
2.3.3. Aplicações da análise modal	10
2.4. Modelos dos sistemas dinâmicos	12
2.5. Critérios de correlação	14
2.6. Determinação de FRF não medidas	15
2.7. Técnicas de acoplamento	16
<b>3. ACOPLAMENTO</b>	<b>19</b>
3.1. Modelo de acoplamento espacial	19
3.2. Método de acoplamento de FRF	20
3.2.1. Exemplo numérico	24
<b>4. RESPOSTAS DINÂMICAS NÃO MEDIDAS</b>	<b>27</b>
4.1. Formulação teórica	27
4.2. Simulação do ruído experimental	29
4.2.1. Diferentes níveis de ruído	30
4.3. Descrição do modelo numérico utilizado	33
4.4. Elemento de viga de Euler-Bernoulli	34
4.5. Elemento de viga de Timoshenko	35

4.6.	Exemplo numérico	37
4.7.	Modelo de eliminação das coordenadas <i>j</i>	41
<b>5.</b>	<b>ENSAIOS EXPERIMENTAIS</b>	<b>45</b>
5.1.	Introdução	45
5.2.	Coerência dos ensaios experimentais	46
5.3.	Refinamento do modelo	48
5.4.	Cancelamento de massa	50
5.5.	Cálculo módulo de elasticidade	52
5.6.	Cálculo respostas dinâmicas não medidas	57
5.6.1.	Gama de frequência reduzida	62
5.7.	Modelo de eliminação das coordenadas <i>j</i>	63
5.7.1.	Gama de frequência reduzida	69
5.8.	Comparação entre FRF previstas e experimentais	70
<b>6.</b>	<b>CONCLUSÕES</b>	<b>75</b>
<b>7.</b>	<b>TRABALHOS FUTUROS</b>	<b>77</b>
	<b>BIBLIOGRAFIA</b>	<b>79</b>
	<b>ANEXOS</b>	<b>83</b>
	<b>Anexo A – Decomposição em valores singulares e pseudo-inversa</b>	<b>83</b>
	Anexo A.1. – Decomposição em valores singulares	83
	Anexo A.2. – Mínimos quadrados	84
	Anexo A.3. – Pseudo-inversa	85
	<b>Anexo B – Equipamento experimental utilizado</b>	<b>86</b>

# 1. Introdução

---

## 1.1. Sistemas mecânicos

---

Todos os sistemas mecânicos e estruturais podem ser modelados num sistema massa-mola-amortecedor. Em alguns sistemas, como por exemplo no automóvel, a massa, a mola e o amortecedor podem ser identificados em componentes separados (massa na forma do corpo do veículo, mola na forma da suspensão e amortecedor na forma dos amortecedores da suspensão). Noutros sistemas estes três componentes não são separáveis, como por exemplo na asa de um avião, em que a massa é distribuída ao longo da asa, mas que devido à sua elasticidade, sofre uma deformação notável durante o voo pelo que pode ser modelada como mola. Em adição, a deflexão da asa introduz amortecimento devido ao movimento relativo de componentes como juntas, conexões e fricção interna devido a defeitos microestruturais do material [1].

## 1.2. História do estudo de vibrações

---

As pessoas começaram a ficar interessadas pela vibração quando criaram os primeiros instrumentos musicais, provavelmente assobios e tambores, por volta de 4000 a.C. Foram sendo criados alguns instrumentos musicais ao longo dos anos no entanto Pythagoras (582-507 a.C.) foi o primeiro a investigar sons musicais com base científica [1]. Foram sendo feitos alguns trabalhos sempre com base na música, até que em 1636 surge o primeiro livro publicado sobre a vibração de cordas, que foi, “*Harmonicorum Liber*”, publicado por Marin Mersenne, em que mediu, pela primeira vez, a frequência de vibração de uma corda longa e previu a partir desta a frequência de uma corda mais curta com a mesma densidade e tensão. Mersenne é considerado o pai da acústica e tem os créditos das leis da vibração de cordas, mas isto deve-se ao facto da publicação de Galileu Galileo ter sido proibida pela Inquisição em Roma. No livro de Galileo, apenas publicado em 1638, foi descrita a dependência da frequência de vibração no comprimento de um pendulo, e o fenómeno da ressonância. Em publicações de Galileo é possível verificar já uma clara percepção da relação entre frequência, comprimento, tensão e densidade de uma corda esticada vibrando [1].

Em 1686, Isaac Newton publicou o seu livro onde descreveu as leis universais da gravidade e ainda 3 leis de movimento. A segunda lei de Newton de movimento é usada em vibrações para derivar as equações do movimento de um corpo vibrando [1].

Em 1713, o matemático inglês Brook Taylor descobriu a solução teórica para o problema da vibração de cordas, com a frequência natural de vibração a corresponder aos valores experimentais de Galileo e Mersenne [1].

Até à 40 anos atrás, os estudos sobre vibração usavam modelos grosseiros com poucos graus de liberdade. A partir de 1950 e com o avanço da capacidade de processamento dos computadores, começou a ser possível tratar sistemas mais complexos e gerar soluções aproximadas. Em simultâneo houve o desenvolvimento do método dos elementos finitos que permitiu aos engenheiros usar os computadores para análise detalhada de cálculo numérico de vibrações de sistemas mecânicos, de veículos e estruturais complexos exibindo vários graus de liberdade [1].

A análise modal teve um grande impacto no estudo de vibrações. Existiram dois grandes marcos que posteriormente contribuíram para o nascimento da análise modal. O primeiro surgiu quando Newton ao observar o espectro da luz solar percebeu que esta era composta por várias bandas de cor e o segundo foi quando Fourier, que baseando-se no conhecimento matemático anterior, afirma que uma função periódica arbitrária com intervalo de tempo finito pode ser sempre representada por uma soma de funções harmónicas simples. A série de Fourier e as análises do espectro trouxeram uma base sólida para o desenvolvimento da análise modal.

A análise modal teórica baseia-se muito na equação de onda que descreve a dinâmica de uma corda vibrante, pois da solução desta equação podem-se determinar as frequências naturais, modos de vibração e as respostas. Esta etapa da análise modal foi desenvolvida durante o século XIX uma vez que estava bastante dependente da matemática para resolver as equações diferenciais parciais.

O conceito de discretização de um objeto e a introdução de análises recorrendo a matrizes impulsionou a análise modal teórica no início do século XX, sendo que o marco que se seguiu foi o surgimento dos computadores que permitiu realizar problemas teóricos [2].

A análise modal experimental surgiu também nesta altura devido aos desenvolvimentos na engenharia elétrica, que permitiu começar a fazer analogias entre os sistemas mecânicos e os elétricos e aplicar algumas teorias da análise de circuitos elétricos em mecânicos [2].

A invenção da transformada rápida de Fourier (FFT) por J.W.Cooly e J.W.Turkey em 1965 abriu finalmente caminho e tornou comum a aplicação da análise modal experimental na dinâmica estrutural. Com a FFT, é possível calcular respostas em frequência de uma estrutura a partir da medição de determinadas entradas e respostas resultantes. A teoria da análise modal ajudou a estabelecer uma relação entre as Funções de Resposta em Frequência (FRF) medidas e os dados modais da estrutura testada. Esta relação focava-se sobretudo em conseguir obter os dados modais a partir das FRF medidas.

O primeiro método de análise modal experimental foi proposto por C.C.Kennedy e C.D.Pancu em 1947, ainda antes de ter surgido a FFT, o que levou a que esta análise tivesse sido abandonada até aparecer a FFT, ainda assim este é dos métodos mais significativos [2].

O desenvolvimento experimental ajudou a um avanço na teoria da análise modal. A tradicional análise modal analítica com o modelo de amortecimento proporcional a ser expandido para um modelo com amortecimento não-proporcional. A teoria dos modos de vibração complexa foi desenvolvida e problemas de dinâmica estrutural inversa foram muito estudados, tais como, a identificação de forças a partir de respostas medidas. As características dinâmicas não lineares também passaram a ser estudadas.

Hoje em dia a análise modal é usada nas mais diversas áreas, tendo-se tornado juntamente com a análise numérica de elementos finitos dois pilares da dinâmica estrutural [2].

### **1.3. Importância deste estudo**

---

Recentemente as investigações nesta área têm sido motivadas por aplicações de engenharia, tais como, projeto de máquinas, estruturas, motores, turbinas e sistemas de controlo.

A maioria dos motores tem problemas de vibrações devido ao desequilíbrio na sua construção, quer devido a falhas no projeto quer durante a fase de fabrico.

Sempre que a frequência natural de vibração de uma máquina ou estrutura coincida com a frequência de excitação externa, ocorre um fenómeno conhecido como ressonância que pode levar à deformação excessiva ou mesmo à rotura. Devido aos efeitos devastadores deste fenómeno, o teste de vibrações é já um procedimento normal no desenvolvimento de muitos sistemas de engenharia.

Nalgumas aplicações comerciais e industriais a vibração é usada de forma proveitosa, sendo que cada vez mais este tipo de aplicações é usado. Alguns exemplos destas aplicações são transportadoras, funis, peneiras, compactadores, máquinas de lavar, escovas de dentes elétricas, brocas dos dentistas, relógios e unidades de massagem. É também usada para furar a terra, teste de materiais, processos de acabamento e em circuitos eletrônicos para filtrar frequências indesejadas, bem como é usada para melhorar a eficiência de processos de maquinagem, fundição, forjamento e soldadura [1]. Este trabalho é importante na sequência deste estudo uma vez que se vão utilizar ferramentas que permitem obter a caracterização dinâmica da estrutura, desde frequências naturais a modos de vibração, e assim, com esta caracterização dinâmica do sistema, podem ser evitados alguns dos problemas mencionados anteriormente. Dentro desta caracterização, vai ser estudado um modelo que permite obter as respostas dinâmicas de uma estrutura desconhecendo uma parte dessa estrutura, o que facilita em muitos casos a caracterização dinâmica do sistema.

## 2. Estado da arte

---

### 2.1. Introdução

---

Por vibração entende-se qualquer movimento que se repita durante um intervalo de tempo. Um sistema de vibração é composto por um meio para armazenar energia potencial (mola ou elasticidade), um meio para armazenar energia cinética (massa ou inércia) e um meio onde a energia é dissipada (amortecedor).

Existem vários tipos de vibração que se qualificam consoante o comportamento do sistema. Quando um sistema, após uma perturbação inicial continua a vibrar sem que haja uma força externa a atuar é conhecida como vibração livre. Se um sistema é sujeito a uma força externa e daí resulta uma vibração esta é conhecida como vibração forçada. As vibrações com amortecimento e sem amortecimento distinguem-se, respetivamente, consoante haja ou não perda de energia durante a oscilação. Na maioria dos sistemas com amortecimento, este é mínimo e é desprezável pois torna as análises mais complexas. A vibração periódica acontece quando, a qualquer momento, o valor ou magnitude da excitação é conhecido. Por fim, no caso da vibração aleatória é impossível prever o valor da excitação num determinado momento, no entanto é possível obter um valor médio. A velocidade do vento e o movimento da terra num sismo são alguns exemplos [1].

### 2.2. Procedimento para análise vibrações

---

Um sistema vibratório é um sistema dinâmico cujas variáveis de entrada (excitações) e de saída (respostas) são dependentes do tempo. A resposta de um sistema geralmente depende das condições iniciais do sistema mas também de excitações externas. Desta forma, a maioria dos sistemas práticos são muito complexos, e assim é impossível considerar todos os detalhes para uma análise matemática. Apenas as características mais importantes são consideradas na análise ao comportamento do sistema, usando assim um modelo mais simples que o sistema físico.

Assim, a análise de um sistema vibratório inclui um modelo matemático, a obtenção das equações, a solução destas e a interpretação de resultados.

O primeiro passo é a criação de um modelo matemático onde o objetivo passa por representar todas as características importantes do sistema para que depois se possam obter as equações que regem o comportamento do sistema. Este modelo pode ser linear ou não linear dependendo do comportamento dos componentes do sistema, sendo que o modelo linear permite obter soluções mais rápidas mas pode ocultar certas características do sistema pelo que tem de ser encontrado aqui um equilíbrio tendo em conta o sistema que se está a analisar e o estudo que se pretende. Por vezes o que é feito é começar com um modelo mais grosseiro para ter uma ideia genérica do comportamento do sistema e depois ir refinando o modelo até se ter um resultado mais próximo do comportamento real do sistema.

O segundo passo passa por obter as equações que descrevem o comportamento dinâmico do sistema. Estas equações podem ser facilmente obtidas a partir do diagrama de corpo livre do sistema.

O terceiro passo centra-se em resolver as equações obtidas anteriormente por forma a encontrar a resposta do sistema. Estas podem ser resolvidas usando cálculo integral, métodos matriciais ou cálculo numérico.

Por último procede-se à interpretação dos resultados pois do passo anterior resultam deslocamentos, velocidades e acelerações que depois têm de ser interpretadas consoante o estudo que se está a fazer [1].

## **2.3. Análise modal**

---

Nas últimas décadas a análise modal tem-se tornado um método muito importante na determinação, melhoramento e otimização das características dinâmicas de estruturas. É um método que tem tido reconhecimento, não só na engenharia mecânica e aeronáutica, como também tem tido aplicações em estruturas de edifícios, problemas biomecânicos, estruturas espaciais, instrumentos acústicos, nos transportes e estações nucleares.

Nos últimos anos têm crescido as exigências para tornar as complexas estruturas mecânicas, aeronáuticas e civis mais leves, flexíveis e resistentes. Por exemplo, na indústria automóvel têm sido gastos muitos recursos para se conseguirem ganhos microscópicos no peso dos veículos, ou na indústria aeroespacial, onde qualquer redução de peso é importante.

Outro facto importante para o sucesso deste método prende-se com as crescentes exigências de segurança e fiabilidade a que as estruturas atualmente estão sujeitas, quer, não só por regulamentos governamentais mas também pela própria exigência do consumidor.

Com a importância dada ao comportamento dinâmico das estruturas, tornou-se fundamental no projeto das mesmas ter considerações sobre o comportamento dinâmico. A análise de elementos finitos bem como a modelação da estrutura no computador permitiram aos engenheiros ter ferramentas versáteis para poder analisar a estrutura dinamicamente.

Por vezes em certos sistemas ou devido a certas condições de entrada do sistema estas ferramentas não chegam. Alguns avanços têm complementado estas falhas através de técnicas experimentais para determinação de certas propriedades da estrutura [2].

### **2.3.1. O que é a análise modal?**

---

A análise modal é o processo de determinar as características dinâmicas de um sistema através das frequências naturais e modos de vibração formulando assim um modelo matemático que demonstra o comportamento dinâmico do sistema. O modelo matemático daqui resultante é conhecido como modelo modal e a informação das características do sistema como dados modais.

A dinâmica de uma estrutura é decomposta fisicamente pela frequência e posição, sendo isto evidenciado pela solução analítica da equação diferencial parcial de um sistema contínuo como por exemplo uma barra ou uma mola. A análise modal é baseada no facto de que uma resposta de vibração de um sistema dinâmico linear e invariante no tempo pode ser expressa como uma combinação linear de movimentos harmónicos simples chamados modos naturais de vibração. Os modos naturais de vibração são próprios de cada sistema dinâmico e são determinados pelas propriedades físicas do sistema (massa, rigidez e amortecimento) e coordenadas espaciais. Cada modo é descrito através dos seus parâmetros modais: frequência natural, fator de amortecimento modal e modo de vibração, podendo este ser real ou complexo e onde cada modo corresponde a uma frequência natural [2].

A análise modal é composta por uma parte teórica mas também por uma parte experimental. A parte teórica engloba o modelo físico de um sistema dinâmico composto pelas propriedades de massa, rigidez e amortecimento. Um exemplo é a equação de onda de uma mola vibrando uniformemente demonstrado pela sua distribuição de massa e

propriedades de elasticidade. A solução desta equação fornece as frequências naturais, os modos de vibração da mola e as suas respostas de vibração forçada. Contudo, um modelo físico mais realístico inclui as propriedades anteriores mas tendo em conta a sua distribuição espacial, resultando assim na matriz de rigidez, matriz de massa e matriz de amortecimento. Estas matrizes são depois incorporadas num conjunto de equações diferenciais de movimento. O princípio de sobreposição de um sistema dinâmico linear permite depois transformar isto num problema de valores próprios, sendo que a solução deste problema fornece os dados modais do sistema [2].

A análise de elementos finitos moderna fortaleceu a discretização de quase todas as estruturas dinâmicas lineares e conseqüentemente melhorou muito a capacidade e a extensão da análise modal teórica. Por outro lado, o rápido desenvolvimento da aquisição de dados e das capacidades de processamento levou a grandes avanços na análise experimental, que se tornou conhecido como teste modal [2].

### 2.3.2. O que é o teste modal?

---

O teste modal é uma técnica experimental usada para obtenção do modelo modal de um sistema vibratório linear e invariante no tempo. As bases teóricas desta técnica assentam numa relação estabelecida entre a resposta de vibração num local e a excitação no mesmo local ou noutra como função da frequência de excitação. Esta relação, que frequentemente é uma função matemática complexa é conhecida como função de resposta em frequência (FRF).

Várias combinações de excitação e resposta em diferentes localizações levam a um conjunto completo de FRF que podem ser representadas por uma matriz de FRF de um sistema, matriz esta que é geralmente simétrica refletindo a reciprocidade estrutural do sistema. Podem existir 3 tipos de matriz de FRF, consoante a grandeza que é medida, receptância, mobilidade e aceleração. A receptância  $H(\omega)$  surge quando são medidos deslocamentos. Quando a grandeza medida é a aceleração, situação mais comum, a matriz gerada é designada por matriz de aceleração  $A(\omega)$ . Se a grandeza a ser medida for a velocidade, está-se perante a matriz mobilidade que é representada por  $Y(\omega)$ . Conhecendo uma destas, é possível passar para qualquer uma das outras usando a equação (2.1):

$$A(\omega) = i\omega Y(\omega) \text{ e } A(\omega) = -\omega^2 H(\omega) \quad (2.1)$$

Na prática, o teste modal baseia-se em medir as FRF ou as respostas de impulso de uma estrutura. Esta medição pode ser feita fixando uma localização na estrutura para a excitação e medir a resposta de vibração num ou em vários locais. Algumas técnicas modernas de excitação juntamente com os recentes desenvolvimentos da análise modal permitem mecanismos mais complexos para as excitações. A excitação pode ser de uma determinada banda de frequência, uma senoide em degrau, transiente, aleatória ou ruído sendo normalmente medida por um transdutor de força no ponto onde é aplicada enquanto a resposta é medida por acelerómetros ou outras sondas.

Uma consideração prática que se deve fazer antes do teste modal é perceber quantas FRF são necessárias medir para que se possa fazer um bom modelo modal da estrutura em teste. Quando se faz um simples teste com um martelo, a resposta é medida num ponto fixo e escolhem-se vários pontos para a excitação, constituindo estes dados uma linha da matriz de FRF. Fazendo um teste simples com um vibrador, o ponto onde é criada a excitação é fixo e vai-se mudando a localização onde se adquire a resposta, criando assim uma coluna da matriz FRF. Qualquer um destes testes deve ser, teoricamente, suficiente para se conseguir derivar o modelo modal da estrutura. A partir do momento em que se têm todos os dados suficientes, pode-se partir para uma análise numérica onde se retiram os parâmetros modais através de ajustes de cada curva. Estes processos são conhecidos como análise modal experimental e, onde, a partir dos parâmetros obtidos anteriormente, se forma o modelo modal da estrutura.

A análise modal experimental é então composta por 3 fases: preparação do teste, medição das respostas em frequência e a identificação dos parâmetros modais. A preparação do teste envolve várias seleções, tais como, a escolha do suporte para a estrutura, a escolha do tipo de excitação, os locais onde se aplica a excitação e o equipamento para medir a força e também as respostas. Para além disto, deve ser feito um modelo geométrico onde se identificam os pontos onde se vai fazer a medição e ainda é feita a identificação de mecanismos que possam perturbar a medição.

Durante o teste, é medido um conjunto de FRF que é guardado e posteriormente analisado para identificar os parâmetros modais [2].

### 2.3.3. Aplicações da análise modal

---

Existem várias aplicações da análise modal, sendo que algumas delas são aplicações diretas usando os dados modais medidos e algumas utilizam estes dados para posteriores análises. Uma aplicação muito comum é usar a análise modal experimental para resolver problemas numa estrutura problemática a nível dinâmico. Neste caso, obtém-se experimentalmente as frequências naturais, fatores de amortecimento e modos de vibração da estrutura pois estes dados são fundamentais para perceber as características da estrutura e conseguir ir à raiz dos problemas encontrados na estrutura real. Utiliza-se também este método para relacionar o modelo obtido pelo método dos elementos finitos com o modelo experimental. O método dos elementos finitos baseia-se nas matrizes de rigidez, nas matrizes de amortecimento e nas matrizes de massa o que torna difícil prever o comportamento da estrutura. Assim utiliza-se o modelo modal experimental de forma a poder fazer-se uma melhor análise do comportamento da estrutura e completando assim algumas lacunas do método dos elementos finitos.

Quando se pretendem fazer modificações numa estrutura que alterem a massa, rigidez ou amortecimento pode-se utilizar o modelo modal para fazer a simulação da estrutura alterada e prever assim o seu comportamento podendo assim fazer-se uma alteração iterativa de forma a encontrar o melhor comportamento pois ao fazer estas alterações não é necessário realizar toda a análise novamente.

A análise modal é também usada para fazer uma análise da sensibilidade da estrutura. Esta análise é usada para estudar as variações dos parâmetros modais tendo em conta uma determinada alteração física, sendo particularmente usada quando se quer redesenhar uma estrutura e se tem um alvo concreto a atingir.

Pode-se usar a análise modal para reduzir a quantidade de modelos matemáticos quando o que é de interesse estudar é o comportamento dinâmico e nesse caso deve-se usar o modelo modal.

Uma outra aplicação é a previsão de uma resposta de vibração a uma determinada força de entrada. Isto é usado, por exemplo, conhecendo um modelo modal de um veículo e medindo depois as vibrações durante um teste pode-se prever qual a resposta do veículo às condições do teste.

Algumas forças que induzem vibração em sistemas por vezes não são possíveis de medir, sendo possível identifica-las usando o modelo modal do sistema e medindo as respostas do sistema. Um exemplo desta situação é um rolamento solto no interior de um motor de turbina que vai produzir uma força de excitação que provoca vibração excessiva que poderá levar a uma rotura do sistema. A partir do momento em que é determinado o modelo modal de uma estrutura é possível prever a resposta da estrutura a forças de entrada. Esta é uma aplicação que pode ser usada para prever a duração de vida da estrutura. É também possível prever o comportamento da estrutura conhecendo o comportamento dos componentes da estrutura. Este processo é conhecido como acoplamento de subestruturas e tem algumas justificações práticas, tais como, desconstruir um problema complexo em problemas mais pequenos e simples.

Através da análise das respostas dinâmicas da estrutura é também possível observar danos invisíveis uma vez que há variações nas respostas, sendo isto bastante importante para a indústria da aviação e aeroespacial.

Existem vários exemplos práticos da aplicação desta análise. Por exemplo, na indústria automóvel, a explosão comercial do veículo e sobretudo os aspetos de segurança associados ao redesign do veículo obrigam a ter os melhores conhecimentos dinâmicos possíveis das estruturas do veículo e a repercussão de possíveis mudanças. O grande interesse passou a ser combinar a análise modal experimental e a análise dos elementos finitos no estudo de componentes automóveis. Esta combinação permite melhorar o design de componentes automóveis e aprimorar as propriedades dinâmicas do veículo. Para além disto a análise modal experimental tem um papel importante no estudo do ruído e das vibrações desagradáveis do veículo. Uma aplicação típica é fazer-se uma simples análise modal da carroçaria ou de algumas subestruturas que possam depois ser montadas no veículo. No entanto, também podem ser feitas análises mais sofisticadas como por exemplo, a sensibilidade modal dos painéis inferiores do veículo, a otimização estrutural para conforto no veículo, a estimativa da duração de vida de componentes do veículo, os mecanismos de controlo de vibração ativa da suspensão do veículo e o sistema para diagnóstico do motor do veículo. Outra das aplicações prende-se com a tentativa de perceber o ruído que é transmitido por componentes da estrutura do veículo ou perceber como o som é transmitido no interior da cabina e por último procurar reduzir o ruído no interior do veículo [2].

O desenvolvimento estrutural de aviões e de veículos espaciais foi também um catalisador para o desenvolvimento da análise modal. Forças de larga amplitude e as respostas

experienciadas por estes veículos levaram o patamar linear da teoria modal ao limite tornando real a necessidade de entrar na zona de comportamento dinâmico não linear. A complexidade e dimensão destas estruturas foram responsáveis pelo rápido desenvolvimento teórico do acoplamento de subestruturas [2].

A engenharia civil também contribuiu para o desenvolvimento da análise modal uma vez que a análise estrutural é uma parte crítica desta área e é importante conhecer o comportamento dinâmico das estruturas pois estão sujeitas a atividade sísmica e a forças provenientes do vento [2].

## **2.4. Modelos dos sistemas dinâmicos**

---

É essencial para a comunicação entre diferentes organizações e grupos de investigação que a terminologia e o formato usado para descrever as propriedades dinâmicas de um sistema ou subsistema, seja teórico ou experimental. Assim existem três modelos dos sistemas dinâmicos, o modelo espacial, o modelo modal e o modelo de resposta em frequência.

O modelo espacial é construído com o conhecimento da distribuição espacial das propriedades de massa  $[M]$ , de rigidez  $[K]$  e de amortecimento viscoso  $[C]$  ou amortecimento histerético  $[D]$ . Estas matrizes têm dimensão igual ao número de graus de liberdade do sistema  $N$ . A matriz de massa representa uma forma de definir as forças de inércia associadas a cada grau de liberdade quando estes sofrem uma aceleração. A matriz de rigidez representa uma forma de definir as forças de recuperação derivadas do deslocamento relativo de cada grau de liberdade. A matriz de amortecimento é desprezada na maior parte das análises uma vez que as forças desta matriz são desprezáveis quando comparadas com as matrizes anteriores.

Por vezes, o modelo espacial é definido como um modelo no domínio do tempo uma vez que as respostas do sistema são obtidas em função do tempo.

O modelo modal surgiu porque por vezes há a necessidade de comparar dados provenientes de fontes diferentes para obter a melhor descrição modal, ou simplesmente quando se pretende mostrar uma exposição animada da estrutura para cada frequência natural. Para estas situações, as frequências naturais e respetivos modos de vibração são usados para descrever as propriedades dinâmicas da estrutura. Os modos de vibração são

representados por N vetores próprios que podem ser agrupados na matriz modal  $[\Phi]$ . Os valores próprios que estão relacionadas com N frequências naturais do sistema, podem ser representados através da matriz diagonal  $[\Lambda]$ . Ambas as matrizes são, geralmente, complexas e onde a parte real e imaginária têm diferentes significados físicos: o  $k$  valor próprio  $\lambda_k^2 = \omega_k^2(1+i\eta_k)$ , contém informação relacionada simultaneamente com a  $k$  frequência natural  $\omega_k$  e o amortecimento modal  $\eta_k$  do  $k$  modo complexo  $\{\psi\}_k = \{a+ib\}_k$ , que é representado por uma magnitude (amplitude relativa do movimento em cada grau de liberdade) e por um ângulo fase que expressa o atraso relativo do movimento em cada grau de liberdade. São verificadas as propriedades de ortogonalidade da matriz modal  $\Phi$  (em relação às matrizes de massa e rigidez):

$$\begin{cases} \Phi^T M \Phi = I \\ \Phi^T K \Phi = \Lambda \end{cases} \quad \begin{cases} \Phi^T M \Phi = I \\ \Phi^T (K + iD) \Phi = \Lambda \end{cases} \quad (2.2)$$

Fazendo uma análise modal a partir desta equação, é possível determinar as propriedades espaciais partindo das características modais.

O modelo de resposta em frequência é descrito por uma matriz de FRF em que os elementos podem ser medidos ou calculados, ou por vezes uma mistura dos dois. Como acontece na análise de sistemas de controlo ou de circuitos elétricos, pode-se assumir que o nosso sistema é uma caixa negra onde são conhecidas as entradas e as saídas. As forças de entrada  $\{f(t)\}$  podem ser relacionadas com as respostas  $\{x(t)\}$  sempre que as características dinâmicas sejam conhecidas. Assim, considerando um sistema linear excitado por uma força harmónica em que a relação entrada/saída possa ser escrita no domínio da frequência:

$$\{X(\omega)\} = [H(\omega)]\{F(\omega)\} \text{ ou } \{F(\omega)\} = [Z(\omega)]\{X(\omega)\} \quad (2.3)$$

onde  $H(\omega)$  e  $Z(\omega)$  são respetivamente as matrizes de receptância e de rigidez dinâmica, equação (2.4). Do ponto de vista experimental, apenas  $H(\omega)$  pode ser diretamente medido na estrutura. É possível obter o modelo de resposta em frequência teoricamente partindo do modelo espacial ou do modelo modal. Pode-se observar a relação entre os vários modelos dinâmicos na Figura 1 [3].

$$H(\omega) = Z(\omega)^{-1} = [K - \omega^2 M]^{-1} \quad (2.4)$$

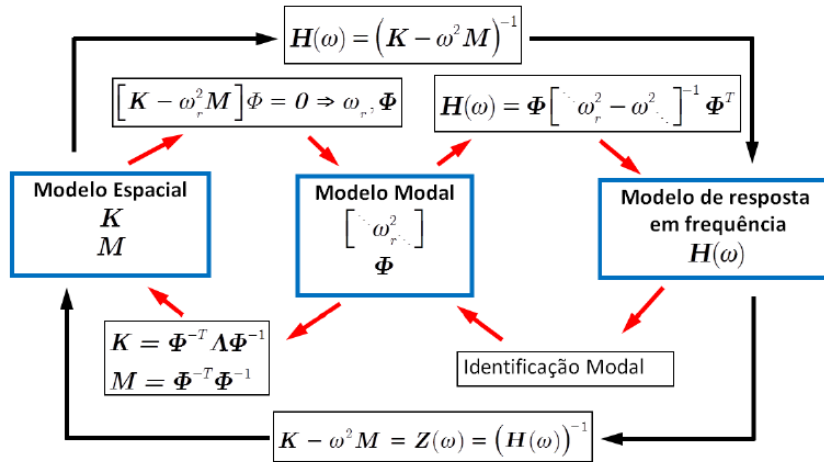


Figura 1 - Relação entre os vários modelos dinâmicos [4]

## 2.5. Critérios de correlação

Os critérios de correlação são uma manipulação numérica que permite comparar quantitativamente dois conjuntos de propriedades dinâmicas. Através dos resultados obtidos nos critérios de correlação, é possível verificar as diferenças e as semelhanças entre dois sistemas dinâmicos, e sobretudo, é possível quantificá-los. Têm vindo a ser propostos vários métodos para a correlação e alguns já são bastante usados na análise dinâmica de estruturas, principalmente na comparação de dados experimentais e nas previsões analíticas.

Existem dois tipos de critérios, aqueles em que são comparados os modos de vibração, onde o *Modal Assurance Criterion* (MAC) é um dos mais usados, e os critérios no domínio da frequência que comparam as respostas do sistema no domínio da frequência. Os critérios no domínio da frequência apresentam algumas vantagens, tais como, os erros relativos à análise modal da estrutura medida são contornados, torna-se fácil lidar com modos complexos e efeitos não-lineares e não há a necessidade de encontrar pares de modos que se correlacionem, tarefa esta que se torna muito difícil a nível industrial.

O critério de correlação ideal deveria de ter em conta todos os graus de liberdade da estrutura e a informação sobre a forma e a estrutura como função da frequência, sendo um dos utilizados o *Local Amplitude Correlation* (LAC) [5].

$$LAC(\omega, i, j) = \frac{2 \left| \left\{ H_{Xij}(\omega) \right\}^* \left\{ H_{Aij}(\omega) \right\} \right|}{\left( \left\{ H_{Xij}(\omega) \right\}^* \left\{ H_{Xij}(\omega) \right\} \right)_j + \left( \left\{ H_{Aij}(\omega) \right\} \left\{ H_{Aij}(\omega) \right\} \right)} \quad (2.5)$$

onde,  $i$  e  $j$  são as coordenadas de resposta e excitação,  $H_{Aij}(\omega)$  são as FRF calculadas numericamente,  $H_{Xij}(\omega)$  são as FRF medidas correspondentes ambas na frequência  $\omega$  e por último o símbolo  $*$  representa o complexo conjugado. Deste critério resulta um valor entre 0 e 1 sendo que valores próximos de 1 correspondem a respostas bem relacionadas.

Pode-se determinar a média destes valores e assim obter um valor que quantifica a correlação média ao longo do espectro escolhido de cada FRF [5], expressa na equação (2.6)

$$\overline{LAC}(i, j) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N LAC(\omega, i, j) \quad (2.6)$$

## 2.6. Determinação de FRF não medidas

---

Yang e Park [6] deduziram uma expressão para calcular as FRF que eram difíceis de medir, partindo do produto da matriz de rigidez dinâmica com a respetiva matriz de FRF. Celic e Boltežar [7] e Wang *et al* [8] usaram esta expressão mas não conseguiram obter bons resultados quando se adicionava algum ruído.

Avitabile e O'Callahan [9] estimaram as rotações que não eram medidas, no entanto, não avaliaram o efeito de perturbações no processo.

Silva *et al* [10] propuseram um método para estimar as FRF de rotação, baseado no cancelamento de massas, que utilizava o algoritmo de desacoplamento clássico e, onde concluíram que obtinham bons resultados mas que eram bastante sensíveis ao ruído no processo experimental.

Batista e Maia [11] desenvolveram uma formulação geral para estimar FRF não medidas, onde para além da formulação, é ainda feita uma análise numérica com a introdução da simulação de ruído na FRF e usando a mesma estrutura em vários ensaios, alterando o número de elementos finitos da estrutura, pois ao aumentar este número elementos finitos as FRF previstas na ligação vão ser mais próximas das analíticas. A formulação obtida baseia-

se no método de acoplamento de FRF e onde toda a informação da subestrutura A é fácil de obter numericamente, da estrutura global C apenas são necessários os dados experimentais das coordenadas de translação, e assim não é necessária nenhuma informação da subestrutura B.

## 2.7. Técnicas de acoplamento

---

A ideia original dos métodos de acoplamento era idealizar um sistema estrutural como um conjunto de vários componentes estruturais discretos ou subestruturas, onde seriam obtidos conjuntos de equações matriciais que permitiriam prever as propriedades modais da estrutura completa.

Com o desenvolvimento do método dos elementos finitos e com a evolução da capacidade computacional foi possível implementar e aplicar na prática esta ideia inicial.

Assim os métodos de acoplamento vieram facilitar bastante a realização da análise dinâmica a estruturas complexas.

Os métodos de acoplamento apresentam várias vantagens face à análise convencional que são apresentadas de seguida [3]:

- cada componente pode ser tratado por um modelo mais refinado e preciso. Em certos casos, algumas estruturas podem ser demasiado grandes para serem analisadas pelos métodos convencionais, especialmente se tiverem de ser simulados com apoios livres. A divisão por subestruturas permite divisões em subsistemas mais fáceis de medir/analisar.

- qualquer modificação estrutural pode ser aplicada a qualquer altura porque só envolve a reanálise da parte modificada. Assim, a parte alterada pode ser depois ligada à restante estrutura pois só a parte modificada tem de ser reanalisada.

- cada modelo dinâmico pode ser obtido por análises teóricas ou por testes a cada subsistema – que é mais fácil de manusear que a estrutura completa. Uma mistura de modelos de subsistemas teóricos e experimentais é um dos principais requisitos para as técnicas de acoplamento.

- há a possibilidade de criar uma biblioteca com subsistemas standard para modelos que já não vão sofrer alterações. Estes componentes podem depois ser importados para certas estruturas.

- pode ser selecionada a localização e o tempo para análise de cada componente durante o processo de design consoante a complexidade ou importância do componente na estrutura.

Na técnica de subestruturas, os passos mais importantes são os seguintes [3]:

1 – Partição de todos os modelos de sistemas físicos para um número de subestruturas com a escolha certa de coordenadas de ligação e interiores. Deve ser decidido quais os componentes que vão ser sujeitos a testes modais e quais vão utilizar a análise de elementos finitos. Em certos casos, podem ser escolhidos ambas as abordagens para a modelação do componente.

2 – Derivação do respetivo modelo do subsistema, quer pela abordagem experimental quer pela teórica. Uma seleção válida de coordenadas, mesmo aquelas envolvidas na ligação a outros componentes, deve ser feita, avaliando quais as que podem ser desprezadas e as que são fundamentais para a criação do modelo.

3 – Formulação das equações dos subsistemas, se possível fazendo de forma independente para cada subsistema de modo a não ser requerido conhecimento dos restantes componentes da estrutura.

4 – Construção das equações de ordem reduzida para a estrutura global invocando a compatibilidade do deslocamento da interface e as condições de equilíbrio de forças previamente estabelecidas para os diferentes componentes.

Desde os anos 60 que muitos investigadores se têm dedicado às técnicas de acoplamento. Os primeiros trabalhos a surgir nesta área foram feitos por Duncan [12] fazendo uma analogia entre os sistemas elétricos e os sistemas mecânicos. Um dos trabalhos analíticos mais significativos no desenvolvimento do conceito de mobilidade foi feito por Bishop e Johnson [13], onde, partindo de uma formulação exata do modelo de resposta em frequência de uma viga, as propriedades de uma montagem com várias vigas podem ser formuladas.

A abordagem experimental da técnica de acoplamento de impedância foi uma das principais razões que motivou um avanço no desenvolvimento de técnicas e equipamentos de medida, avaliação e análise adequados. Um trabalho apresentado por Ewins [14] com uma extensa bibliografia expunha as técnicas básicas, técnicas de medida e a interpretação e aplicação dos dados medidos. A técnica de acoplamento de FRF tem sido aplicada a vários problemas de engenharia, tais como os apresentados por Klosterman [15], Sainsbury e Ewins [16], Ewins et al [17] e Heer e Lutes [18], [19]. As grandes dificuldades encontradas nestas aplicações prendem-se com a inconsistência matemática dos modelos medidos e algumas

medições inadequadas nalguns termos da matriz de FRF de certos componentes, sendo a maioria destas FRF relacionadas com medições de rotações.

As rotações são necessárias para formular os constrangimentos adequados entre as ligações dos componentes. O sucesso na previsão de resultados de uma estrutura acoplada está muito dependente na forma como são medidas e incluídas no acoplamento as coordenadas de ligação entre os componentes, como demonstrado por Ewins e Sainsbruy [16] e Ewins e Gleeson [20]. Assumindo que os componentes estão ligados apenas por um ponto, se estes responderem à excitação nos três planos, é fundamental incluir as três rotações em adição às três translações no sentido de formular adequadamente os constrangimentos. Nos modelos de resposta em frequência, as FRF relacionadas com a rotação correspondem a 75% (ou 60% se forem assumidas propriedades simétricas) do total de elementos da matriz. Apesar de ser fácil calcular analiticamente estas FRF, a medição não é fácil de fazer [3].

A matriz de FRF medidas tende a estar mal condicionada perto de cada frequência de ressonância, sobretudo quando se tratam de estruturas com pouco amortecimento. Se houver algum erro nas FRF na proximidade destas regiões, o que acontece maioritariamente nos modelos que são obtidos experimentalmente, isto vai causar a indesejável inconsistência matemática, onde irão surgir falhas numéricas durante o processo de acoplamento e como consequência obtêm-se resultados sem significado. Lutes e Heer [18] tentaram solucionar este problema excluindo alguns elementos da matriz de FRF. Outra abordagem apresentada em trabalhos por Ewins [21], Gleeson e Imregun *et al* [21], em que a inconsistência era removida sujeitando os dados adquiridos da medição a uma análise modal, e depois partindo desta base, eram geradas FRF suavizadas para melhorar os resultados [3].

Outro método de acoplamento é a técnica de acoplamento modal que se pode dividir em duas abordagens, o método da interface fixa e o método da interface livre. Nalguns artigos publicados por Craig [22], Nelson [23] e Hurty et al [24], [25] mostram que o método de interface livre apresenta menos precisão na obtenção das frequências naturais e dos modos de vibração do sistema completo comparando com os métodos de interface fixa. No entanto, a vantagem dos métodos de interface livre é que se pode usar diretamente os dados dos testes para o processo de acoplamento [3].

## 3. Acoplamento

---

### 3.1. Modelo de acoplamento espacial

---

Este é o modelo mais usado nos *software* de elementos finitos uma vez que cada propriedade do componente é derivada a partir de uma montagem adequada das matrizes de rigidez e massa calculadas analiticamente, levando a uma descrição do componente em termos das suas propriedades espaciais. As características dinâmicas da estrutura global são obtidas usando o mesmo método de montagem que o utilizado para a obtenção das matrizes de rigidez e de massa. Com a obtenção das matrizes de rigidez, massa e amortecimento se existir, estas podem ser usadas para obter as propriedades modais ou podem ser usadas para gerar o modelo de resposta em frequência.

Considerando dois componentes onde não existe amortecimento, A e B, descritos pelas suas propriedades espaciais, matriz de rigidez e de massa de ordem  $n \times n$ , e cada componente dividido pelas suas coordenadas e interiores e as da união. As equações de equilíbrio para cada subsistema são:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} K_{ii}^A & K_{ij}^A \\ K_{ji}^A & K_{jj}^A \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i^A \\ u_j^A \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} M_{ii}^A & M_{ij}^A \\ M_{ji}^A & M_{jj}^A \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_i^A \\ \ddot{u}_j^A \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ f_j^A \end{Bmatrix} \\ \begin{bmatrix} K_{kk}^B & K_{kj}^B \\ K_{jk}^B & K_{jj}^B \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_k^B \\ u_j^B \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} M_{kk}^B & M_{kj}^B \\ M_{jk}^B & M_{jj}^B \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_k^B \\ \ddot{u}_j^B \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ f_j^B \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (3.1)$$

onde  $i$  e  $k$  são as coordenadas de cada elemento A e B, respetivamente, e  $j$  são as coordenadas da ligação.

A compatibilidade de deslocamentos e o equilíbrio de forças entre os dois subsistemas em vibração livre é expresso pelas equações:

$$\begin{aligned} \{u_j^A\} - \{u_j^B\} &= \{0\} \\ \{f_j^A\} &= -\{f_j^B\} = \{f^C\} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Tendo em conta estas equações, a matriz de rigidez e de massa global surge da seguinte forma, onde  $\oplus$  representa a montagem das submatrizes:

$$\begin{aligned} [K_{nC \times nC}^C] &= [K_{nA \times nA}^A] \oplus [K_{nB \times nB}^B] \\ [M_{nC \times nC}^C] &= [M_{nA \times nA}^A] \oplus [M_{nB \times nB}^B] \end{aligned} \quad (3.3)$$

Após feita a montagem, as matrizes de rigidez e de massa obtidas são:

$$\begin{aligned} [K^C] &= \begin{bmatrix} K_{ii}^A & K_{ij}^A & 0 \\ K_{ji}^A & K_{jj}^A + K_{jj}^B & K_{kj}^B \\ 0 & K_{jk}^B & K_{kk}^B \end{bmatrix} \\ [M^C] &= \begin{bmatrix} M_{ii}^A & M_{ij}^A & 0 \\ M_{ji}^A & M_{jj}^A + M_{jj}^B & M_{kj}^B \\ 0 & M_{jk}^B & M_{kk}^B \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Com estas matrizes obtidas, já é possível obter o modelo modal (equação (2.2)) ou o modelo de resposta em frequência (equação (2.4)) [26].

## 3.2. Método de acoplamento de FRF

O método de acoplamento de FRF apresentado a seguir surge como uma alternativa ao método clássico apresentado por Jetmundsen [27], Urgueira [28] e Skingle [29]. Considerando o acoplamento das duas subestruturas A e B, nesta formulação apenas serão consideradas as coordenadas  $i$  da subestrutura A e as coordenadas de ligação  $j$  com uma subestrutura B, como se pode observar na Figura 2. As coordenadas internas da subestrutura B na maior parte dos casos não têm interesse ou são de difícil acesso.

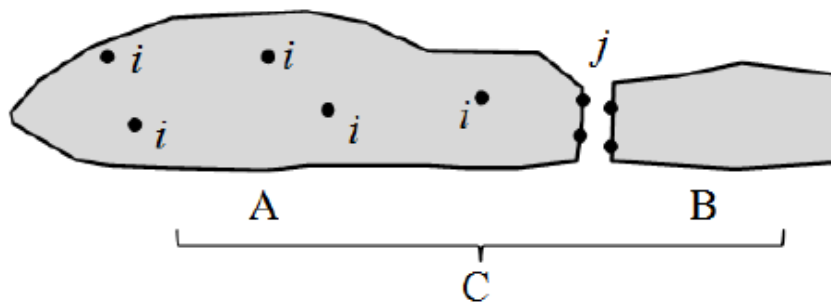


Figura 2 - Esquema do acoplamento de uma subestrutura A e B numa estrutura C [4]

A rigidez dinâmica  $Z^C$  da estrutura C pode ser descrita como a soma da rigidez dinâmica da subestrutura A,  $Z^A$ , com a rigidez dinâmica da subestrutura B,  $Z^B$ .

$$Z^C = Z^A + Z^B \quad (3.5)$$

Colocando em evidência à esquerda a matriz  $Z^A$  no segundo membro da equação:

$$Z^C = Z^A (I + H^A Z^B) \quad (3.6)$$

Onde  $H^A$  é a matriz de receptância da subestrutura A, ou seja, a inversa da rigidez dinâmica  $Z^A$ . Invertendo ambos os membros, tem-se:

$$H^C = (I + H^A Z^B)^{-1} H^A \quad (3.7)$$

Explicitando, em termos de submatrizes com as coordenadas  $i$  e  $j$ :

$$\begin{bmatrix} H_{ii}^C & H_{ij}^C \\ H_{ji}^C & H_{jj}^C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{ii} & 0 \\ 0 & I_{jj} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_{ii}^A & H_{ij}^A \\ H_{ji}^A & H_{jj}^A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Z_{jj}^B \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} H_{ii}^A & H_{ij}^A \\ H_{ji}^A & H_{jj}^A \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Da equação (3.8), têm-se:

$$\begin{bmatrix} H_{ii}^C & H_{ij}^C \\ H_{ji}^C & H_{jj}^C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{ii} & 0 \\ 0 & I_{jj} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & H_{ij}^A Z_{jj}^B \\ 0 & H_{jj}^A Z_{jj}^B \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} H_{ii}^A & H_{ij}^A \\ H_{ji}^A & H_{jj}^A \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Simplificando:

$$\begin{bmatrix} H_{ii}^C & H_{ij}^C \\ H_{ji}^C & H_{jj}^C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{ii} & H_{ij}^A Z_{jj}^B \\ 0 & I_{jj} + H_{jj}^A Z_{jj}^B \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} H_{ii}^A & H_{ij}^A \\ H_{ji}^A & H_{jj}^A \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

A inversa de uma matriz triangular superior por blocos é demonstrada em [30] que pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1} \\ 0 & C^{-1} \end{bmatrix}^{-1} \quad (3.11)$$

Assim, a equação (3.10) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} H_{ii}^C & H_{ij}^C \\ H_{ji}^C & H_{jj}^C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{ii} & -H_{ij}^A Z_{jj}^B (I_{jj} + H_{jj}^A Z_{jj}^B)^{-1} \\ 0 & (I_{jj} + H_{jj}^A Z_{jj}^B)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{ii}^A & H_{ij}^A \\ H_{ji}^A & H_{jj}^A \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Desenvolvendo,

$$\begin{bmatrix} H_{ii}^C & H_{ij}^C \\ H_{ji}^C & H_{jj}^C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{ii}^A - H_{ij}^A Z_{jj}^B (I_{jj} + H_{jj}^A Z_{jj}^B)^{-1} H_{ij}^A & H_{ij}^A - H_{ij}^A Z_{jj}^B (I_{jj} + H_{jj}^A Z_{jj}^B)^{-1} H_{jj}^A \\ (I_{jj} + H_{jj}^A Z_{jj}^B)^{-1} H_{ji}^A & (I_{jj} + H_{jj}^A Z_{jj}^B)^{-1} H_{jj}^A \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Colocando a matriz  $H^A$  em evidência, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} H_{ii}^C & H_{ij}^C \\ H_{ji}^C & H_{jj}^C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{ii}^A & H_{ij}^A \\ H_{ji}^A & H_{jj}^A \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} H_{ij}^A Z_{jj}^B (I_{jj} + H_{jj}^A Z_{jj}^B)^{-1} H_{ji}^A & H_{ij}^A Z_{jj}^B (I_{jj} + H_{jj}^A Z_{jj}^B)^{-1} H_{jj}^A \\ H_{ji}^A - (I_{jj} + H_{jj}^A Z_{jj}^B)^{-1} H_{ji}^A & H_{jj}^A - (I_{jj} + H_{jj}^A Z_{jj}^B)^{-1} H_{jj}^A \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

ou ainda,

$$\begin{bmatrix} H_{ii}^A & H_{ij}^A \\ H_{ji}^A & H_{jj}^A \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} H_{ii}^C & H_{ij}^C \\ H_{ji}^C & H_{jj}^C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{ij}^A Z_{jj}^B (I_{jj} + H_{jj}^A Z_{jj}^B)^{-1} H_{ji}^A & H_{ij}^A Z_{jj}^B (I_{jj} + H_{jj}^A Z_{jj}^B)^{-1} H_{jj}^A \\ H_{ji}^A - (I_{jj} + H_{jj}^A Z_{jj}^B)^{-1} H_{ji}^A & H_{jj}^A - (I_{jj} + H_{jj}^A Z_{jj}^B)^{-1} H_{jj}^A \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Os elementos da segunda linha da matriz do segundo membro são constituídos por diferenças de matrizes, que vão ser simplificados de seguida. Do primeiro vem,

$$\begin{aligned} & H_{ji}^A - (I_{jj} + H_{jj}^A Z_{jj}^B)^{-1} H_{ji}^A \\ &= \left( I_{ji} - (I_{jj} + H_{jj}^A Z_{jj}^B)^{-1} \right) H_{ji}^A \\ &= \left( (I_{jj} + H_{jj}^A Z_{jj}^B) (I_{jj} + H_{jj}^A Z_{jj}^B)^{-1} - (I_{jj} + H_{jj}^A Z_{jj}^B)^{-1} \right) H_{ji}^A \\ &= \left( (I_{jj} + H_{jj}^A Z_{jj}^B - I_{jj}) (I_{jj} + H_{jj}^A Z_{jj}^B)^{-1} \right) H_{ji}^A \\ &= H_{jj}^A Z_{jj}^B (I_{jj} + H_{jj}^A Z_{jj}^B)^{-1} H_{ji}^A \end{aligned} \quad (3.16)$$

Do segundo, utilizando a mesma simplificação, tem-se,

$$H_{jj}^A - (I_{jj} + H_{jj}^A Z_{jj}^B)^{-1} H_{jj}^A = H_{jj}^A Z_{jj}^B (I_{jj} + H_{jj}^A Z_{jj}^B)^{-1} H_{jj}^A \quad (3.17)$$

Substituindo as equações (3.16) e (3.17) em (3.15) tem-se:

$$\begin{bmatrix} H_{ii}^A & H_{ij}^A \\ H_{ji}^A & H_{jj}^A \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} H_{ii}^C & H_{ij}^C \\ H_{ji}^C & H_{jj}^C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{ij}^A Z_{jj}^B (I_{jj} + H_{jj}^A Z_{jj}^B)^{-1} H_{ji}^A & H_{ij}^A Z_{jj}^B (I_{jj} + H_{jj}^A Z_{jj}^B)^{-1} H_{jj}^A \\ H_{ji}^A Z_{jj}^B (I_{jj} + H_{jj}^A Z_{jj}^B)^{-1} H_{ji}^A & H_{ji}^A Z_{jj}^B (I_{jj} + H_{jj}^A Z_{jj}^B)^{-1} H_{jj}^A \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

Reorganizando o segundo membro, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} H_{ii}^A & H_{ij}^A \\ H_{ji}^A & H_{jj}^A \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} H_{ii}^C & H_{ij}^C \\ H_{ji}^C & H_{jj}^C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{ii}^A & H_{ij}^A \\ H_{ji}^A & H_{jj}^A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Z_{jj}^B (I_{jj} + H_{jj}^A Z_{jj}^B)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{ii}^A & H_{ij}^A \\ H_{ji}^A & H_{jj}^A \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Simplificando o elemento que contém a rigidez dinâmica da subestrutura B,  $Z^B$ :

$$Z_{jj}^B (I_{jj} + H_{jj}^A Z_{jj}^B)^{-1} = \left( (I_{jj} + H_{jj}^A Z_{jj}^B) H_{jj}^B \right)^{-1} = (H_{jj}^B + H_{jj}^A)^{-1} \quad (3.20)$$

Substituindo a equação (3.20) na equação (3.19) tem-se:

$$\begin{bmatrix} H_{ii}^A & H_{ij}^A \\ H_{ji}^A & H_{jj}^A \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} H_{ii}^C & H_{ij}^C \\ H_{ji}^C & H_{jj}^C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{ii}^A & H_{ij}^A \\ H_{ji}^A & H_{jj}^A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (H_{jj}^B + H_{jj}^A)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{ii}^A & H_{ij}^A \\ H_{ji}^A & H_{jj}^A \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Simplificando,

$$\begin{bmatrix} H_{ii}^C & H_{ij}^C \\ H_{ji}^C & H_{jj}^C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{ii}^A & H_{ij}^A \\ H_{ji}^A & H_{jj}^A \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} H_{ij}^A \\ H_{ji}^A \end{bmatrix} (H_{jj}^A + H_{jj}^B)^{-1} \begin{bmatrix} H_{ji}^A & H_{jj}^A \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

A equação (3.22) representa o acoplamento entre duas subestruturas A e B onde apenas é necessário fazer uma inversão de matrizes, que envolve apenas as coordenadas de ligação  $j$ ,  $(H_{jj}^B + H_{jj}^A)^{-1}$ , para se obter a resposta dinâmica da estrutura C.

Se forem retiradas as coordenadas  $k$  da equação (3.23), equação esta que provém do método de acoplamento clássico [27], [29], [31], a equação obtida é igual à equação (3.22).

$$\begin{bmatrix} H_{ii}^C & H_{ij}^C & H_{ik}^C \\ H_{ji}^C & H_{jj}^C & H_{jk}^C \\ H_{ki}^C & H_{kj}^C & H_{kk}^C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{ii}^A & H_{ij}^A & 0 \\ H_{ji}^A & H_{jj}^A & 0 \\ 0 & 0 & H_{kk}^B \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} H_{ij}^A \\ H_{ji}^A \\ -H_{kj}^B \end{bmatrix} (H_{jj}^A + H_{jj}^B)^{-1} \begin{bmatrix} H_{ji}^A & H_{jj}^A & -H_{jk}^B \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

A equação (3.23) é útil nos casos em que é necessário medir as coordenadas internas da subestrutura B. A subestrutura B representa normalmente uma junta de um acoplamento, pelo que na maior parte das vezes é difícil ter-se acesso às coordenadas desta subestrutura, o que explica o facto de as coordenadas  $k$  serem desprezados nos estudos efetuados [4].

### 3.2.1. Exemplo numérico

Para validar esta formulação, utilizou-se um modelo simples que está na Figura 3, onde se utilizou a equação do modelo de resposta em frequência para calcular as receptâncias do modelo partindo das matrizes de rigidez e de massa obtidas pelo método de elementos finitos e depois fez-se o cálculo utilizando a formulação anterior. São utilizados elementos de viga com quatro graus de liberdade, onde as coordenadas a vermelho e azul são as coordenadas  $i$ , e a verde estão as coordenadas da ligação,  $j$  (Figura 3).

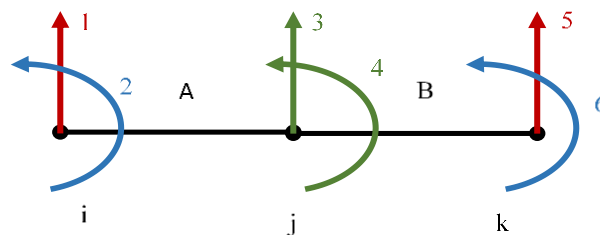


Figura 3 - Esquema de uma estrutura C resultante do acoplamento da subestrutura A e B

Nesta validação foram utilizadas as seguintes características para as respetivas vigas:

Tabela 1 - Dados da estrutura anterior

Viga	Comprimento [m]	Largura [mm]	Espessura [mm]	E [GPa]	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]
A	2,5	0,30	0,006	200	7860
B	2	0,30	0,006	200	7860

Foi então feito o cálculo numérico utilizando o programa Matlab [32] para o cálculo das receptâncias deste modelo usando dois caminhos, a formulação anterior e o método dos elementos finitos com a equação do modelo de resposta em frequência.

Depois de obtidas as FRF pelos dois métodos, confirma-se que as FRF coincidem, como se pode observar na Figura 4.

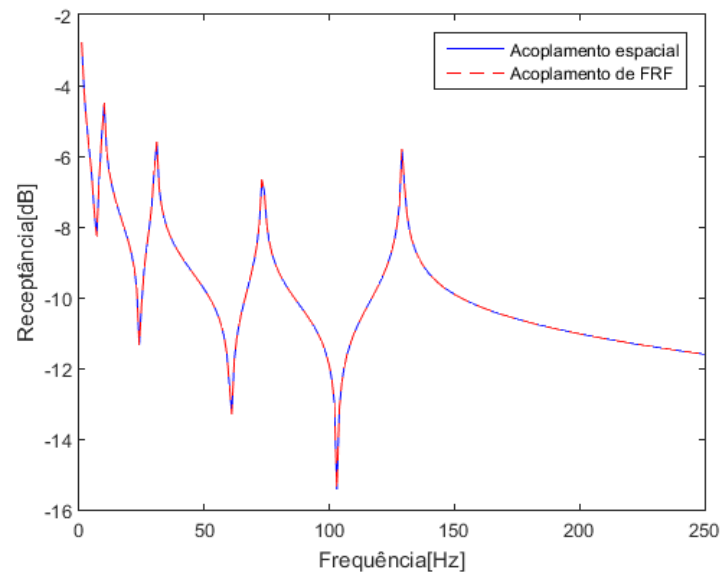


Figura 4 - Comparação das FRF calculadas pelo método MEF e pelo método de acoplamento de FRF



## 4. Respostas dinâmicas não medidas

### 4.1. Formulação teórica

Na maioria das situações a determinação das FRF em estruturas complexas é feita em zonas geometricamente bem definidas, zonas estas que na maioria dos casos são de fácil modelação numérica. No entanto, existem algumas FRF que experimentalmente são difíceis de medir ou mesmo impossíveis, principalmente as que estão ligadas às rotações. Neste sentido, vários autores desenvolveram expressões que permitem estimar as FRF que são difíceis de medir, assumindo que parte da estrutura já está modelada numericamente.

Batista e Maia [11] propuseram um método para determinar as FRF não medidas utilizando o método de acoplamento e partindo diretamente da relação da rigidez dinâmica das subestruturas A e B e a rigidez dinâmica da estrutura C. De seguida, expõe-se este método.

Considerando então duas subestruturas A e B que estão ligadas por algumas coordenadas, as coordenadas  $j$ , e que juntas formam a estrutura C. A subestrutura A deve ser fácil de modelar numericamente, da subestrutura B não precisamos de saber nada. As coordenadas internas da subestrutura A são designadas de coordenadas  $i$ , mas que neste caso vão ser divididas em dois grupos, as coordenadas  $t$  que correspondem às translações medidas experimentalmente e as coordenadas  $r$  que não são medidas. Na Figura 5 está representado um esquema da estrutura C.

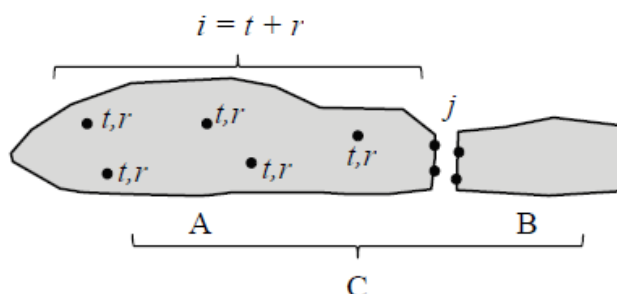


Figura 5 - Acoplamento de uma subestrutura A com B formando a estrutura C, divisão das coordenadas  $i$  em  $t$  e  $r$  [11]

O objetivo é procurar determinar as respostas nas coordenadas  $r$  e  $j$  da estrutura C, conhecendo apenas a informação obtida numericamente da subestrutura A e com as medições feitas nas coordenadas  $t$  da estrutura C.

De seguida é mostrado o método proposto por Batista e Maia [11], partindo da equação do método de acoplamento (4.1) exposto na secção 3.4.

$$\begin{bmatrix} H_{ii}^C & H_{ij}^C \\ H_{ji}^C & H_{jj}^C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{ii}^A & H_{ij}^A \\ H_{ji}^A & H_{jj}^A \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} H_{ij}^A \\ H_{ji}^A \end{bmatrix} \left( H_{jj}^A + H_{jj}^B \right)^{-1} \begin{bmatrix} H_{ji}^A & H_{jj}^A \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

As coordenadas  $i$  da estrutura C podem ser decompostas em coordenadas de translação  $t$  e coordenadas de rotação  $r$ , obtendo-se assim a seguinte matriz  $H^C$ , também esta considerada simétrica:

$$H^C = \begin{bmatrix} H_{ii}^C & H_{ij}^C \\ H_{ji}^C & H_{jj}^C \end{bmatrix} \quad i = t + r \quad \rightarrow \quad H^C = \begin{bmatrix} H_{tt}^C & H_{tr}^C & H_{tj}^C \\ H_{rt}^C & H_{rr}^C & H_{rj}^C \\ H_{jt}^C & H_{jr}^C & H_{jj}^C \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Nesta matriz  $H^C$  apenas é possível determinar experimentalmente a matriz  $H_{tt}^C$ . No entanto é possível determinar todas as outras matrizes partindo apenas da matriz  $H_{tt}^C$  e da matriz  $H^A$  calculada através do método dos elementos finitos.

Para mostrar como se pode obter a matriz  $H^C$  completa, mostra-se o primeiro elemento da equação (4.1):

$$H_{ii}^C = H_{ii}^A - H_{ij}^A \left( H_{jj}^A + H_{jj}^B \right)^{-1} \left( H_{ji}^A \right) \quad (4.3)$$

Modificando agora a equação (4.3) passando o primeiro elemento do lado direito da equação para o lado esquerdo, multiplicando por -1 e realizando a inversa de ambos os membros temos:

$$\left( H_{ij}^A \right)^+ \left( H_{ii}^A - H_{ii}^C \right) \left( H_{ji}^A \right)^+ = \left( H_{jj}^A + H_{jj}^B \right)^{-1} \quad (4.4)$$

Se considerarem apenas as coordenadas  $i$  como de translação pode-se escrever (com  $t \geq j$  (ver Anexo A)):

$$\left( H_{jj}^A + H_{jj}^B \right)^{-1} = \left( H_{ij}^A \right)^+ \left( H_{tt}^A - H_{tt}^C \right) \left( H_{jt}^A \right)^+ \quad (4.5)$$

Substituindo a equação (4.5) na equação (4.1):

$$\begin{bmatrix} H_{ii}^C & H_{ij}^C \\ H_{ji}^C & H_{jj}^C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{ii}^A & H_{ij}^A \\ H_{ji}^A & H_{jj}^A \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} H_{ij}^A \\ H_{jt}^A \end{bmatrix} \left( \left( H_{ij}^A \right)^+ \left( H_{tt}^A - H_{tt}^C \right) \left( H_{jt}^A \right)^+ \right) \begin{bmatrix} H_{ji}^A & H_{jj}^A \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Voltando a decompor as coordenadas  $i$  em coordenadas  $t$  e  $r$  como na equação (4.2), obtém-se:

$$\begin{bmatrix} H_{tt}^C & H_{tr}^C & H_{tj}^C \\ H_{rt}^C & H_{rr}^C & H_{rj}^C \\ H_{jt}^C & H_{jr}^C & H_{jj}^C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{tt}^A & H_{tr}^A & H_{tj}^A \\ H_{rt}^A & H_{rr}^A & H_{rj}^A \\ H_{jt}^A & H_{jr}^A & H_{jj}^A \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} H_{tj}^A \\ H_{rj}^A \\ H_{jj}^A \end{bmatrix} \left( \left( H_{ij}^A \right)^+ \left( H_{tt}^A - H_{tt}^C \right) \left( H_{jt}^A \right)^+ \right) \begin{bmatrix} H_{jt}^A & H_{jr}^A & H_{jj}^A \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Com a equação (4.7) é possível prever todas as respostas da estrutura C, precisando apenas das respostas das coordenadas de translação da estrutura C e de toda a informação numérica da estrutura A. A informação numérica da estrutura A é fácil de obter através do método dos elementos finitos e neste caso é apenas necessário medir experimentalmente as coordenadas de translação da estrutura C, o que também é um processo acessível. Com estas informações é então possível prever todas as respostas da estrutura C, para além das respostas de translação já medidas, é possível prever as respostas de rotação do acoplamento [4].

## 4.2. Simulação do ruído experimental

---

Como foi explicado anteriormente, para prever as respostas da estrutura C é necessário realizar ensaios experimentais para a medição das respostas nas coordenadas de translação. Neste caso, ao estar-se a fazer uma medição experimental, a resposta que vai ser medida vai ter sempre um ruído que provém do próprio ensaio, pois não se consegue ter o ambiente numérico, existem sempre situações que não se podem prever, ou mesmo limitações nos equipamentos de medida.

Assim, Liu [33] definiu uma expressão que permite simular numericamente o ruído que se vai obter nos ensaios experimentais juntamente com as FRF. A expressão seguinte representa um erro numérico que é independente da amplitude.

$$H_{pq}(\omega_k) = H_{pq}(\omega_k) + \frac{\gamma}{100} \cdot \text{normrnd}(\omega_k) \cdot |H_{pq}(\omega)| \quad (4.8)$$

onde o  $\gamma$  é o nível de ruído em %, o  $\text{normrnd}(\omega)$  é uma distribuição normal com média igual a zero e desvio padrão igual a um e  $\omega_k$  representa o ponto  $k$  da gama de frequência.

Em termos numéricos, esta expressão é aplicada à matriz  $H_{tt}^C$ , pois é aquela que é obtida experimentalmente, e depois são recalculadas as matrizes  $H_C$  das outras coordenadas partindo da  $H_{tt}^C$  afetada com ruído pelo método de acoplamento de FRF.

### 4.2.1. Diferentes níveis de ruído

---

Foi também feito um estudo para verificar qual a influência do desvio padrão ( $\sigma$ ) e do nível de ruído ( $\gamma$ ) nas FRF e se havia alguma relação entre estes parâmetros. Usaram-se os valores 3 e 5 para estes parâmetros para procurar verificar se existia uma relação entre ambos e qual a influência deles no ruído introduzido. O valor da média não foi alterado e manteve-se sempre igual a zero.

Na Figura 6 pode-se observar a comparação entre a FRF calculada, que é a linha azul onde o nível de ruído é nulo, e uma FRF com nível de ruído 3 e desvio padrão igual a 1, a linha vermelha a tracejado, e uma FRF com nível de ruído e desvio padrão inverso do anterior, a linha verde a tracejado, sendo esta uma comparação feita numa coordenada de translação  $tt$ .

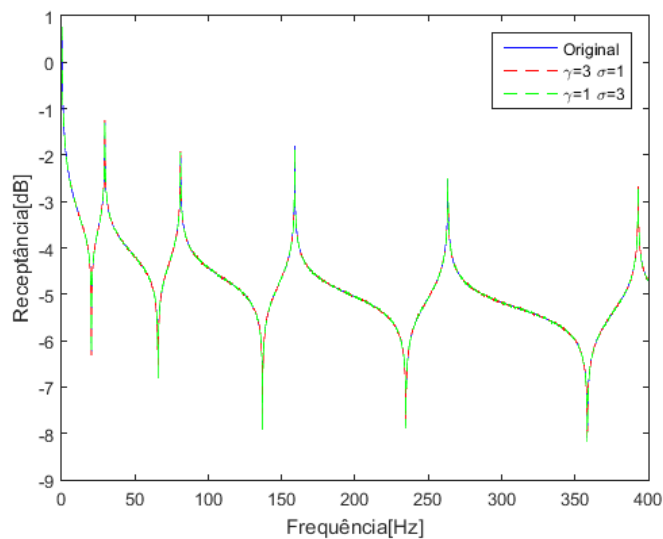


Figura 6 - Comparação entre FRF na coordenada  $tt$  ( $H_{1,1}^C$ ) alterando o nível de ruído e o desvio padrão

Como não é muito perceptível a diferença entre a FRF original e as que têm ruído, na Figura 7 faz-se um zoom à figura anterior para se conseguir perceber o efeito do ruído.

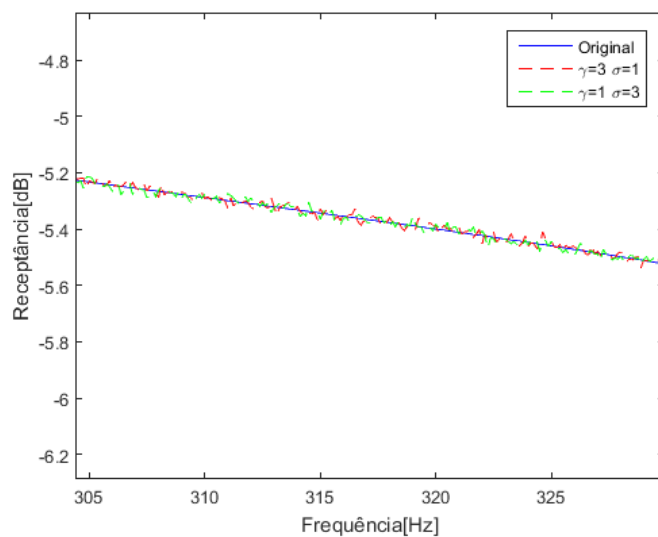


Figura 7 - Zoom da Figura 6

Na Figura 8 pode-se observar uma comparação idêntica à da , mudando o nível de ruído para 5%, linha a magenta tracejado e mudando o desvio padrão para 5, linha preta a tracejado, também numa coordenada de translação  $tt$ .

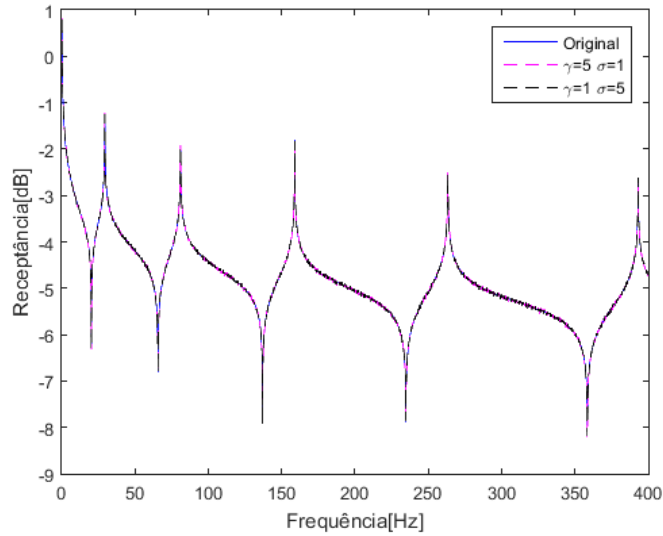


Figura 8 - Comparação entre FRF na coordenada  $tt$  ( $H_{1,1}^C$ ) alterando o nível de ruído e o desvio padrão

Para se perceber melhor a diferença entre a FRF original e as que têm ruído, na Figura 9 amplia-se uma das zonas da FRF onde se faz notar o efeito do ruído.

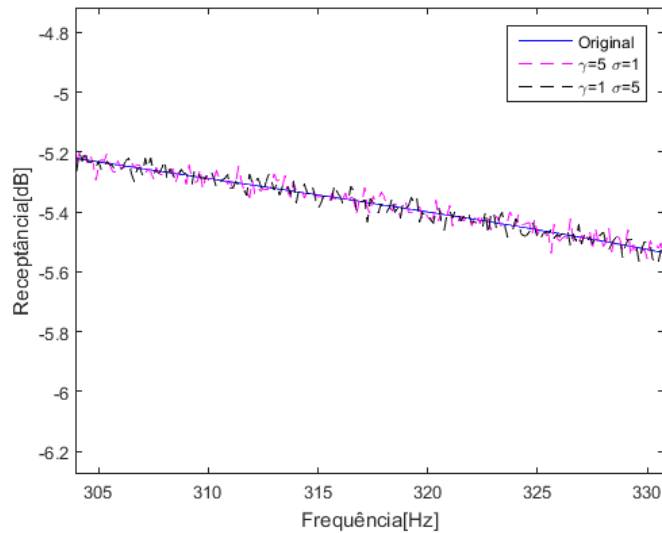


Figura 9 - Zoom da Figura 8

## Discussão

Como se pode observar pela imagem não existe uma relação entre o nível de ruído e o desvio padrão, sendo que as ressonâncias são sempre possíveis de observar independentemente destes parâmetros, fazendo-se sentir o ruído apenas nas zonas de transição mas não afetando em praticamente nada a FRF, pelo que é de esperar que não haja grande diferença entre as FRF calculadas e as medidas nas coordenadas de translação.

### 4.3. Descrição do modelo numérico utilizado

Partindo da equação (4.7), foi feito um cálculo numérico para comprovar que os resultados obtidos por esta equação são iguais aos resultados obtidos calculando as respostas pelo método dos elementos finitos.

Para validar que esta equação apresenta os mesmos resultados que o método dos elementos finitos, utilizou-se um modelo que está na , onde se utilizou a equação do modelo de resposta em frequência para calcular as receptâncias do modelo partindo das matrizes de rigidez e de massa obtidas pelo método de elementos finitos e depois fez-se o cálculo utilizando a equação (4.7). São utilizados elementos de viga com quatro graus de liberdade, onde as coordenadas a vermelho são as coordenadas de translação  $t$ , as azuis as de rotação  $r$  e a verde estão as coordenadas da ligação  $j$ . Para este caso, a subestrutura A é dividida em A1 e A2, sendo que cada subestrutura está dividida em três elementos finitos e a subestrutura B é colocada entre as subestruturas A1 e A2, (Figura 10).

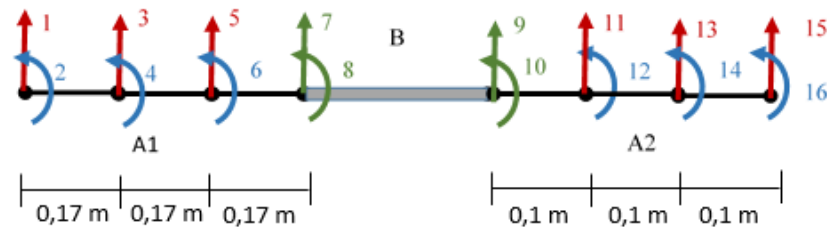


Figura 10 - Acoplamento das subestruturas A1, A2 e B formando a estrutura C

Nesta validação foram utilizadas as seguintes características para as respectivas vigas:

Tabela 2 - Dados da viga

Viga	Comprimento [m]	Largura [m]	Espessura [m]	E [GPa]	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]
A1	0,51	0,030	0,005	199	7787
A2	0,13	0,030	0,005	199	7787
B	0,30	0,030	0,005	199	7787

## 4.4. Elemento de viga de Euler-Bernoulli

No elemento de viga de Euler-Bernoulli admite-se que as secções transversais, normais ao eixo da viga antes da deformação, mantêm-se planas e ortogonais ao referido eixo após a deformação. Esta hipótese assenta no facto de nesta teoria se admitir que a rotação de uma secção transversal é igual à inclinação do eixo da viga, ignorando assim a deformação por corte. Pode-se observar o esquema desta viga na Figura 11.

A teoria do elemento de viga de Euler-Bernoulli admite as seguintes hipóteses:

- i) Os deslocamentos verticais de todos os pontos de qualquer secção transversal são pequenos, quando comparados com a altura da viga, e são iguais ao respetivo deslocamento do eixo da viga;
- ii) O deslocamento lateral é nulo (segundo o eixo y);
- iii) Secções transversais planas e normais ao eixo da viga antes da deformação mantêm-se planas e ortogonais ao referido eixo após a deformação.

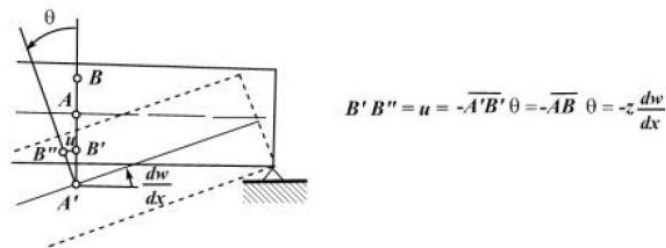


Figura 11 - Esquema de uma viga do modelo de Euler-Bernoulli [34]

Tendo em conta estas hipóteses admitidas, o campo de deslocamentos de um ponto qualquer da viga define-se por intermédio das seguintes relações:

$$\begin{aligned}
 u_{\ell_1}(\ell_1, \ell_2, \ell_3) &= \overline{u_{\ell_1}}(\ell_1) - \ell_2 \theta_{\ell_3}(\ell_1) \\
 u_{\ell_2}(\ell_1, \ell_2, \ell_3) &= \overline{u_{\ell_2}}(\ell_1) \\
 u_{\ell_3}(\ell_1, \ell_2, \ell_3) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{4.9}$$

em que,  $\overline{u_{\ell_1}}$  e  $\overline{u_{\ell_2}}$  são os deslocamentos de um ponto do eixo da viga segundo as direções  $\ell_1$  e  $\ell_2$ , respetivamente. Devido à hipótese iii), a rotação  $\theta_{\ell_3}$  de (4.9) é igual à inclinação da tangente ao eixo da viga deformada, pelo que:

$$\theta_{\ell_3} = \frac{du_{\ell_2}}{d\ell_1} \quad (4.10)$$

$$u_{\ell_1} = \overline{u_{\ell_1}}(\ell_1) - \ell_2 \frac{du_{\ell_2}}{d\ell_1} \quad (4.11)$$

Com isto, e utilizando o princípio dos trabalhos virtuais obtém-se a matriz de rigidez e a matriz de massa da viga que se apresentam de seguida, respetivamente [34].

$$[K] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

$$[M] = \frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

## 4.5. Elemento de viga de Timoshenko

---

No sentido de melhorar as FRF calculadas e assim ter um modelo mais próximo da viga utilizada experimentalmente estudou-se outro tipo de elemento de viga que não o que é utilizado maioritariamente por ser o mais simples. Assim chegou-se ao elemento de viga de Timoshenko uma vez que este tem em conta o esforço de corte e a inércia da rotação, o que no estudo em causa pode ser importante. A teoria do elemento de viga de Timoshenko admite as duas primeiras hipóteses da teoria de Euler-Bernoulli no entanto distingue-se na terceira hipótese:

iii) Secções transversais planas e ortogonais ao eixo da viga indeformada permanecem planas mas não necessariamente ortogonais ao eixo da viga após a deformação.

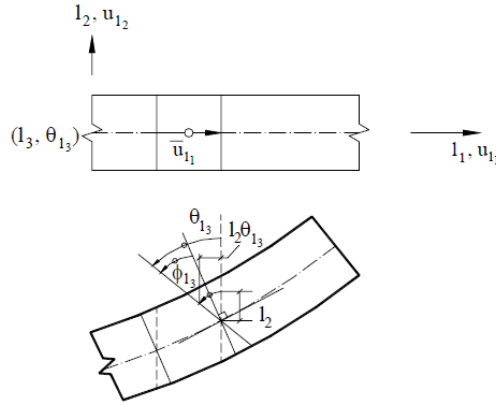


Figura 12 - Deslocamentos num elemento de Timoshenko [34]

O campo de deslocamentos (Figura 12) de um ponto qualquer da viga obtém-se através das seguintes expressões:

$$\begin{aligned} u_{l_1}(\ell_1, \ell_2, \ell_3) &= \overline{u_{l_1}}(\ell_1) - \ell_2 \theta_{l_3}(\ell_1) \\ u_{l_2}(\ell_1, \ell_2, \ell_3) &= \overline{u_{l_2}}(\ell_1) \\ u_{l_3}(\ell_1, \ell_2, \ell_3) &= 0 \end{aligned} \quad (4.14)$$

em que  $\overline{u_{l_1}}$  e  $\overline{u_{l_2}}$  são os deslocamentos de um ponto do eixo da viga.

Devido à nova hipótese iii), desenvolvem-se extensões de corte na secção transversal da viga, passando o vetor das extensões a ser constituído por duas componentes:

$$\underline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \frac{du_{l_1}}{d\ell_1} \\ \frac{du_{l_2}}{d\ell_1} + \frac{du_{l_1}}{d\ell_2} \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

Aplicando agora o princípio dos trabalhos virtuais obtém-se a matriz de rigidez e a matriz de massa da viga que são apresentadas de seguida [35].

$$[K] = \frac{EI}{L^3(1+\lambda)} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & (4+\lambda)L^2 & -6L & (2-\lambda)L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & (2-\lambda)L^2 & -6L & (4-\lambda)L^2 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

$$[M_T] = \frac{\rho AL}{420(1+\lambda)^2} \begin{bmatrix} 156+294\lambda+140\lambda^2 & (22+38.5\lambda+17.5\lambda^2)L & 54+126\lambda+70\lambda^2 & -(13+31.5\lambda+17.5\lambda^2)L \\ (22+38.5\lambda+17.5\lambda^2)L & (4+7\lambda+3.5\lambda^2)L^2 & (13+31.5\lambda+17.5\lambda^2)L & -(3+7\lambda+3.5\lambda^2)L^2 \\ 54+126\lambda+70\lambda^2 & (13+31.5\lambda+17.5\lambda^2)L & 156+294\lambda+140\lambda^2 & -(22+38.5\lambda+17.5\lambda^2)L \\ -(13+31.5\lambda+17.5\lambda^2)L & -(3+7\lambda+3.5\lambda^2)L^2 & -(22+38.5\lambda+17.5\lambda^2)L & (4+7\lambda+3.5\lambda^2)L^2 \end{bmatrix}$$

$$[M_R] = \frac{\rho I}{30L(1+\lambda)^2} \begin{bmatrix} 36 & (3-15\lambda)L & -36 & (3-15\lambda)L \\ (3-15\lambda)L & (4+15\lambda+10\lambda^2)L^2 & -(3-15\lambda)L & -(1+5\lambda-5\lambda^2)L^2 \\ -36 & -(3-15\lambda)L & 36 & -(3-15\lambda)L \\ (3-15\lambda)L & -(1+5\lambda-5\lambda^2)L^2 & -(3-15\lambda)L & (3-15\lambda)L^2 \end{bmatrix}$$

$$[M] = [M_T] + [M_R] \quad (4.17)$$

onde,

$$\lambda = \frac{12EI}{G \frac{A}{\alpha} L^2} \quad (4.18)$$

Esta hipótese representa uma maior aproximação à deformação real de vigas de altura considerável, uma vez que à medida que a relação comprimento/altura diminui as secções transversais deixam de se conservar planas após a deformação.

Com esta hipótese, a teoria de viga de Timoshenko considera a força de corte e a inércia da rotação na equação de movimento transversal e contribui assim para o aperfeiçoamento do cálculo das frequências naturais.

## 4.6. Exemplo numérico

---

Foi utilizado o Matlab [32] para a realização do cálculo numérico dos dois métodos. Na Figura 13 pode-se observar uma FRF obtida utilizando o método de acoplamento espacial e o método de acoplamento de FRF e onde se pode ver que se sobrepõem o que significa que se obtêm os mesmos resultados.

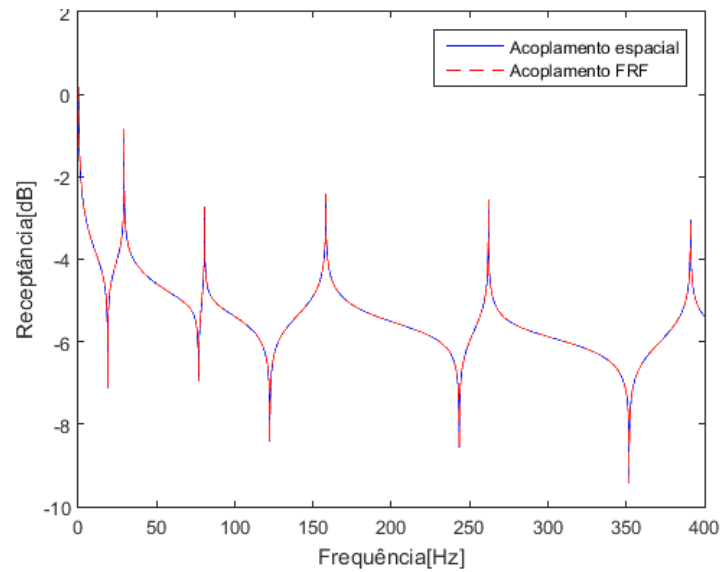


Figura 13 - Comparação de uma FRF na coordenada  $jj$  ( $H_{7,7}^C$ ) calculada pelo método de acoplamento espacial e pelo método de acoplamento de FRF

Após feita esta confirmação, foi aplicado o conceito explicado no capítulo 4.2. onde se introduziu um nível de ruído para se poder simular o ruído que se obtém nos ensaios experimentais.

O nível de ruído utilizado foi 3%, o desvio padrão igual a 1 e a média igual a zero, e de seguida apresentam-se algumas comparações entre FRF com e sem ruído.

Na Figura 14 está representada uma FRF de uma coordenada de rotação  $rr$ , onde se pode ver que o ruído não causa uma grande alteração. Isto acontece também para as FRF nas coordenadas de translação  $tt$  e de translação-rotação  $tr$ .

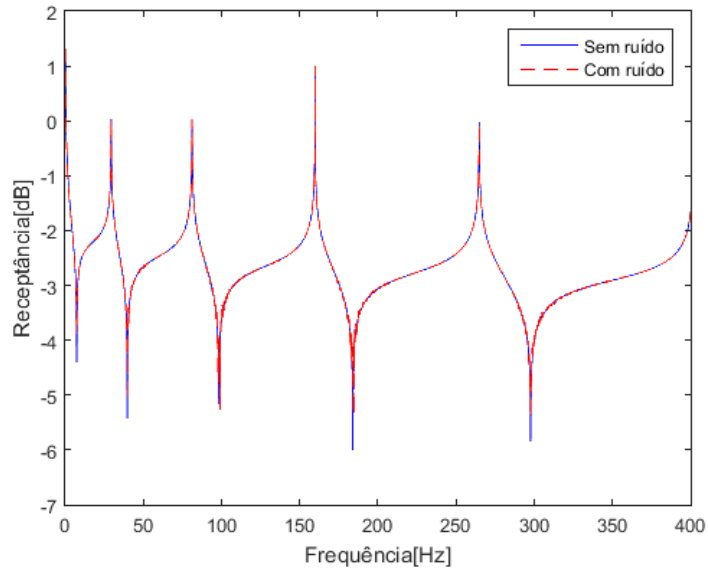


Figura 14 - Comparação de uma FRF na coordenada  $rr$  ( $H^C_{2,2}$ ) calculada pelo método de acoplamento de FRF com e sem ruído

Na Figura 15 está representada uma resposta numa coordenada  $tj$ , com o mesmo nível de ruído da resposta anterior.

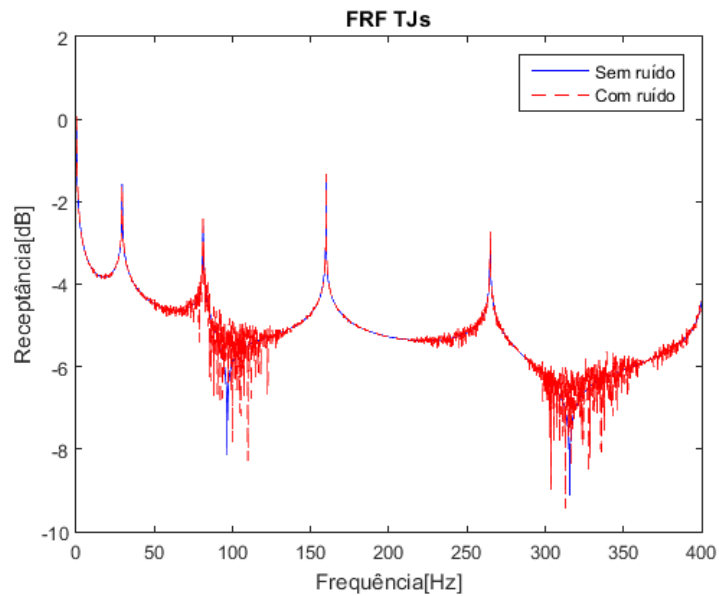


Figura 15 - Comparação de uma FRF na coordenada  $tj$  ( $H^C_{1,7}$ ) calculada pelo método de acoplamento de FRF com e sem ruído

Na Figura 16 está representada uma resposta numa coordenada  $jj$ , com o mesmo nível de ruído das respostas anteriores.

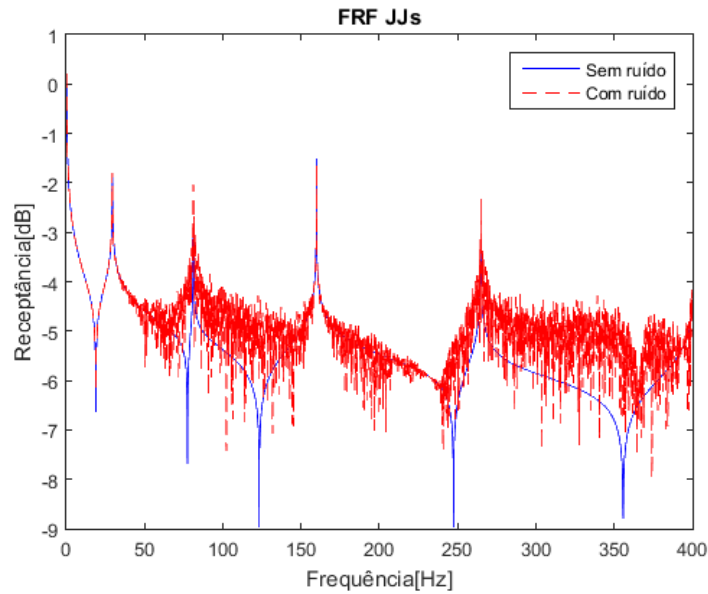


Figura 16 - Comparação de uma FRF na coordenada  $jj$  ( $H_{7,7}^C$ ) calculada pelo método de acoplamento de FRF com e sem ruído

## Discussão

Das imagens anteriores pode-se observar que o ruído é bastante superior nas FRF que correspondem a coordenadas  $j$  do acoplamento, no entanto é possível observar as ressonâncias, sendo difícil detetar as antirressonâncias.

Nas FRF das coordenadas que não pertencem ao acoplamento o ruído é muito reduzido, quase impercetível.

Para ter uma visão geral da influência do ruído, foi usada a correlação LAC, introduzida no capítulo 2.4., e feito o gráfico da Figura 17. Este gráfico da correlação representa uma matriz e é simétrico na sua diagonal secundária sendo assim em todos os gráficos desta tese. Nos eixos do gráfico estão representados os graus de liberdade da viga, e onde as coordenadas 7,8,9 e 10 são as coordenadas do acoplamento  $jj$  onde se verifica um ruído superior às restantes. Neste caso tem-se valores da correlação a rondar os 0,6 sendo que na maioria das outras coordenadas tem-se valores próximos de 1 o que demonstra que as FRF estão bem correlacionadas.

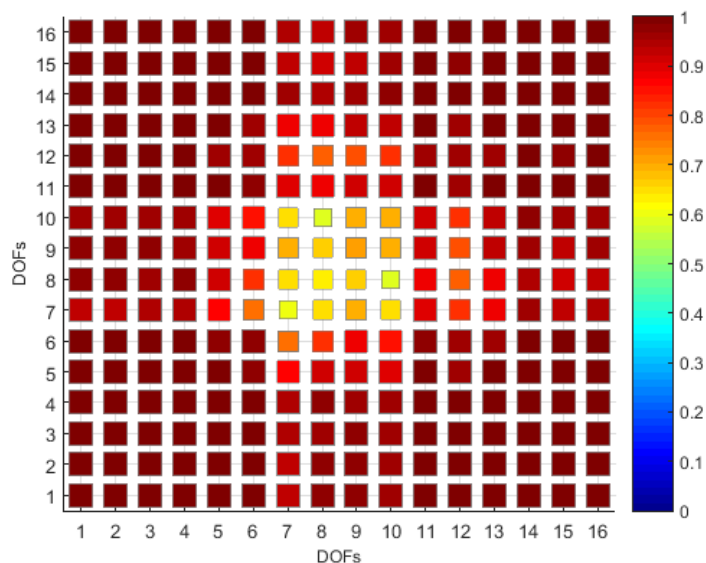


Figura 17 - Correlação LAC entre as FRF calculadas pelo método de acoplamento de FRF com e sem ruído

## 4.7. Modelo de eliminação das coordenadas $j$

Como foi observado anteriormente, as respostas previstas nas coordenadas da ligação  $j$  são as que apresentam um ruído maior. Neste sentido, foi criado um novo modelo (Figura 18), usando a mesma viga, com as dimensões da Tabela 2, onde se inseriram dois nós no interior do elemento B para tentar minimizar o ruído obtido nas respostas.

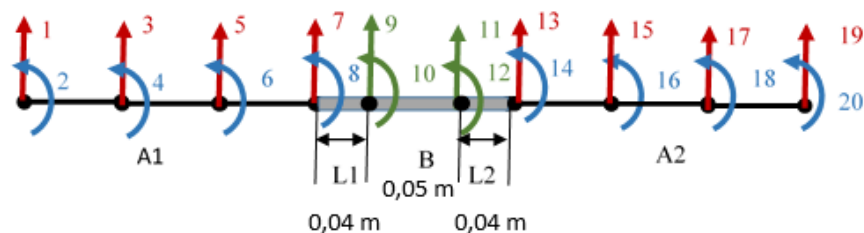
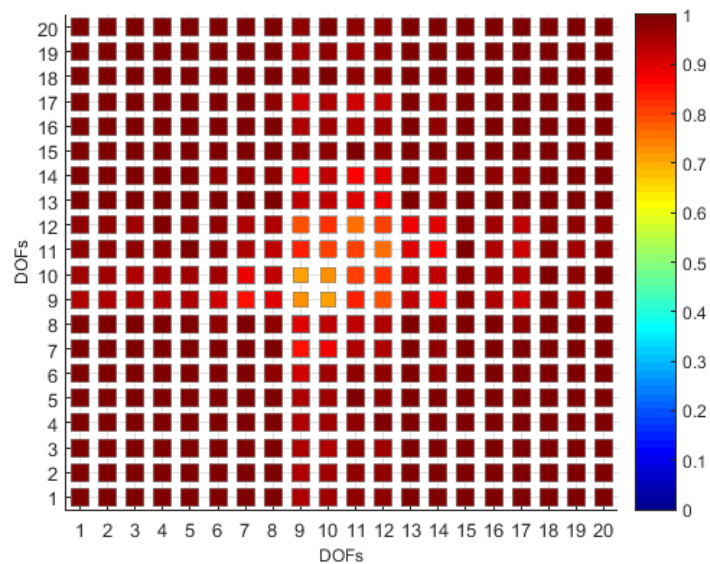


Figura 18 - Esquema da viga com a introdução de dois nós no interior do elemento B

Neste modelo, as coordenadas da ligação passam a estar inseridas no interior do elemento B, nos dois nós criados, sendo que o comprimento total da viga não é alterado apenas são alterados os comprimentos dos elementos, ao comprimento de A1 e A2 passa a ser somado o comprimento de L1 e L2, respetivamente, e no elemento B retira-se o comprimento de L1 e L2. Nesta estrutura vamos poder medir nos pontos que correspondem aos  $jj$  da estrutura anterior.

Na Figura 19 pode-se observar a correlação LAC entre a FRF calculada e uma FRF com ruído para o modelo anterior, ou seja, com 20 coordenadas. Pode-se verificar que as FRF em quase todas as coordenadas já estão bem correlacionadas porque os valores estão todos entre 0,9 e 1 no entanto verifica-se que nas coordenadas do acoplamento  $j$  (9, 10, 11 e 12) se registam os valores por volta de 0,7.



*Figura 19 - Correlação LAC entre FRF calculada pelo método de acoplamento de FRF com e sem ruído e com 20 graus de liberdade*

Desta forma, removendo estas coordenadas de acoplamento consegue-se obter um melhor resultado, e neste caso, as coordenadas podem ser removidas porque estão no interior do elemento B pelo que podem ser desprezadas. É o que se verifica com a correlação da Figura 20, onde apenas foram removidas os LAC das FRF das coordenadas de acoplamento  $j$  (9 a 12) face à Figura 19.

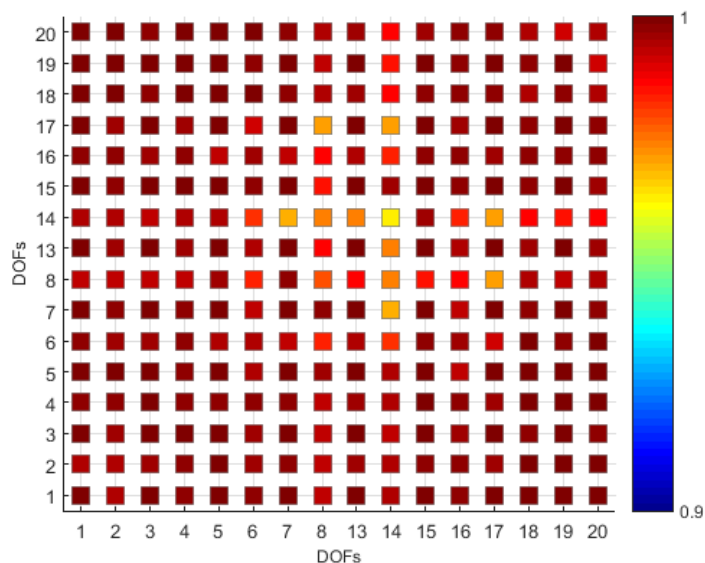


Figura 20 - Correlação LAC entre FRF calculada pelo método de acoplamento de FRF eliminando os graus de liberdade das coordenadas  $j$

Na Figura 20 como foram removidas as coordenadas  $j$ , todos os restantes valores estão compreendidos entre 0,9 e 1 pelo que a escala do gráfico foi alterada para a escala de 0,9 a 1 e desta forma verifica-se ainda que os valores estão todos acima de 0,95 o que significa que as FRF das coordenadas que não são do acoplamento estão todas bem correlacionadas.

### Discussão

Ao criar o novo modelo com as coordenadas no interior do elemento B verifica-se que há uma melhoria na previsão das coordenadas do acoplamento  $jj$ , pois comparando a Figura 19 com a Figura 17 verifica-se que o valor da correlação nas coordenadas do meio, que são as do acoplamento  $j$ , têm valores superiores neste novo modelo, sendo isto visível pela cor e tamanho do quadrado destas coordenadas pois com o modelo anterior havia coordenadas com valor na ordem dos 0,6 e neste sobe para 0,7.

Para validar estes resultados numéricos obtidos, de seguida vão ser realizados ensaios experimentais onde se vão medir as FRF nas coordenadas de translação  $tt$  da estrutura C e preveem-se as restantes FRF utilizando o método de acoplamento de FRF, procedendo-se depois às mesmas análises realizadas na parte numérica mas introduzindo no método de acoplamento de FRF os dados experimentais.

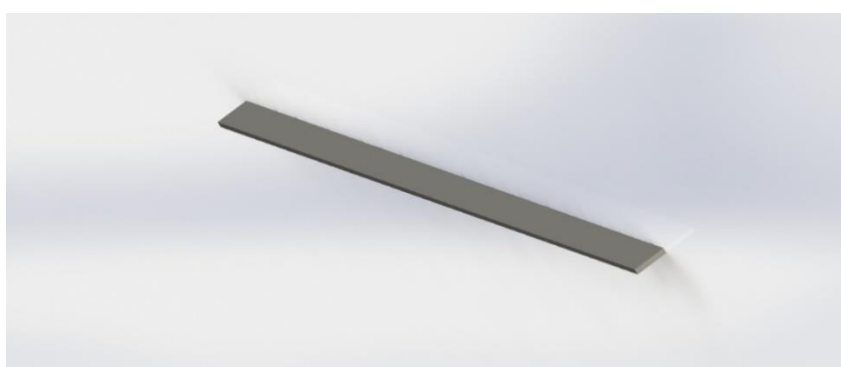


## 5. Ensaaios experimentais

### 5.1. Introdução

---

A realização dos ensaios experimentais foi feita na Escola Superior de Tecnologia e Gestão do Instituto Politécnico de Leiria. A viga utilizada para os ensaios era semelhante à da Figura 21 e apresentava as seguintes características:



*Figura 21 - Viga semelhante à utilizada nos ensaios experimentais*

*Tabela 3 - Características da viga utilizada nos ensaios experimentais*

Comprimento [m]	Largura[m]	Espessura[m]	E [GPa]	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]
0,94	0,030	0,005	199	7787

Para a realização dos ensaios experimentais a viga estava pendurada numa estrutura através de dois fios de nylon, para assim criar as condições de vibração livre. A gama de frequência utilizada foi de 0-400 Hz uma vez que assim se teria uma maior resolução de 0,125 Hz, ou seja, conseguiam-se medir 8 pontos por Hz, obtendo assim um total de 3200 pontos medidos. Para além desta situação até aos 400 Hz vamos encontrar 4 frequências naturais de flexão que foi considerado aceitável para caracterizar a estrutura C. Com esta gama de frequência a ponteira do martelo pode ser menos rígida pois assim excita as frequências mais baixas e vai existir mais ruído nas frequências mais altas.

Foram escolhidos 8 pontos na viga que correspondem aos pontos das medições e que estão presentes na Tabela 4:

Tabela 4 - Pontos onde foram realizadas as medições

Ponto	1	2	3	4	5	6	7	8
Posição [m]	0	0,17	0,34	0,51	0,64	0,74	0,84	0,94

## 5.2. Coerência dos ensaios experimentais

---

Para iniciar o ensaio, primeiro selecionava-se o ponto onde se fixava o acelerómetro, na parte traseira da viga, depois procedia-se ao ensaio batendo com o martelo na viga nos vários pontos da viga. Assumindo que a matriz de FRF é simétrica, só se realizaram os ensaios nos pontos à direita do ponto do sensor, por exemplo se o sensor estiver colocado no ponto 3 só se bateria no 3, 4, 5, 6, 7 e 8.

Para cada ponto o ensaio era repetido por seis vezes para se conseguirem obter valores com o menor erro possível, sendo isto um requisito do programa de aquisição de dados. Com os vários ensaios, é criado um parâmetro que se denomina de coerência e que apresenta um valor de 0 a 100, mostrando assim se os seis ensaios estão coerentes. Na Figura 22 pode-se observar uma FRF medida com o gráfico da coerência por baixo, onde se verifica que os vários ensaios estão coerentes entre si uma vez que na maioria da gama dá um valor igual a 100. A exceção são as antirressonâncias, onde dá valores muito baixos. Isto mostra que a FRF só se altera nas antirressonâncias naqueles 6 ensaios mantendo-se igual no resto da gama.

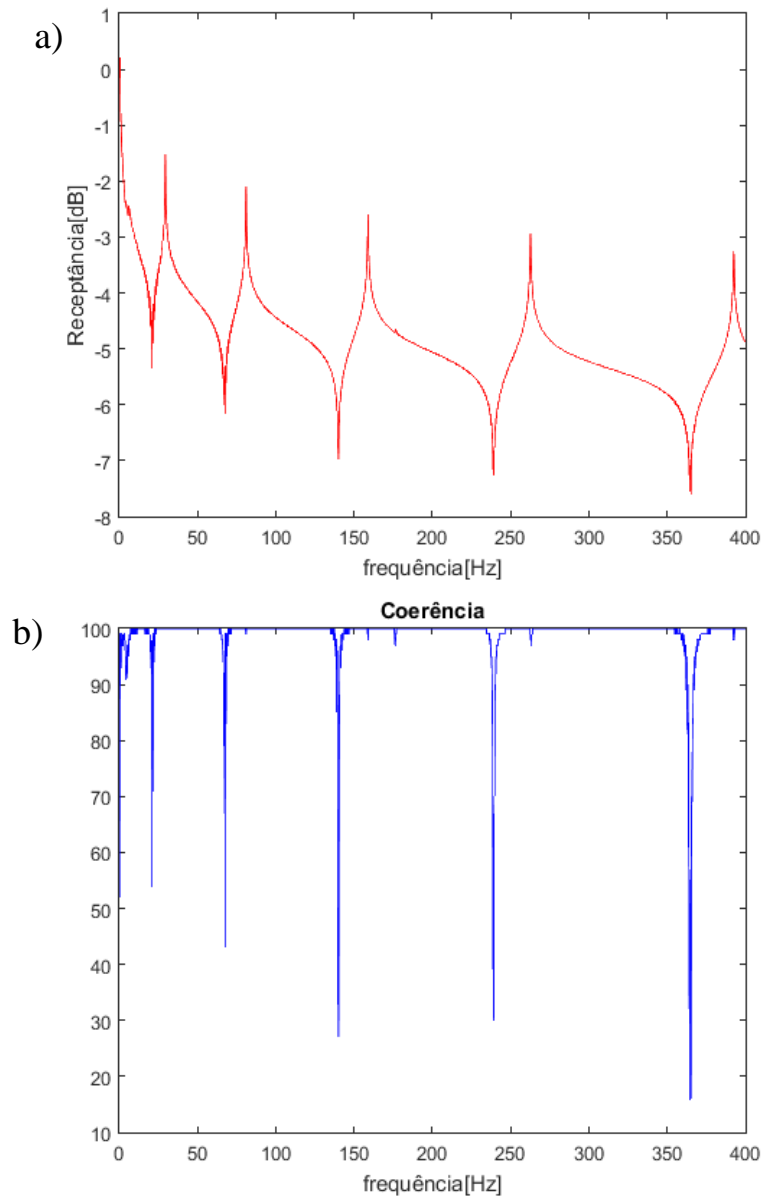


Figura 22 – a) FRF medida; b) gráfico de coerência

As FRF adquiridas são as acelerações pelo que é necessário converter estes valores de aceleração para receptância, usando a seguinte expressão:

$$H(\omega) = -\frac{A(\omega)}{\omega^2} \quad (5.1)$$

Pelo facto de as antirressonâncias não serem coerentes nos vários ensaios, é expectável que estas venham a dar problemas nessa gama de frequências quando se colocarem os dados experimentais no método de acoplamento de FRF.

### 5.3. Refinamento do modelo

Foi feita uma comparação inicial entre uma FRF calculada usando o método de acoplamento espacial e o método de acoplamento de FRF, como no capítulo 4.3., sendo que aqui foram introduzidos os dados experimentais das FRF das coordenadas de translação.

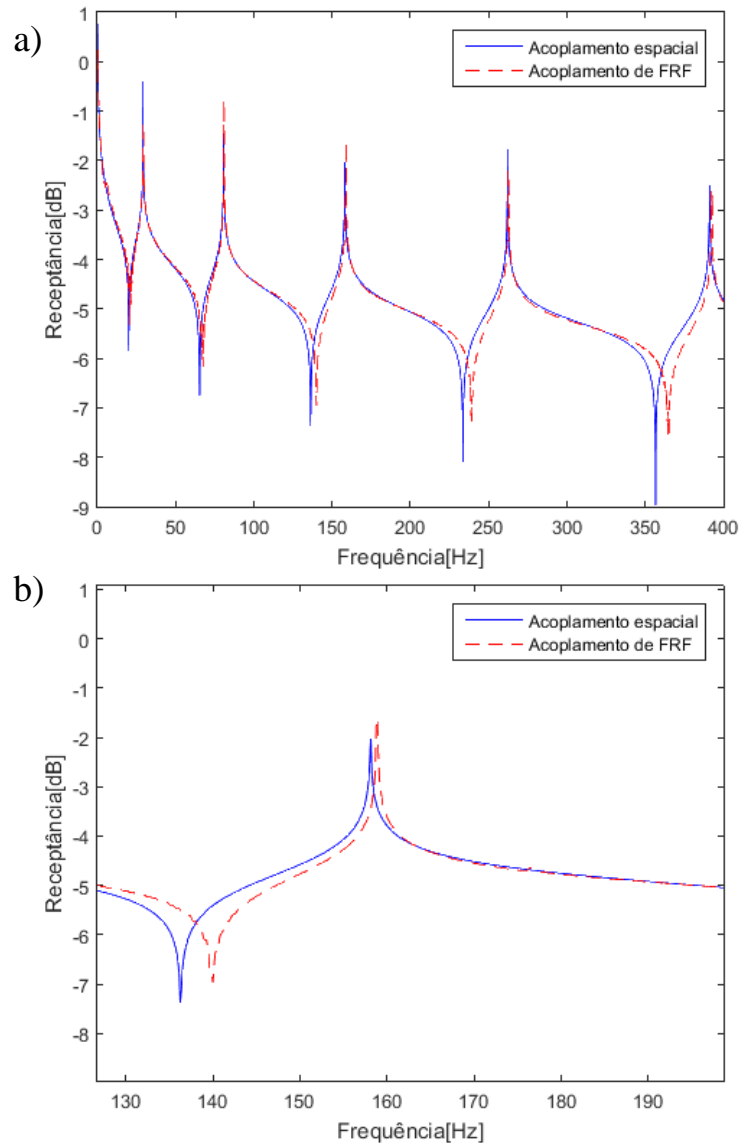


Figura 23 – a) Comparação entre FRF calculada pelo método de acoplamento espacial e pelo método de acoplamento de FRF usando dados experimentais; b) Zoom junto à terceira frequência natural

Na Figura 23 é possível observar que as frequências naturais das FRF calculadas pelo método de acoplamento de FRF usando dados experimentais não coincidem com as calculadas pelo método de acoplamento espacial.

Observando esta situação, alterou-se o modelo inicial da viga aumentando o número de elementos em cada elemento A, ou seja, cada elemento A era dividido em 3 elementos e agora dividiram-se estes elementos a meio passando cada elemento A a ter 6 elementos.

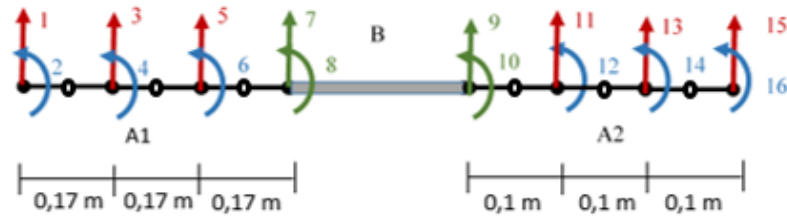


Figura 24 - Novo modelo da viga com 14 nós

Na Figura 24 pode-se observar o novo modelo da viga onde entre cada dois nós do elemento A foi inserido um novo. Esta alteração aumenta o número de nós de 8 para 14 e o número de graus de liberdade de 16 para 28. No entanto, isto só se aplica ao cálculo das matrizes de rigidez e massa, pois quando se passa para o cálculo da receptância os graus de liberdade dos nós do meio de cada elemento são eliminados.

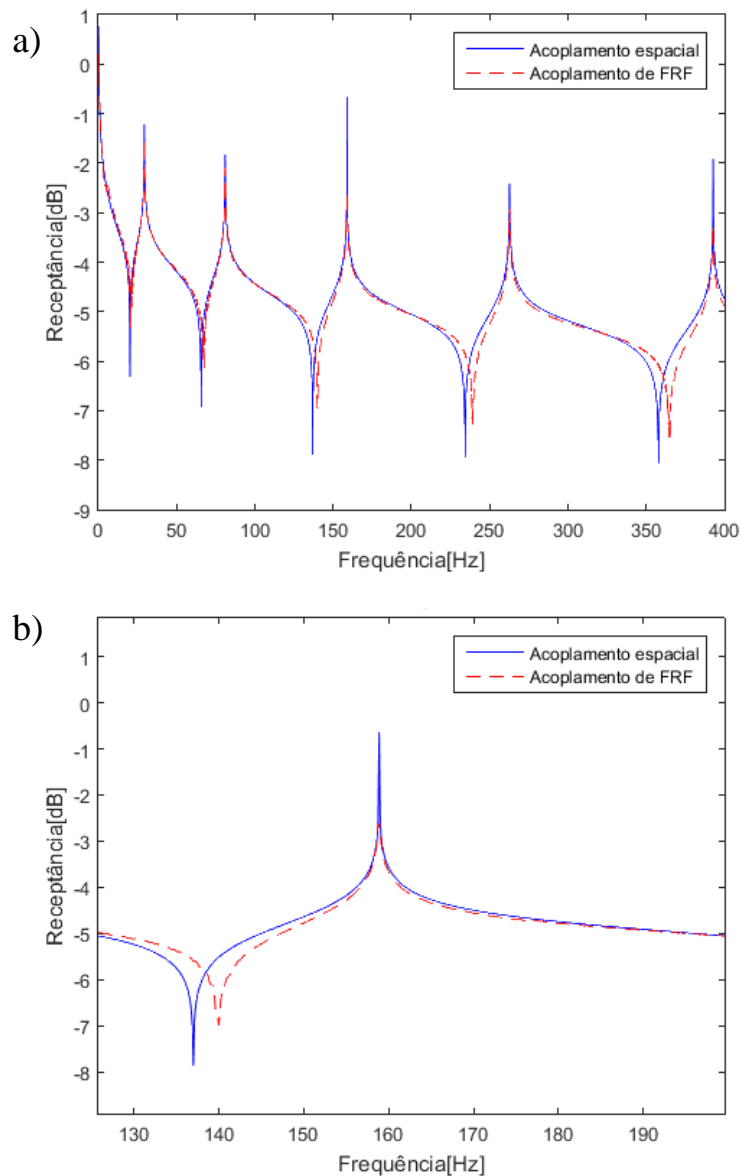


Figura 25 – a) Comparação entre FRF calculada pelo método de acoplamento espacial e pelo método de acoplamento de FRF usando dados experimentais; b) Zoom na terceira frequência natural para o novo modelo

Na Figura 25 pode-se observar que as frequências naturais neste caso já coincidem o que mostra que com mais elementos se consegue uma melhor descrição da viga e com isso se obtém as frequências naturais iguais às obtidas experimentalmente.

Assim, nos próximos capítulos o modelo numérico usado passou a ser este.

## 5.4. Cancelamento de massa

A colocação do acelerómetro na viga para a realização dos ensaios experimentais altera o comportamento dinâmico da estrutura, isto porque se está a adicionar um elemento à

estrutura que tem massa e inércia e que não está a ser considerada na análise da estrutura. Nalguns casos, quando a massa do acelerómetro é muito inferior à da viga, esta pode ser desprezada. No entanto, se a massa adicionada à estrutura for idêntica a uma massa modal que esteja associada a uma frequência natural, essa frequência natural vai ser inferior à real.

Silva *et al* [10] sugerem um algoritmo que permite retirar a massa do acelerómetro à estrutura ensaiada. Considerando uma estrutura como a da Figura 26, a expressão obtida para o cancelamento de massas de uma FRF cruzada é a equação (5.2) [4]:

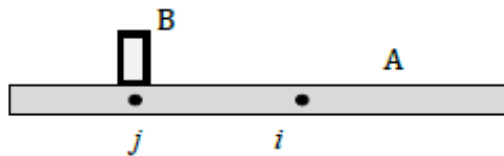


Figura 26 - Desacoplamento do sensor B da estrutura A

$$h_{ji}^A = \frac{h_{ji}^C}{1 - m_B h_{ji}^C} \quad (5.2)$$

Na Figura 27 pode-se observar uma FRF já com o cancelamento de massa, onde não é visível uma grande diferença face à FRF medida, no entanto ampliando a imagem nas FRF mais alta consegue-se observar um deslocamento da frequência natural para a direita, Figura 28.

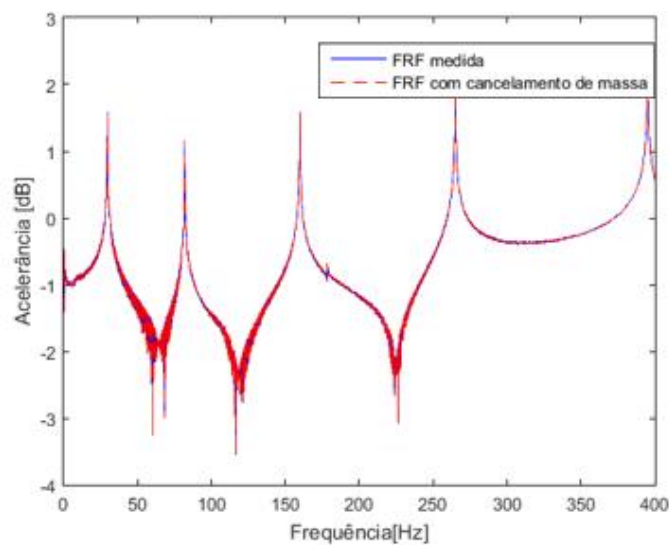


Figura 27 - Comparação entre a aceleração de uma FRF medida e outra onde é aplicado o cancelamento de massa

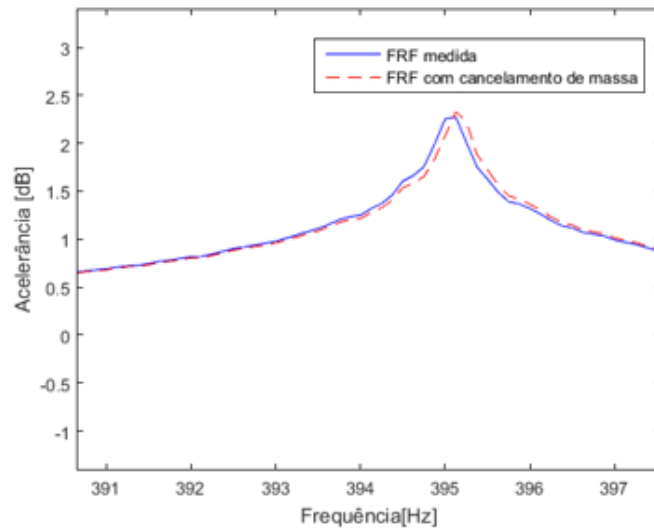


Figura 28 - Zoom da figura anterior na quinta frequência natural

## Discussão

Como se pode observar, neste caso não se nota praticamente nenhuma diferença entre a FRF medida e aquela onde é aplicado o cancelamento da massa, só é possível observar uma diferença ampliando a imagem, e isto justifica-se pelo facto de o sensor pesar muito pouco quando comparado com a massa da viga, uma vez que o acelerómetro possui uma massa de 4,8 gramas e a viga cerca de 1 kg.

## 5.5. Cálculo módulo de elasticidade

---

Após obtidos os resultados experimentais, foi feito um estudo no sentido de identificar o módulo de elasticidade da viga em estudo. Para isto foi-se variando o módulo de elasticidade no cálculo das FRF de translação de  $H^C$ . Foi depois feita uma comparação entre as frequências naturais obtidas experimentalmente e as obtidas analiticamente com os vários módulos de elasticidade e calculou-se o erro para ver qual o módulo de elasticidade se aproximava mais dos resultados experimentais para assim se ter uma aproximação do módulo de elasticidade real. Aqui foi também estudada qual a influência entre utilizar o método de Euler-Bernoulli ou o de Timoshenko, calculadas as frequências naturais para cada caso e ver o erro associado face aos resultados experimentais.

O erro relativo foi calculado utilizando a equação (5.3), onde se faz a diferença entre o valor calculado numericamente, que corresponde ao exato, e o valor obtido

experimentalmente, isto em módulo, dividindo-se pelo valor numérico e para obter este erro em percentagem multiplica-se por 100:

$$erro\% = \frac{|exato - aproximado|}{exato} \times 100 \quad (5.3)$$

Na Figura 29 pode-se observar um gráfico realizado entre os vários módulos de elasticidade usados e o erro relativo entre as frequências naturais analíticas e experimentais, utilizando o método Euler-Bernoulli e na Figura 30 usando o método Timoshenko. Estes gráficos são respetivos à primeira frequência natural.

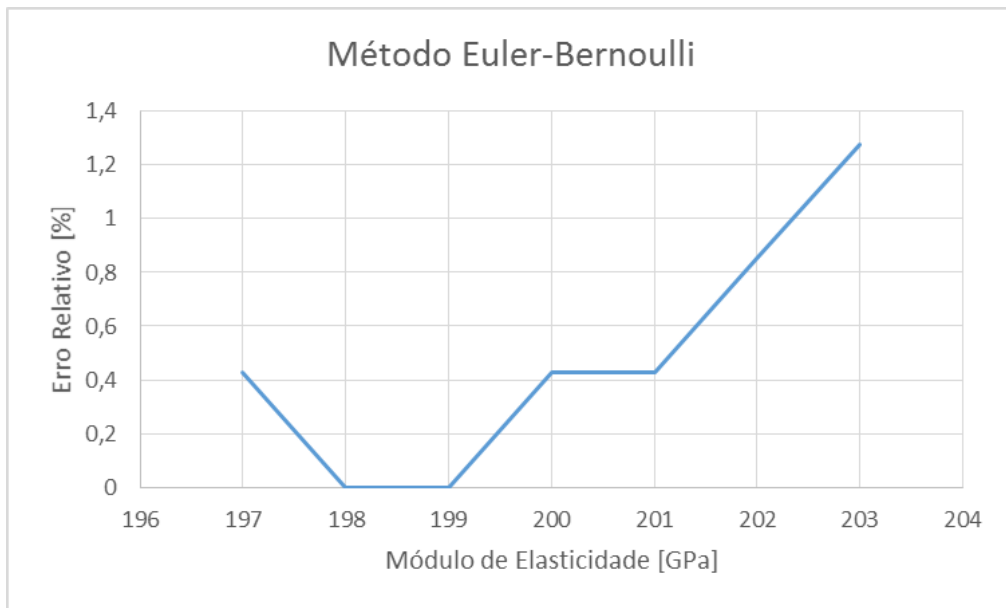


Figura 29 - Vários módulos de elasticidade e respetivo erro para a 1ª frequência natural no método Euler-Bernoulli

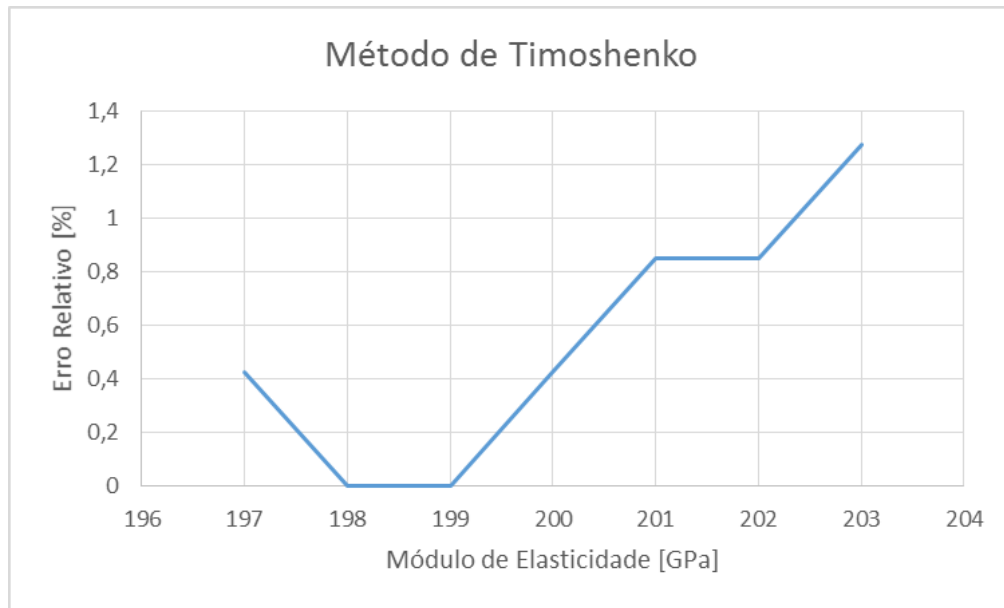


Figura 30 - Vários módulos de elasticidade e respectivo erro para a 1ª frequência natural no método Timoshenko

Na Tabela 5 é possível visualizar os erros obtidos para todas as frequências naturais obtidas na gama de 0 Hz a 400 Hz em ambos os métodos.

Tabela 5 - Erros relativos para as frequências naturais no método Euler-Bernoulli e Timoshenko

Ensaio [Hz]	Euler-Bernoulli [Hz]	Erro Rel. (%)	Timoshenko [Hz]	Erro Rel. (%)	Euler-Bernoulli [Hz]	Erro Relativo (%)	Timoshenko [Hz]	Erro Rel. (%)
	198 GPa		198 GPa		199 GPa		199 GPa	
29,375	29,375	0	29,375	0	29,375	0	29,375	0
81	80,875	0,154	80,875	0,154	81,125	0,154	81	0
158,875	158,625	0,157	158,5	0,236	159	0,079	158,875	0
262,625	262,5	0,048	262,25	0,143	263,25	0,238	263	0,143
392,5	392,375	0,032	391,875	0,159	393,375	0,223	392,875	0,096
	Média Erro	0,078	Média Erro	0,138	Média Erro	0,139	Média Erro	0,048

Na Figura 31 está presente uma comparação entre três FRF, a calculada usando o elemento de viga de Timoshenko, a calculada usando o elemento de viga de Euler-Bernoulli e a obtida experimentalmente na coordenada da matriz de translação  $H_{11}^C(1,1)$ .

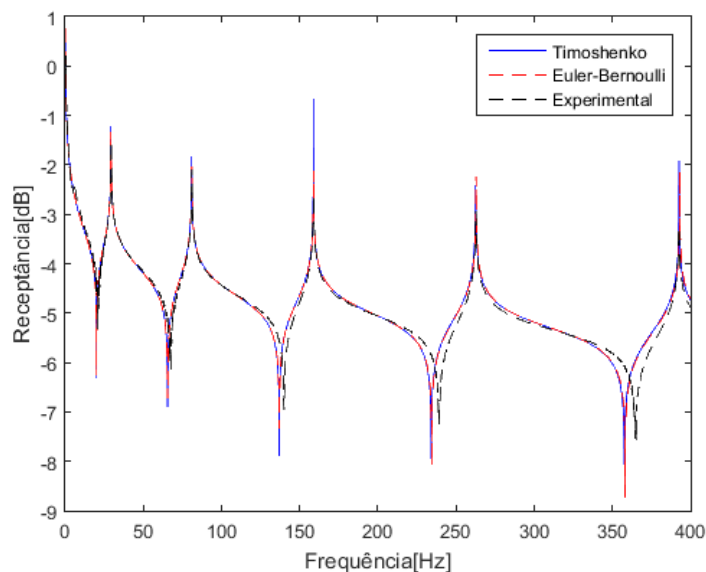


Figura 31 - Comparação entre FRF calculada usando o elemento de viga de Timoshenko, o elemento de viga de Euler-Bernoulli e a FRF experimental na coordenada  $H_{11}^C(1,1)$

Na Figura 32 está presente a comparação anterior, mas neste caso, foca-se o gráfico na quinta frequência natural para se poder ver que com o elemento de viga de Timoshenko a frequência natural está mais próxima da experimental que a calculada com o elemento de viga de Euler-Bernoulli.

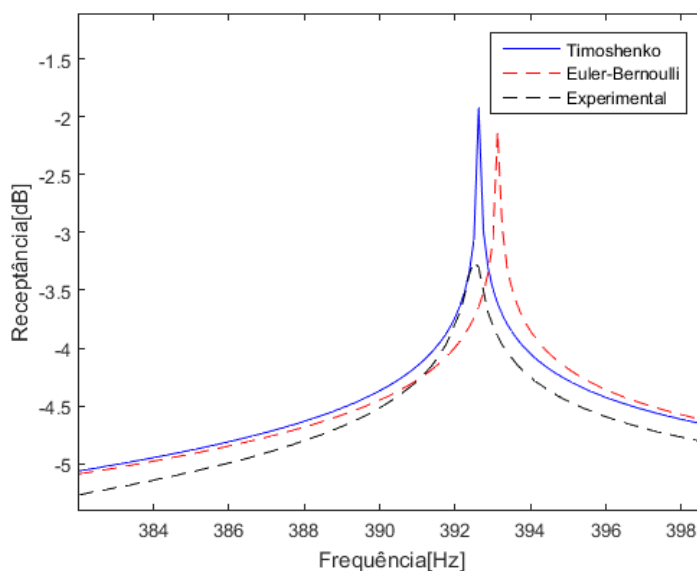


Figura 32 - Comparação da quinta frequência natural usando o elemento de viga de Timoshenko, o de Euler-Bernoulli e a experimental

Na Figura 33 pode-se observar a correlação LAC entre a FRF calculada usando o elemento de viga de Euler-Bernoulli e a FRF experimental das coordenadas de translação.

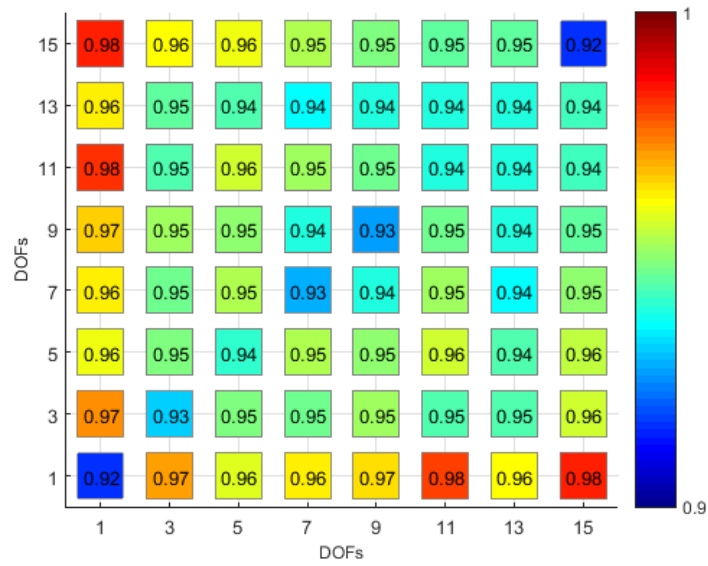


Figura 33 - Correlação LAC entre as FRF medidas e as calculadas pelo método de acoplamento de FRF nas coordenadas  $tt$  usando o elemento de viga de Euler-Bernoulli

Na Figura 34 pode-se observar a comparação entre as FRF calculadas utilizando o elemento de viga de Timoshenko e as experimentais através da correlação LAC.

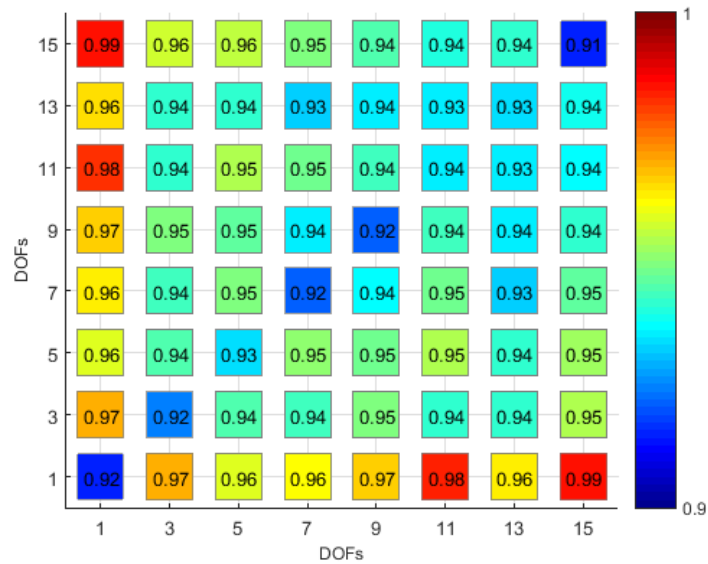


Figura 34 - Correlação LAC entre as FRF medidas e as calculadas pelo método de acoplamento de FRF nas coordenadas  $tt$  usando o elemento de viga de Timoshenko

## Discussão

Em ambos os casos se pode verificar que todos os valores da correlação estão acima de 0,9, o que significa que nos dois casos as FRF estão bem correlacionadas. Apesar de a comparação entre a FRF usando o elemento de viga Euler-Bernoulli com a experimental apresentar nalguns casos melhores valores que a utilizando o elemento de viga de Timoshenko e a experimental, no entanto deu-se mais importância à que apresentava valores de frequências naturais mais próximas das experimentais, uma vez que a correlação LAC tem em conta a gama toda da frequência onde estão também as antirressonâncias que têm o problema de não serem coerentes na medição experimental.

## 5.6. Cálculo respostas dinâmicas não medidas

---

Depois de estabelecido o módulo de elasticidade, 199 GPa, e já com o tratamento dos dados recolhidos, com o cancelamento de massa aplicado, passa-se para o cálculo das respostas dinâmicas não medidas, incluindo aqui já as coordenadas de translação  $tt$  medidas na estrutura e com estas calculando todas as outras. Com estes dados, e utilizando a expressão (4.7) conseguem-se obter as respostas de todas as coordenadas da estrutura.

Após prever as respostas para todas as coordenadas utilizando o método de acoplamento de FRF, calculou-se a correlação LAC entre as FRF calculadas pelo método de acoplamento espacial e as calculadas com o método de acoplamento de FRF já com as coordenadas  $tt$  experimentais, que se pode observar na Figura 35.

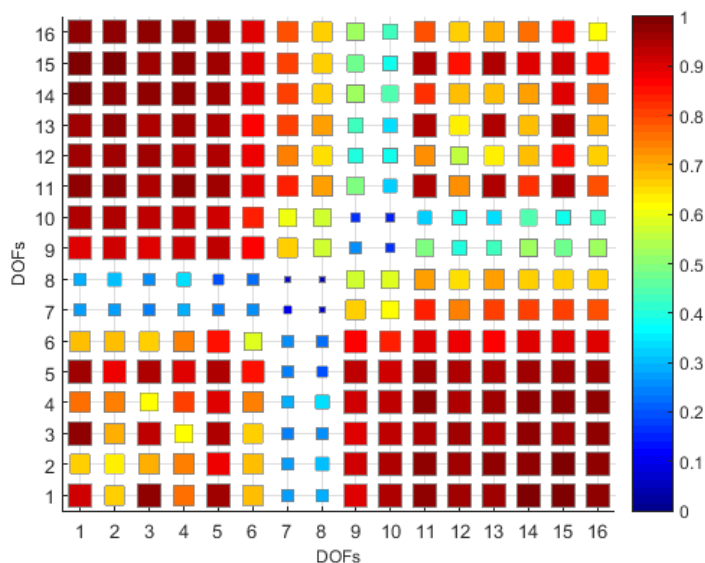


Figura 35 - Correlação LAC entre a FRF calculada pelo método de acoplamento espacial e pelo método de acoplamento de FRF usando dados experimentais das coordenadas  $tt$

Pode-se observar na Figura 35 que os valores mais baixos da correlação ocorrem onde existem coordenadas  $j$ , os mais baixos nas coordenadas  $jj$  mas também valores baixos para as coordenadas  $tj$  e  $rj$ , sendo estas coordenadas  $jj$  as 7,8,9 e 10.

De seguida, mostram-se algumas destas FRF que foram comparadas e onde se pode ver a diferença entre as calculadas pelo método de acoplamento espacial, traço a azul, e as calculadas pelo método de acoplamento de FRF, tracejado a vermelho.

Na Figura 36 está presente uma comparação entre FRF numa coordenada de translação  $tt$ , mais especificamente na coordenada (1,1).

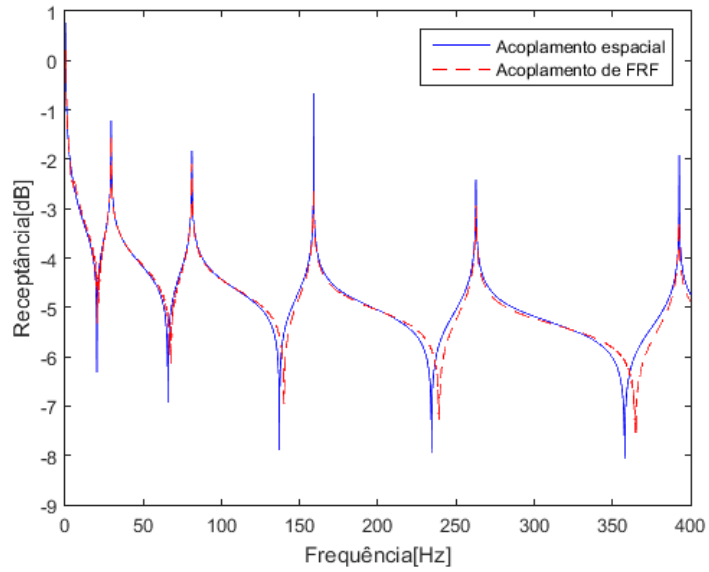


Figura 36 - Comparação de uma FRF na coordenada  $tt (H_{1,1}^C)$  calculada pelo método de acoplamento espacial e pelo método de acoplamento de FRF

Na Figura 37 está presente uma comparação entre FRF numa coordenada de translação-rotação  $tr$ , mais especificamente (1,2).

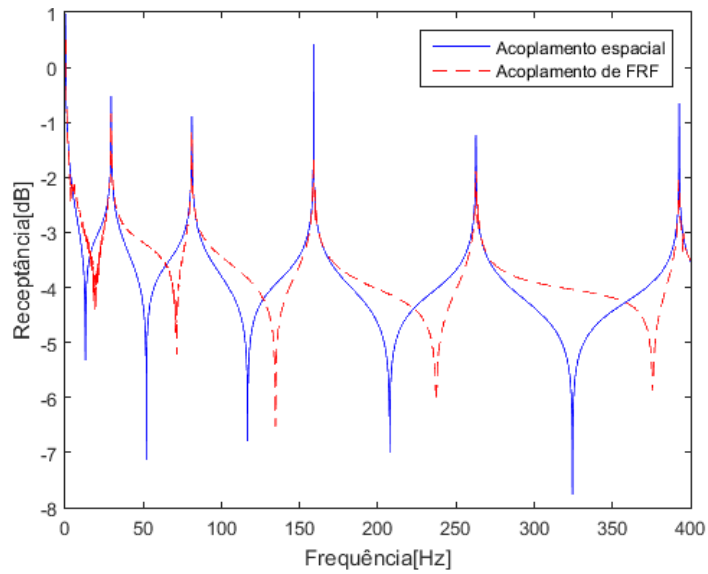


Figura 37 - Comparação de uma FRF na coordenada  $tr (H_{1,2}^C)$  calculada pelo método de acoplamento espacial e pelo método de acoplamento de FRF

Na Figura 38 está presente uma comparação entre FRF numa coordenada de rotação-rotação  $rr$ , mais especificamente (2,2).

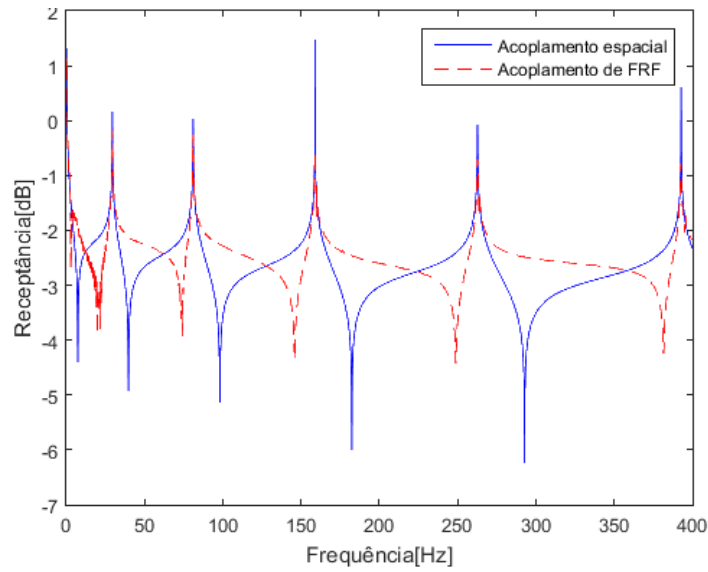


Figura 38 - Comparação de uma FRF na coordenada  $rr$  ( $H_{2,2}^C$ ) calculada pelo método de acoplamento espacial e pelo método de acoplamento de FRF

Na Figura 39 está presente uma comparação entre FRF numa coordenada de rotação-rotação  $rr$ , mais especificamente (2,14).

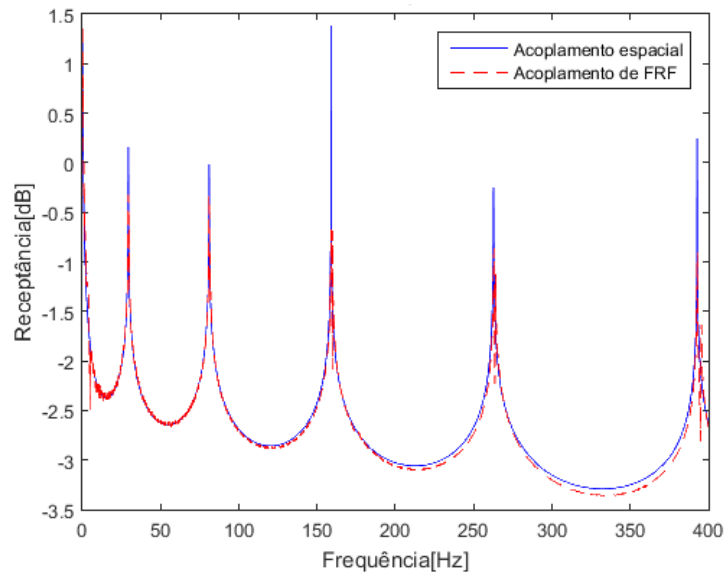


Figura 39 - Comparação de uma FRF na coordenada  $rr$  ( $H_{2,14}^C$ ) calculada pelo método de acoplamento espacial e pelo método de acoplamento de FRF

Na Figura 40 está presente uma comparação entre FRF numa coordenada de rotação-acoplamento  $rj$ , mais especificamente (2,7).

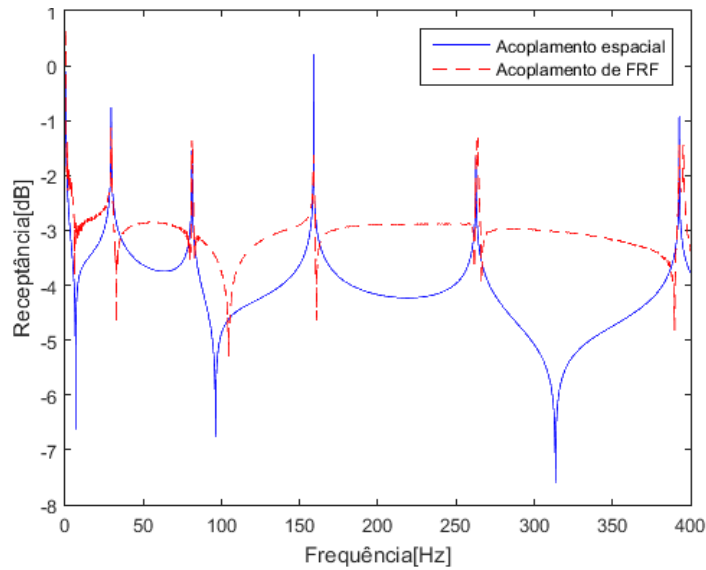


Figura 40 - Comparação de uma FRF na coordenada  $r_j (H^C_{2,7})$  calculada pelo método de acoplamento espacial e pelo método de acoplamento de FRF

Na Figura 41 está presente uma comparação entre FRF numa coordenada de ligação  $jj$ , mais especificamente (7,7), um dos valores mais baixos da correlação.

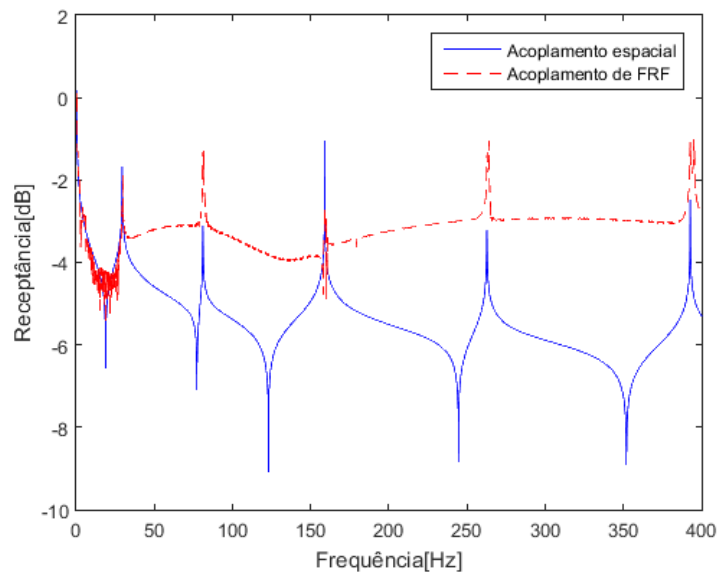


Figura 41 - Comparação de uma FRF na coordenada  $jj (H^C_{7,7})$  calculada pelo método de acoplamento espacial e pelo método de acoplamento de FRF

Na Figura 42 está presente uma comparação entre FRF numa coordenada de ligação  $jj$ , mais especificamente (8,9), um dos melhores valores da correlação nas coordenadas de ligação  $jj$ .

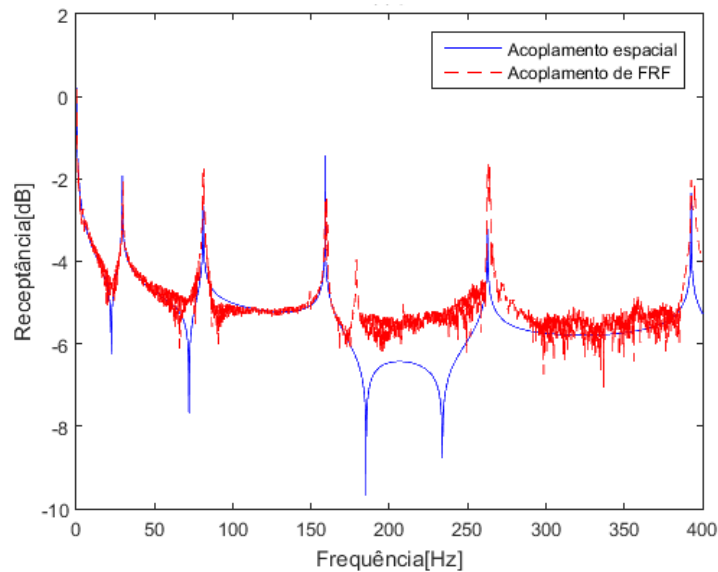


Figura 42 - Comparação de uma FRF na coordenada  $jj (H_{8,9}^C)$  calculada pelo método de acoplamento espacial e pelo método de acoplamento de FRF

## Discussão

Como se pode observar nas figuras anteriores, nas frequências naturais as FRF são semelhantes, ou seja, coincidem sempre na mesma frequência ou com desvios muito pequenos. Também se pode verificar que as FRF melhor correlacionadas são as FRF das coordenadas de translação e rotação,  $tt$ ,  $tr$  e  $rr$ . As FRF das coordenadas de acoplamento  $tj$ ,  $rj$  e principalmente  $jj$  são aquelas onde há um maior distanciamento entre FRF. Isto já seria uma situação esperada, uma vez que, na expressão para o cálculo (equação (4.7)) não é introduzida nenhuma informação relativamente ao elemento B, sendo apenas usada toda a informação numérica do elemento A e a informação das translações experimentais do elemento C. Na Figura 35 pode-se observar que nas coordenadas de translação-rotação  $tr$  e de rotação-rotação  $rr$  os valores da correlação são superiores no lado direito do gráfico. Comparando a Figura 38 com a Figura 39 que são, respetivamente, uma FRF na coordenada rotação-rotação  $rr$  da parte esquerda do gráfico e uma FRF na coordenada rotação-rotação  $rr$  na parte direita do gráfico, observa-se que isto se deve ao facto de as FRF na parte esquerda do gráfico apresentarem mais antirressonâncias que as FRF da parte direita do gráfico.

### 5.6.1. Gama de frequência reduzida

---

Tendo em conta que as frequências naturais coincidem, recalculou-se a correlação LAC restringindo a gama, criando-se um intervalo de mais e menos 5 Hz em torno da primeira

frequência natural, correspondendo isto a 81 pontos de medição. Na Figura 43 pode-se observar esta situação, onde se verificam algumas melhorias, no entanto não se consegue melhorar a correlação em todas as coordenadas. As melhorias são evidentes essencialmente na parte inferior esquerda do gráfico comparando com a Figura 35.

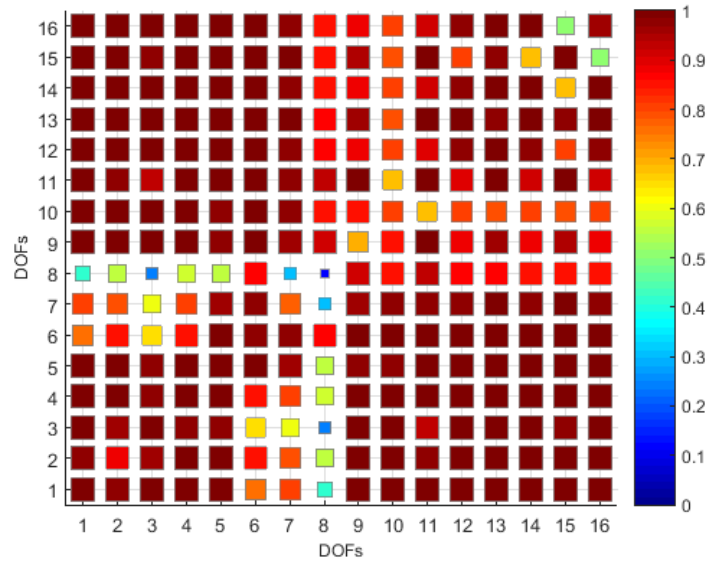


Figura 43 - Correlação LAC entre uma parte da FRF, 5 Hz antes e depois da primeira frequência natural calculada pelo método de acoplamento espacial e pelo método de acoplamento de FRF usando dados experimentais das coordenadas  $tt$

## 5.7. Modelo de eliminação das coordenadas $j$

Para tentar melhorar a correlação entre as FRF calculadas pelo método de acoplamento espacial e as calculadas pelo método FRF com as FRF medidas, fez-se o mesmo que no capítulo , ou seja, adicionaram-se dois nós no interior do elemento B, sendo que isto não altera em nada os ensaios experimentais uma vez que nestes dois nós vão surgir coordenadas  $j$  que não são medidas. Aqui passam a existir mais duas coordenadas  $t$  que já tinham sido medidas nos ensaios realizados.

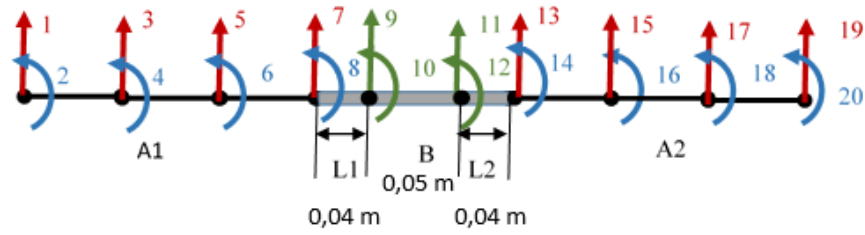


Figura 44 - Esquema da viga com a introdução de dois nós no interior do elemento B

Aplica-se o esquema da Figura 18 com os dados da Tabela 2, onde a alteração a ser feita é que anteriormente eram calculadas as FRF usando o método de FRF com recurso à expressão de simulação do ruído e aqui vão ser utilizados os dados recolhidos das FRF das coordenadas  $tt$  e calculadas todas as outras FRF usando a expressão (4.7).

Calculando agora a correlação LAC para este novo esquema da viga, obtém-se o seguinte gráfico.

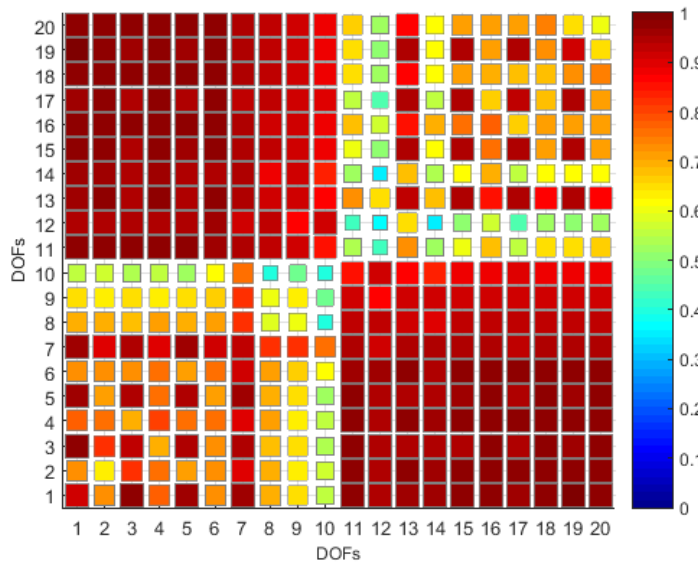


Figura 45 - Correlação LAC entre FRF calculada pelo método de acoplamento espacial e pelo método de acoplamento de FRF usando os dados experimentais com 20 graus de liberdade

Na Figura 45 pode-se observar que os piores valores da correlação continuam a surgir nas coordenadas da ligação  $tj$ ,  $rj$  e  $jj$ , sendo que as coordenadas da ligação são agora 9, 10, 11 e 12. Ainda assim, verifica-se que existe uma melhoria mesmo nas FRF das coordenadas  $jj$  face à Figura 35.

De seguida podem-se observar várias FRF para este novo esquema, FRF estas que coincidem com as mostradas no capítulo para que se possam comparar, sendo que o traço a

azul corresponde à FRF calculada pelo método de acoplamento espacial e o tracejado a vermelho corresponde à FRF calculada usando o método de acoplamento de FRF com os dados experimentais.

Na Figura 46 está presente uma comparação entre FRF numa coordenada de translação  $tt$ , mais especificamente na coordenada (1,1).

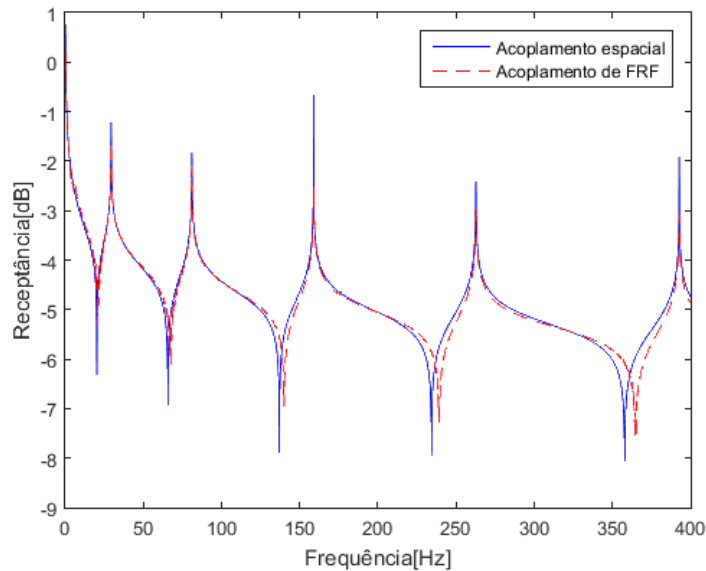


Figura 46 - Comparação de uma FRF na coordenada  $tt$  ( $H_{1,1}^C$ ) calculada pelo método de acoplamento espacial e pelo método de acoplamento de FRF com 20 graus de liberdade

Na Figura 47 está presente uma comparação entre FRF numa coordenada de translação-rotação  $tr$ , mais especificamente (1,2).

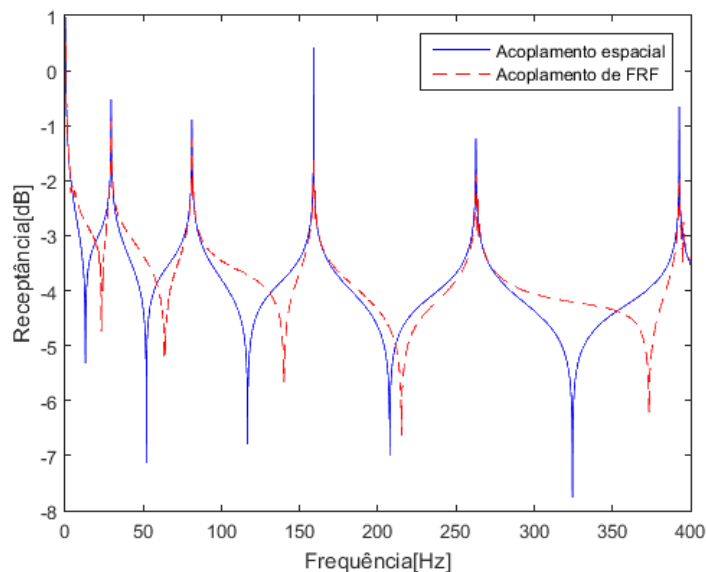


Figura 47 - Comparação de uma FRF na coordenada  $tr$  ( $H_{1,2}^C$ ) calculada pelo método de acoplamento espacial e pelo método de acoplamento de FRF com 20 graus de liberdade

Na Figura 48 está presente uma comparação entre FRF numa coordenada de rotação-rotação  $rr$ , mais especificamente (2,2).

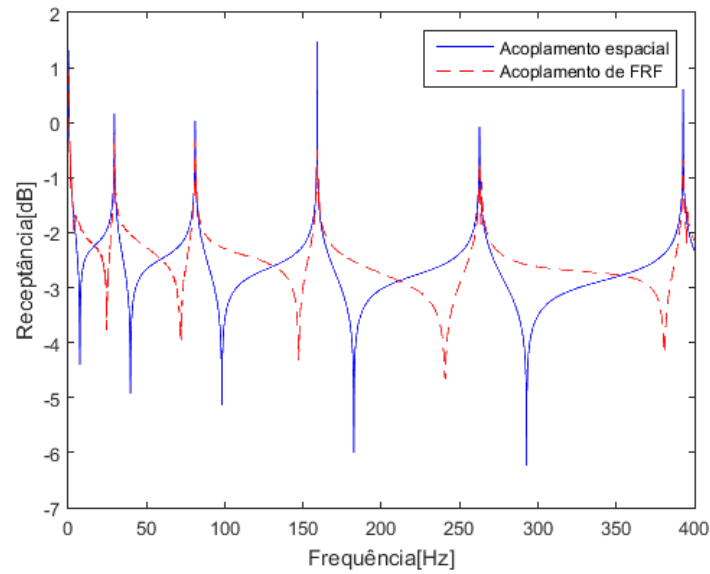


Figura 48 - Comparação de uma FRF na coordenada  $rr$  ( $H_{2,2}^C$ ) calculada pelo método de acoplamento espacial e pelo método de acoplamento de FRF com 20 graus de liberdade

Na Figura 49 está presente uma comparação entre FRF numa coordenada de rotação-rotação  $rr$ , mais especificamente (2,18).

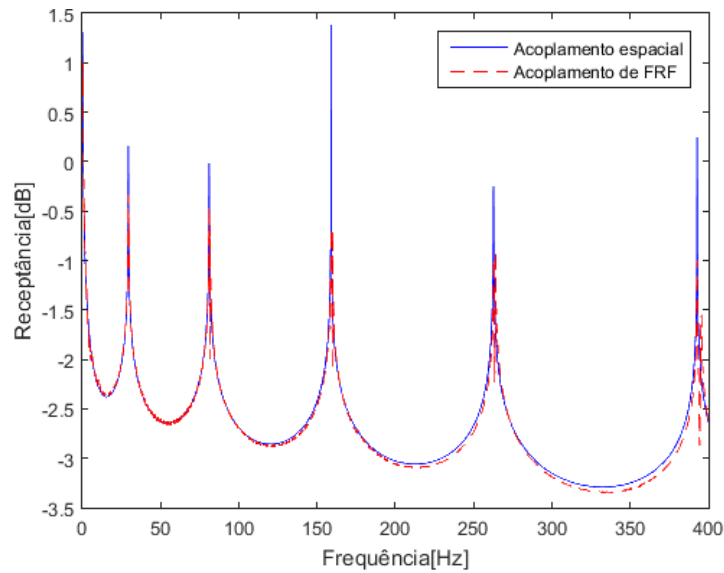


Figura 49 - Comparação de uma FRF na coordenada  $rr$  ( $H_{2,18}^C$ ) calculada pelo método de acoplamento espacial e pelo método de acoplamento de FRF com 20 graus de liberdade

Na Figura 50 está presente uma comparação entre FRF numa coordenada de rotação-acoplamento  $rj$ , mais especificamente (2,9).

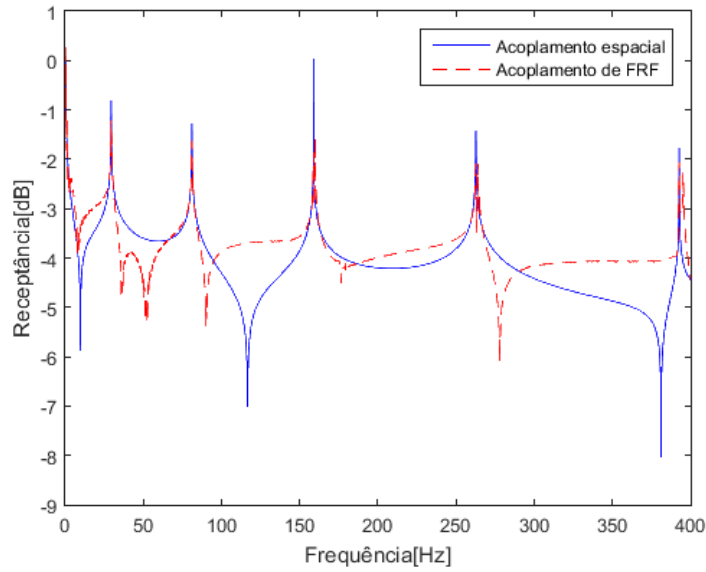


Figura 50 - Comparação de uma FRF na coordenada  $r_j$  ( $H^C_{2,9}$ ) calculada pelo método de acoplamento espacial e pelo método de acoplamento de FRF com 20 graus de liberdade

Na Figura 51 está presente uma comparação entre FRF numa coordenada de translação  $tt$ , mais especificamente (7,7), que correspondia à coordenada de acoplamento  $jj$  do esquema anterior (Figura 41).

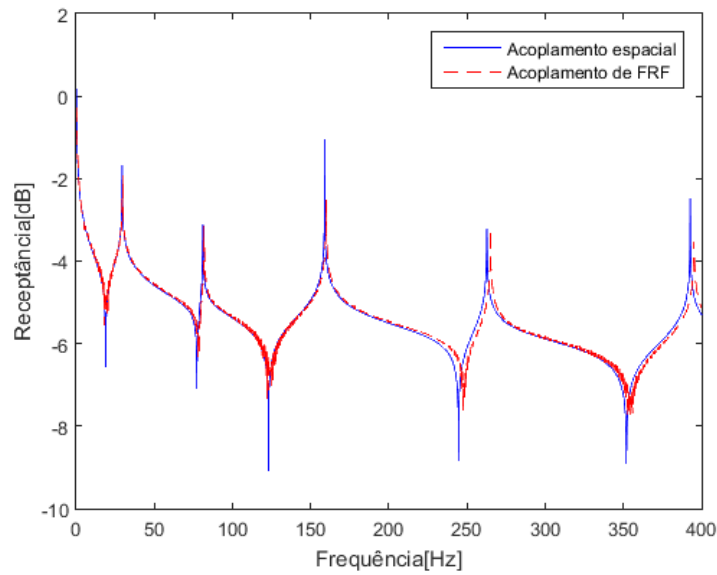


Figura 51 - Comparação de uma FRF na coordenada  $tt$  ( $H^C_{7,7}$ ) calculada pelo método de acoplamento espacial e pelo método de acoplamento de FRF com 20 graus de liberdade

Na Figura 52 está presente uma comparação entre FRF numa coordenada de ligação  $jj$ , mais especificamente (9,9).

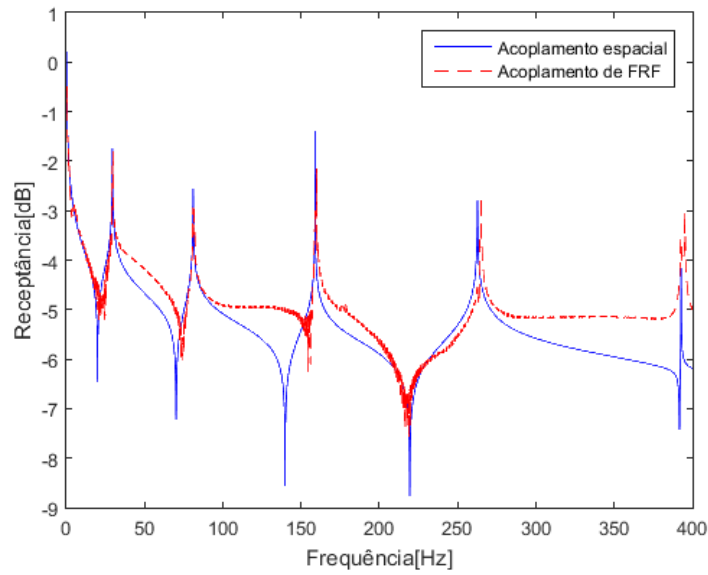


Figura 52 - Comparação de uma FRF na coordenada  $jj$  ( $H_{9,9}^C$ ) calculada pelo método de acoplamento espacial e pelo método de acoplamento de FRF com 20 graus de liberdade

Na Figura 53 está presente uma comparação entre FRF numa coordenada de ligação  $jj$ , mais especificamente (10,11). Esta FRF pode ser comparada com a da Figura 42 pois são ambas coordenadas de acoplamento na mesma coordenada e onde se pode ver que neste caso a FRF com a parte experimental está mais próxima da numérica que no modelo anterior, como se verificou com os valores da correlação LAC.

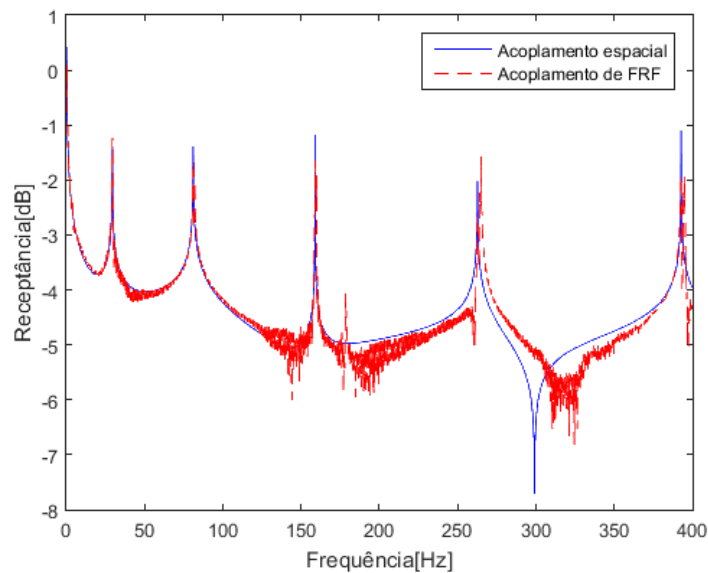


Figura 53 - Comparação de uma FRF na coordenada  $jj$  ( $H_{10,11}^C$ ) calculada pelo método de acoplamento espacial e pelo método de acoplamento de FRF com 20 graus de liberdade

Como as coordenadas da ligação  $jj$  neste esquema são inseridas no interior do elemento B, e para se poder comparar a correlação LAC com o mesmo número de coordenadas do modelo anterior, ao gráfico da Figura 45 foram retiradas as colunas e linhas correspondentes às coordenadas de ligação  $jj$ .

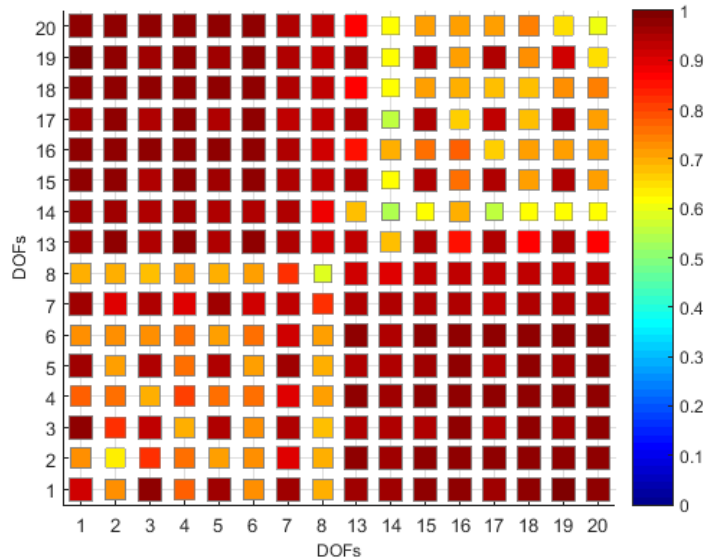


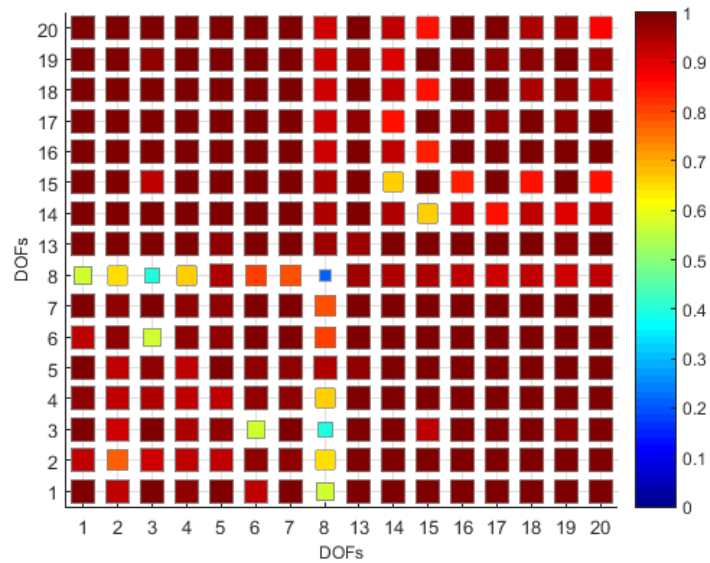
Figura 54 - Correlação LAC entre FRF calculada pelo método de acoplamento espacial e pelo método de acoplamento de FRF usando os dados experimentais com 16 graus de liberdade, removendo as coordenadas  $j$

## Discussão

A correlação LAC da Figura 54 já não tem os valores correspondentes às coordenadas de acoplamento  $tj$ ,  $rj$  e  $jj$ , ficando assim uma matriz de 16 por 16 que pode agora ser comparada com a correlação do modelo anterior (Figura 35) e onde se pode observar que com este novo modelo se consegue uma melhoria, tendo todos os valores da correlação acima de 0,5. Esta remoção das coordenadas pode ser feita uma vez que estas coordenadas do acoplamento foram introduzidas no interior do elemento B são coordenadas que terão as suas FRF previstas.

### 5.7.1. Gama de frequência reduzida

Se a esta correlação se aplicar o mesmo que se fez na Figura 43, ou seja, restringir a gama de frequência para um intervalo de mais e menos 5 Hz em torno da primeira frequência natural, correspondendo isto a 81 pontos de medição, obtém-se o seguinte gráfico.



*Figura 55 -Correlação LAC entre uma parte da FRF, 5 Hz antes e depois da primeira frequência natural calculada pelo método de acoplamento espacial e pelo método de acoplamento de FRF usando dados experimentais das coordenadas  $tj$  no novo modelo*

Na Figura 55 pode-se então observar que se consegue melhorar o valor da correlação LAC na maioria das zonas, sendo esta melhoria mais evidente na parte inferior esquerda do gráfico, havendo, ainda assim, algumas coordenadas onde não se consegue melhorar o valor da correlação.

## 5.8. Comparação entre FRF previstas e experimentais

---

Tendo em conta que nos ensaios experimentais foram medidas as coordenadas de ligação do elemento B e que no modelo do secção 5.7 estas não são usadas pois são consideradas as coordenadas do acoplamento, é possível utilizando esse modelo comparar uma FRF prevista do acoplamento com a calculada numericamente e a medida experimentalmente. De seguida são mostradas várias FRF com esta comparação.

Na Figura 56 está presente uma comparação entre FRF na coordenada  $tj$  (1,7).

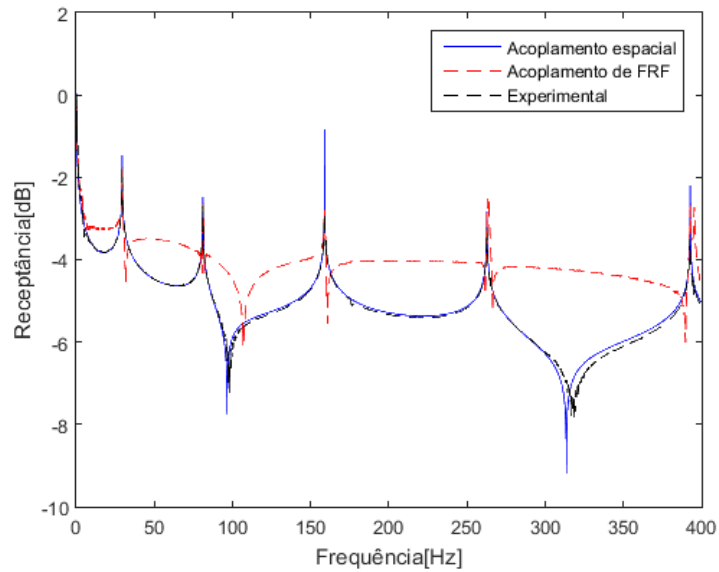


Figura 56 - Comparação de uma FRF na coordenada  $tj (H_{1,7}^C)$  calculada pelo método de acoplamento espacial, pelo método de acoplamento de FRF e a obtida experimentalmente

Na Figura 57 está presente uma comparação entre FRF na coordenada  $tj (3,7)$ .

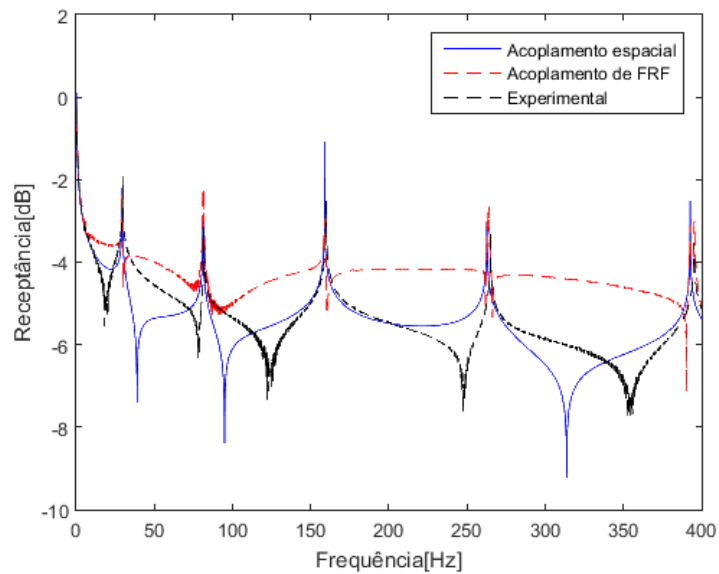


Figura 57 - Comparação de uma FRF na coordenada  $tj (H_{3,7}^C)$  calculada pelo método de acoplamento espacial, pelo método de acoplamento de FRF e a obtida experimentalmente

Na Figura 58 está presente uma comparação entre FRF na coordenada  $jj (7,7)$ .

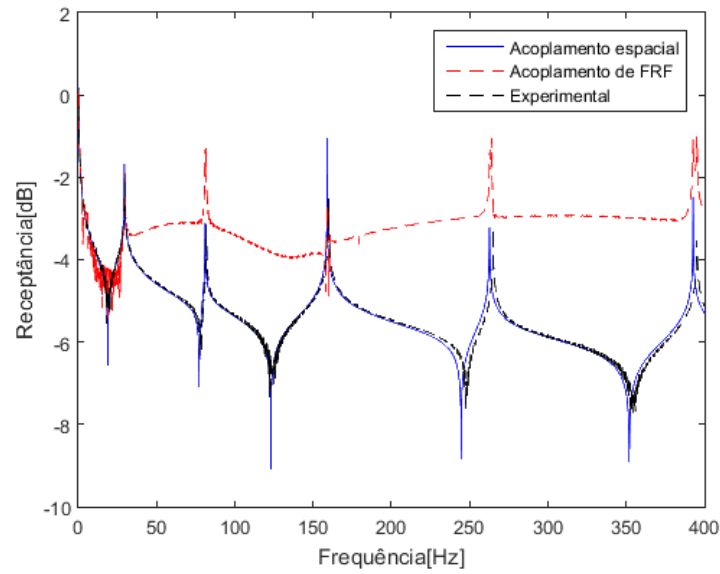


Figura 58 - Comparação de uma FRF na coordenada  $jj$  ( $H_{7,7}^C$ ) calculada pelo método de acoplamento espacial, pelo método de acoplamento de FRF e a obtida experimentalmente

Na Figura 59 está presente uma comparação entre FRF na coordenada  $tj$  (1,9).

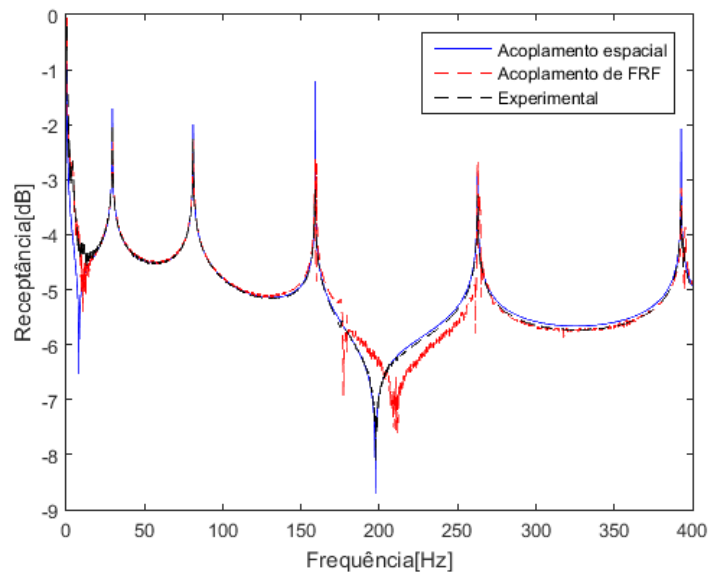


Figura 59 - Comparação de uma FRF na coordenada  $tj$  ( $H_{1,9}^C$ ) calculada pelo método de acoplamento espacial, pelo método de acoplamento de FRF e a obtida experimentalmente

Na Figura 60 está presente uma comparação entre FRF na coordenada  $tj$  (3,9).

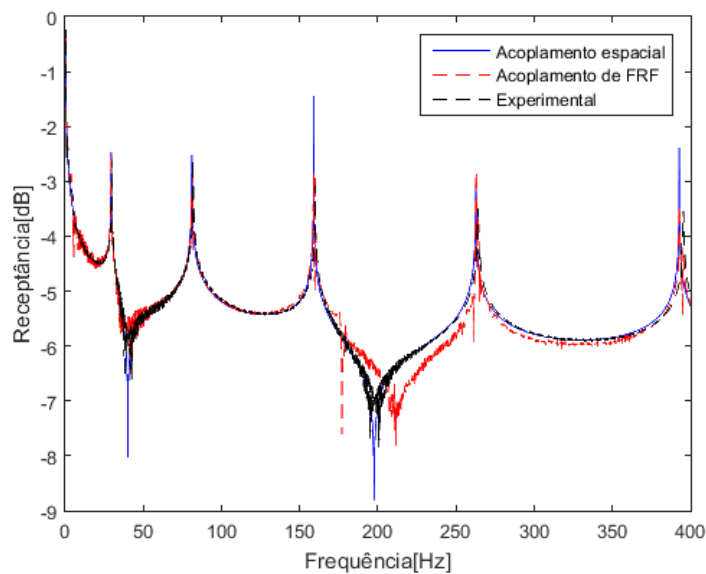


Figura 60 - Comparação de uma FRF na coordenada  $tj (H_{3,9}^C)$  calculada pelo método de acoplamento espacial, pelo método de acoplamento de FRF e a obtida experimentalmente

Na Figura 61 está presente uma comparação entre FRF na coordenada  $jj (9,9)$ .

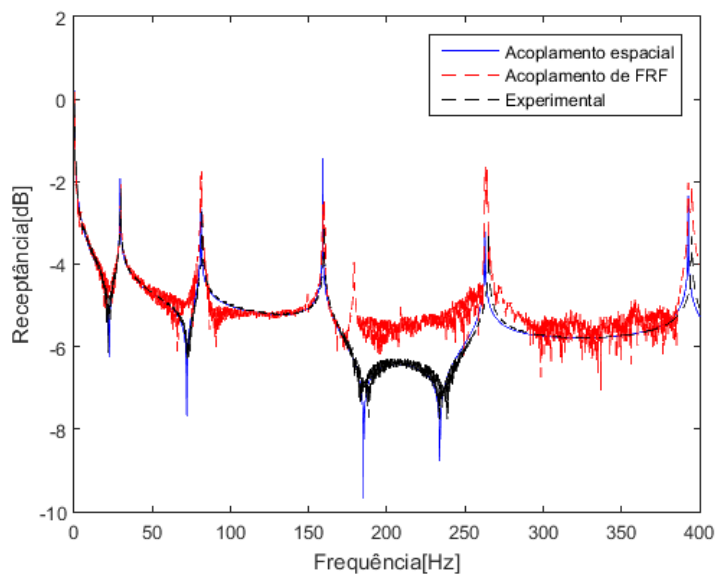


Figura 61 - Comparação de uma FRF na coordenada  $jj (H_{9,9}^C)$  calculada pelo método de acoplamento espacial, pelo método de acoplamento de FRF e a obtida experimentalmente

## Discussão

Nestes gráficos anteriores é possível observar a comparação entre três FRF, a numérica, a calculada usando o método de acoplamento de FRF e a experimental. É possível verificar

que a FRF experimental é bem aproximada pela numérica, exceção feita às antirressonâncias da Figura 57 mas isto justifica-se pela coerência explicada no capítulo 5.2.

Nos três primeiros gráficos verifica-se alguma diferença entre a FRF calculada pelo método de acoplamento de FRF e a numérica e experimental, o que já tinha sido mostrado pela correlação LAC da Figura 35, sendo que neste caso só mostrava a comparação entre os dois métodos e não tinha em conta a FRF experimental. Ainda assim, é possível verificar que as frequências naturais coincidem nas três FRF.

Nos outros três gráficos verifica-se que as FRF já não se distinguem, pois para além das frequências naturais praticamente toda a curva coincide havendo apenas alguma diferença nas antirressonâncias. Assim verifica-se o que já era sugerido pelos valores da correlação que nos três primeiros gráficos apresentavam valores baixos e nos três últimos já apresentava valores altos.

## 6. Conclusões

---

Com este trabalho pretende-se verificar e confirmar que é possível determinar FRF de uma estrutura global, podendo uma parte da estrutura ser desconhecida. Para isso, iniciou-se o trabalho com uma parte numérica para confirmar se tudo o que se estava a usar estava correto e assim ter uma base para depois poder fazer os ensaios experimentais e trabalhar já com uma base sobre os resultados destes ensaios.

Na parte numérica, começou-se por confirmar que utilizando dois métodos de acoplamento diferentes, o espacial e o de acoplamento de FRF, se iria obter a mesma FRF. Depois disto, introduziu-se ruído numérico que pudesse simular o ruído que se iria obter nos ensaios experimentais, pois assim podia-se perceber quais os eventuais problemas que se viriam a ter. Nesta fase, já com FRF diferentes, a original e a FRF afetada com o ruído numérico, surgiu uma dificuldade que foi a comparação entre FRF que estava a ser feita qualitativamente pois só era possível verificar as diferenças graficamente, mas era importante poder quantificar a diferença. Aqui pode-se verificar que já existiam métodos para poder quantificar esta diferença, os critérios de correlação, sendo que aquele que se mostrou mais adequado a este trabalho foi o critério de correlação LAC. Esta ferramenta revelou-se bastante importante ao longo do trabalho, pois para além quantificar a diferença entre FRF frequência a frequência, permitia ainda calcular um valor médio na gama de frequência usada. Assim, pode-se concluir que esta ferramenta é bastante importante neste tipo de estudo, pois assim torna-se fácil comparar diferentes FRF e sobretudo quantificar essa diferença. A utilização do modelo de eliminação das coordenadas  $j$  permitiu melhorar ligeiramente as FRF previstas da ligação.

Relativamente à parte experimental, surgiram logo alguns problemas pois numa fase inicial verificou-se que as FRF experimentais eram diferentes das numéricas, inclusivamente as frequências naturais, pelo que se concluiu que o modelo numérico não estava adequado ao experimental. Assim, refinou-se o modelo numérico adicionando mais elementos para que este tivesse assim uma resolução e com isto já se conseguiu uma aproximação das FRF, sobretudo nas frequências naturais onde se conseguiu que coincidissem. Para além disto, o facto de se adicionar o sensor no ensaio experimental levou a que a estrutura global fosse alterada uma vez que o sensor possui massa, e isto poderia alterar o comportamento dinâmico da estrutura. No entanto, apesar de existir uma ligeira diferença, verificou-se que no caso

prático usado, a influência do sensor na estrutura global era quase nula uma vez que possui uma massa muito inferior à massa da viga. Foi também alterado o elemento de viga que estava a ser usado, pois verificou-se que com o elemento de viga de Timoshenko se obtiam ligeiramente melhores resultados e do ponto de vista teórico fazia mais sentido utilizar este tipo de viga. Assim, conclui-se que a definição do modelo numérico é de elevada importância pois uma má definição deste modelo leva a grandes diferenças face aos resultados experimentais e leva a análises erradas.

A partir do momento em que o modelo foi definido, pôde-se então fazer a comparação entre o acoplamento espacial e o acoplamento de FRF e onde, tal como tinha sido previsto no cálculo numérico, as piores FRF previstas estavam nas coordenadas da ligação  $j$ . Aqui, conclui-se o mesmo que na parte numérica, uma vez que aplicando o modelo de eliminação das coordenadas  $j$  permite uma ligeira melhoria face ao modelo anterior. Pode-se concluir que este modelo de eliminação das coordenadas  $j$  é útil se para o estudo pretendido as coordenadas da ligação forem desprezadas, pois apesar da melhoria existem ainda algumas coordenadas da ligação que apresentam valores da correlação baixos. No entanto, com a redução da gama de frequência para um intervalo perto da frequência natural, verifica-se que o método de acoplamento de FRF permite prever com grande rigor as frequências naturais em todas as coordenadas da estrutura global, ainda que parte da estrutura seja desconhecida.

Neste trabalho foram dados importantes contributos no sentido de quantificar a diferença entre o modelo de acoplamento de FRF, em que só foram medidas as FRF das coordenadas de translação e todas as outras foram previstas, e o modelo de acoplamento espacial, onde tudo é calculado numericamente, mostrando também a utilidade de algumas ferramentas neste tipo de estudo como por exemplo, o critério de correlação LAC. De seguida, apresentam-se algumas propostas de trabalho futuro que possam dar continuidade a este trabalho.

## 6.1. Trabalhos futuros

---

Os ensaios experimentais para este trabalho foram realizados recorrendo a uma viga simples e sendo apenas utilizada esta viga como estrutura. Um desenvolvimento interessante seria fazer estas comparações que foram feitas utilizando estruturas mais complexas, onde o elemento B é o único elemento com uma geometria complexa.

A medição das rotações, para além das translações, poderia representar também uma melhoria na previsão das coordenadas relacionadas com rotações, bem como se poderia validar assim que este modelo para prever as respostas dinâmicas não medidas se aplica também para as rotações, uma vez que neste trabalho só foi confirmado numericamente.

Por último, neste trabalho, o cálculo da matriz de rigidez, da matriz de massa e das FRF foi feito usando o MatLab pois a estrutura estudada também era simples, mas para o futuro com estruturas mais complexas seria útil passar a calcular estas propriedades e respostas recorrendo a um *software* de elementos finitos comercial e onde possam ser importadas as geometrias criadas através de desenho assistido por computador.



# Bibliografia

---

- [1] S. S. Rao, *Mechanical Vibrations*. 2011.
- [2] J. He, Z.-F. Fu, and H. H. Z.-F. Fu, *Modal Analysis*, vol. 117, no. 10. 2001.
- [3] J. M. M. Maia, N. M. M., Silva, *Theoretical and Experimental Modal Analysis*. 2003.
- [4] F. C. Batista, “Caracterização dinâmica de juntas aparafusadas”, Ph.D. dissertation, Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa, 2012.
- [5] C. Zang, H. Grafe, and M. Imregun, “Frequency–Domain Criteria for Correlating and Updating Dynamic Finite Element Models,” *Mech. Syst. Signal Process.*, vol. 15, no. 1, pp. 139–155, 2001.
- [6] K.-T. Yang and Y. Park, “Joint structural parameter identification using a subset of frequency response function measurements,” *Mech. Syst. Signal Process.*, pp. 509–530, 1993.
- [7] D. Čelič and M. Boltežar, “Identification of the dynamic properties of joints using frequency–response functions,” *J. Sound Vib.*, pp. 158–174, 2008.
- [8] M. Wang, D. Wang, and G. Zheng, “Joint dynamic properties identification with partially measured frequency response function,” *Mech. Syst. Signal Process.*, pp. 499–512, 2012.
- [9] P. Avitable and J. O’Callahan, “Frequency response function expansion for unmeasured translation and rotation dofs for impedance modelling applications,” *Mech. Syst. Signal Process.*, pp. 723–745, 2003.
- [10] A. M. Silva, J.M., Maia, N.M., Ribeiro, “Cancellation of mass-loading effects of transducers and evaluation of unmeasured frequency response functions,” *J. Sound Vib.*, pp. 761–779, 2000.
- [11] F. C. Batista and N. M. M. Maia, “Estimation of unmeasured frequency response functions,” in *19th International Congress on Sound and Vibration.*, 2012.
- [12] W. J. Duncan, “Mechanical Admittances and Their Applications to Oscillation Problems,” 1947.
- [13] R. E. D. Bishop and D. C. Johnson, “The mechanics of vibration,” *Cambridge Univ. Press*, 1960.

- [14] D. J. Ewins, "Measurement and application of mechanical impedance data: Part III: Interpretation and application of measured data," *J. Soc. Environ. Eng.*
- [15] A. L. Klosterman, "A Combined Experimental and Analytical Procedure for Improving Automotive System Dynamics," *S.A.E. Pap. No. 720093*, 1972.
- [16] M. G. Sainsbury and D. Ewins, "Vibration Analysis of Damped Machinery Foundation Structure Using Dynamic Stiffness Coupling Technique," *A.S.M.E. Pap. 73-DET-136*, 1973.
- [17] D. J. Ewins, J. M. M. Silva, and G. Maleci, "Vibration Analysis of a Helicopter Plus an Externally-Attached Structure," *Shock Vib. Bull.*, 1980.
- [18] L. D. Lutes and E. Heer, "Receptance Coupling of Structural Components Near a Component Resonance Frequency," *Jet Propuls. Lab. Rep.*, 1968.
- [19] E. Heer and L. D. Lutes, "Application of the Mechanical Receptance Coupling Principle to Spacecraft Systems," *Shock Vib. Bull.*, 1968.
- [20] D. J. Ewins and P. T. Gleeson, "Experimental Determination of Multi-Directional Mobility Data for Beams," *J. Sound Vib.*, 1975.
- [21] P. T. Gleeson, "Identification of Spatial Models for the Vibration Analysis of Lightly-Damped Structures," *Ph.D. Thesis, Imp. Coll. Univ. London*, 1979.
- [22] R. R. Craig, "Methods of Component Mode Synthesis," *Shock Vib. Dig.*, 1977.
- [23] F. C. Nelson, "A Review of Substructure Analysis of Vibrating Systems," *Shock Vib. Dig.*, 1979.
- [24] W. C. Hurty, J. D. Collins, and G. C. Hart, "Dynamic Analysis of Large Structures by Modal Synthesis Techniques," *Comput. Struct.*, 1971.
- [25] G. C. Hart, W. C. Hurty, and J. D. Collins, "A Survey of Modal Synthesis Methods," *SAE Pap. No. 710783*, 1971.
- [26] A. Paulo and V. Urgueira, "Structural dynamic analysis and testing of coupled structures," *Imp. Coll. Sci., Technol. Univ. London*, no. October, 1989.
- [27] B. Jetmundsen, R. L. Bielawa, and W. J. Flannelly, "Generalized Frequency Domain Substructure Synthesis," *Soc. J. Am. Helicopter*, 1988.
- [28] A. P. V. Urgueira, "A Modal Coupling Technique Using Experimentally Data," *Imp. Coll.*, 1988.

- [29] G. W. Skingle, "Structural dynamic modification using experimental data," 1989.
- [30] A. Ben-Israel, "A note on partitioned matrices and equations," *Siam Rev.*, 1969.
- [31] F. C. Batista and N. M. M. Maia, "Uncoupling techniques for the dynamic characterization of sub-structures," *Springer New York*, 2011.
- [32] Mathworks, "Matlab." 2015.
- [33] W. Liu, "Structural dynamic analysis and testing coupled structures," vol. 7, 2000.
- [34] J. A. O. Barros, "Método dos elementos finitos aplicado a estruturas reticuladas," 2004.
- [35] R. Kandi, "Comparative study of various beams under different loading condition using finite element method," 2012.
- [36] "Bruel & Kjaer." [Online]. Available: <http://www.bksv.com/Products/transducers/vibration/accelerometers/accelerometers/4508001>.
- [37] "National Instruments." [Online]. Available: <http://sine.ni.com/nips/cds/view/p/lang/pt/nid/213180>.



# Anexos

---

## Anexo A – Decomposição em valores singulares e pseudo-inversa

---

### Anexo A.1. – Decomposição em valores singulares

---

A decomposição em valores singulares de uma matriz, *Singular Value Decomposition* – SVD, é uma ferramenta importante para a resolução de vários problemas. É frequente encontrarem-se sistemas sobredimensionados e a determinação dos valores singulares da matriz do sistema dá uma informação valiosa sobre a independência linear das colunas da matriz.

Se  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , com  $m \geq n$ , uma matriz com colunas linearmente independentes; então, existem duas matrizes ortogonais  $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$  e  $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e uma matriz  $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , tais que,

$$A_{mn} = U_{mm} \Sigma_{mn} V_{nn}^T \quad (\text{A.1})$$

em que,

$$\Sigma_{mn} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_n \\ 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

com  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0$ .

Os elementos de  $\sigma$  são os chamados valores singulares da matriz  $A$ , as colunas  $U$  e  $V$  são os chamados vetores singulares à esquerda e à direita, respetivamente.

## Anexo A.2. – Mínimos quadrados

---

A solução de sistemas sobredimensionados do tipo,

$$Ax = b \quad (\text{A.3})$$

em que  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  com  $m \geq n$ ,  $x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  e  $b \in \mathbb{R}^{m \times 1}$  só tem solução se o vetor  $b$  pertencer ao espaço das colunas de  $A$ . Se isso não acontecer significa que se tem sempre um erro,

$$r = Ax - b \neq 0 \quad (\text{A.4})$$

Qualquer vetor  $x$  não deixa de ser a solução do problema, no entanto haverá um  $x$  que minimiza este erro. Faz todo o sentido aplicar uma norma ao vetor  $r$ .

A estatística diz que se as perturbações de  $A$  forem caracterizadas por uma distribuição normal, a norma adequada é a norma euclidiana, que é diferenciável. Assim a solução do sistema será encontrar o vetor  $x$  que minimiza,

$$\|r\|^2 = \|b - Ax\|^2 \quad (\text{A.5})$$

O vetor  $x$  que minimiza este erro quadrático será encontrado no valor mínimo desta função quadrática. Assim, tem-se

$$\|b - Ax\|^2 = (b - Ax)^T (b - Ax) = x^T A^T A x - 2x^T A^T b + b^T b \quad (\text{A.6})$$

Derivando em ordem a  $x$  e igualando a zero,

$$A^T A x = A^T b \quad (\text{A.7})$$

A matriz  $A^T A$  apenas será invertível se e só se as colunas de  $A$  forem linearmente independentes, ou seja, se a característica de  $A$  for igual a  $n$ . No entanto, se houver colunas de  $A$  quase dependentes devido a erros de medição ou erros de cálculo numérico tem-se esses erros ampliados na matriz  $A^T A$ . Este problema é quantificado pela condição da matriz  $A^T A$ . Quanto maior for a condição maior será o erro esperado.

A condição de uma matriz  $A$  é por definição dada por,

$$\text{cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \quad (\text{A.8})$$

Desta forma, aceitando o valor da condição da matriz  $A^T A$ , pode-se inverter e chegar à solução pretendida:

$$x = (A^T A)^{-1} A^T b \quad (\text{A.9})$$

### Anexo A.3. – Pseudo-inversa

---

Em sistemas de equações lineares do tipo  $Bx = c$  em que  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e se  $B^{-1}$  existir, a resolução do sistema pode ser descrita da seguinte forma:

$$x = B^{-1}c \quad (\text{A.10})$$

Ao comparar a solução do problema sobredimensionado (A.9) com a solução (A.10) é designado a matriz  $(A^T A)^{-1} A^T$  como a matriz pseudo-inversa de  $A$ , ou seja,

$$A^+ = (A^T A)^{-1} A^T \quad (\text{A.11})$$

Utilizando as propriedades da decomposição em valores singulares da matriz  $A$ , como as matrizes  $U$  e  $V$  são ortogonais, pode-se obter a pseudo-inversa de  $A$  da seguinte forma:

$$A^+ = V \Sigma^+ U^T \quad (\text{A.12})$$

## Anexo B – Equipamento experimental utilizado

---

Para além da viga, o equipamento necessário é um sensor (acelerómetro) e um martelo de impacto.

O acelerómetro que foi usado foi da Bruel & Kjaer, Type 4508B com 4,8 gramas representado na Figura 62 e o martelo de impacto usado foi semelhante ao da Figura 63, que é um martelo que se caracteriza essencialmente por uma massa que constitui a cabeça do martelo onde é fixado um sensor de força. Neste sensor é possível enroscar uma ponteira que permite variar a dureza da ponteira adequando assim à gama de frequências estudada.

Para além disto, foi usado o analisador espectral OR25 PC-Pack II, que é o responsável pela receção, tratamento e envio dos sinais dos vários transdutores usados para o PC. No PC, a informação é tratada através do software “Real-Time FFT OR762/OR763”.



*Figura 62 - Sensor utilizado nos ensaios experimentais [36]*



*Figura 63 - Martelo de impacto semelhante ao utilizado nos ensaios experimentais [37]*