A APRENDIZAGEM DA MULTIPLICAÇÃO NUM CONTEXTO DE ENSINO EXPLORATÓRIO

Dissertação de Mestrado

Ana Teresa Benjamim Ribeiro Vieira

Trabalho realizado sob a orientação de

Professora Doutora Hélia Gonçalves Pinto, Instituto Politécnico de Leiria

Leiria, Setembro 2015

Mestrado de Educação Matemática no Pré-Escolar e 1.º Ciclo do Ensino Básico

ESCOLA SUPERIOR DE EDUCAÇÃO E CIÊNCIAS SOCIAIS

INSTITUTO POLITÉCNICO DE LEIRIA

AGRADECIMENTOS

A realização deste estudo só foi possível com o apoio de algumas pessoas, cada uma com diferentes contributos. O meu reconhecimento e agradecimento em especial aos que não me deixaram cair ao longo deste percurso, dando-me muita força para concluir este estudo.

De um modo especial, à minha orientadora, Doutora Hélia Pinto, pois todas as palavras seriam poucas para descrever o seu profissionalismo aliado a um ser humano grandioso. Assim, deixo manifesto a minha gratidão pela forma como me orientou e apoiou nesta etapa com a sua disponibilidade. Para além de que foi ela que desde o início me incentivou a frequentar este mestrado.

Ao meu marido que me acompanhou desde sempre e me encorajou a fazer este mestrado, depositando toda a confiança no meu desempenho académico e por não ter desistido de mim nos momentos mais difíceis.

Aos meus filhos, pelo tempo que não lhes dediquei, pelas minhas ausências e pela falta que sentiram de mim em alguns momentos.

Agradeço de um modo muito especial aos meus pais que me tentaram substituir no apoio que nem sempre consegui dar aos meus filhos e estiveram sempre presentes quando deles precisei.

Aos meus familiares mais próximos, nomeadamente irmã e sogra pelo apoio e incentivo durante estes dois anos.

A todos os professores e colegas que tive o privilégio de conhecer e trabalhar ao longo desta caminhada.

Aos meus alunos, sem os quais, este trabalho não era possível.

RESUMO

Este estudo analisa como se processa a aprendizagem da multiplicação a partir da resolução de uma sequência de tarefas, num contexto de ensino exploratório e procura a resposta às seguintes questões: i) Que estratégias e dificuldades apresentam os alunos na resolução de problemas para a aprendizagem da multiplicação que compõem a sequência de tarefas e ii) Quais as potencialidades e as limitações de um ensino exploratório na aprendizagem da multiplicação? A conceção e exploração da sequência de tarefas fundamentaram-se nas ideias defendidas por um ensino exploratório da Matemática e pela Educação Matemática Realista. A metodologia seguiu o paradigma de Investigação-Ação. O estudo foi realizado na turma de segundo ano, atribuída à professora no início do ano letivo, tendo ela assumido o duplo papel de professora e investigadora. A sequência de tarefas privilegia a resolução de problemas com contextos reconhecíveis pelos alunos, valoriza as produções dos pares e a interação num processo de construção de significado para a multiplicação. A recolha de dados recorreu a gravações áudio das aulas, notas de campo, produções dos alunos e entrevistas. Os resultados do estudo permitem caracterizar o percurso de aprendizagem realizado com os alunos e concluir que eles desenvolveram a capacidade de usar a multiplicação para resolver problemas, a familiaridade com o sentido aditivo da multiplicação e com as propriedades comutativa e distributiva da multiplicação. O ambiente de sala de aula gerado por um ensino exploratório da matemática influenciou a aprendizagem da multiplicação.

Palavras-chave

Aprendizagem da multiplicação, ensino exploratório da Matemática, Educação Matemática Realista, Investigação-Ação

ABSTRACT

This study analyzes how to process learning the multiplication from the resolution of a sequence of tasks, in an inquiry-based teaching of mathematics context and search the answer to the following questions: i) What strategies and difficulties students have in solving problems for learning multiplication that compose the sequence of tasks and ii) What are the strengths and limitations of an inquiry-based teaching of mathematics in learning the multiplication? The design and operation of the following tasks are justifying the ideas defended by an inquiry-based teaching of mathematics and the Realistic Mathematics Education. The methodology followed the paradigm of Action – Research. The study was conducted in the second year class, assigned to the teacher in this school year, when she assumed the dual role of teacher and researcher. The sequence of tasks focuses on problem solving with contexts recognizable by the students, value the peer production and interaction in a meaning-making process for the multiplication. Data was collected using audio recordings of lessons, field notes, productions of students and interviews. The results of the study allow characterize the learning process carried out with the students and conclude that they have developed the ability to use multiplication to solve problems, familiarity with the additive effect of multiplying and the commutative and distributive properties of multiplication. The classroom environment generated by an inquiry- based teaching of mathematics influenced the multiplication learning.

Keywords

multiplication learning, inquiry-based teaching of mathematics, Realistic Mathematics Education, Action Research

ÍNDICE GERAL

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABELAS

CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO

1.1 MOTIVAÇÃO E PERTINÊNCIA DO ESTUDO

A motivação para a realização deste estudo decorreu, antes de mais, da experiência profissional da investigadora enquanto professora de primeiro ciclo do ensino básico.

O processo de ensino-aprendizagem é, sem dúvida, um processo complexo e de grande responsabilidade para qualquer professor. Esta responsabilidade, a que não é alheia a preocupação pela qualidade do ensino e da aprendizagem, aliada ao reconhecimento de que as inovações não se fazem por decreto, requer um espírito de pesquisa próprio de quem questiona os problemas que existem à sua volta e pretende perceber como é que estes estarão relacionados, de uma forma ou de outra, com a Matemática que é trabalhada na aula.

Por conseguinte, não adiantará publicarem-se e defenderem-se ideias de mudança na educação, nomeadamente no que respeita ao modo como se ensina e aprende matemática; se estas não forem postas em prática e refletir-se sobre essa prática e os seus reflexos no ensino e aprendizagem.

O professor deverá estar atento ao modo como ensina e como os alunos progridem no ambiente de aprendizagem que lhes é proporcionado (Hart et al (1992), citado em Stein & Smith (1998)).

No agrupamento em que a investigadora exerce atividade, os resultados obtidos pelos alunos, quer na avaliação interna realizada ao longo do ano letivo, quer nas provas de avaliação externa são analisados pelos professores.

A análise dos resultados dos testes intermédios de 2.º ano no ano letivo 2012/13 suscitou grande inquietação, devido à elevada percentagem de níveis negativos nos temas de Números e Operações e Geometria e Medida, com valores preocupantes de 58,3% no domínio de Números e Operações.

Apesar de este ser apenas um teste e não refletir claramente os resultados escolares dos alunos num ano letivo, veio comprovar que a matemática continua a ser uma disciplina curricular com fraco aproveitamento e, nós enquanto professores teremos que fazer algo para o alterar.

Os resultados nacionais expressos no Relatório Projeto Testes intermédios 1.º Ciclo do Ensino Básico 2013 (IAVE, 2013) também provocaram grandes inquietações. De acordo com este relatório, no que se refere à matemática, “ as áreas temáticas que requerem maior intervenção didática são a Geometria e Medida e os Números e Operações" (IAVE, 2013,p.19). Salienta ainda que ao longo dos três anos de implementação do Projeto Testes Intermédios no 2.º ano, "verificaram-se, recorrentemente, grandes fragilidades ao nível da resolução de problemas. Assim, esta capacidade necessita de uma intervenção didática muito reforçada" (IAVE, 2013, p.19)

Reportando-nos aos Testes Intermédios 2013, esse relatório salienta que um dos itens em que os alunos apresentaram pior desempenho foi o item 13 do Caderno 2, que exigia a resolução de um problema que envolvia a multiplicação e a divisão e a relação dobro/metade; em que apenas 38,9% dos alunos utilizaram uma estratégia adequada e completa de resolução do problema. Este conteúdo também foi avaliado em 2012 (item 5. do Caderno 1), com 32,7% de respostas corretas (GAVE, 2012).

Neste sentido, e de acordo com o Relatório Projeto Testes intermédios 1.º Ciclo do Ensino Básico 2013, considera-se fundamental que o ensino e a aprendizagem da matemática assente na resolução sistemática de problemas, que "implique a identificação da informação relevante, a utilização de contextos e estratégias diversificadas, a verificação dos resultados alcançados e a discussão na turma das estratégias utilizadas e dos resultados obtidos" (IAVE,2013;p.19).

Deste modo, incentiva-se o desenvolvimento das capacidades de resolução de problemas, do raciocínio matemático, bem como da comunicação matemática, que no novo programa [MEC, 2013] perderam o destaque assumido no programa anterior [ME,2007], enquanto competências transversais a toda a aprendizagem matemática.

Dado que o raciocínio multiplicativo tem um papel fundamental na educação matemática dos primeiros anos (Pinto, 2011), as dificuldades evidenciadas pelos nossos alunos nos Testes Intermédios tornaram evidentes a necessidade de uma intervenção planeada e refletida para a aprendizagem da multiplicação na turma de segundo ano com quem foi desenvolvido este estudo.

Segundo Ponte (2005) a insistência num único tipo de tarefa, o exercício, e a insuficiente atenção dada ao trabalho exploratório são razões que contribuem de forma significativa para as dificuldades de aprendizagem dos nossos alunos na matemática.

Nos finais dos anos 90, os estudos realizados acerca das perceções sociais dos professores sobre o ensino e aprendizagem revelaram que a resolução de problemas não era a atividade que os professores mais valorizavam nas suas aulas. Em muitos casos, as situações propostas assumiam características meramente rotineiras ou surgiam como forma de consolidação de conhecimentos e aplicação de algoritmos já aprendidos.

Os resultados de diversos estudos (e.g. Boavida (1993); Ponte, Matos e Abrantes (1998) e Veia (1996)) concluíram que os professores não evidenciavam uma preocupação em desenvolver nos alunos a capacidade de resolução de problemas, pelo que também não privilegiavam a procura de processos diferentes de resolução e confronto de estratégias.

Contudo, os documentos curriculares internacionais e nacionais já encaravam a resolução de problemas como um meio privilegiado para a aprendizagem matemática (DGEBS, 1990**;** NCTM, 1991).

Na década de oitenta e inícios dos anos noventa, entre a comunidade científica surgiram também vários trabalhos de investigação sobre o conhecimento matemático das crianças associado à aprendizagem das operações.

Na literatura existente acerca deste tema, podem-se encontrar estudos sobre o conhecimento matemático informal das crianças, como os estudos de Carraher, Carraher e Schliemann (1985), os quais analisaram o modo como as crianças de rua resolviam problemas matemáticos no seu dia-a-dia e em situação de teste formal na escola. Através destes estudos concluíram que as crianças que vendiam doces e frutos nas ruas (situação de teste informal) utilizavam procedimentos mais desenvolvidos do que aqueles que usavam em contexto escolar (teste formal). Os problemas apresentados, em situação de teste informal, foram resolvidos com maior grau de sucesso (98,2%) do que quando o contexto passou a ser formal (73,7%) e, drasticamente inferiores quando não era utilizada qualquer referência contextual (36.8%).

Alguns estudos (e.g. Carpenter, Moser e Bebout (1988); Carpenter, Franke, Jacobs, Fennema e Empson (1998)) incidiram na aprendizagem da adição e da subtração e concluíram que os alunos que inicialmente recorrem a procedimentos informais demonstram uma melhor compreensão das operações e da base dez antes dos estudantes que recorrem principalmente aos algoritmos. Estes resultados apontam para o desenvolvimento da compreensão antes do domínio de procedimentos de cálculo.

Segundo Versachaffel, Greer e de Corte (2007) os estudos sobre a aprendizagem da multiplicação e divisão são em menor número. Além disso, considerando a interligação entre a multiplicação e divisão, muitos dos estudos realizados incidem, simultaneamente, sobre estas duas operações. A escassez de investigação é realçada por estes autores, em particular, no que diz respeito às estratégias usadas pelos alunos para resolver unicamente os problemas de multiplicação.

Caracterizar as estratégias usadas pelos alunos e compreender como evoluem dá-nos informação sobre o seu entendimento acerca da multiplicação, uma vez que "as estratégias dos alunos são sempre representativas das suas ideias matemáticas" (Dolk, 2008, p. 51). Deste modo, analisar as produções dos alunos a partir de contextos com significado para eles, identificando as estratégias utilizadas e comparando-os com as de outros, possibilita a construção e adequação de trajetórias de aprendizagem, de modo a permitir a evolução das suas ideias matemáticas, em particular, sobre a multiplicação.

Diversos estudos (e.g. Anghileri (1989), Carpenter et al. (1998) e Kouba (1989)) realizados sobre a multiplicação e divisão privilegiavam a aprendizagem das operações num contexto de resolução de problemas, nomeadamente problemas cujo contexto permitiu às crianças modelarem as situações e resolverem-nos com base nas suas estratégias informais e a partir dessas, progredirem para a aprendizagem formal das operações.

Em Portugal, as investigações que envolvam o trabalho desenvolvido com os alunos dos primeiros anos em torno da aprendizagem da multiplicação aparecem ligados aos estudos realizados pela equipa de investigadores do Projeto Desenvolvendo o Sentido de Número. Este projeto visou aprofundar o estudo sobre o desenvolvimento do sentido do número nos primeiros anos de escolaridade, bem como aspetos relacionados com o desenvolvimento curricular em Matemática e a prática dos professores.

O Projeto Desenvolvendo o Sentido de Número teve como objetivos: i) compreender o modo como as crianças desenvolvem o sentido do número, sobretudo em contexto de resolução de problemas; ii) identificar práticas profissionais e o tipo de currículo que favorecem o desenvolvimento do sentido do número (inteiros e racionais) e iii) construir materiais curriculares facilitadores do desenvolvimento do sentido do número. Foram construídas, experimentadas e mais tarde publicadas cadeias de tarefas que correspondem a uma trajetória hipotética de aprendizagem e possibilitaram o desenvolvimento do sentido de número (Rocha & Menino, 2009).

Estes investigadores construíram uma cadeia de tarefas que foi experimentada com alunos de segundo ano e assentou numa trajetória de aprendizagem para o desenvolvimento do conceito de multiplicação. Essa cadeia de tarefas centrou –se na construção de uma trajetória de aprendizagem que assenta nos conhecimentos prévios acerca do cálculo aditivo para desenvolver o conceito de multiplicação e o desenvolvimento de estratégias multiplicativas, com base em disposições ou estruturas retangulares que permitiram explorar as propriedades da multiplicação. Os dados recolhidos permitiram concluir que essas tarefas ofereceram um contexto motivador e desafiante para os alunos, ao mesmo tempo que permitiram alargar a compreensão da operação de multiplicação, com o desenvolvimento de estratégias de multiplicação e o uso das propriedades da multiplicação.

Mais recentemente Mendes (2012) apresentou um estudo realizado com alunos de terceiro ano e a sua professora, assente também numa trajetória de aprendizagem da multiplicação numa perspetiva de desenvolvimento do sentido de número. Este estudo concretizou-se numa experiência de ensino que incluiu um conjunto de sequências de tarefas construídas e exploradas na sala de aula, e assentou nos contextos, nos modelos e nos procedimentos de cálculo associados a esta operação.

De acordo com a autora, este estudo permitiu-lhe concluir que no âmbito dessa trajetória de aprendizagem houve evolução nos procedimentos matemáticos dos alunos, os quais evidenciaram desenvolvimento do sentido de número.

Apesar da resolução de problemas associada à aprendizagem das operações ser uma temática investigada em educação matemática, quer a nível internacional quer nacional, e os documentos curriculares nacionais e internacionais refletirem algumas das preocupações decorrentes da investigação desde há muitos anos (DGEBS, 1991**;** ME, 2001; NCTM, 1991; NCTM, 2007; ME, 2007), a realidade educativa parece não refletir esses esforços. Nem as conclusões dessas investigações nem as alterações curriculares previstas nos programas bastarão para que as práticas educativas se alterem.

Ponte, Matos e Abrantes (1998) defendem que "se podem obter mudanças na aprendizagem dos alunos desde que se altere de modo adequado os processos de ensino e o ambiente de sala de aula" (p. 163).

Nesta perspetiva, Ponte e Serrazina (2004) consideram que é necessária uma outra abordagem da prática educativa que coloque o acento tónico não na qualidade da fala do professor, mas na qualidade do discurso partilhado do professor e alunos e no modo como os significados matemáticos são interactivamente construídos na sala de aula.

Esta natureza interativa do ensino, envolvendo professor e alunos constitui uma marca distintiva do ensino exploratório (Oliveira, Menezes & Canavarro, 2013). Contudo, por ser menos comum do que o ensino direto, o ensino exploratório da Matemática é ainda insuficientemente compreendido pela investigação em educação matemática e, por consequência, pouco conhecido pelos professores (Oliveira et al., 2013).

Esta abordagem interativa do processo de ensino e aprendizagem da matemática não é contudo exclusiva do ensino exploratório, pois já era defendida pela Educação Matemática Realista. Freudenthal (1991) defendeu a interatividade entre alunos e professor na aula, partindo de tarefas ricas, nomeadamente a resolução de problemas.

O presente estudo suportou-se num conjunto de aspetos realçados na Educação Matemática Realista e que estão intimamente relacionados com a abordagem defendida num ensino exploratório da matemática.

O ambiente de aprendizagem que se pretendeu desenvolver neste estudo assentou por isso, no ensino exploratório da matemática para a aprendizagem da multiplicação.

Os problemas apresentados aos alunos estavam contextualizados na sua realidade e constituíram os pontos de partida para a aprendizagem da multiplicação.

Através de um processo interativo entre alunos e professor e privilegiando os momentos de discussão coletiva, pretendeu-se que os alunos construíssem progressivamente uma aprendizagem compreensiva da multiplicação.

1.2 Definição do objetivo e questões de investigação

Com base na reconhecida necessidade de contribuir para uma aprendizagem com significado da multiplicação, desenvolver a capacidade de resolução de problemas, assim como, contribuir para a melhoria das práticas educativas, surgiu o objetivo deste estudo: perceber como se processa a aprendizagem da multiplicação a partir da resolução de uma sequência de tarefas, num contexto de ensino exploratório.

Deste objetivo decorreram as seguintes questões de investigação:

i) Que estratégias e dificuldades apresentam os alunos na resolução de problemas para a aprendizagem da multiplicação que compõem a sequência de tarefas?

ii) Quais as potencialidades e as limitações de um ensino exploratório na aprendizagem da multiplicação?

1.3 Organização do estudo

Com vista a apresentar o estudo que se pretende realizar o texto organiza-se em cinco capítulos.

No primeiro capítulo faz-se a introdução ao estudo, onde se apresenta a motivação que levou à sua realização e consequente pertinência, seguindo-se o objetivo e questões de investigação. Termina com a apresentação da sua organização.

No segundo capítulo é realizada uma revisão da literatura acerca das perspetivas de ensino e aprendizagem em que assentou o presente estudo, nomeadamente o ensino exploratório e a

Educação Matemática Realista (EMR). Refere-se também como a aprendizagem da multiplicação é encarada na investigação e pelas orientações curriculares.

A metodologia constitui o terceiro capítulo e apresenta as opções metodológicas do estudo, os sujeitos, a organização do trabalho na aula e as tarefas. São também descritos e justificados os instrumentos e procedimentos utilizados na recolha de informação e os métodos e técnicas utilizadas na análise dos dados.

No quarto capítulo descreve-se o processo de implementação das tarefas e faz-se a análise dos dados recolhidos durante a investigação sobre a aprendizagem da multiplicação, sendo feita uma discussão tarefa a tarefa.

Nessa análise procuram-se evidenciar aspetos significativos da atividade desenvolvida ao longo da implementação da sequência de tarefas, centrando-se nas estratégias e dificuldades apresentadas pelos alunos na resolução dessas tarefas, bem como nas interações mantidas na aula que se enquadram na perspetiva de práticas de um ensino exploratório. No final deste capítulo é feita uma síntese do percurso realizado com a turma relacionando os resultados obtidos com as questões do estudo e faz-se o confronto com o enquadramento teórico.

No quinto capítulo designado, o das conclusões, apresentam-se uma síntese do estudo, as principais conclusões, limitações e recomendações do estudo e uma reflexão final.

CAPÍTULO 2 - ENQUADRAMENTO TEÓRICO

Neste capítulo procura-se fazer um enquadramento teórico ao tema em que incidiu esta investigação. Este capítulo encontra-se dividido em dois pontos.

No primeiro ponto referimo-nos ao ensino exploratório nos seus múltiplos aspetos, nomeadamente a importância das tarefas exploratórias, a dinâmica de trabalho com o inerente processo de comunicação na sala de aula e os papéis assumidos pelo professor e alunos. Aborda-se também a Educação Matemática Realista e os aspetos comuns com um ensino exploratório, dado que estas perspetivas suportaram teoricamente esta investigação-ação.

No segundo ponto apresentam-se alguns aspetos teóricos sobre o ensino e aprendizagem da multiplicação nos primeiros anos, assim como as referências e orientações presentes nos documentos curriculares.

2.1 O ENSINO EXPLORATÓRIO DA MATEMÁTICA

A investigação em educação matemática tem procurado, encontrar formas cada vez mais profícuas de melhorar o processo de ensino e aprendizagem em Matemática.

Já em meados da década de 60 José Sebastião e Silva defendia que a "modernização" do ensino da Matemática teria que ser feita não só quanto a programas mas sobretudo quanto aos métodos de ensino. José Sebastião da Silva cedo alertou para a importância da mudança do papel do professor, a necessidade de se abandonar o método expositivo tradicional e o papel passivo dos alunos, adotando uma metodologia de trabalho em que fosse estimulada a imaginação dos alunos que os conduzisse à redescoberta (Guimarães, 2005).

Decorridas que são tantas décadas, e apesar dos esforços encetados por algumas equipas de professores como o Projeto Mat789 liderado por Paulo Abrantes, as inúmeras iniciativas da Associação de Professores de Matemática e o Projeto de Desenvolvimento de Sentido de Número, esta necessidade de mudança de métodos de ensino continua a estar bem presente.

A prática de ensinar Matemática centrada na exposição dos tópicos por parte do professor seguida da realização de exercícios com vista à repetição de procedimentos pelos alunos, tem sido dominante um pouco por todo o lado (Franke, Kazemi & Battey, 2007), mas não é a mais adequada para lidar com todas as atuais exigências curriculares (Canavarro, Oliveira & Menezes, 2012).

Perspetivando o abandono de uma visão tradicionalista do ensino, entende-se que a aquisição de conhecimento matemático deve fazer-se com compreensão, privilegiando as formas de comunicação em sala de aula, o raciocínio e a resolução de problemas (Ruthven, Hofman & Mercer (2011), citado em Oliveira et al. (2013)).

A aprendizagem da Matemática com compreensão pressupõe a participação ativa dos alunos na construção do seu conhecimento, através do trabalho com tarefas matematicamente significativas e do envolvimento em discussões matemáticas coletivas. Quando os alunos são incentivados a partilhar as suas ideias, justificá-las e argumentar sobre as ideias dos colegas, negociando significados matemáticos, estão a construir novo conhecimento ou a ampliar o conhecimento existente (Cengiz, Kline & Grant (2011), citado em Menezes, Oliveira & Canavarro (2013)).

A aprendizagem, dever ser entendida simultaneamente como um processo individual e coletivo, resultado da interação dos alunos com o conhecimento matemático, no contexto de uma certa atividade matemática, e também da interação com os outros (colegas e professor), sobrevindo processos de negociação de significados (Bishop & Goffree, 1986; Canavarro, 2011; Ponte, 2005).

Um ensino direto assente na exposição dos tópicos pelo professor, seguida da realização de exercícios, não responde aos desafios desta forma de aprendizagem com compreensão (Ponte, 2005). Contudo, o ensino exploratório tem vindo a afirmar-se como uma alternativa fecunda, uma vez que proporciona aos alunos oportunidades de desenvolverem atividades matemáticas genuínas, cria condições para os alunos se envolverem em atividades matemáticas ricas, que conduzem ao desenvolvimento de capacidades matemáticas como a resolução de problemas, o raciocínio e a comunicação matemática (Ponte, 2005;Canavarro, 2011; Oliveira et al., 2013).

Este tipo de ensino assenta num tipo de prática letiva especialmente adequado para lidar com os atuais desafios curriculares, quer no que diz respeito ao desenvolvimento das capacidades transversais nos alunos, quer no que diz respeito à abordagem compreensiva de tópicos matemáticos (Canavarro & Santos,2012).

Deste modo, o ensino exploratório distingue-se do ensino direto/tradicional pelos papéis desempenhados pelo professor e pelos alunos, pelas tarefas que são propostas e a forma como são geridas, e pela comunicação que é originada na aula (Ponte, 2005).

No ensino direto, que está normalmente associado a uma aula de Matemática tradicional, o processo está muito centrado no professor, sendo a informação transmitida deste para os alunos.

No ensino exploratório, "a ênfase desloca-se da atividade 'ensino' para a atividade mais complexa 'ensino-aprendizagem'" (Ponte, 2005, p. 13), sendo que a aprendizagem decorre da possibilidade dos alunos trabalharem com tarefas matemáticas ricas, nomeadamente problemas e investigações, e da possibilidade destes partilharem as suas ideias com os colegas e o professor.

As aulas de ensino exploratório incluem normalmente três ou quatro momentos distintos, dependendo da forma como consideramos a última e a penúltima fase como momentos separados ou não.

Stein, Engle, Smith e Hughes (2008) referem que uma aula de ensino exploratório desenvolve-se em três fases: "o lançamento da tarefa", a "exploração pelos alunos" e a "discussão e síntese".

Na primeira fase, no "lançamento da tarefa", o papel principal do professor será apresentar a tarefa à turma, nomeadamente um problema que possa ser resolvido utilizando estratégias diversificadas. Nesta fase, o professor deve garantir que os alunos compreendem a tarefa que lhes é apresentada, sintam-se desafiados a trabalhar nela, e que têm um ambiente e os recursos materiais necessários para o seu desenvolvimento com sucesso.

Na fase da "exploração", os alunos trabalham no problema, discutem-no com o seu par ou em pequenos grupos. Durante esta fase, o professor acompanha e apoia os alunos no seu trabalho autónomo, tendo em vista a realização da tarefa e procura assegurar que todos os alunos se envolvem ativamente.

Será também nesta fase que o professor deve selecionar e estabelecer a sequência das apresentações dos pares /grupos na discussão coletiva (Stein et al., 2008).

Na organização da sequência de apresentações o professor deverá identificar e selecionar resoluções variadas (com erro a explorar, menos ou mais completas, com representações relevantes) e sequenciar as representações selecionadas (Oliveira et al., 2013).

Depois desse trabalho autónomo, a turma volta a trabalhar em plenário para a realização da "discussão e síntese ".

Durante a fase de partilha e discussão em grande grupo uma variedade de estratégias de resolução do problema deverá ser apresentada para toda a turma discutir. Os pares/grupos selecionados apresentam as suas estratégias de resolução, sendo que os colegas junto com o professor, podem solicitar alguns esclarecimentos e pedir que os alunos as justifiquem. Gera-se o debate na aula e nesta fase o professor assume o papel de "orquestrador da discussão", também ele questionando, procurando que haja qualidade matemática nas explicações e argumentações apresentadas. Para além disso, deve garantir a comparação de distintas resoluções e da discussão da respetiva diferença e eficácia matemática (Ruthven et al.(2011), Yackel & Cobb (1996) citados em Oliveira et al.(2013)).

Outro aspeto a considerar durante a fase de discussão da tarefa será a importância de promover uma atitude de respeito e interesse genuíno pelos diferentes trabalhos apresentados e o professor ter o cuidado de justificar as razões da não apresentação de algumas resoluções dos pares. A aula termina com a discussão coletiva e o resumo das várias estratégias apresentadas.

Para outros autores (e.g. Canavarro (2011), Canavarro et al (2013), Ponte, Nunes e Quaresma(2008), Ponte e Serrazina (2009)) a discussão da tarefa e a sistematização das aprendizagens matemáticas ocorrem em fases distintas. Salientam que neste momento da aula e com a ajuda do professor, a turma deverá reconhecer os conceitos e os procedimentos matemáticos envolvidos e estabelecer conexões com aprendizagens anteriores.

Oliveira et al. (2013) consideram ainda fundamental, que se garanta o registo escrito das ideias resultantes da sistematização para que os alunos posteriormente, também possam fazer o seu registo no caderno individual.

Os autores preferem adotar a designação de "sistematização" em vez de síntese proposta por Stein et al (2008), já que consideram o momento final destinado à sistematização das aprendizagens matemáticas fundamental para que os objetivos que o professor estabeleceu previamente possam ser atingidos.

Neste quadro de ensino as tarefas matemáticas a propor assumem particular importância porque é a partir destas que a atividade matemática dos alunos se desenvolve.

Uma estratégia de ensino-aprendizagem de cunho exploratório dará ênfase a atividades de exploração, incluindo possivelmente algumas investigações, projetos, problemas e exercícios. Valorizará os momentos de reflexão e discussão com toda a turma, tendo por base o trabalho prático já previamente desenvolvido, como momentos por excelência para a sistematização de conceitos, a formalização e o estabelecimento de conexões matemáticas (Ponte, 2005).

Deste modo a seleção de uma tarefa adequada e valiosa é muito importante pois ela tem implícita uma determinada oportunidade de aprendizagem mas, uma vez selecionada, é crucial que o professor equacione como explorar as suas potencialidades junto dos alunos e se prepare para lidar com a complexidade dessa exploração na sala de aula (Stein et al., 2008).

O ambiente de sala de aula constitui um outro fator determinante no processo de ensino e aprendizagem, nomeadamente a importância que assume a discussão e comunicação das estratégias, ideias e opiniões dos alunos. (NCTM, 2000; Ponte,2005).

Num ensino exploratório deve privilegiar-se o trabalho em grupo e a pares de modo a proporcionar aos alunos um ambiente estimulante de partilha. Assim, estes podem participar em dois níveis do discurso da aula – o coletivo e o privado, que desenvolvem com os seus colegas (Ponte & Santos, 1998; Sherin, 2002). No entanto, podem usar-se outros modos de trabalho como o modo coletivo, com o professor a interagir com todos os alunos ou ainda, o trabalho individual, procurando desenvolver a capacidade de concentração do aluno.

César (1995, 1999) salienta a importância do trabalho a pares na resolução de tarefas matemáticas. A autora considera que as interações na sala de aula permitem o desenvolvimento sociocognitivo dos alunos, dado que promovem a apreensão de conhecimentos e a aquisição de competências matemáticas e, por outro lado os alunos aprendem também a respeitar os colegas e a gerir conflitos.

A relevância da partilha, análise, reflexão e discussão de ideias é também destacada por Boavida, Paiva, Cebola, Vale e Pimentel (2008) que consideram que a comunicação na sala de aula assente nessa partilha de ideias matemáticas, permite a interação dos alunos com as ideias expostas pelos outros, a sua apropriação e o aprofundar das suas ideias. As autoras sublinham também, que a partilha de raciocínios é importante também para quem os enuncia, pois exige a organização e clarificação do seu pensamento. Referem também que a comunicação constituiu uma " parte integrante do processo de uma aprendizagem significativa"(p.61).

O ensino exploratório pressupõe novos papéis para professor e alunos quando se compara com a aula tradicional assente no tipo de ensino direto, em que a informação é difundida do professor para os alunos. (Ponte, 2005).

> O ensino exploratório da Matemática não advoga que os alunos descobrem sozinhas as ideias matemáticas que devem aprender, nem tão pouco que inventam conceitos e procedimentos ou lhes adivinham os nomes. Muito menos advoga que isso acontece enquanto o professor espera tranquilamente sentado pelos rasgos iluminados e criativos dos seus alunos — não que estes não os tenham quando lhes é dada oportunidade (Canavarro, 2011, p.11)

No ensino exploratório o aluno constrói o conhecimento matemático através da resolução de tarefas propostas pelo professor, na qual se envolve, quer na sua resolução quer na discussão sobre as estratégias utilizadas. Ao longo deste processo é naturalmente acompanhado pelo professor que assume diferentes papéis ao longo da aula.

Neste contexto de ensino exploratório, Stein et al (2008) sublinham a complexidade do trabalho do professor na condução de discussões matemáticas, apontando que as estratégias dos alunos são frequentemente muito diferentes umas das outras. Os autores indicam, também, que cabe ao professor dar coerência às ideias dispersas dos alunos, enquadrando-as no conhecimento matemático estabelecido.

Stein et al. (2008) apresentam um modelo que integra cinco práticas a considerar na preparação (antecipar, e monitorizar) e na condução da discussão (selecionar, sequenciar e estabelecer conexões) nas aulas de ensino exploratório.

Na preparação da discussão, o professor deve antecipar a tarefa, preparando-a antes da aula e perspetivando os objetivos que pretende ver atingidos. A monitorização que beneficia da antecipação, ocorre sobretudo na fase de trabalho autónomo dos alunos. Nesta fase o professor analisa o trabalho dos alunos, as suas estratégias de resolução, tendo em vista o seu potencial para a discussão. Após isto, irá sequenciar as apresentações dos alunos, de forma a permitir uma discussão rica, com o estabelecimento de conexões entre as ideias, o desenvolvimento do conhecimento e o pensamento dos alunos (Cengiz et al (2011), citado em Oliveira et al.(2013)).

Stein et al. (2008) referem ainda, que poderão ocorrer episódios de ampliação, quando a discussão se move para uma ideia matemática diferente. Os autores consideram três tipos de episódios que permitem a ampliação: i) encorajar os alunos à reflexão matemática, procurando que estes comparem e generalizem ideias matemáticas, usem diversas resoluções e considerem a razoabilidade dos argumentos apresentados; ii) avançar nas ideias iniciais, levando a que os alunos procurem resoluções alternativas e estratégias de resolução mais eficazes; e iii) promover o raciocínio matemático, envolvendo a justificação das ideias e da estratégias dos alunos e o acompanhamento das justificações dos colegas.

Stein et al (2008) defendem que uma discussão matemática produtiva assenta em duas características fundamentais: apoiar-se no pensamento dos alunos e partindo destas avançar para ideias matemáticas importantes para a aprendizagem.

Com base na literatura e na análise das práticas de professores com os quais têm vindo a desenvolver investigação no âmbito do projeto P3M — Práticas profissionais dos professores de Matemática que tem em vista o aprofundamento da compreensão da prática de ensino exploratório da Matemática, Oliveira et al., (2013) caraterizam as práticas de ensino exploratório da Matemática. Nestas práticas identificam as ações instrucionais do professor e as principais intenções subjacentes a essas ações, considerando-as como duas componentes da prática do ensino exploratório. Salientam nas intenções do professor dois objetivos principais distintos, mas interrelacionados: (i) promover as aprendizagens matemáticas dos alunos; e (ii) gerir os alunos e a turma e o funcionamento da aula; explicitando-os em cada uma das fases de aula de ensino exploratório (Tabela 1).

	Promoção da aprendizagem matemática	Gestão da aula
Apresentação	**Garantir a apropriação da tarefa pelos alunos** - Familiarizar os alunos com o contexto da tarefa - Esclarecer a interpretação da tarefa - Estabelecer os objetivos **Promover a adesão dos alunos à tarefa** - Estabelecer conexões com experiências anteriores - Desafiar para o trabalho	**Organizar o trabalho dos alunos** - Estipular tempos para o trabalho a desenvolver em cada uma das fases da aula - Definir formas de organização do trabalho (individual, pares, grupos…) - Organizar os materiais da aula
Trabalho autónomo dos pares	**Garantir o desenvolvimento da tarefa** - Colocar questões e dar pistas - Sugerir representações - Focar ideias produtivas - Pedir clarificações e justificações **Manter o desafio cognitivo e autonomia dos alunos** - Cuidar de promover o raciocínio dos alunos - Cuidar de não validar a correção matemática das respostas dos alunos	**Promover o trabalho de pares/grupo** - Regular as interações entre alunos - Providenciar materiais para o grupo **Garantir a produção de materiais para a apresentação pelos alunos** - Pedir registos escritos - Fornecer materiais a usar - Dar tempo para prepararem a apresentação **Organizar a discussão a fazer** - Identificar e selecionar resoluções variadas - Sequenciar as resoluções selecionadas
Discussão da tarefa	**Promover a qualidade matemática das apresentações dos alunos** - Pedir explicações claras das resoluções - Pedir justificações sobre os resultados e as formas de representação utilizadas - Discutir a diferença e a eficácia das resoluções apresentadas **Regular as interações entre os alunos** - Incentivar o questionamento para clarificação de ideias apresentadas ou esclarecimento de dúvidas - Incentivar análise, confronto e comparação entre resoluções - Identificar e colocar à discussão erros matemáticos das resoluções	**Criar ambiente propício à apresentação e discussão** - Dar por terminado o tempo de resolução da tarefa pelos alunos - Promover a atitude de respeito e interesse genuíno pelos diferentes trabalhos apresentados **Gerir relações entre os alunos** - Cuidar de justificar as razões da não apresentação de algumas resoluções - Promover e gerir as participações dos alunos na discussão
Sistematização das aprendizagens	**Institucionalizar ideias ou procedimentos relativos a tópicos matemáticos suscitados pela exploração da tarefa** - Identificar conceitos matemáticos, clarificar a sua definição e explorar representações múltiplas- - Identificar procedimentos matemáticos, clarificar as condições da sua aplicação e rever a sua utilização **Institucionalizar ideias ou procedimentos relativos a capacidades transversais suscitadas pela exploração da tarefa** - Identificar e relacionar dimensões das capacidades transversais presentes -Reforçar aspetos-chave para o seu desenvolvimento **Estabelecer conexões com aprendizagens anteriores** - Evidenciar ligações com conceitos matemáticos, procedimentos trabalhados anteriormente	**Criar ambiente adequado à sistematização** - Focar os alunos no momento da sistematização coletiva - Promover o reconhecimento da importância de apurar conhecimento matemático a partir da tarefa realizada **Garantir o registo escrito das ideias resultantes da sistematização** - Fazer o registo em suporte físico ou informático - Pedir registo escrito nos cadernos dos alunos

Tabela 1- Ações intencionais do professor na aula de ensino exploratório (Oliveira et al., 2013)

Desta forma, o carácter interativo do processo de ensino aprendizagem constitui uma característica marcante do ensino exploratório, mas que encontramos também noutros referenciais teóricos já bem estabelecidos na educação matemática, nomeadamente na Educação Matemática Realista.

Esta abordagem interativa do ensino e aprendizagem encontra-se fortemente vincada na Educação Matemática Realista (RME – Realistic Mathematics Education) de Freudenthal e dos seus colegas no Instituto IOWO, mais tarde designado Instituto Freudenthal.

Para Freudenthal a Matemática era primeiro e acima de tudo uma atividade, uma atividade humana, como muitas vezes ele enfatizou (Gravemeijer & Terwel, 2000 a, 2000b) .

Na perspetiva de Freudenthal (1975, 1991) a Matemática, enquanto atividade humana implica organizar, relacionar, estruturar, generalizar, provar e formalizar o mundo à nossa volta. Implica que a Matemática deva ser "reinventada" pelos alunos num processo de "matematização", esse é o processo chave do ensino e aprendizagem da Matemática.

O papel ativo do aluno na aprendizagem, a aprendizagem Matemática entendida no sentido de que se aprende fazendo matemática, encontra-se bem vincada, quer num ensino exploratório, quer numa abordagem de ensino que assente na Educação Matemática Realista, sendo que nesta última, o processo de aprendizagem designa-se por matematização.

Treffers (1991, citado por van den Heuvel-Panhuizen (2003)) refere-se a dois tipos de matematização no contexto educacional: a horizontal e a vertical. A matematização horizontal, em que os alunos transformam um problema da realidade num problema matemático, ou seja, produz modelos para organizarem e resolverem problemas do dia-a-dia; assistindo-se assim, a uma conexão entre a realidade e o mundo dos símbolos. A matematização vertical refere-se à reorganização do conhecimento e às operações matemáticas realizadas pelos alunos, descobrindo conexões entre conceitos e estratégias de resolução de problemas.

Freudenthal (1991) adota esta distinção referindo-se a matematização horizontal como o estabelecimento de ligações entre o mundo que é percecionado pelos alunos e o mundo dos símbolos e a matematização vertical como o processo de reorganização dentro do mundo dos símbolos. Contudo a delimitação de fronteiras entre estes dois campos não é fácil e está, de acordo com o autor, muito relacionada com aquilo que cada um entende como realidade.

O processo de matematização, é naturalmente um processo progressivo e de acordo com Gravemeijer (2004,2005) e Gravemeijer e Terwel (2000 a, 2000 b) consideram-se três princípios chave ou heurísticas que podem ajudar a organizar a aprendizagem: (i) reinvenção guiada através da matematização progressiva; (ii) fenomenologia didática e (iii) modelos emergentes.

(i) reinvenção guiada através da matematização progressiva - De acordo com Freudenthal (1975), os alunos devem ter a oportunidade de experimentar um processo semelhante ao processo pelo qual a matemática dos matemáticos foi inventada. Para isso, o pesquisador deve começar por imaginar uma trajetória de aprendizagem que permita chegar ao resultado pretendido, buscando as suas fontes de inspiração na História da Matemática e nas produções informais dos alunos. São precisamente as estratégias informais utilizadas pelos alunos na resolução dos problemas com contextos facilmente reconhecíveis que constituem o ponto de partida para o desenvolvimento de conceitos e conexões matemáticas.

Segundo os vários autores (e.g. Gravemeijer (2004,2005), Gravemeijer e Terwel (2000 a, 2000 b)) para que ocorra aprendizagem será necessário que os professores proporcionem aos alunos a resolução de tarefas que os estimulem à atividade de modelação, recorrendo a desenhos, diagramas, ou tabelas, já que é através desses modelos que os alunos progridem do conhecimento informal para o formal.

Para que haja matematização, os educadores devem ter o cuidado de selecionar situações-problema que sejam adequadas para a construção de modelos e que se encaixem numa trajetória que permita a evolução do modelo para um modelo didático que abra caminho a níveis mais elevados de compreensão (van den Heuvel-Panhuizen, 2003).

Gravemeijer (1994,1999, citado em Pinto (2011)) enfatiza ainda, que o trajeto da reinvenção deve permitir que aos alunos transitem de níveis inferiores para níveis superiores e vice-versa. Considera que quando os alunos são confrontados com um novo problema e apresentam dificuldades na sua resolução, podem recuar na sua própria história de aprendizagem, resolve-lo utilizando estratégias que evidenciam um nível mais baixo, sem que isso contudo deva ser encarado como um retrocesso no processo de matematização.

ii) Fenomenologia didática – Este princípio refere-se à análise de contextos, que no passado foram utilizados e contribuíram para o desenvolvimento de determinado conceito matemático. Freudenthal (1973, citado em Pinto (2011)) realça que uma aprendizagem descontextualizada da Matemática, que esteja desvinculada das experiências dos alunos, leva a uma incapacidade da sua aplicação e a um rápido esquecimento. Pelo que devem ser trabalhados problemas de contexto que permitam alguma diversidade de estratégias.

De acordo com diversos autores (e.g. Freudenthal (1991), Gravemeijer e Terwel (2000 a, 200b), van den Heuvel-Panhuizen (2000)) os problemas de contexto favorecem a formação de conceitos e a ligação, numa primeira fase, a modelação matemática de forma natural e motivadora; que progressivamente conduz à aprendizagem das operações formais, dos procedimentos, das regras, fazendo-o em conjunto com outros modelos visuais, que desempenham funções importantes de apoio ao raciocínio.

iii) Modelos emergentes - A abordagem da modelação emergente tem o seu foco precisamente na atividade de modelação. A modelação, nesta conceção, é uma atividade dos alunos, aos quais é pedido que resolvam um problema contextualizado. Tal atividade de modelação pode envolver fazer desenhos, diagramas, ou tabelas, ou pode envolver desenvolver notações informais ou utilizar notação matemática convencional. A conjetura é que agir com estes modelos ajudará os alunos a reinventarem a Matemática mais formal que se pretende atingir. O modelo começa a tornar-se uma base referencial para o nível da Matemática formal. Assim, podemos tentar ajudar os alunos a construir um novo conhecimento matemático, construído sobre o que eles já sabem.

Freudenthal (1991) defende que os alunos devem começar por matematizar fenómenos do seu quotidiano, seguindo-se a análise da sua própria atividade matemática em cada nível da componente vertical, para que possam progredir para o nível seguinte. A aprendizagem da Matemática implica que os alunos passem por vários níveis de compreensão, sendo que a capacidade de refletir sobre aquilo que fazem e que os outros fazem, seja uma condição necessária neste processo de matematização.

As discussões com toda a turma acerca das estratégias de resolução do problema, as interpretações e ideias irão aumentar a probabilidade de ocorrerem essas mudanças nesse processo de matematização; especialmente se o problema em questão der origem a uma variedade de estratégias de resolução. Freudenthal (1991, citado em Gravemeijer e Terwel (2000 a, 2000 b)) considera que o diálogo não surge unicamente com a discussão coletiva, ocorre também durante o trabalho de grupo, privilegiando os grupos heterogéneos, pois aí tanto os alunos mais fracos como os alunos mais fortes lucram com a partilha.

Este será um ponto que une o ensino exploratório e a Educação Matemática Realista- a discussão e reflexão são fundamentais no processo de aprendizagem.

Num ensino exploratório, o conhecimento partem também das produções informais apresentadas pelos alunos na fase de trabalho autónomo, os conceitos e as relações matemáticas decorrem dessas e emergem da discussão e da necessária reflexão, quer nos grupos, quer no coletivo. A discussão é fundamental num ensino exploratório, não só porque permite a comparação e o confronto das resoluções dos alunos, mas acima de tudo porque contribui para que estes realizem novas aprendizagens relevantes, não só sobre os conceitos, procedimentos ou processos em presença, mas também sobre os modos legítimos de produção do conhecimento matemático (Boavida, 2005).

Na Educação Matemática Realista a interação promove a matematização ou seja a aprendizagem matemática, sendo que aqui, este processo assenta sobretudo nesta perspetiva de que aprendizagem está suportada em modelos e será na passagem de um modelo para outro que ela se torna evidente.

Segundo vários autores (e.g. Freudenthal (1991), Gravemeijer e Terwel (2000 a, 2000 b), van den Heuvel-Panhuizen (2001, 2003)) este processo de aprendizagem, ou melhor, de matematização, ocorre com a passagem de um modelo para outro modelo, cada vez mais formal. Esta progressão faz-se, partindo das estratégias informais dos alunos, como vimos, para o processo de desenvolvimento de conceitos e relações matemáticas, para depois evoluir para estratégias mais formais, através de um processo gradual de esquematização, abreviação e generalização.

Gravemeijer (2005) distingue dois tipos diferentes de atividade que possibilitam este processo de matematização, com a passagem do modelo de para modelo para: a atividade ligada a um referencial – em que a ação com o modelo deriva da atividade do contexto descrito nas atividades de ensino; e a atividade geral – em que a ação com o modelo decorre das relações matemáticas envolvidas. Estes dois tipos de atividade podem- se complementar com outros dois: um ao nível do contexto da tarefa e por um outro em que os alunos já não precisam de recorrer a um modelo (Figura 1).

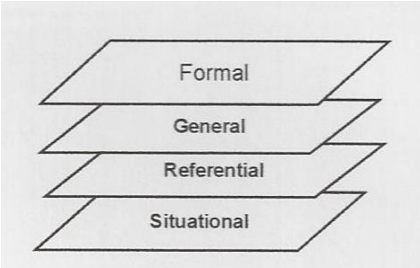


Figura 1 : Níveis de atividade (Gravemeijer,2005)

Gravemeijer (2005) resume os níveis de atividade da seguinte forma : (1) atividade na situação da tarefa, na qual as interpretações e resoluções dependem da compreensão de como agir no contexto; (2) atividade referencial, na qual cada modelo de refere-se a atividades na situação descrita nas atividades de ensino; (3) atividade geral, na qual os modelos para referem-se a um quadro de representações matemáticas; (4) raciocínio matemático formal, o qual não depende do apoio de modelos para a atividade matemática. Esta transformação do modelo corresponde a uma alteração na forma de pensar do aluno, dado que o enfoque deixa de ser no contexto da situação modelada, para passar a ser nas relações matemáticas.

Este processo de passagem de um modelo para outro, exige que os professores proporcionem situações de ensino e aprendizagem que estimulem os alunos à atividade de modelação, já que é através dos modelos que eles progridem do conhecimento informal para o informal num progressivo processo de matematização.

Para a Educação Matemática Realista, as situações que constituem pontos de partida para a aprendizagem da Matemática devem fazer parte da realidade dos alunos e os contextos dos problemas propostos aos alunos desempenham um papel central. O uso de contextos realistas tornou-se numa das características definidoras desta abordagem à educação matemática. Quando nos referimos a contextos realistas, estes não terão que estar diretamente relacionados com o dia-a-dia dos alunos, podem ser contextos do mundo da fantasia, dos contos de fadas; terão é que ser facilmente imaginados pela criança (van den Heuvel-Panhuizen, 2000, 2001).

Gravemeijer e Terwel (2000 a, 2000 b) consideram que os problemas de contexto são tarefas que permitem uma grande variedade de procedimentos de solução, pelo que deverão ser selecionados para uma aula de matemática, dado que podem induzir a uma trajetória de aprendizagem.

A variedade de estratégias, as produções próprias dos alunos e a discussão sobre as mesmas permitirão aos alunos caminhar no desenvolvimento do conhecimento matemático. Considerar o contexto como um aspeto intrínseco ao problema, permite aos alunos imaginar a situação em questão, representá-la esquematicamente por um modelo e, através desse modelo, resolver o problema.

Segundo Gravemeijer (2005), os alunos devem começar por trabalhar em contextos específicos. Inicialmente, os modelos surgem como modelos de contextos específicos associados à situação-problema. Neste nível os modelos devem permitir estratégias informais que correspondem a estratégias de resolução situadas ao nível da situação que está definida no contexto do problema. A partir daí, o papel do modelo começa a mudar. À medida que os alunos recolhem mais experiências com problemas semelhantes, a sua atenção pode transferir-se para as relações matemáticas. Como consequência, o modelo assume um carater mais objetivo, e torna-se mais importante como base para o raciocínio matemático do que unicamente como uma forma de representar um contexto do problema. Desta forma, o modelo da situação desenvolve-se, os alunos focalizam-se nas relações numéricas envolvidas e torna-se depois num modelo para o raciocínio matemático mais formal.

Os modelos funcionam assim, como pontes entre o informal e o nível formal no processo de matematização. Uma caraterística marcante na Educação Matemática Realista relaciona-se com o facto de a matemática dever ser coerente com a realidade, fazer sentido para as crianças e ser relevante para a sociedade (van den Heuvel-Panhuizen,2001).

A perspetiva de ensino defendida pela Educação Matemática Realista e pelo ensino exploratório aproximam-se, portanto, em diversos aspetos nomeadamente no carácter interativo do processo de ensino e aprendizagem, em que o professor e alunos envolvem-se ativamente na exploração de tarefas que permitem a discussão de estratégias de resolução diversificadas e na assumida defesa por uma aprendizagem com compreensão e significado, ganhando desta forma, uma importância de inegável relevo a resolução de problemas e o modo como os alunos e os professores interagem na aula. Á semelhança do que se pretende num ensino exploratório, a interação entre alunos e entre alunos e professores é uma parte essencial na Educação Matemática Realista.

A negociação explícita, a intervenção, a discussão, a cooperação e a avaliação são elementos essenciais no processo de aprendizagem, no qual os métodos informais do aluno são usados como uma alavanca para alcançar os formais. Neste ensino interativo os alunos explicam, justificam, concordam e entram em desacordo, refletindo e encontrando alternativas.

2.2 O ENSINO E APRENDIZAGEM DA MULTIPLICAÇÃO

Ao longo de muitas décadas, no 1.º Ciclo, a aprendizagem da Matemática esteve associada ao ensino da aritmética, logo saber matemática significava essencialmente saber a tabuada e saber fazer contas (Abrantes, Serrazina & Oliveira,1999).

A compreensão das operações desempenha um papel central no conhecimento da matemática (NCTM, 1991), contudo compreender uma operação não se resume a saber fazer o algoritmo. A introdução prematura do algoritmo tem sido muito questionada por diversos investigadores desde os finais dos anos 80.

Carraher, Carraher e Schliemann (1985) estudaram crianças brasileiras do ensino primário enquanto resolviam problemas de raciocínio multiplicativo e concluíram que as crianças que usavam os seus próprios procedimentos para resolver as situações apresentadas tinham maior sucesso que aquelas que usavam o algoritmo.

Kamii e Dominick (1998) concluíram que os alunos a quem não tenham sido ensinados o algoritmo de multiplicação tradicional são capazes de resolver mentalmente com maior sucesso um problema do que aqueles a quem foi ensinado o algoritmo. Segundo Kamii e Dominick (1998) os algoritmos são prejudiciais porque: (i) encorajam as crianças a desistir do seu próprio pensamento, isto é, utilizam um procedimento rotineiro, mecanizado que parece impedi-las de pensar acerca dos números; (ii) fazem-nas esquecer o que já sabem sobre o valor de posição na escrita dos números, impedindo o desenvolvimento do sentido do número e das operações. Por exemplo, para calcular 366 + 199. Quando utilizam o algoritmo o que a maior parte das crianças faz é: 6 + 9 = 15, colocam o 5 e sobra 1 que juntam à ordem seguinte 1 + 6 + 9 = 16, colocam o 6 e sobra de novo 1 que juntam à ordem seguinte 1 + 3 + 1 = 5. Aqueles que são capazes de pensar por si próprias, inventando os seus próprios procedimentos, fazem: 300 + 100 = 400; 60 + 90 = 150; 6 + 9 = 15, concluindo que 400 + 150 + 15 = 565 ou 366 + 199 = 300 + 200 + 65 = 565; desenvolvendo estratégias de cálculo.

Verschaffel et al. (2007) referem a necessidade do aluno passar por uma fase conceptual extensa, durante a qual contactará com uma grande variedade de modelos de situações para cada operação aritmética.

Gravemeijer e Galen (2003) contribuindo também para a desvalorização de uma aprendizagem precoce dos algoritmos, defendem que os alunos podem reinventar procedimentos e algoritmos que irão contribuir para desenvolver a sua compreensão matemática. Estes autores salientam, no entanto, que os algoritmos são uma componente essencial da Matemática. A grande questão coloca-se ao nível de introduzir os algoritmos aos alunos: não podem ser apresentados de uma forma pronta.

Rocha e Menino (2009) defendem que ensinar aos alunos algoritmos que não compreendem e que não foram naturalmente desenvolvidos, tem potencialidades muito limitadas.

Fosnot e Dolk (2001) consideram que os alunos desenvolvem o conceito de multiplicação a partir de determinadas situações do dia-a-dia, onde as crianças vão dando sentido ao que veem e fazem. Segundo os mesmos autores, a ideia que os alunos têm da multiplicação determina a forma como eles multiplicam, o modelo que usam para organizar os dados e a forma como calculam.

De acordo com Treffers e Buys (2001) a primeira abordagem à multiplicação passa normalmente pela adição sucessiva de parcelas iguais. É nesta fase, quando reconhecem que três mais três é o mesmo que duas vezes três, que os alunos começam a desenvolver o conceito de multiplicação. Este conhecimento é aprofundado quando usam de forma flexível as propriedades da multiplicação para operar, recorrendo simultaneamente a produtos conhecidos, como por exemplo das tabuadas. Finalmente, podemos dizer que o aluno domina a multiplicação quando relaciona esta operação com a divisão, reconhecendo uma como inversa da outra; quando percebe e usa de forma inteligente factos, relações e propriedades na resolução de problemas de multiplicação; e quando percebe os diferentes sentidos desta operação.

No início da aprendizagem da multiplicação, os alunos começam por resolver problemas através da contagem por grupos, usando adições repetidas e recorrendo depois a factos multiplicativos conhecidos, evoluindo no cálculo à medida que o conceito de multiplicação se vai construindo e se demarca da adição (Treffers & Buys, 2001).

Seguindo a perspetiva de Fosnot e Dolk (2001) e Treffers e Buys (2001) o desenvolvimento da multiplicação considera diferentes sentidos : i) sentido aditivo ligado à repetição de medidas ou quantidades, ii) sentido proporcional e iii) sentido combinatório.

Frequentemente os alunos, perante um problema de multiplicação, respondem-nos com uma adição de parcelas iguais. Apesar de, alguns no seu discurso até utilizarem a palavra “ vezes” isso pode significar unicamente a ideia de repetição de uma quantidade, pois eles acabam por adicionar e obter uma soma. Outros há que transformam essa soma num produto (Mendes & Delgado, 2008).

Inicialmente, os modelos construídos pelas crianças para representar situações multiplicativas estão associados à ideia de multiplicação como adição sucessiva de parcelas iguais. No entanto, à medida que as ideias sobre a multiplicação vão-se consolidando e evoluindo, também os modelos devem acompanhar o desenvolvimento progressivo das ideias e das estratégias relacionadas com a multiplicação. Progressivamente recorrem, entre outras, a disposições retangulares que suportam o raciocínio multiplicativo e tabelas de razão que suportam o raciocínio proporcional (Mendes, Brocardo & Oliveira, 2013).

Treffers e Buys (2001) consideram que na aprendizagem da multiplicação podem-se distinguir três níveis de aprendizagem: i) cálculo por contagem, ii) cálculo estruturado e iii) cálculo formal.

Num cálculo por contagem, os alunos adicionam para multiplicar. Podendo aqui enquadrar-se a adição repetida de parcelas iguais. Neste nível não é explícito o uso da multiplicação enquanto operação. Num nível de cálculo estruturado, as estratégias usadas pelos alunos incluem o uso explícito da multiplicação. Surge a ideia de que uma mesma quantidade se repete “tantas vezes”.

Consideram também que os contextos das tarefas têm um importante papel na estruturação da multiplicação e no estabelecimento de algumas relações numéricas que evidenciam as propriedades da multiplicação. O cálculo formal corresponde ao cálculo do produto entre dois números, recorrendo a diferentes relações entre a multiplicação e outras operações¸ ao uso das propriedades da multiplicação e o recurso a produtos já conhecidos.

A grande diferença entre o cálculo estruturado e o cálculo formal é que neste último não existem modelos de apoio ao cálculo, todos os cálculos são pensados num nível unicamente numérico. Por exemplo para um aluno calcular 12x8 e efetuar um cálculo formal ele pode basear-se na propriedade comutativa fazendo 8x12 e recorrer a factos que conhece da tabuada do 8, pode decompor o 12 em 10+2 para facilitar o cálculo e usar a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

Fosnot e Dolk (2001) perspetivam o tipo de contextos a usar indicando que, para além de apostar na sua diversidade — ideia igualmente salientada pelo NCTM (2007) — importa propor contextos que estruturem progressivamente a multiplicação, começando com grupos de objetos com o mesmo cardinal e avançando para situações relativas a grupos de objetos aos quais se associe uma disposição retangular.

Considera-se que numa situação em que os alunos têm que determinar o número de frutos dispostos em caixas com estrutura retangular, eles recorrem à multiplicação com base no modelo retangular. Com a exploração dessa tarefa pode-se visualizar facilmente a propriedade comutativa da multiplicação e as várias partições dos números que podem ser feitas, evidenciando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

Numa situação em que o contexto implica calcular os preços de artigos a partir de um preço unitário procura-se desenvolver o sentido proporcional da multiplicação e que os alunos recorram a outros modelos que o suportam como a linha dupla ou as tabelas de razão.

Por fim, o sentido combinatório da multiplicação, está presente, de acordo com os autores, em contextos como o combinar vestuário ou fazer menus dados vários ingredientes. Nesta situação pretende-se que os alunos recorram ao uso de esquemas em árvore ou tabelas e ao cálculo recorrendo à multiplicação.

Segundo Treffers e Buys (2001) a aprendizagem da multiplicação deve ser um processo de desenvolvimento conceptual baseado na exploração de contextos adequados, os quais podem ser fornecidos através dos problemas de contexto e dos modelos subjacentes. Estes autores consideram que os problemas de contexto revelam aspetos fundamentais das estruturas multiplicativas que lhe estão associadas e permitem identificar propriedades da multiplicação a partir dos problema e dos respetivos modelos.

O professor deverá construir ou selecionar contextos de situações que possam ser matematizadas pelos alunos (Mendes & Delgado, 2008).

Os contextos dos problemas assumem uma particular importância no ensino e aprendizagem da multiplicação pois permitem à criança o uso de modelos. Fosnot e Dolk (2001) consideram que esses contextos deverão reunir três componentes importantes: i)permitir o uso de modelos, ii)"fazer sentido" para os alunos e iii)criarem surpresa e suscitarem questões. Salientam ainda que as tarefas propostas aos alunos devem ter subjacentes imagens ou situações que conduzam ao uso de determinado modelo. Quando confrontamos a criança com uma estrutura retangular pretendemos que os alunos recorram ao modelo retangular. A utilização do mesmo modelo em diferentes situações permite-lhe generalizar o seu uso a outros problemas.

Para Fosnot e Dolk (2001) "fazer sentido" para os alunos, é outra característica intrínseca ao contexto. Independentemente de serem contextos do dia-a-dia ou até outros imagináveis pelas crianças, devem ser sempre situações facilmente reconhecidas pelos alunos, em que estes consigam avaliar a razoabilidade dos resultados. Para além disso os contextos devem criar surpresa e por vezes, podem dar origem a outros problemas matemáticos.

Em síntese, caberá ao professor selecionar ou construir contextos que incluam situações que possam ser matematizados pelos alunos (Mendes & Delgado, 2008).

Os contextos, para além de permitirem gerar e explorar ideias matemáticas, possibilitam também uma exploração a vários níveis, pois cada aluno, com os conhecimentos que possui, deve conseguir resolvê-los (Fosnot & Dolk, 2001).

No início da aprendizagem da multiplicação os modelos construídos pelas crianças estão muito associados à sua interpretação da situação proposta e emergem da representação da ação, sendo designados por modelos de situação (Gravemeijer,2005).

Greer (1992) propõe uma síntese de quatro tipos semânticos, que denomina por modelos de situações, associados aos problemas de multiplicação com números inteiros positivos: i)grupos iguais, ii) comparação multiplicativa, iii) disposição retangular e iv) produto cartesiano.

As situações de grupos iguais são as que encontramos mais frequentemente no nosso quotidiano (Baek, 2005). Um exemplo deste tipo de situações é o problema: A Maria tinha sete sacos de bombons. Cada saco tinha 20 bombons. Quantos bombons tem a Maria?.

Neste tipo de problemas as crianças trabalham com o número de grupos, neste exemplo os sete sacos (multiplicador) e o número de objetos de cada um dos grupos (multiplicando) que aqui são os vinte bombons.

Uma situação de comparação multiplicativa é por exemplo : A Joana tem cinco cromos. O Miguel tem cinco vezes mais. Quantos cromos tem o Miguel?

De acordo com Greer(1992) as situações de grupos iguais e de comparação multiplicativa são situações que são "psicologicamente não comutativas" (assimétricas). Segundo o autor, nestas situações o multiplicador e o multiplicando podem ser distinguidos, exemplificando com as situações de grupos iguais, onde o número de objetos de cada grupo é o multiplicando e o número de grupos é o multiplicador. Contrariamente, na situação de disposição retangular e de produto cartesiano, os números envolvidos tem características simétricas, pois o multiplicador e o multiplicando não se diferenciam. Por exemplo, perante uma caixa de bombons com 3 filas e 4 colunas, para calcular o total de bombons, será indiferente fazermos 3x4 ou 4x3, chegamos ao mesmo produto. De igual modo numa situação entendida como produto cartesiano, em que queremos saber todas as possibilidades de combinar duas camisolas com quatro calças, será indiferente dizermos que é 2x4 ou 4x2.

Anghileri (2002) considera que a categorização sobre os tipos semânticos ou modelos de situação proposto por Greer (1992) constituiu um quadro útil para a investigação, nomeadamente na pesquisa empírica, ou seja, nos estudos relacionados com as estratégias de resolução usadas pelos alunos, as suas dificuldades e os erros típicos cometidos por estes na resolução de problemas que envolvem a multiplicação e divisão.

2.2.2. ESTRATÉGIAS E DIFICULDADES NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS MULTIPLICATIVOS

Embora haja um considerável número de investigações que se centraram no estudo das estratégias (e.g. Anghileri (1989), Kouba (1989) Mulligan e Mitchelmore (1997)), estas diferem nas estratégias descritas e como tal na terminologia usada. São frequentemente, relacionadas com tipos semânticos ou modelos intuitivos e, por vezes, o termo estratégias de cálculo é substituído por outros tais como procedimentos de solução e estratégias de solução (Sherin & Fuson, 2005).

As estratégias utilizadas pelos alunos na resolução de problemas de palavras que envolvem situações de multiplicação e divisão foram estudadas por diversos autores, sendo que aqui referimo-nos aqueles que serviram de referência à elaboração deste estudo.

O estudo realizado por Anghileri (1989) procurou identificar as estratégias dos alunos que os alunos apresentam na resolução de problemas que envolvem multiplicação e divisão envolvendo apenas números dígito, sendo que o maior produto envolvido foi 5x4. O estudo realizado implicava a resolução de problemas de diferentes categorias: começando pelos problemas que envolviam grupos iguais, passando pelo modelo retangular e o produto cartesiano. Este estudo permitiu-lhe concluir que as primeiras experiências das crianças com a multiplicação surgem quando elas fazem agrupamentos com igual quantidade de objetos e reconhecem a possibilidade da contagem por grupos, sem fazerem uma contagem unitária. Isso acontecia naturalmente com pares de sapatos ou com conjuntos de carrinhos. Os procedimentos informais que as crianças usam nos anos iniciais podem ser ponto de partida e ser substituídos mais tarde por procedimentos mais formais (algoritmos).

Anghileri (1989) concluiu que as maiores dificuldades dos alunos na resolução deste tipo de problemas que envolvem multiplicação prendem-se com a linguagem, a diferença entre o inglês comum e o inglês matemático. Termos como coluna e fila causaram alguma confusão entre os alunos.

Uma outra dificuldade identificada pela autora prendeu-se com as dificuldades de processamento da informação, pois as crianças não usam os números envolvidos de modo adequado. A autora considera que a multiplicação envolve três tipos de informação que embora interligados, são distintos: o número de elementos de cada conjunto (multiplicando), o número de conjuntos ou grupos (multiplicador) e o procedimento para calcular o produto. A contagem pelos dedos, por vezes, também dificultou, pois por exemplo para calcular o produto de 4x3 será diferente contar sempre um a um (um, dois, três… quatro, cinco, seis… sete, oito, nove) de contar ritmicamente (3,6,9) embora se apoie também nos dedos. Por vezes os alunos confundem-se e surgem erros associados a essa contagem. A autora considera que os alunos começam precisamente com uma contagem unitária, passam para uma contagem rítmica e depois encontram os números padrão.

A análise das estratégias dos alunos permitiu a Anghileri (1989) concluir que existe uma grande variedade de procedimentos: a modelação direta com contagem unitária, contagem rítmica, o uso de números padrão, a adição repetida, a duplicação e a duplicação combinada com a adição, o uso de fatos conhecidos da adição e o uso de factos conhecidos da multiplicação. Os alunos que usam a contagem rítmica contam, por vezes, de um em um, colocando maior ênfase nos subtotais (Ex: 1,2,3…3;4,5,6…6) suportando-se nos dedos da mão. Outros só verbalizam os subtotais (3…6…9) mas, suportam-se nos dedos para manter o registo de quantos agrupamentos já contaram.

O uso dos números padrão implica uma contagem por agrupamentos, é mais rápida que a contagem rítmica e os alunos fazem contagens de 2 em 2, 3 em 3, consoante os agrupamentos que têm , podendo até suportarem-se nos dedos para quantificar apenas os agrupamentos

(3,6,9,12,15,18). Poucos alunos utilizaram a mesma estratégia em todas as tarefas (8%). Somente as crianças que apresentam um perfil acima da média é que recorreram ao uso de factos já conhecidos. A maioria dos alunos apresentou três estratégias diferentes ao longo das tarefas. No geral, a contagem e a modelação direta com objetos foram as estratégias mais utilizadas (81%). O recurso à modelação foi muito evidente na resolução de tarefas que implicavam o produto cartesiano e o fator escalar.

Kouba (1989) realizou um estudo em que crianças do primeiro, segundo e terceiro anos resolveram problemas de multiplicação e divisão. Segundo o autor a estrutura semântica dos problemas de palavras de um passo que envolvem a multiplicação e divisão podem influenciar as estratégias dos alunos. Refere-se à interpretação das quantidades envolvidas, por exemplo nos problemas de agrupamentos iguais (3 cerejas em cada prato), nos de comparação multiplicativa (3 vezes mais) e no de produto cartesiano (combinações possíveis com 3 camisolas e duas saias) conduzem ao uso de estratégias diferentes por parte dos alunos. De acordo com o autor os problemas de produto cartesiano foram os mais difíceis de resolver pelos alunos.

Ao analisar as estratégias dos alunos Kouba (1989) categorizou-as: representação direta (contagem unitária ou contagem a partir do primeiro agrupamento), dupla contagem (só na divisão), contagem de transição (contagem por saltos), adição ou subtração repetida e o uso de factos numéricos conhecidos. Analisando as estratégias utilizadas pelas crianças na resolução de problemas que envolviam a multiplicação, Kouba (1989) verificou que a estratégia mais comum nos alunos do primeiro ano foi a representação direta, no segundo ano os alunos privilegiavam o uso da adição repetida e no terceiro ano recorriam frequentemente ao uso de factos numéricos conhecidos.

Mulligan (1992) num estudo longitudinal com crianças pequenas analisou as suas estratégias de resolução de problemas de divisão e multiplicação de diferentes tipos: adição repetida, razão, fator, modelo retangular e produto cartesiano. A análise realizada indicou que 75% das crianças foram capazes de resolver a maioria dos problemas que envolviam pequenas quantidades, em algum momento, mesmo quando não tinham aprendido a multiplicação ou divisão. Os resultados obtidos permitiram também concluir que nos problemas de produto cartesiano os alunos manifestaram dificuldades na sua resolução.

O estudo realizado por Mulligan e Mitchelmore (1997) envolveu alunos australianos do segundo e terceiros anos, aos quais foram propostos 24 problemas de palavras com um passo, com o propósito de identificar e agrupar as estratégias de cálculo usadas e relacioná-las com modelos intuitivos de multiplicação e divisão. Os problemas de palavras (*"word problems"*) apresentados inseriam-se na tipologia de problemas proposta por Greer (1992). No que se refere à multiplicação foram apresentados problemas que envolviam situações de grupos iguais, de razão, de comparação multiplicativa, de disposição retangular e de produto cartesiano. Os modelos intuitivos associados à multiplicação emergentes desta recolha de dados foram: contagem direta, adição repetida e operação multiplicativa.

De acordo com Mulligan e Mitchelmore (1997) o modelo de contagem direta concretizou-se na utilização de estratégias de uso de material concreto ou de desenhos para resolver um problema. O modelo de adição repetida estava associado a estratégias de contagem crescente ritmada, contagem por saltos para a frente, de adição repetida e de adição de dobros. O modelo de operação multiplicativa estava relacionado com estratégias que usam a multiplicação enquanto operação formal, tais como o conhecimento de factos multiplicativos básicos e de factos multiplicativos derivados. Ao longo dos dois anos em que decorreu o estudo realizado pelos referidos autores, os modelos intuitivos dos alunos foram evoluindo. Mesmo quando os algoritmos já tinham sido introduzidos, muitas crianças continuavam a usar os seus próprios métodos para resolver os problemas com maior sucesso.

Os resultados da investigação de Mulligan e Mitchelmore (1997) apontam três fatores a considerarmos a propósito da aprendizagem da multiplicação. Segundo eles, os alunos progridem na sua capacidade de interpretar problemas de palavras que envolvem o raciocínio multiplicativo, mesmo sem terem recebido instrução específica sobre a multiplicação; pois constroem os seus próprios modelos intuitivos, mesmo que para isso recorram à contagem direta(por exemplo utilizando os dedos). Um outro fator a ter em conta no ensino e aprendizagem da multiplicação é o momento em que os alunos começam a reconhecer a estrutura de grupos iguais em muitas das situações multiplicativas que lhes são apresentadas, o que permite-lhes desenvolver a adição repetida e, progressivamente, a multiplicação e aplicá-las numa ampla gama de problemas. O reconhecimento dos grupos iguais não se torna evidente nas situações multiplicativas de produto cartesiano, o que causa maiores dificuldades neste tipo de situação.

Os autores consideram ainda que os alunos, habitualmente, aprendem as contagens de dois em dois e cinco em cinco, para mais tarde aprenderem outras sequências. Fazem-no primeiramente com recurso à modelagem concreta (ex.: utilizando os dedos) e progressivamente vão memorizando os factos básicos da multiplicação (ex.: dobros) porque os compreenderam e atribuíram-lhes um significado e estes não foram, simplesmente, aprendidos de cor.

Baek (1998) realizou um estudo com alunos de terceiro e quarto anos, a partir do qual descreve as estratégias construídas e inventadas pelas crianças quando resolvem problemas de multiplicação. Assim considera diferentes categorias. Numa primeira categoria considerou as estratégias de modelação direta, onde os alunos manipulavam materiais para fazer os agrupamentos sugeridos ou faziam desenhos. Numa segunda categoria considerou a adição repetida e a adição dos dobros, em que os alunos recorrem à adição repetida do multiplicando ou recorrem à adição dos dobros para tornar mais rápido o processo de cálculo da adição repetida. Na terceira categoria inclui as estratégias de partição de números que os alunos utilizam para a partição de um dos fatores ou de ambos para facilitar o cálculo, como por exemplo no cálculo do produto 5x177, sabendo que 15=5x3 recorrem à partição e fazem primeiro 3x177 e só depois 5x177.Associada ao uso desta estratégia de partição pode também ocorrer a decomposição decimal de um dos fatores, permitindo evidenciar a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição (Exemplo: 5x16 = (5x10) + (5x6)).

Uma quarta categoria sugerida por Baek (1998) inclui as estratégias de compensação, em que há um ajuste dos números envolvidos que pode ocorrer apenas num dos fatores ou em ambos, exemplificando que para calcular o produto de 5 x250 o aluno pode recorrer à metade de 250 que são 125 e depois compensando em vez de multiplicar por 5 , multiplica pelo seu dobro 10 e obtém o produto que são 1250.

Ambrose, Baek e Carpenter (2003) concluíram que geralmente as crianças desenvolvem as suas estratégias de cálculo para números multi-digitos numa sequência que se inicia com a modelação direta, depois o uso de adições e dobros e por fim o uso de algoritmos inventados usando o dez. Esta última categoria inclui a partição do multiplicador em dezenas e unidades e a partição do multiplicando e do multiplicador. Segundo estes autores a propriedade comutativa da multiplicação não foi facilmente aplicada pelas crianças do estudo, o que era evidente quando as crianças tinham que resolver 24x10= e 10x24= . As crianças calculavam facilmente 24x10 mas isso não aconteceu no 10x24. Quando o 10 é o multiplicando, as crianças usam os seus conhecimentos da base 10, quando 10 é o multiplicador recorriam geralmente à adição repetida das parcelas, quando podiam fazê-lo logo, através da propriedade comutativa e responder que eram 240.

Sherin e Fuson (2005) apresentaram uma taxonomia sobre as estratégias apresentadas pelos alunos na resolução de problemas de multiplicação e divisão. Os dados em que se baseia a taxonomia referida basearam-se em estudos efetuados não só por Sherin e Fuson (2005) mas, também, por outros investigadores. Assim, as estratégias foram divididas em estratégias canónicas e estratégias híbridas. As estratégias canónicas identificadas por estes autores são: contar tudo, cálculo aditivo, contar a partir de, baseadas em padrões e produtos aprendidos. O uso de estratégias híbridas resulta da combinação de diferentes estratégias, nomeadamente o uso da multiplicação, contagem por sequências, contar tudo e cálculos aditivos.

Os problemas de multiplicação podem ser resolvidos utilizando uma variedade de estratégias, no entanto, e a investigação nesta área indica que muitas crianças continuam a usar o pensamento aditivo para resolver problemas de multiplicação (Mulligan & Mitchelmore, 1997).

Em Portugal os estudos existem alguns estudos realizados sobre a aprendizagem das operações em que os problemas fornecem o contexto que permite o desenvolvimento de sentido de número e das operações (Gonçalves, 2008; Mendes, 2012; Ferreira, 2012) sentidos que são considerados fundamentais nos primeiros anos da escolaridade básica.

Relativamente aos estudos sobre a aprendizagem da multiplicação encontramos recentemente o estudo de Mendes (2012) através da realização de uma experiência de ensino numa turma de terceiro ano, procurou perceber como os alunos desse ano de escolaridade evoluíam na aprendizagem da multiplicação numa perspetiva de desenvolvimento do sentido de número. O estudo foi orientada por uma conjetura sobre a aprendizagem da multiplicação numa perspetiva de desenvolvimento do sentido de número e, a partir daí, foram construídas e selecionadas sequências de tarefas que foram sendo propostas aos alunos, pela sua professora, tendo concluído que os alunos participantes no estudo utilizavam grande diversidade de estratégias que foram evoluindo, passando de procedimentos de contagem, a procedimentos aditivos e, finalmente, a procedimentos multiplicativos baseados em relações numéricas e propriedades desta operação. Segundo a autora esses procedimentos parecem poder enquadrar-se em categorias mais ou menos definidas e semelhantes às identificadas por outros investigadores.

No quadro 2 apresenta-se uma síntese da categorização das estratégias encontradas pelos diferentes autores referidos em resultado das investigações que realizaram.

Relativamente às dificuldades encontradas por Mendes (2012) estas foram de natureza diversa e organizadas em quatro grupos: i) associadas ao contexto das tarefas, ii) relativas aos números utilizados nas tarefas, iii) na realização dos registos escritos e iv) na compreensão do raciocínio dos outros.

Segundo a autora o contexto das tarefas parece, em alguns casos, ter-se revelado de difícil compreensão para os alunos, como consequência do seu desconhecimento sobre o significado de algumas palavras ou expressões utilizadas. No início da experiência de ensino os alunos revelavam dificuldades em lidar com “números grandes” , com os quais ainda não estavam habituados a lidar , através da multiplicação, privilegiando o uso de procedimentos aditivos em vez dos multiplicativos. Mais tarde, quando os alunos resolveram tarefas com números racionais não negativos, na representação decimal, o seu conhecimento, ainda pouco aprofundado, sobre estes números provocou-lhes dificuldades, levando a que usassem procedimentos menos potentes e alguns aplicados incorretamente.

Os alunos do estudo realizado por Mendes (2012) manifestaram dificuldades na produção dos registos escritos ligados ao uso adequado e rigoroso da simbologia matemática. No início, essa dificuldade pareceu-lhe estar relacionada com o próprio processo de aprendizagem da multiplicação e com a consequente introdução da simbologia apropriada, com a qual os alunos não estavam ainda habituados a trabalhar. Para além disso, a autora notou dificuldades na organização dos registos escritos, sendo que frequentemente os alunos só apresentavam o resultado final e a explicitação do modo de pensar usando um registo escrito nem sempre foi fácil para os alunos. Em algumas resoluções, por vezes, nem os seus autores conseguem perceber posteriormente os próprios registos, o que dificultou a partilha de estratégias em grande grupo e consequentemente conduziu a dificuldades de compreensão do raciocínio dos alunos que apresentavam a estratégia. Estas dificuldades parecem também estar associadas a alunos que utilizam procedimentos mais informais e menos potentes na resolução de uma tarefa e não são capazes de compreender raciocínios mais elaborados que parecem constituir modos de pensar de um nível superior ao seu.

As discussões coletivas constituíram momentos privilegiados para que os alunos ultrapassassem algumas das suas dificuldades associadas à compreensão da tarefa ou de procedimentos diferentes dos seus.

Autores	Anghileri (1989)	Kouba (1989)	Mulligan e Mitchelmore (1997)	Baek (1998)	Ambrose, Baek e Carpenter (2003	Sheron e Fuson (2005)
Estratégias	Contagem unitária Contagem rítmica Os números padrão Adição repetida A duplicação Uso de fatos conhecidos da adição Uso de factos multiplicativos	Modelação direta (contagem unitária com objetos, contagem a partir de grupos de objetos) Contagem de transição (contagem por saltos) Adição (adição repetida) Uso de factos numéricos conhecidos	Contagem unitária /contagem direta Adição repetida - contagem por saltos - contagem rítmica - adição repetida - duplicação Operação multiplicativa - conhecimento de factos multiplicativos básicos - conhecimento de factos multiplicativos derivados	Modelação direta Adição repetida Uso de dobros Compensação Partição de números	Modelação direta Uso de adições e de dobros - adição de dobros - uso complexo de dobros - construção a partir de outros fatores Algoritmos inventados usando o dez - partição do multiplicador em dezenas e unidades - partição do multiplicador e do multiplicando	Contar tudo (inclui as técnicas de desenho, uso dos dedos das mãos) Cálculo aditivo (5 x g =g+g+g+g+g) Contagem a partir de (uso de algumas sequências conhecidas como 2,5 e 10) como meio de contagem rápida Baseada em padrões (os padrões envolvendo 0,1,5 e 10 surgem cedo. Mais tarde o desenvolvimento dos padrões com 9s) Padrões aprendidos (algumas tríades de multiplicação com números pequenos surgem cedo, os produtos das tabuadas do 6,7 e 8 são aprendidos mais tarde) Estratégias híbridas (resultam da combinação de estratégias anteriores)

Tabela 2: Quadro síntese da categorização de estratégias usadas pelos alunos na resolução de problemas de multiplicação

2.2.3. ORIENTAÇÕES CURRICULARES

O NCTM (2007) preconiza para os três primeiros anos (K-2) um trabalho ao nível da sala de aula que promova a compreensão dos alunos sobre as diversas situações associadas à multiplicação, realçando as que correspondem à repetição de grupos iguais (sentido aditivo da multiplicação). Para além destas situações, defende também que nos três primeiros anos, sejam exploradas outras situações que ampliem o conhecimento sobre esta operação, sendo referidas, explicitamente, as relacionadas com preços, comparações e combinações. O próprio modelo de área também foi apontado como uma forma de tornar evidentes para os alunos as propriedades da multiplicação, nomeadamente a propriedade comutativa.

As orientações curriculares previstas nas Normas apontam que “a resolução de problemas deve fornecer o contexto em que os conceitos devem ser aprendidos e as competências desenvolvidas” (NCTM, 1991, p. 29).

O Programa de Matemática do Ensino Básico - PMEB (ME, 2007) realça como aspetos fundamentais a serem desenvolvidos nos dois primeiros anos do 1.º ciclo, a compreensão da multiplicação no sentido aditivo, à semelhança do NCTM (1991) e no sentido combinatório. O conhecimento da multiplicação, tal como as restantes operações aritméticas, aparece associado à compreensão dos seus efeitos nos números, à resolução de problemas em contextos diversos e ao uso de estratégias de cálculo mental baseadas nas suas propriedades. Nas notas aconselham que se proponham aos alunos situações em que o modelo retangular seja adequado para resolver a situação.

No que respeita à construção das tabuadas o PMEB (ME, 2007) defende a sua construção baseada na compreensão sobre a operação e as suas propriedades, propondo inicialmente a construção da tabuada dos números dois, cinco e dez e, posteriormente se construa a tabuada do número quatro a partir da tabuada do número dois, bem como a tabuada do número seis a partir da do número três; dando-se assim especial destaque às relações entre os produtos e nomeadamente os que envolvem dobros. Assim, recorrendo às propriedades da multiplicação e às relações numéricas, os alunos podem construir e reconstruir quase todas as tabuadas.

A resolução de problemas é considerada uma atividade fundamental para a aprendizagem dos diversos conceitos, representações e procedimentos matemáticos. O professor deve proporcionar situações frequentes em que os alunos possam resolver problemas, analisar e refletir sobre as suas resoluções e as resoluções dos colegas (ME, 2007).

A preocupação de desenvolver a compreensão da multiplicação através da resolução de problemas com contextos diversos vinha já do programa anterior, em que a resolução de problemas era encarada como a atividade central em Matemática (DGEBS, 1990)

Atualmente o programa de Matemática (MEC, 2013) prevê que no segundo ano se inicie o trabalho com a multiplicação, sendo que este deve envolver: (i) sentido aditivo e combinatório; (ii) o símbolo «x » e os termos «fator» e «produto»; (iii) produto por 1 e por 0 ; (iv) tabuadas do 2,3,4,5,6 e 10 ; (v) os termos «dobro», «triplo», «quádruplo» e «quíntuplo»; (vi) problemas de um ou dois passos envolvendo situações multiplicativas nos sentidos aditivo e combinatório.

Neste programa a resolução de problemas é encarada como um campo de aplicação adequado de regras e procedimentos, previamente estudados e treinados. Estas regras e procedimentos são o domínio dos algoritmos e as regras de cálculo que deverão constituir " um objeto particular de atenção no ensino " da matemática.

Neste estudo encaramos o ensino e a aprendizagem da multiplicação no sentido do PMEB (ME, 2007), que é fundamentado na investigação nacional e internacional que tem vindo a ser feita em Educação Matemática.

CAPÍTULO 3 – METODOLOGIA

Este capítulo surge dividido em dois pontos, com o propósito de apresentar, descrever e justificar as opções tomadas para efetuar o estudo.

No primeiro ponto apresenta-se e justifica-se o paradigma de investigação em que assenta o estudo. No segundo ponto apresentam-se os procedimentos metodológicos tomados para levar a cabo este estudo. Apresentam-se os participantes do estudo, com uma breve caraterização da turma. De seguida surgem os procedimentos metodológicos necessários à realização do estudo, nomeadamente os relativos aos participantes, às tarefas realizadas, à recolha de dados e à sua análise e interpretação.

3.1 OPÇÕES METODOLÓGICAS

Um dos aspetos fundamentais para a realização de uma investigação prende-se com as opções metodológicas, sendo que o objetivo e as questões a que a investigação se propõe responder têm um papel fundamental nas referidas opções.

Dado que o presente estudo, teve como objetivo perceber como se processava a aprendizagem da multiplicação a partir da resolução de uma sequência de tarefas, num contexto de ensino exploratório e os dados recolhidos estavam intimamente ligados à prática, existindo uma intenção clara de melhoria do processo de ensino e aprendizagem e assistia-se ao duplo papel do professor-investigador, adotou-se o paradigma de Investigação-Ação.

A Investigação-Ação (I-A) tem sido aplicada em diversos contextos de investigação e nomeadamente no contexto educativo, não sendo possível, por isso, encontrar uma definição única (Coutinho, 2005).

Para Latorre (2003) a Investigação-Ação constitui-se como uma metodologia de investigação que se distancia das outras metodologias de investigação, porque requer um projeto de ação como parte integrante do processo de investigação, sendo que o investigador reflete sobre a sua prática/ação.

De acordo com Coutinho, Sousa, Dias, Bessa, Ferreira e Vieira (2009) a Investigação-Ação ao distanciar-se do paradigma positivista pela seu excessivo objetivismo e do paradigma interpretativo pela propensão para a subjetividade, enquadra-se no paradigma socio-crítico, distinguindo-se dos demais pela sua componente ideológica e valorativa que está presente na investigação e que acaba por determinar o conhecimento que daí possa advir.

Latorre (2003) considera que a Investigação-Ação é a que mais se aproxima do meio educativo, sendo mesmo apresentada como a metodologia do professor-investigador.

Neste estudo, o investigador foi simultaneamente professor e investigador, baseando a sua investigação num diálogo constante entre a prática e a reflexão. Mais do que refletir na ação, que é intrínseco à própria prática letiva, procurou-se contribuir para o desenvolvimento, aperfeiçoamento ou mesmo mudança das práticas docentes, tendo como finalidade perspetivar e efetivar novas práticas, na medida em que permitiu ao professor/investigador perceber melhor os acontecimentos decorrentes da sua prática educativa e, reorientar a sua ação no futuro (Shon (1983), citado em Coutinho (2011)).

A propósito do papel do professor na Investigação-Ação, Sanches (2005) afirma:

> O professor, ao questionar-se e questionar os contextos/ambientes de aprendizagem e as suas práticas, numa dialética de reflexão-ação-reflexão contínua e sistemática, está a processar a recolha e produção de informação válida para fundamentar as estratégias/atividades de aprendizagem que irá desenvolver, o que permite cientificar o seu ato educativo. (p.130)

Desta forma, esta relação dialética entre ação e reflexão sistemática e continuada em que o professor se envolve conduziu a uma práxis mais informada, mais rigorosa e mais científica. Daí que a I-A seja associada ao modelo de uma espiral, uma espiral de planificação e ação em busca de factos sobre os resultados das ações tomadas, um ciclo de análise e reconceptualização do problema, planeando a intervenção, implementando o plano, avaliando a eficácia dessa intervenção (Matos, 2004).

Para Latorre (2003, p.32) a Investigação-Ação caracteriza-se precisamente pelo seu carácter cíclico, que implica " um vaivém-uma espiral dialética – entre a ação e a reflexão, de tal modo que estes momentos andam integrados e complementam-se".

O professor-investigador, para além de compreender e conhecer melhor a problemática que envolveu e ressaltou da sua prática docente, desenvolveu um processo de "ideologia crítica" tendente à mudança estratégica e metodológica perante os objetivos curriculares e os valores ideológicos subjacentes ao edifício educativo (Latorre, 2003).

Coutinho (2006) considera-a como uma modalidade de investigação aplicada inspirada no paradigma socio-crítico em que o objetivo principal do investigador é intervir diretamente numa situação ou contexto e solucionar problemas reais.

De acordo com vários autores (e.g. Elliot (1991), Simões (1990), Cohen e Manion (1994), MacTaggart (1994), Cortesão (1998), citados em Coutinho (2011)) o caráter situacional, interventivo, auto avaliativo e participativo constituem características individualizadoras da

Investigação-Ação. Assume um carácter situacional dado que visa o diagnóstico e a busca de uma solução para um problema encontrado num contexto social específico. É interventiva pelo facto do investigador não se limitar a descrever o problema, como o que acontece em muitos estudos qualitativos, mas sobretudo a intervir nele, a ação é uma ação deliberada. O carácter auto avaliativo da Investigação-Ação é-lhe reconhecido na medida em que as modificações vão sendo continuamente avaliadas, com vista a produzir novos conhecimentos e a alterar a prática. A Investigação-Ação é participativa no sentido em que todos os intervenientes na investigação, e não somente o investigador, são coexecutores na pesquisa (Coutinho, 2011)

Neste sentido, este estudo assentou numa metodologia de Investigação-Ação, pois apresenta as características individualizadoras da I-A apontadas por Coutinho (2011). A investigação assumiu um carácter situacional, pois buscou soluções para um problema sentido num contexto social específico que foi o da realidade educativa do agrupamento de escolas em que o investigador exerceu a sua atividade, nomeadamente os fracos resultados obtidos pelos alunos de segundo ano nos Testes Intermédios que apresentaram valores preocupantes no domínio dos Números e Operações. Assumiu um carácter interventivo dado que implicou um envolvimento do investigador na prática, existindo uma ação deliberada e uma intenção em todo o trabalho que foi desenvolvido com os seus alunos enquanto professor e investigador, que foi o de melhorar a prática educativa e consequentemente o aproveitamento dos alunos. Teve um carácter auto avaliativo, dado que olhou criticamente para a ação do dia-a-dia da sala de aulas, da reflexão feita sobre as aulas, procurando retirar dela os ensinamentos para planificar a ação futura, reorganizando os grupos de trabalho e fazendo ajustes nas tarefas.

O essencial da Investigação-Ação é esta exploração reflexiva que o professor faz da sua prática, contribuindo dessa forma não só para a resolução do problema mas também, e principalmente, para a planificação e introdução de alterações dessa e nessa mesma prática (Coutinho et al., 2009).

Esta investigação assumiu ainda um carácter participativo, uma vez que implicou todos os intervenientes no processo. O investigador não foi um agente externo, foi o próprio professor que junto com os seus alunos constituíram uma realidade educativa que serviu de cenário à investigação.

Para além disso, o investigador coordenou o grupo de segundo ano, reuniu com outros professores que trabalhavam com turmas do mesmo ano e conjuntamente planificaram as atividades a realizar semanalmente, Apesar dos materiais de apoio às aulas serem elaborados pelo professor-investigador, estes foram partilhados com os colegas do grupo de trabalho e trocaram-se impressões sobre o processo de ensino e aprendizagem e a forma como os alunos resolveram as tarefas.

3.2 Procedimentos metodológicos

3.2.1. Participantes

Esta investigação decorreu do trabalho desenvolvido com um grupo de dezanove alunos da turma que foi atribuída à investigadora no início do ano letivo 2013/14, num centro educativo de um Agrupamento de escolas do centro do País. O facto de ser um grupo de segundo ano, permitiu delinear este estudo, dado que a aprendizagem da multiplicação se inicia neste ano de escolaridade.

Apesar de a turma ser constituída por vinte e um alunos, no estudo participaram apenas dezanove, pois havia dois alunos que desenvolviam um trabalho diferenciado ao nível da aprendizagem da leitura e escrita e do conhecimento dos números e operações ao nível de um primeiro ano. Na maioria das sessões de trabalho os alunos nem estavam na sala de aula, pois beneficiavam de diversos apoios especializados noutros espaços escolares.

Os dezanove alunos envolvidos no estudo, dez raparigas e nove rapazes, frequentavam o segundo ano pela primeira vez e tinham idades entre os seis e os oito anos. O grupo era heterogéneo ao nível do desempenho académico e existiam alguns elementos perturbadores no que respeita ao comportamento na aula. Para além disso, havia um grupo de cinco alunos que apresentavam dificuldades na leitura e escrita, e que por isso realizaram um trabalho diferenciado na área de português durante o primeiro período letivo e início do segundo. Contudo, este grupo de alunos realizou sempre todas as tarefas matemáticas planificadas para o grande grupo.

A professora titular da turma assumiu o duplo papel de professora e investigadora. É docente do quadro de Agrupamento de Escolas e trabalhou com a maioria dos alunos da turma no ano letivo anterior. Trabalha há dezassete anos e coordena o grupo de trabalho de professores de segundo ano deste agrupamento, com os quais reúne semanalmente para planificar as aulas, partilhar ideias e materiais e, por vezes, elaborar conjuntamente, instrumentos de avaliação.

Tirou a sua formação inicial em professores do ensino primário, frequentou o complemento de formação pedagógica para professores. Mais tarde, especializou-se em

Educação Especial no domínio cognitivo-motor, frequentou durante dois anos a formação contínua de matemática e decidiu recentemente frequentar um curso de mestrado em educação matemática. Sempre trabalhou diretamente com os alunos de primeiro ciclo enquanto docente titular de turma, à exceção dos três anos no início da carreira que esteve como professora de apoio/educação especial.

3.2.2. Sequência de Tarefas

Dado que as tarefas determinam em grande medida as oportunidades de aprendizagem oferecidas aos alunos (Ponte, 2005) neste estudo pretendeu-se que essas fossem o ponto de partida para a sua atividade matemática, bem como um veículo através do qual um novo conceito ou um procedimento devia ser aprendido (ME, 2007; NCTM, 2007; Stanic & Kilpatrick, 1989). Neste sentido considerou-se que os problemas de contexto seriam o tipo de tarefas a privilegiar.

Os problemas de contexto estão ligados à realidade dos alunos, na medida em que apresentam situações do quotidiano, que servem de modelos para apoiar o seu pensamento (ME, 2007). Desta forma, foram explorados problemas de contexto, que permitiram alguma variedade de procedimentos, em que os alunos puderam usar o seu conhecimento e a sua experiência pessoal como meio/contexto para desenvolver mais conhecimento. As estratégias apresentadas pelos alunos, as suas próprias produções informais foram discutidas na turma e foi a partir delas que se conduziu o processo de desenvolvimento do conhecimento matemático mais abstrato (Gravemeijer & Terwel, 2000 a, 2000 b).

Em relação à aprendizagem da multiplicação, a opção de partir de problemas de contexto sustentou-se nas razões apontadas por Treffers e Buys (2001) de que estes problemas e os modelos subjacentes revelam aspetos fundamentais das estruturas multiplicativas associadas e a identificação que é possível fazer de propriedades de multiplicação. Assim a estrutura de grupos que encontramos logo na primeira tarefa induz de certa forma ao uso da adição repetida ou da contagem rítmica (6…12…18…). O modelo retangular presente numa outra tarefa posterior – Na Frutaria da Tita, conduziu à multiplicação e tornou evidente a propriedade comutativa da multiplicação.

As tarefas propostas foram construídas e/ou adaptadas de outras já existentes (Caixa das Frutas) considerando a realidade dos alunos e experiências vividas no quotidiano da turma.

A sequência de tarefas explorada foi sendo construída, tendo presente uma perspetiva de aprendizagem da matemática com compreensão (NCTM,2007).

A sua construção teve como referência os marcos de aprendizagem preconizados por Fosnot e Dolk (2001) e Treffers e Buys (2001) para a multiplicação: os sentidos e as propriedades da multiplicação, os contextos e os modelos que lhe estão associados.

Deste modo, foi pensada uma sequência de tarefas (Apêndice 1) em função do percurso de aprendizagem da multiplicação discutido nas reuniões do grupo de professores de segundo ano. Optou-se primeiramente por propor aos alunos tarefas que conduzissem à descoberta da multiplicação, partindo da contagem de agrupamentos e da adição sucessiva de parcelas iguais. Depois pensou-se explorar tarefas que envolviam a estrutura retangular, de forma a fazer emergir algumas relações numéricas e as propriedades da multiplicação, nomeadamente a propriedade comutativa e só depois insistiu-se no cálculo formal da multiplicação, sem contudo nunca ser trabalhado o algoritmo.

Progressivamente com o avançar na sequência de tarefas previu-se que as tabuadas fossem sendo construídas, emergindo do contexto fornecido pelas tarefas.

A ideia que esteve presente foi a defendida por Mendes e Delgado (2008) que o caminho a percorrer deve incluir, primeiramente, a resolução de tarefas com contextos que permitam a compreensão de conceitos e propriedades, gradualmente e de uma forma natural. À medida que os alunos vão evoluindo na aprendizagem, através da resolução e exploração dessas tarefas, eles vão construindo os produtos que constituem as tabuadas.

O percurso seguido foi iniciar com a tabuada do dois e a partir dela a tabuada do 4, depois as tabuadas do 5 e do 10 e por fim, as tabuadas do três e dos seis.

A sequência de tarefas foi sendo construída à medida que cada tarefa era explorada, sendo que os dados recolhidos desta exploração informavam a construção da tarefa seguinte. Para além destas tarefas os alunos aplicaram procedimentos de cálculo em tarefas do manual.

Nesta sequência apenas incluímos duas tarefas que envolvem o sentido combinatório da multiplicação (Tarefas 6 e 11).Contudo, este tipo de tarefas já tinha sido trabalhado no primeiro ano com os alunos.

Inicialmente previa-se que a realização das tarefas decorresse entre janeiro e abril, contudo houve necessidade de as prolongar até maio, dado que iniciou-se mais tarde do que estava previsto, já no final de janeiro. Para além disso, no final do segundo período a turma esteve envolvida nas atividades de comemoração da Semana do Agrupamento, que nos tirou algum tempo para dedicarmos à exploração das tarefas; havendo necessidade por isso de as prolongar até à primeira semana de maio.

De seguida apresenta –se a calendarização das tarefas exploradas (Tabela 3), a sua fundamentação, bem como os objetivos visados e algumas considerações acerca dos procedimentos tidos em conta na sua exploração.

Tarefas	**Data de realização**
Tarefa 1 - Coleção de cromos	24.01.2014
Tarefa 2- Arrumação de sapatos	28.01.2014
Tarefa 3 – Bolo de iogurte	30.01.2014
Tarefa 4- Jogo dos pés	31.01.2014
Tarefa 5- Na Frutaria da Tita	04.02.2014
Tarefa 6 – A roupa da Maria Tarefa 7- As idades	11.02.2014
Tarefa 8- Saquinhos de oferta da Leonor	26.02.2014
Tarefa 9- Ida ao cinema Tarefa 10- Prenda do Dia da Mãe	11.03.2014
Tarefa 11- Na pizzaria	18.03.2014
Tarefa 12- Ramos do Dia da Mãe	29.04.2014
Tarefa 13- Corrida de bicicletas	02.05.2014
Tarefa 14- Bolo do Dia da Mãe	06.05.2014

Tabela 3- Calendarização das tarefas

Treffers e Buys (2001) defendem que a adição sucessiva de parcelas iguais deverá constituir o ponto de partida para a iniciação à aprendizagem da multiplicação. Desta forma, as primeiras tarefas assentaram neste sentido aditivo da adição, com uma estrutura de grupos, procurando que os alunos, pouco a pouco, transformassem a adição repetida de parcelas iguais em multiplicação. Seguiram-se tarefas que incidiram na exploração da noção de dobro e a par disso permitiram a construção da tabuada do 2, para posteriormente conduzir à noção de quádruplo (dobro do dobro) e à construção da tabuada do 4.

Com a preocupação de se explorarem as propriedades da multiplicação, nomeadamente a comutatividade da multiplicação foi proposta a tarefa – Na Frutaria da Tita, em que a estrutura retangular das caixas de fruta induzia à utilização do modelo retangular.

O sentido combinatório da multiplicação aparece nesta sequência em duas tarefas ligadas a contextos vividos pelos alunos, dado que foram esses contextos que permitiram a modelação da tarefa.

O sentido proporcional da multiplicação, apesar do programa de 2.º ano não o contemplar, foi também considerado nesta sequência de tarefas.

Uma ideia que esteve presente na construção desta sequência de tarefas foi a preocupação de suportar os contextos dos problemas no quotidiano dos alunos, para que eles pudessem suportar-se na sua realidade, recordar ou imaginar as situações apresentadas na tarefa e encontrar estratégias de resolução eficazes.

Esta sequência teve início com a tarefa 1- Coleção de cromos, cujos objetivos eram: i) desenvolver estratégias de contagem, ii) compreender a relação entre a adição repetida e a multiplicação e iii) promover o sentido aditivo da multiplicação.

Tratou-se de uma tarefa que teve subjacente uma estrutura de grupos, prevendo-se que os alunos utilizassem a adição repetida para a resolver, pois os estudos de Treffers e Buys (2008, citado em Mendes(2011)) provaram, que no início da aprendizagem da multiplicação, os alunos começam por resolver problemas através da contagem por grupos, utilizando a adição repetida.

A tarefa 2- Arrumação de sapatos foi pensada partindo de um contexto real vivido na turma, o de uma aluna que estava a remodelar o seu quarto. A noção de paridade era uma noção já adquirida na maioria dos alunos, sendo que a situação descrita ajudava aqueles que dela não se recordassem; pois todos diariamente lidam com a situação de calçar o par de sapatos ou de ténis. Prevendo-se que muitos alunos recorressem às contagens de 2 em 2 e à adição repetida (2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2=24), o grande objetivo foi conduzir à construção da tabuada do 2, fazendo a correspondência entre os pares de sapatos e a quantidade de sapatos (Ex: um par são dois sapatos porque 1x2=2, dois pares são 2x2=4).

Para além disso, procurou-se realçar a ideia que a adição repetida é uma estratégia mais demorada que a multiplicação e incentivar ao uso da multiplicação. No caso do uso da multiplicação 12x2 = 24 havia que incentivar o uso de outros procedimentos de cálculo, como o recurso à decomposição decimal do 12, surgindo assim (10x2) +(2x2) = 20 + 4=24, procurando evidenciar propriedades da multiplicação.

A tarefa 3- Bolo de iogurte foi pensada partindo, mais uma vez, de uma situação real vivida com a turma, acabando por se concretizar com a confeção do bolo de iogurte. O conceito de dobro tem vindo a ser trabalhada com a turma desde o primeiro ano, embora muito ligado à adição (dobros e quase dobros), pelo que após a construção da tabuada do 2 partiu-se para a exploração desta tarefa, procurando que os alunos compreendessem o conceito de dobro associado diretamente à multiplicação e aplicassem os conhecimentos da tabuada do 2. A introdução da quantidade “meio copo” na receita foi propositada dado que considera-se importante também que os alunos estabeleçam relações entre o meio/ a metade e o seu inverso- o dobro.

A tarefa 4- Jogos de Pés foi construída após a exploração de uma atividade prática de Educação Físico-Motora, em que foi pedido aos alunos que se agrupassem mediante uma quantidade de pés determinada pelo professor, procurando assim que aplicassem também conhecimentos acerca da tabuada do 2.

Para além disso, na tarefa 4.2 pretendeu-se que o recurso à multiplicação conduzisse ao uso, ainda que intuitivo, da propriedade distributiva da multiplicação. Os alunos ao calcularem 21x2= 42 podem pensar que (2x20) +(2x1) = 40 + 2= 42. Pretendia-se incentivar os alunos a estabelecerem relações numéricas entre as quantidades envolvidas por isso, caso nenhum par utilizasse determinada estratégia, seria a professora a incentivar os alunos a preencher a tabela recorrendo a dados conhecidos (exemplo: 5 meninos têm dez pés, então para ter vinte pés são necessários 10 meninos, porque se preciso do dobro dos pés também precisarei do dobro dos meninos ou se 6 alunos têm 12 pés e 10 alunos têm 20 pés, então os 16 alunos terão 32 pés porque 12 pés + 20 pés=32 pés).

A tarefa 5- Na Frutaria da Tita, foi uma adaptação da tarefa "Caixas de Fruta" escolhida pela equipa do projeto Desenvolvimento do Sentido de Número, com um contexto facilmente reconhecido pelos alunos, o de caixas de fruta que apresentam uma estrutura retangular. Com esta tarefa procurou-se i) incentivar ao uso da multiplicação, ii) consolidar a noção de dobro e iii) evidenciar a propriedade comutativa da multiplicação, através do modelo retangular.
A exploração desta tarefa permitiu estabelecer diferentes relações numéricas como 2x (2x3) = 2x6 e na tarefa 5.3 estabelecer algumas relações entre produtos nomeadamente 2x (2x6) = 2x12=4x6=8x3 que podiam conduzir ao uso da propriedade distributiva da multiplicação. Através desta tarefa procurou-se também rever a noção de dobro e conduziu à exploração da noção de quádruplo (dobro do dobro).

Na tarefa 6- Roupa da Maria teve como finalidade: i) permitir aos alunos desenvolver estratégias informais de resolução de problemas que envolvem o sentido combinatório da multiplicação, ii) relacionar as suas produções informais com o uso da multiplicação e iii) promover o desenvolvimento do sentido combinatório da multiplicação.

A tarefa 7- As idades foi pensada para consolidar a noção de dobro, sendo que os números implicados fariam surgir a necessidade dos alunos recorrerem por exemplo à decomposição de uma das quantidades, podendo evidenciar a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

Na tarefa 8- Saquinhos de bombons o contexto fornecido pelas caixas de bombons com uma estrutura retangular, forneceu o apoio para o uso do modelo retangular e permitiu evidenciar a propriedade comutativa da multiplicação. Na situação apresentada houve também o recurso à ideia de grupos, primeiramente grupos de 4 e depois de 5. Com esta tarefa procurou-se desenvolver estratégias de contagem, construir a tabuada do 4, através da relação de dobro da tabuada do 2. Na tarefa 8.2 com os agrupamentos de cinco, as quantidades envolvidas 20, 5 e 100 não foram escolhidas ao acaso, porque pensou-se que estas permitiriam aos alunos estabelecer relações numéricas que facilitavam a resolução da tarefa, aplicando conhecimentos que possuíam relativamente à decomposição da centena.

A tarefa 9- Ida ao cinema teve como objetivos: i) desenvolver estratégias de multiplicação envolvendo a tabuada do 4 , ii) estabelecer as relações entre os produtos encontrados, iii) construir as tabuadas do 5 e 10 e iv) estabelecer relações entre so produtos das tabuadas do 5 e do10. A situação apresentada implicava também a conexão com o dinheiro e a leitura do calendário. A escolha do número de segundas-feiras (4) foi propositado, dado que permitiria aos alunos fazerem uso dos seus conhecimentos da tabuada do 4. O preço dos bilhetes € 5,00 e a possibilidade dos alunos duplicarem esse valor (€ 10,00- custo do bilhete do Simão e da mãe em cada sessão de cinema) permitia estabelecer relações entre a tabuada do 5 e do 10, pois previam-se diferentes procedimentos nos pares , dado que uns poderiam apenas calcular o custo do bilhete do Simão nas quatro segundas (4x5€) e outros calcular o custo dos bilhetes do Simão e da sua mãe (4x10€).

A tarefa 10- Prenda do Dia da Mãe decorreu de uma situação real da turma e da recolha de cápsulas de café para fazerem pregadeiras para o Dia da Mãe. As quantidades envolvidas permitiriam explorar os produtos da tabuada do 5. Os alunos teriam que recorrer à decomposição decimal do 21 (número de alunos da turma), podendo-se explorar aqui a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. A exploração das tarefas 9 e 10 decorreram na mesma aula.

A tarefa 11- Na pizzaria envolveu o sentido combinatório da multiplicação e decorreu de uma situação vivida pelos alunos da turma numa festa de aniversário numa pizzaria, em que tiveram a possibilidade de fazer as suas pizzas e combinar os ingredientes disponíveis. A combinação entre dois elementos já tinha sido explorada anteriormente, ainda durante o primeiro ano. Desta vez, quis-se aumentar o grau de dificuldade e recordando a situação real, os alunos teriam que combinar duas massas com dois ingredientes em simultâneo.

A tarefa 12 – Ramos para o Dia da Mãe foi pensada com a grande finalidade de explorar relações numéricas que permitissem a exploração dos produtos da tabuada do 3 e fazer emergir a noção de triplo. Mais uma vez foi escolhida uma situação que envolvia dinheiro, dado que é um contexto familiar aos alunos.

A tarefa 13- Corrida de bicicletas foi pensada para aplicação da noção de triplo.

Por fim na tarefa 14- Bolo do dia da Mãe, o contexto fornecido é o da caixa com 12 ovos, sendo que a grande finalidade foi permitir a construção da tabuada do 6, e evidenciar o sentido proporcional da multiplicação.

3.2.3.ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO NA AULA

Ponte (2005) alerta: "Não basta , no entanto, selecionar boas tarefas- é preciso ter atenção ao modo de as propor e de conduzir a sua realização na sala de aula" (p.12) . No seguimento desta ideia considera-se importante ter em consideração a forma organizada como as tarefas foram trabalhadas na sala de aula.

Assim, a realização das tarefas decorreu sempre no período da manhã e logo no início da aula, após a apresentação do plano diário de trabalho. Cada tarefa foi realizada e discutida no mesmo dia, pois isso facilitaria aos alunos a apresentação das estratégias e o processo de reflexão sobre as mesmas, bem como a análise dos dados recolhidos pela investigadora.

As aulas em que foram exploradas as tarefas respeitaram sempre as diferentes fases de uma aula de ensino exploratório, conforme já explicitado no enquadramento teórico deste estudo: (i) apresentação da tarefa, (ii) trabalho autónomo dos pares, (iii) partilha e discussão de estratégias e (iv) sistematização das ideias.

Os pares foram organizados pela professora, com base nos conhecimentos que tinha acerca dos alunos. A organização dos pares foi feita em função das competências de leitura e escrita dos alunos e do seu modo de estar/comportamento nas aulas. Em cada par existiu um aluno com maiores dificuldades na leitura e escrita e outro com maior competência nesses domínios. Para além disso, na formação destes pares heterogéneos, também se procurou que os alunos que apresentavam alguns problemas no respeito de regras de trabalho na sala de aula integrassem pares distintos.

Como o número de alunos era ímpar, houve necessidade de formar um grupo de três alunos, onde esteva sempre incluído o aluno A. O aluno A revelava um fraco domínio da leitura, escrita e cálculo, pelo que previu-se que a sua participação fosse menos ativa do que a de qualquer outro elemento da turma. A opção em fazer um par em que estivesse este aluno seria pouco vantajosa para o outro elemento e para a dinâmica/interação esperada no trabalho a pares, pelo que considerou-se mais benéfico que ele ficasse no grupo de três.

Ao longo do tempo em que decorreu esta investigação, houve necessidade de reformular a constituição dos grupos em função da observação e dos dados recolhidos nas tarefas anteriores. Houve pares que inicialmente estavam com muitas dificuldades em avançar na resolução das tarefas, condicionados por diversos fatores: fraca competência leitora dos elementos, grande insegurança do par em propor uma estratégia, algum egocentrismo e dificuldade em aceitar as opiniões dos outros. Com a reformulação dos pares verificaram-se melhorias no trabalho realizado.

Para ultrapassar a dificuldade que vários alunos revelavam na leitura e sobretudo na compreensão do enunciado do problema procurou-se trabalhar os problemas partindo da oralidade, explorando "a história " do problema ou lendo com os alunos as propostas de modo a que a dificuldade na sua leitura não impedisse qualquer aluno de se envolver na resolução da tarefa.

3.2.3. TÉCNICAS E INSTRUMENTOS DE RECOLHA DE DADOS

Segundo Coutinho et al. (2009), uma investigação realizada segundo a metodologia Investigação- Ação, tal como para qualquer ato de investigação, baseia-se em formas de recolha da informação que a própria investigação vai proporcionando.

O professor/investigador recolheu informação sobre a sua própria ação ou intervenção, no sentido de analisar com maior distanciamento os efeitos da sua própria ação ou intervenção e também da ação dos seus alunos, para que pudesse analisar com maior distanciamento os efeitos dessa prática educativa.

O professor/investigador teve por isso que "refinar" de um modo sistemático e intencional o seu olhar sobre os múltiplos aspetos da realidade em estudo, reduzindo o processo a um sistema que se tornasse mais fácil de analisar, e posteriormente refletir (Latorre, 2003).

De acordo com este autor, numa Investigação-Ação cujo foco seja o processo de ensino e aprendizagem, as técnicas que melhor se adequam são a observação sistemática, a entrevista e a análise documental.

A observação permitiu obter um conhecimento direto dos fenómenos tal como eles aconteceram na sala de aula. As aulas foram todas gravadas em registos áudio e foram realizadas anotações pela professora-investigadora no seu bloco de notas. Estas anotações foram redigidas, por vezes, no momento em que ocorreram e sobretudo no final da aula. No final da semana, os registos áudio foram ouvidos e revistas as notas de campo. Todas as produções dos pares foram recolhidas para posterior análise.

Relativamente às entrevistas optou-se por semiestruturadas, cujo guião consta em apêndice (Apêndice 3). Foi pensado um conjunto de questões a colocar aos alunos selecionados, sendo que a sua ordem foi flexível e houve a possibilidade de surgirem outras que, no decurso da mesma, pareceram justificáveis.

Máximo-Esteves (2008) considera que numa entrevista semiestruturada há um conjunto de grandes questões que são colocadas a todos os correspondentes, que veiculam o ponto de vista do respondente. Salienta ainda que a ordem das perguntas é flexível, possibilitando o improviso na pergunta, decorrente do inesperado da resposta.

As entrevistas foram realizadas após a implementação da sequência de tarefas, no início de junho, com o objetivo de recolher alguns dados, da perspetiva dos alunos, acerca das dificuldades por eles sentidas na resolução das tarefas, que fizeram parte desta sequência de tarefas, bem como o que eles pensavam acerca da dinâmica de trabalho de um ensino exploratório.

As entrevistas foram curtas e não duraram mais de quinze minutos. Realizaram-se na sala de aula, no final das atividades letivas ou durante o período de almoço, após a refeição.

As entrevistas que decorrem em contextos familiares à criança, como é o caso da sua sala de aula na escola geram narrativas mais ricas do que as ocorridas em contextos que lhes são desconhecidos (Oliveira, Formosinho & Araújo (2007), citado em Máximo-Esteves (2008)).

A propósito de entrevistas realizadas a crianças, Máximo-Esteves (2008) considera que o investigador deve ter algum cuidado a atender o momento mais apropriado para a realização das entrevistas, aconselhando que este deve evitar a sua intromissão no período de atividades que mais interessa à criança, sendo preferível aproveitar os tempos de maior cansaço, no fim do dia, quando a corrida e a brincadeira já não apetecem tanto.

As entrevistas realizadas aos sete alunos da turma tiveram como finalidade clarificar apenas alguns aspetos que já tinham transparecido no decurso da exploração da sequência de tarefas e da observação das aulas. Procurou-se esclarecer sobretudo aspetos relacionados com as opiniões dos alunos acerca do trabalho realizado durante a exploração da sequência de tarefas, da dinâmica de trabalho de um ensino exploratório, e de que forma essa dinâmica favoreceu ou não a aprendizagem da multiplicação.

A entrevista proporciona o ponto de vista dos entrevistados que permite interpretar significados e é o complemento da observação (Latorre, 2003).

Foram feitas sete entrevistas, procurando recolher a opinião de alunos com diferentes níveis de desempenho entre si, quer nas produções apresentadas quer ao nível da sua intervenção na discussão das estratégias nas aulas.

Desta forma, foram selecionados dois alunos (N e o S) que, geralmente, não apresentaram dificuldades na resolução das tarefas e tiveram uma participação mais ativa nas discussões na aula, sendo que um deles foi mais participativo que o outro durante a discussão das tarefas. Foram selecionados outros dois alunos (E e o R), cujo aproveitamento geral na área de matemática considerou-se mediano, foram alunos que revelaram iniciativa em participar, embora fossem um pouco inconstantes. Outros dois alunos apresentavam dificuldades na leitura e interpretação, inseriam-se num grupo de alunos que apresentavam um nível de aproveitamento mais baixo. Ao nível da participação na discussão das tarefas notava-se que um deles era mais ativo, participava por iniciativa própria, enquanto o outro raramente o fazia, limitando-se a responder quando era solicitada a sua intervenção. A outra aluna selecionada para as entrevistas foi a aluna I por considerar-se que, foi uma das alunas que evidenciou maior dificuldade na compreensão das tarefas iniciais, mas que com a reorganização dos pares pareceu mais confiante e participativa no trabalho.

Em síntese, a informação foi recolhida recorrendo a gravações áudio quer das aulas, quer das entrevistas e respetivas transcrições, às notas de campo pessoais registadas no caderno da professora, às produções dos alunos e a algumas fotografias. Para se preservar a identidade das crianças envolvidas no estudo, optou-se por não recorrer a gravações vídeo, o que também poderia, de alguma forma, comprometer a autenticidade dos comportamentos das crianças.

As técnicas de recolha de informação utilizadas permitiram obter informações baseadas na perspetiva do investigador acerca do que ocorre e os seus pontos de vista enquanto participante na própria ação, nomeadamente através da audição e transcrição registos áudio e das notas que foi redigindo no seu bloco de notas; a informação documental das produções dos próprios alunos e a perspetiva dos alunos acerca das aulas e do trabalho desenvolvido, que ficou expresso nas entrevistas.

A variedade de técnicas e instrumentos de recolha de dados permitiu a triangulação de dados e por conseguinte, dar maior rigor e validade a todo o processo de investigação.

3.2.4. Análise e interpretação de Dados

A análise de dados recolhidos iniciou-se com a exploração da primeira tarefa e foi decorrendo continuamente ao longo da investigação. Assim, a recolha e análise de dados mantiveram-se intimamente ligados, sendo que cada informação recolhida serviu de base ao prosseguimento da investigação-ação.

Após a exploração das tarefas de cada aula, foram ouvidos os registos áudio, comparando os dados aí recolhidos com as produções dos alunos e as notas de campo, tendo sempre presente as questões de investigação. Essa primeira análise foi fundamental para avançar na planificação do plano de ação.

A descrição e a análise de dados vão-se refinando à medida que se avaliam as decisões sucessivamente tomadas e se observam os efeitos que delas decorrem (Máximo- Esteves, 2008).

A análise progrediu de forma significativa depois de recolhida toda a informação, permitindo um conhecimento mais holístico da ação. Assim, depois de terminado o trabalho de campo iniciou-se uma outra fase de análise dos dados, uma análise mais fina e englobante (Bogdan & Biklen, 1994), o da análise retrospetiva.

Tornou-se a observar, atentamente, as produções dos alunos relativas a cada tarefa, a ouvir os registos áudio produzidos na sala de aula que captaram os diferentes momentos da exploração das tarefas, fez-se a transcrição dos registos áudio das aulas que faltavam transcrever, foram relidas as notas de campo e feita a transcrição das entrevistas.

A análise dos registos áudio, das notas de campo e das produções dos alunos foi realizada tarefa a tarefa. Tendo como referência as questões de investigação, a análise desses dados focou-se nas dificuldades evidenciadas pelos alunos no decurso da tarefa, na caracterização das estratégias de resolução apresentadas pelos alunos e numa análise crítica à forma como decorreu a exploração de cada tarefa, do ponto de vista do professor-investigador.

Relativamente às estratégias apresentadas pelos alunos na resolução das tarefas a atenção focou-se nos registos escritos de cada par e na análise das transcrições associadas às intervenções dos alunos no âmbito das discussões realizadas, quer nos momentos de trabalho autónomo dos pares, quer da partilha e discussões realizada na aula.

A revisão da literatura e a análise das produções escritas dos pares permitiram reconhecer as estratégias usadas pelos alunos e categorizá-las, sendo organizadas numa tabela (Apêndice 2) para facilitar a leitura e perceber a evolução das estratégias dos alunos ao longo da exploração da sequência de tarefas.

A análise dos registos áudio bem como das notas de campo, sempre suportada pelas produções dos alunos permitiu analisar aspetos ligados à dinâmica de um ensino exploratório e a toda a atividade matemática que ocorreu na aula. Os dados que decorreram dessa análise foram também confrontados com os dados recolhidos nas entrevistas, permitindo a triangulação de dados provenientes dos diversos instrumentos de recolha de dados.

Os textos decorrentes da transcrição das entrevistas foram lidos, e procurou-se identificar e codificar as unidades de análise presentes nos textos. O texto foi fragmentado em unidades de sentido idêntico, essas foram codificadas (atribui-se um nome) tendo em conta as questões de investigação, nomeadamente dificuldades dos alunos na resolução das tarefas, importância do trabalho a pares, importância da discussão e partilha de estratégias.

Estas categorias foram organizadas em matrizes, onde se incluíram fragmentos de citações dos entrevistados, que permitiram comparar as suas perspetivas relativamente a cada um dos aspetos categorizados; procurando-se identificar fenómenos recorrentes nos dados. Um dos métodos mais utilizados para a análise de texto é a análise de conteúdo a que se recorreu para analisar as entrevistas. A análise de conteúdo consiste em avaliar de forma sistemática um texto por forma a desvendar e quantificar a ocorrência de palavras/ frases ou temas que são considerados “chave” e que permitam uma comparação posterior (Coutinho, 2011).

O investigador busca estruturas e regularidades nos dados e faz inferências com base nessas regularidades (Krippenford,1980; Myers, 1997, citados em Coutinho (2011)).

As categorias utilizadas diziam respeito às intenções que se tinham com a realização das entrevistas, os objetivos e as questões do estudo e as características da mensagem.

Relativamente aos restantes dados recolhidos e dada a natureza do estudo, a análise de dados assumiu um carácter essencialmente descritivo e interpretativo, através da análise de discurso.

Segundo Teixeira (2003) a análise de discurso é o processo de formação de sentido além dos dados, e esta formação dá-se consolidando, limitando e interpretando o que as pessoas disseram e o que o pesquisador viu e leu, isto é, o processo de formação de significado. De acordo com o mesmo autor a análise do discurso é um método cujo objetivo visa não somente compreender uma mensagem, mas reconhecer qual é o seu sentido e a sua relação com um determinado contexto. Neste sentido, o investigador formula uma versão teórica da realidade, que pode ser usada para a explicar e para fornecer um esquema de referência para a própria ação.

Desta forma a análise de dados deste estudo privilegiou o uso da análise de conteúdo e da análise de discurso.

CAPÍTULO 4- APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DE RESULTADOS

Neste capítulo apresentam-se e analisam-se os dados recolhidos durante o estudo.

A construção da narrativa foi feita tarefa a tarefa e respeitando a sequência dos diferentes momentos da aula exploratória: a apresentação da tarefa, o trabalho autónomo dos pares, a partilha e discussão das estratégias em grande grupo e sistematização das aprendizagens matemáticas.

Foram identificadas as estratégias utilizadas pelos alunos, bem como as suas dificuldades em cada tarefa. Conjuntamente, foi também feita a descrição e análise das interações da sala de aula, nos diferentes momentos da aula, e a necessária análise do seu contributo para a aprendizagem da multiplicação.

Todas as tarefas são apresentadas em apêndice (Apêndice 1). No final foi elaborada uma síntese das tarefas, destacando os aspetos que sobressaíram da exploração das tarefas, nomeadamente os que estão diretamente relacionados com as questões do estudo: as estratégias de resolução usadas pelos pares, as dificuldades evidenciadas, vantagens e limitações de um ensino exploratório para a aprendizagem da multiplicação.

Tarefa 1 – Coleção de cromos

Na apresentação desta primeira tarefa, a mesma foi lida em voz alta, contudo não foi logo interpretada, ou seja, não foi explorada inicialmente a "história do problema" com toda a turma. Foram transmitidos aos alunos alguns procedimentos que deveriam ter em conta durante a realização do trabalho, nomeadamente escreverem a caneta ou esferográfica preta ou azul e que, sempre que se enganassem, deveriam escrever um traço por cima e prosseguirem.

Durante o trabalho autónomo a professora apercebeu-se que o par B+L revelava dificuldades em avançar na resolução do problema, pelo que questionou-os sobre o que tinham compreendido acerca da situação apresentada. Perante alguma hesitação dos mesmos, colocou-lhes algumas questões acerca do enunciado, para que eles conseguissem compreender a situação descrita e propor uma estratégia para resolver o problema.

> **L:** Eu disse ao B que deveria ser 10 +6 que dava 16 mas ele diz que não pode ser.
> **Prof:** Então B porque é que te parece que não possa ser assim?
> **B:** Não vou juntar as dez saquetas com mais seis! Ela só comprou dez saquetas. São coisas diferentes.
> **Prof:** Então vamos rever. A mãe comprou dez saquetas e cada saqueta tem quantos cromos?

B: São seis… Eu já sei podemos fazer seis mais seis, mais seis… até ter dez saquetas.
Prof: Concordas com ele?
L: Vamos tentar. Eu escrevo.

Para estes alunos que evidenciaram dificuldades na interpretação do enunciado, o diálogo estabelecido com a professora foi fundamental para que prosseguissem na resolução do problema, discutissem a viabilidade da estratégia sugerida e de seguida encontrassem uma estratégia mais viável.

Houve necessidade também de intervir junto do par F+J, pois tinham realizado várias tentativas para resolver o problema e por fim, tinham registado a operação 10 x 6 = 60. A professora pediu-lhes que explicassem como tinham chegado a essa conclusão. Os alunos referiram que tinham sentido dificuldades em encontrar uma estratégia que lhes parecesse adequada, tinham começado por adicionar 10+6, depois abandonaram essa estratégia e avançaram para uma subtração, a qual também não lhes pareceu adequada pelo resultado obtido. De seguida pensaram que deveriam escrever o número seis, dez vezes e concluíram que seria 60. Este resultado para eles pareceu-lhes mais adequado à situação descrita no problema. Quando questionados acerca do resultado obtido, os alunos esclareceram:

J: Era fácil seis vezes o dez, são seis dezenas, dá sessenta.
Prof: Mas então, são seis vezes o dez ou dez vezes o seis?
F: Seis vezes o dez.
(…)
Prof: Eu estou-me a referir à situação descrita no problema. Quantas saquetas temos?
J: Temos dez saquetas com seis cromos . O seis aparece dez vezes.
(…) É mesmo 10 x6=60.
Prof: Isso, apesar do resultado ser o mesmo, as expressões 10 x 6 e 6 x 10 representam situações diferentes. Na situação temos dez saquetas com seis cromos, portanto 10 x 6 , cujo produto é sessenta.

Esta situação evidencia, por um lado, que a discussão estabelecida entre os alunos durante o trabalho a pares permitiu-lhes avaliar as estratégias de resolução por eles experimentadas e encontrar aquela que lhes pareceu mais adequada, atendendo à razoabilidade dos resultados obtidos em cada uma. Por outro lado, a interação mantida com a professora levou-os a refletir sobre a sua estratégia de resolução e a atribuir significado à multiplicação. Para a professora o diálogo mantido com o par possibilitou obter esclarecimentos sobre o modo de pensar dos alunos.

À medida que os alunos desenvolviam o trabalho a pares, a professora teve a preocupação de selecionar os grupos que apresentariam as suas estratégias e sequenciar essa apresentação. Foram selecionadas tarefas que ilustravam diferentes níveis de aprendizagem dos alunos, de acordo com o descrito no enquadramento teórico e nomeadamente o que se encontra suportado em Treffers e Buys (2001).

Ao analisar as produções dos pares, verificou-se que a maioria dos pares recorreu a estratégias de contagem ou à adição repetida do seis para resolver a tarefa. Apenas dois pares apresentaram a multiplicação, sendo que num dos casos, essa decorreu da adição repetida e da discussão mantida com a professora.

Ao sequenciar a apresentação das estratégias em grande grupo quis-se que surgisse primeiro as estratégias mais informais, desligadas do uso das operações e só depois as outras estratégias mais formais que tendiam para o uso da adição repetida, a qual permitiu fazer emergir a noção de multiplicação.

Por isso, a apresentação das estratégias em grande grupo iniciou-se com o grupo de três alunos (A+ G + H) que modelaram a situação e foram o único grupo a representar a situação através do desenho das saquetas de cromos (Figura 2), uma estratégia desligada de qualquer operação; notando-se uma necessidade destes alunos em apoiar o seu pensamento no concreto.

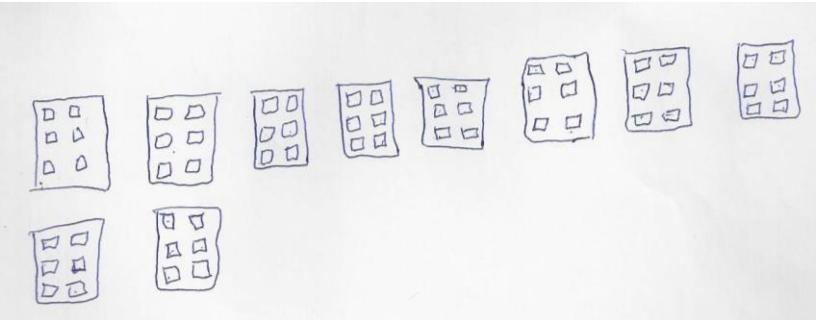


Figura 2- Produção do grupo A+ G + H

Os alunos deste grupo explicaram ainda que após o desenho, contaram um a um os cromos.

Aproveitando a disposição dos cromos apresentada por estes alunos previa-se que a contagem realizada atendesse já a alguns agrupamentos e não fosse uma contagem unitária. Assim, depois da apresentação do grupo, a professora incentivou a turma a exemplificar outras contagens por agrupamentos sugeridas pelos registos apresentados (dois em dois, três em três e seis em seis), para que futuramente, estes alunos abandonassem a contagem unitária e passassem a utilizar uma contagem rítmica (2 em 2, 3em 3) o que facilitaria também posteriormente, a construção e memorização das tabuadas.

Após a exploração da produção anterior em grande grupo, foi solicitado ao par dos alunos O+D que apresentasse a sua estratégia de resolução, os quais apesar de recorrerem à contagem, apresentam uma contagem por saltos de seis em seis, apresentando uma correspondência entre o número de saquetas e o número de cromos correspondente (Figura 3). Aqui procurou evidenciar-se um cálculo mais estruturado, muito semelhante ao uso de uma reta dupla; o que evidencia um nível de contagem mais avançado que o do grupo anterior.

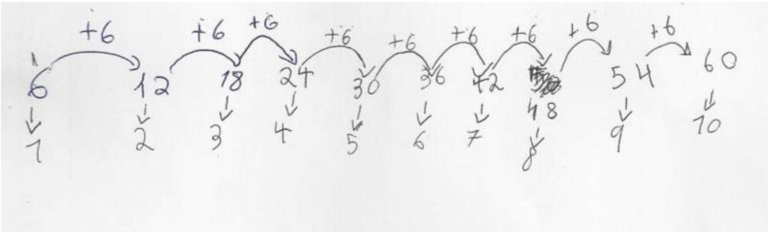


Figura 3- Produção do par O + D

> **O:** Nós fomos dando saltos de seis em seis e escrevemos que uma saqueta tinha seis, fomos continuando até ter dez e deu-nos sessenta cromos.
> **Prof:** Como é que foram contando?
> **O:** Com a ajuda dos dedos, contávamos sempre seis mais seis.

O par E + K apesar de ter recorrido à adição repetida da parcela seis, decidiu agrupar as parcelas duas a duas, recorrendo ao uso dos dobros, apresentando um esquema em árvore (Figura 4), uma estratégia mais enriquecida do que a simples adição repetida evidente noutros grupos de trabalho, pelo que solicitou-se a apresentação desta estratégia.

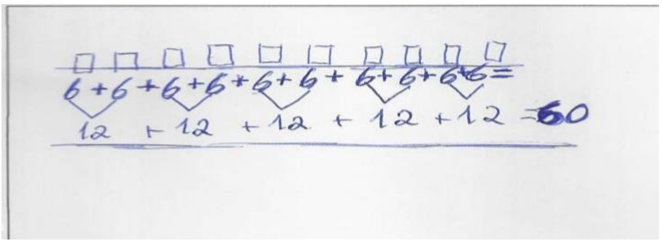


Figura 4- Produção do par E + K

Após a apresentação desta estratégia, um outro aluno interveio, dando uma sugestão ao par, o qual justificou a sua opção.

> **B:** Podiam ter continuado e juntar o 12 com o 12 também, dava 24.
> **E:** Não fizemos, porque vimos que não dava pares certos. Ficava 24+ 24 + 12.
> **Prof:** Sim é verdade, mas mesmo assim podê-lo-iam ter feito.

Na discussão de estratégias na turma será fundamental que os outros alunos participem espontaneamente nessa discussão, sem ser o professor a provocar a sua participação.

A capacidade crítica dos alunos para avaliar as estratégias apresentadas pelos outros, bem como a sua capacidade de argumentar e fundamentar as suas ideias constituem aspetos potenciadores do raciocínio matemático e da comunicação matemática.

Seguiu-se a apresentação do par dos alunos R + M que após a adição de parcelas iguais transformou essa adição repetida numa multiplicação. Um dos objetivos pensados para esta tarefa foi precisamente fazer emergir a multiplicação a partir da adição de parcelas iguais e evidenciar o sentido aditivo da multiplicação.

Durante a apresentação, R refere:

> **R:** Nós começamos pela adição como outros grupos, mas depois vi que o seis aparecia dez vezes, porque eram dez saquetas. Então disse à aluna M que era muito mais rápido fazermos uma conta de vezes e escrevemos 10 x 6 que dava 60.(…) Se seis dezenas são sessenta, então dez vezes o seis também dá sessenta.

Após a apresentação deste par e com a estratégia já registada no quadro, foi feita uma comparação das estratégias apresentadas, de forma a sistematizar as ideias.

Os alunos concluíram que todas as estratégias apresentadas permitiram resolver o problema, mas que a multiplicação foi mais rápida que a adição de parcelas iguais. De seguida registaram na sua ficha de registo a estratégia apresentada pelo último par.

As dificuldades reveladas pelos alunos nesta tarefa estiveram relacionadas com a compreensão da situação e encontrar uma estratégia de resolução eficaz registada em dois dos nove pares existentes na sala.

O recurso ao desenho surgiu num par, o mesmo que recorreu a uma contagem unitária. A contagem por saltos e estruturação numa reta dupla registou-se também apenas num par. Três pares recorreram à adição repetida, outro par recorreu à adição repetida de parcelas combinando com a estratégia de dobros e outro par começou por apresentar a adição repetida, transformando-a de seguida numa multiplicação. Apenas dois pares recorreram prontamente ao registo de um produto, sendo que um deles não traduzia a situação descrita (6x10=60).

As interações entre os alunos no trabalho a pares permitiram-lhes discutir estratégias, avaliar e repensar estratégias até encontrarem uma estratégia comum que apresentaram na sua ficha de registo.

A interação mantida entre a professora e os pares durante o trabalho autónomo permitiu, a alguns, avançar perante as dificuldades encontradas e refletir sobre o que tinham feito. Também serviu para a professora obter alguns esclarecimentos sobre os procedimentos usados pelos alunos.

O momento de partilha em grande grupo foi especialmente enriquecedor pois permitiu aos alunos apresentar as suas estratégias de resolução à turma, o que implicou a reflexão sobre o modo como tinham pensado e a organização do discurso, o que pode contribuir para o desenvolvimento da comunicação e raciocínio matemático.

A discussão e comparação das estratégias levaram a que os alunos avaliassem a eficácia das estratégias de resolução apresentadas e se apropriassem dessas estratégias para as usar noutras tarefas.

Tarefa 2 – Arrumação de sapatos

Durante a apresentação da tarefa foi recordado o que se tinha concluído na sessão anterior: "a multiplicação poderá substituir a adição repetida, tornando o cálculo mais rápido". Um dos alunos leu o problema para toda a turma e seguiu-se a leitura a pares.

Após essa leitura a pares, alguns alunos colocaram algumas questões: " São 12 pares ou doze sapatos?" e " O organizador não tem sapatos nenhuns, pois não?".

De seguida, a professora questionou os alunos, acerca da situação apresentada, assegurando-se de que os alunos identificavam os dados, as condições da situação e esclareciam todas as dúvidas apresentadas. Essa interpretação da tarefa ficou conhecida como explorar "a história" do problema ao longo de toda a sequência de tarefas.

Enquanto circulou pela sala a observar o trabalho dos pares, a professora apercebeu-se que o par I+Q não fazia qualquer registo, e as alunas não pareciam muito envolvidas na discussão do problema, enquanto os restantes pares aparentavam estar a avançar na resolução do problema. Pediu-lhes então que voltassem a ler o problema e dirigiu-lhes algumas questões, para que o par clarificasse algumas ideias, evidenciasse ter compreendido o enunciado e avançasse na resolução da tarefa.

Nessa interação mantida com a professora, as alunas fizeram agrupamentos de dois em dois com o suporte da imagem do organizador, concluíram que esse levava dez pares de sapatos e que a Leonor tinha 12 pares para arrumar. O diálogo mantido com a professora permitiu ao par conseguir caminhar na resolução da tarefa e a partir daí, trabalharem autonomamente.

Pela observação do trabalho dos pares a professora apercebeu-se que havia alguma variedade de estratégias de resolução da tarefa. Enquanto a maioria dos pares procuraram saber a quantidade de sapatos que o organizador levava, a quantidade de sapatos que a Leonor tinha e finalmente comparar as duas quantidades, houve dois pares que se centraram na quantidade de pares de sapatos.

O par I + Q foi um dos pares que se focou nos pares, também por influência do diálogo mantido com a professora. Ao observar a produção deste par, verificou-se que as alunas tinham contado a quantidade correta de pares do organizador, mas continuavam com dificuldades em compreender a situação apresentada no problema, apesar do enunciado ter sido explorado coletiva e individualmente com o par. As alunas optaram por adicionar os doze pares que a Leonor tinha com os dez pares que o organizador levaria. O par demonstrou não ter compreendido a situação apresentada e por conseguinte considerou-se fundamental começar a apresentação das estratégias por este par para que refletissem sobre o seu trabalho e partindo daquilo que tinham feito, conseguissem reformular a sua estratégia de resolução para chegar ao resultado pretendido.

A professora solicitou às alunas que explicassem à turma a sua estratégia de resolução. Logo que as alunas apresentaram a estratégia, vários alunos da turma contestaram a estratégia apresentada, pelo que a professora solicitou ao par que lhes explicasse a que se referiam as quantidades 12 e 10 na adição 12 + 10=22.

> **I:** O 12 são os pares da Leonor e 10 são os do organizador**.**
> **Prof:** A Leonor tem 12 pares de sapatos e o organizador leva 10 pares. Tendes toda a razão. Pensem lá então, o organizador chegará ou não?

Após o confronto de ideias com a professora, a aluna I concluiu:

> **I:** Não chega. (…) Porque ela tem 12 pares e aquilo só leva 10.
> **Prof:** Estão a ver que já lá chegaram. Bastava terem comparado os pares de sapatos da Leonor com os pares que o organizador levava.

Para incentivar ao uso da multiplicação e de certo modo, "afastar" os alunos do uso da estratégia de adição repetida de parcelas iguais, não foi selecionada nenhuma estratégia que a utilizasse. Foi selecionada a apresentação de um par (C+N) que recorreu à multiplicação e foi deixada para o final a estratégia do par A e H.

Se o par A+H apresentasse primeiro, a turma não conseguiria perceber como é que o par C e N chegou ao produto da multiplicação apresentada, dado que sabia que eles tinham utilizado os dobros. Para além disso, a escrita da lista abria caminho para a construção da tabuada do 2 que era um dos objetivos da tarefa.

O par C+N que optou por usar a multiplicação 12 x 2 = 24 e contagens de 2 em 2 partilhou então com a turma a sua estratégia de resolução do problema.

Dado que nenhum colega pediu qualquer esclarecimento ao par, a professora solicitou ao par que que clarificasse o significado da multiplicação sugerida, para que ficasse bem definido o significado do produto obtido.

> **N:** Porque eram doze pares de sapatos que a Leonor tinha. Cada par tem dois sapatos. Era doze vezes o dois. Depois fomos ver quantos sapatos leva o organizador. Fizemos grupos de dois em dois e vimos que dava vinte sapatos.
> **Prof:** Mas contaram os pares. Como é que sabem que são vinte sapatos?
> **N:** Então são dez pares. Dez vezes o dois são vinte, contámos depois e vimos que dava mesmo para vinte sapatos.

As estratégias apresentadas pelos colegas e registadas no quadro foram comparadas e durante esse debate estabeleceu-se uma discussão na turma, com algumas intervenções pertinentes:

> **R:** Então nós fomos saber o número de pares e os outros primeiro foram saber o número de sapatos.
> **S:** Eu disse logo à P que era doze vezes dois, mas depois fazer a multiplicação por doze foi um bocadinho difícil. A P disse para fazermos dois mais dois, até ser doze vezes, mas isso demorava. Então eu disse-lhe a ela, se isto estivesse ao contrário era duas vezes doze e sei que isso dá vinte e quatro, por isso doze vezes dois também dá vinte e quatro. Não é?

Aproveitando a intervenção do aluno S e, através da projeção da imagem do organizador, foi demonstrado por alguns alunos como é que através dos produtos 12x2 ou 2x12 se obteve 24, salientando-se a comutatividade dos fatores e a propriedade comutativa da multiplicação. Contudo concluiu-se que a expressão numérica adequada à situação descrita seria 12x2=24, dado que tínhamos doze pares de sapatos e cada par são dois sapatos, embora o cálculo de 2x12 fosse mais fácil, pensando no dobro de 12.

Neste momento de partilha houve também oportunidade dos alunos observarem a estrutura do organizador e propor diferentes formas de contagem dos espaços existentes. Os alunos verbalizaram contagens de dois em dois, quatro em quatro e cinco em cinco e todas essas contagens foram traduzidas em multiplicações e demonstradas pelos alunos, suportando-se na estrutura retangular do organizador.

Decorrente disso, foi registado no quadro 4x5=20 e 5x4=20 (Figura 5) e mais uma vez houve alunos que se referiram à troca de números, tendo a professora esclarecido que essa troca de números se designava por propriedade comutativa da multiplicação.

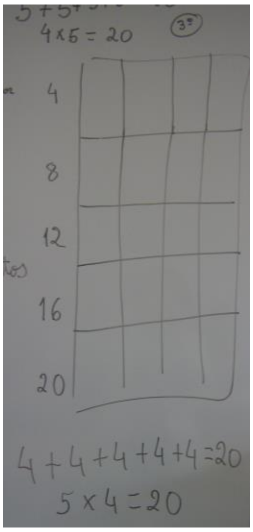


Figura 5- Ilustração do modelo retangular do organizador

Por fim, a professora solicitou a apresentação ao par A+H, tendo um dos elementos explicado:

> **H:** Nós começamos a contar de dois em dois no organizador e vimos que dava para guardar vinte sapatos. Depois fomos ver quantos sapatos tinha a Leonor. Ela tinha doze pares e então fomos escrevendo um par são dois sapatos, dois pares são quatro e continuámos até chegar aos doze pares.

A professora partiu da estratégia apresentada por este par (Figura 6) e desafiou os alunos a encontrar uma expressão matemática que traduzisse o que este par tinha escrito.

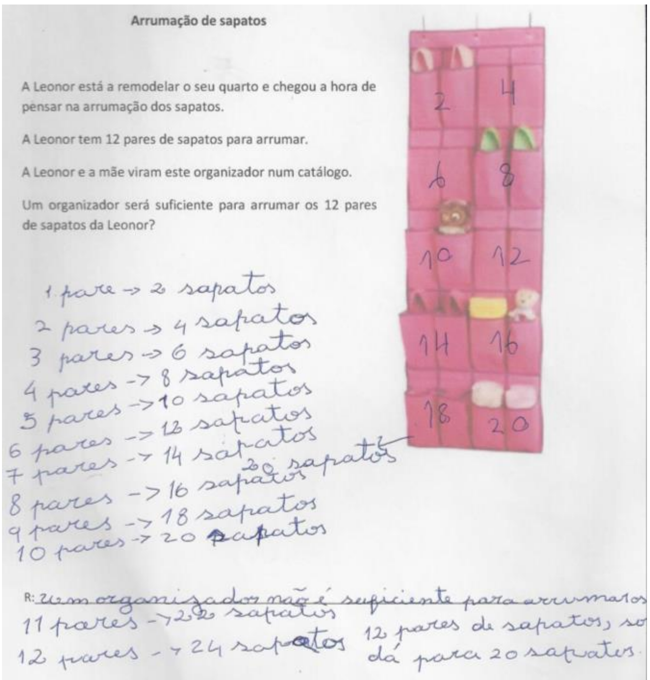


Figura 6- Produção do par A e H

Perante a hesitação do par A+H a professora sugeriu:

> **Prof:** Então vejamos, 1 x 2 que significa um par com dois sapatos. Ora isso é igual a quantos sapatos?
> **Vários:** São dois.
> **Prof:** Então amigos vamos continuar… dois vezes dois, ou seja dois pares de sapatos são…

A professora pediu ao aluno A que a ajudasse na construção da tabuada do 2. Os restantes alunos da turma também participaram e a professora foi registando no quadro, lado a lado, com a estratégia apresentada pelo par dos alunos A + H. De seguida os alunos fizeram o registo da tabuada do 2 no seu caderno.

As estratégias evidenciadas pelos pares apresentaram alguma diversidade, sendo de realçar o uso das contagens de 2 em 2 pela maioria dos pares. Esta era uma estratégia previsível, dado que a situação do problema apontava precisamente para pares de sapatos e pretendeu-se que esta tarefa fornecesse o contexto para a construção da tabuada do 2.

É de salientar que a adição repetida continuou a ser uma estratégia muito utilizada. O recurso à multiplicação foi utilizado apenas por três pares, sendo que um deles (G + L) apresenta uma representação horizontal da multiplicação que traduz a situação descrita no problema, pois registou 2x12=24.

Os pares que apresentam uma estratégia incorreta ou incompleta evidenciaram mais uma vez as dificuldades que tiveram em interpretar o problema, apesar de o conseguirem ler e este ter sido explorado oralmente.

Tarefa 3 – Bolo de iogurte

Após a apresentação da tarefa pela professora, o aluno E leu em voz alta o problema e a turma foi questionada acerca da situação descrita no problema. A situação foi facilmente descrita com a intervenção de vários alunos.

Foi recordada a tarefa 2 e a construção da tabuada do dois realizada nessa aula.

Antes de se iniciar o trabalho autónomo dos pares, a professora colocou algumas questões aos alunos, em jeito de jogo dos dobros com números até 20: “ Qual é o dobro de dois? (…) E agora o dobro de quatro?”. Este jogo teve como objetivo perceber se os alunos se recordavam da noção de dobro que tinham trabalhado no ano anterior com a adição.

Os pares resolveram o problema com rapidez e quase todos, à exceção de um, seguiu a receita original, substituindo as quantidades pelos dobros. Registaram-se poucas incorreções no cálculo dos dobros dos ingredientes referidos na receita. A quantidade necessária de óleo suscitou algumas dúvidas entre pares, sendo que quatro pares responderam corretamente, os outros quatro pares apresentaram uma quantidade incorreta e um par não registou a quantidade de óleo necessária.

Dado que os pares apresentaram registos muito semelhantes para resolverem o problema, o que era previsível, pois não se afastariam muito do modelo da receita original, a professora optou por fazer uma discussão coletiva da resolução do problema. Assim, foi questionando alguns alunos, os quais responderam corretamente, explicaram e justificaram as suas ideias.

> **M:** Então o dobro de seis é duas vezes o seis. É como se fosse seis mais seis. O dobro de seis é doze.
> **(…)**
> **L:** São seis porque são duas vezes os três copos de açúcar.
> (…)
> **S:** São quatro colheres (…) Pois, porque o dobro de dois são quatro. Duas vezes o dois dá quatro.

A dificuldade em encontrar a quantidade de óleo necessária evidenciada por mais de metade dos pares levou a que a professora concretizasse a situação com os alunos. Encheram um copo com água, verteram metade da água para outro copo igual, comparam as quantidades até ficar metade em cada um dos copos e de seguida deitaram a água dos dois copos num terceiro copo igual aos anteriores, verificando que o dobro de meio copo ou duas vezes meio copo seria um copo cheio.

O aluno S sugeriu que também se podia demonstrar a metade com as folhas. A professora sugeriu que o fizesse.

O aluno dobrou uma folha ao meio, cortou-a com a ajuda da professora e depois juntou as duas metades sobrepondo-as numa outra folha inteira. Esta equivalência entre um meio e uma metade evidenciada pelo aluno S foi aproveitada para a relação entre o dobro e a metade, recorrendo à quantidade de ovos indicada na receita original e a receita construída pela turma, dado que as caixas de ovos também possibilitaram evidenciar com alguma facilidade a noção de meio, pela utilização de meia dúzia e uma dúzia.

Na parte final da aula a professora voltou ao jogo dos dobros, desta vez com números superiores a vinte, sendo que os alunos questionados responderam corretamente, embora a maioria chegasse ao resultado através da adição. Houve o cuidado de aos alunos que pareciam ter maior facilidade no cálculo mental questioná-los com números superiores a 100, pois pretendia-se que o jogo fosse desafiante, o que não seria para esses se os números envolvidos fossem inferiores a 100.

É de salientar que nesta fase, os alunos da turma ainda não operavam com números superiores a 500. Um desses alunos ao justificar o resultado alcançado para o dobro de quatrocentos esclareceu a estratégia de cálculo utilizada.

> **R:** Cheguei aos oitocentos, porque pensei quatro mais quatro ou duas vezes quatro são oito, por isso duas vezes os quatrocentos são oitocentos.

Este aluno recorreu a fatos básicos já conhecidos que decorreram do trabalho iniciado no ano letivo anterior com a resolução de problemas que envolvem a adição e subtração.

O facto de os dobros terem sido trabalhados desde o primeiro ano na exploração das estratégias de cálculo da adição parece ter contribuído para a facilidade evidenciada na maioria dos alunos em aplicarem esta noção e construírem corretamente a receita com o dobro das quantidades.

A dificuldade evidenciada por cerca de metade dos pares em encontrar a quantidade de óleo necessária justifica-se pelo facto de não ser um número inteiro. Esta dificuldade era previsível, contudo quanto mais cedo os alunos lidarem com este vocabulário e o aplicarem no dia-a-dia, mais facilitada estará a aprendizagem dos números racionais.

A discussão em grande grupo permitiu aos alunos que tinham sentido dificuldades em encontrar a quantidade de óleo conseguirem encontrar a quantidade necessária, através da concretização das medições e mais tarde concretizando também com a confeção da receita.

Tarefa 4- Jogos de Pés

Na apresentação da tarefa a professora recordou o jogo realizado na aula de Expressão Físico- Motora. Depois da leitura da tarefa os pares trabalharam autonomamente.

A análise das produções dos pares revelou algumas incorreções no preenchimento da tabela por três pares. Os pares D+O e L+P apresentaram algumas incorreções em encontrar o número de alunos quando lhes foi fornecido o número de pés e houve um par (R + M) que apenas preencheu corretamente o número de pés que têm três e cinco alunos, cometendo muitas incorreções (Exemplo: sete alunos têm nove pés, para ter doze pés são necessários dez alunos) que refletem não existir uma verificação dos resultados obtidos nem da sua razoabilidade.

Os outros cinco pares preencheram a tabela corretamente.

Durante a partilha de ideias sobre a resolução da subtarefa 4.1, optou-se por uma partilha em grande grupo.

A professora optou por fazer primeiramente a discussão do número de pés quando foi fornecida a informação do número de alunos, dado que esta situação não suscitou dificuldades aos alunos. Só depois discutiu-se a outra situação: encontrar o número de alunos necessários quando foi fornecido o número de pés.

Durante a discussão coletiva, os alunos responderam às questões colocadas e explicaram como tinham chegado ao resultado.

> **Q:** São 2x5, são dez (…) Porque são cinco mais cinco.
> **Prof:** Então temos cinco pés mais cinco pés?
> **Q:** Não, um menino tem dois pés. 2 +2+2+2+2
> **F:** Isso era cinco vezes o dois, também dá dez.
> **B:** Pois, mas não são dois meninos com cinco pés! Era quase um polvo!
> **Prof:** Em que ficamos?
> **B:** Tem que ser 5x2 ou 10x2 porque são meninos vezes dois pés.

A maioria dos pares parece ter compreendido a situação-problema, o que pode ter sido influenciado pelo facto de a terem vivenciado, através do jogo.

No preenchimento da tabela, a maioria dos pares recorreu à relação dobro versus metade existente entre os números envolvidos, para facilitar o cálculo, mas que apesar de tudo não traduzia a situação. Alguns fizeram-no de forma consciente e assumiram-no durante a partilha coletiva. Noutros casos, e quando os alunos tinham informação do número de pés e teriam que encontrar o número de alunos recorreram também a outros factos que já conheciam.

> **C:** Para ter oito pés…são menos dois pés que dez, por isso é menos um menino. São quatro.
> **S:** Seis… Então se cinco meninos têm dez pés, para ter doze pés, é só juntar mais dois pés.

Antes de passar à partilha de estratégias a que os pares tinham recorrido para a resolução da subtarefa 4.2 e 4.3, a professora realçou que apesar dos pares terem utilizado a relação entre o dobro e metade para preencher a tabela, teriam que estar atentos à situação que vivenciaram. Dado que não tinham 2 x 10 meninos mas 10 meninos com dois pés cada um, ainda que o produto da multiplicação fosse o mesmo, devido à comutatividade da multiplicação. Foi salientado que as expressões numéricas deviam traduzir a situação descrita, pois importava antes de mais perceber o seu significado.

Na subtarefa 4.2, os pares recorreram a estratégias diversas como: o desenho apresentado pelo par I+J, o par F+Q representou 21 grupos com dois risquinhos cada um, dois pares registaram uma contagem rítmica de dois em dois (2,4,6,8…), quatro pares recorreram à multiplicação 21x2=42 e o par M+R apresentou uma decomposição do vinte e um. Os alunos decompuseram o 21 numa adição de três parcelas (21= 10+10+1) e de seguida, partindo do número de pés que já tinham encontrado para os 10 meninos, fizeram a correspondência entre cada uma das parcelas, que se referiam ao número de alunos, e a quantidade de pés que tinham. Como os alunos tinham referido na tabela que dez alunos tinham doze pés, ao fazerem a correspondência entre o número de alunos e o número de pés, apresentam incorreções (Figura 7). Para além disso esqueceram-se de fazer a correspondência entre o número de pés de um menino e voltaram a registar 1, ficando 12+12+1; quando deveria ser 20+20+2.

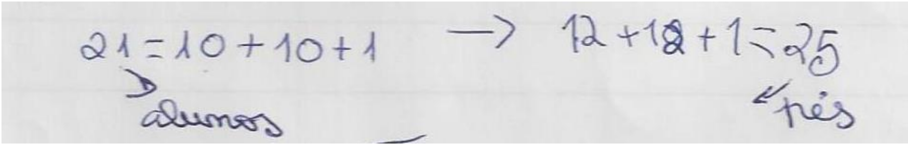


Figura 7- Produção do par M+R

O par M+R evidenciou não verificar o resultado obtido nem a sua razoabilidade, pois vinte e um alunos, tendo dois pés cada um, nunca teriam vinte e cinco pés; se cada um tem dois pés. Este par tinha apresentado muitas incorreções na subtarefa 4.1, transportaram essas incorreções para a subtarefa 4.2 e a resposta alcançada não foi a desejada.

Ao sequenciar a apresentação das estratégias dos pares, não se incluíram as estratégias que recorreram ao desenho nem aos risquinhos, porque mais uma vez, pretendeu-se incentivar ao uso de estratégias que permitissem aos alunos progredirem nos níveis de aprendizagem da multiplicação, sendo que foi feita a conexão das estratégias apresentadas com as não apresentadas, durante a discussão das estratégias de outros pares.

Ainda assim, o primeiro par a quem foi solicitada a apresentação da sua estratégia, recorreu à contagem de dois em dois, porque houve uma intenção clara de aproveitá-la para explorar o padrão da tabuada do 2. A estratégia foi registada no quadro e a professora desafiou a turma a encontrar um padrão na sequência de números apresentada pelos colegas.

> **Vários:** É de dois em dois.
> **Prof:** Sim, mas vejam lá se há um padrão numérico (…) Haverão algarismos que se repetem?
> **R:** É sempre dois, quatro, seis, oito, zero. Continua e só muda a dezena.
> **S:** São os números da tabuada do 2
> **Prof:** É importante reconhecermos este padrão que também encontramos na tabuada do 2, ajuda-vos a memorizar a tabuada do 2. Para além disso, ajuda-vos por exemplo a perceber se um número é par ou se é múltiplo de dois.

À semelhança da subtarefa 4.1, houve alunos que na subtarefa 4.2, recorreram ao uso dos dobros de forma consciente, como esclareceu um dos alunos.

> **S:** Eu fui aos dobros. Como 21 x2 dá o mesmo que 2x21, eu pensei no dobro de vinte e um. Dava quarenta e dois.

Este aluno teve presente a ideia de comutatividade da multiplicação e recorreu a esta propriedade para chegar ao resultado pretendido.

Durante a partilha coletiva, o par dos alunos M + R tiveram oportunidade de refletir sobre o que tinham feito, e após a apresentação das estratégias selecionadas foi-lhes solicitado que apresentassem a sua estratégia aos colegas. No quadro e recorrendo ao registo da tabela já corrigida e projetada no quadro, este par chegou ao resultado correto e explicou aos colegas.

> **R:** Eram vinte e um meninos e pensamos que o vinte e um era como se fosse 10+10+1. Como sabíamos quantos pés tinham os dez meninos foi só juntar…
> **M:** Só que tínhamos a tabela mal feita e depois erramos nos pés.
> **R:** Pois, tinha que ser vinte, mais vinte e mais dois.

Desta forma, a partilha coletiva das estratégias permitiu a este par perceber onde tinham errado e chegar ao resultado correto.

Relativamente à subtarefa 4.3, os pares (F+Q, D+O e L+P) não apresentaram qualquer registo, o par R+M apresentou apenas uma resposta incorreta e cinco pares apresentaram uma estratégia completa com a resposta correta.

Os três pares que não apresentaram qualquer registo evidenciaram algumas hesitações ou estratégias mais demoradas na subtarefa 4.2 e não tiveram tempo para resolver a subtarefa 4.3. O par que escreveu apenas uma resposta incorreta demonstrou não ter compreendido a tarefa e respondeu *" São necessários os 62 pés"*.

A discussão das estratégias na turma iniciou-se com a apresentação do par J+I que recorreu à contagem de dois em dois, dado que, entres os pares que apresentaram uma estratégia eficaz, este foi um dos pares que recorreu a uma contagem por saltos; os outros recorreram à multiplicação.

Considerou-se importante que este par fosse o primeiro a explicar um caminho possível a percorrer. Ainda que começassem por uma contagem de dois em dois, que todos os alunos conseguiam fazer, eles passaram para uma multiplicação. O que se pretendeu foi precisamente que os alunos abandonassem os seus métodos informais de resolver as tarefas e caminhassem para outros mais formais, onde a multiplicação surgisse, mesmo que para isso, ainda tivessem necessidade de se suportar nesses métodos informais.

O par J+I explicou à turma:

> **J:** Nós fizemos saltinhos de dois em dois, contamos de dois em dois, até chegar aos sessenta e dois.

I: Nós vimos que eram trinta e um alunos porque contámos quantos números tínhamos. Só depois é que escrevi que 31x2 era igual a 62.

A aluna I demonstrou dificuldades na compreensão das tarefas 1 e 2, sendo que a apresentação do trabalho do aluno J, permitiu-lhe encontrar uma estratégia eficaz, conseguindo compreender a tarefa e resolvê-la, como demonstrou ao explicar a sua estratégia de resolução à turma.

A reformulação dos pares, levou a que a aluna I fizesse par com outro aluno (J) , cuja interação durante o trabalho autónomo parece ter sido positivo para a aluna. A aluna parecia ter compreendido a tarefa e durante a apresentação conseguiu explicar a estratégia do par sem dificuldades. É de salientar que nas tarefas anteriores, o par em que estava a aluna I manifestou dificuldades na resolução da tarefa e foi necessário intervir junto deles para que conseguissem avançar.

O trabalho com outro elemento revelou-se positivo para a aluna I, pois a partilha de ideias dos dois elementos (J e L) que ocorreu durante o trabalho autónomo parece ter contribuído para encontrarem uma estratégia eficaz para resolver a tarefa e a aluna I parecia mais confiante nas suas afirmações.

O par G+S foi o único par que recorreu à multiplicação e após a intervenção dos colegas, o aluno S adiantou a estratégia do seu par.

S: Nós também fizemos essa multiplicação 31x2=62.
Prof: Como é que chegaram ao produto?
G: Foi pelo dobro. O S disse que era mais rápido pensarmos pelos dobros.
S: Pois, era 2x31, era o dobro, dava o mesmo.

A professora questionou a turma, se mais alguém tinha recorrido aos dobros para encontrar a solução da subtarefa 4.3, tendo a aluna N referido que o seu par tinha também pensado nos dobros.

N: Nós pensamos que em vez de sessenta e dois tínhamos sessenta. Nós fizemos sessenta pés são trinta alunos. Depois só faltavam dois pés, era só mais um aluno. Dava trinta e um alunos.

O par E+K foi o único par que recorreu aos dados fornecidos pela resolução das subtarefas 4.1 e 4.2. Dada a singularidade da estratégia apresentada, essa foi a última a ser apresentada. Ainda que recorresse à adição, este par apresentou uma estratégia eficaz (Figura 8) que explicou à turma:

E: Nós fizemos assim: quarenta e dois pés tinham os vinte e um alunos. Assim só precisávamos de mais vinte pés para ter sessenta e dois (…) Na tabela já lá estava. Para ter vinte pés eram precisos dez alunos. Deu trinta e um alunos.

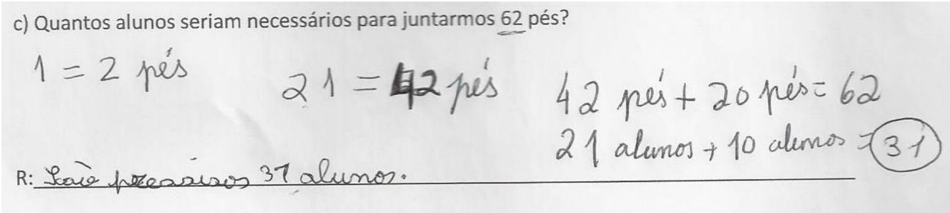


Figura 8 - Produção do par E+K

A professora pediu aos alunos para verem na tabela outras quantidades que lhes permitissem chegar ao número de alunos necessários para ter os 62 pés e entre outras, foi sugerido 20+20+20+2 pés, concluindo-se igualmente que pensando nos meninos seriam 10+10+10+1=31.

Em síntese, nesta tarefa 4- Jogo dos Pés, o facto de os alunos terem vivenciado a situação pode ter facilitado a sua resolução.

As estratégias apresentadas pelos pares permitiram verificar que os alunos se situam em diferentes níveis de aprendizagem da multiplicação. Há pares que recorreram a métodos informais de resolução da tarefa, como o desenho. Outros utilizaram a contagem e outros apresentaram estratégias que realçando o aspeto comutativo da multiplicação, inverteram a ordem dos fatores e chegaram ao resultado, recorrendo ao uso dos dobros.

É de salientar que houve um grupo (A+H+B) que na tarefa 4.2 recorreu já à multiplicação, fazendo uso da propriedade comutativa e dos dobros, o que faria antever um nível de cálculo mais formal, mas na tarefa seguinte assistiu-se a um retrocesso e utilizaram estratégias de contagem.

As dificuldades na resolução desta tarefa prenderam-se com a gestão do tempo para alguns pares, que na subtarefa 4.2 usaram estratégias mais demoradas, como o desenho e a contagem, ficando com pouco tempo para dedicar à subtarefa 4.3.

Mais uma vez, o momento de partilha e discussão das estratégias em grande grupo permitiu aos alunos contactar com estratégias de resolução diversificadas e de as confrontar, procurando-se, através do questionamento da professora, promover a reflexão das suas ideias e acrescentarem ou consolidarem conhecimento acerca da multiplicação.

Tarefa 5- Na Frutaria da Tita

Após uma breve apresentação da tarefa iniciou-se o trabalho a pares. Na resolução da subtarefa 5.1 e 5.2 os alunos não evidenciaram dificuldades e trabalharam com grande autonomia. Na subtarefa 5.3 já se notaram dificuldades ao nível da interpretação da situação descrita, motivada sobretudo pela referência à palavra “camada”.

Durante a apresentação da tarefa a dúvida não surgiu, mas agora houve quem a colocasse. A falta de conhecimento do vocabulário utilizado na tarefa podia ser um entrave à sua resolução por parte de alguns alunos, pelo que houve necessidade de clarificar a noção de camadas para toda a turma, esclarecendo: “*A quantidade de maçãs que está por baixo é igual á quantidade que se consegue ver por cima”.*

É de salientar que a perceção dessas dificuldades foi possível, porque surgiu da discussão que ocorreu com um par durante o trabalho autónomo, que não tinham percebido o significado de camada. Desta forma, o acompanhamento da professora aos pares, durante o trabalho autónomo, foi fundamental, permitindo detetar dificuldades e desbloqueá-las para que os alunos avançassem na resolução da tarefa.

No que se refere à subtarefa 5.1 dois pares recorreram à contagem por saltos de 3 em 3, quatro pares usaram unicamente a adição repetida, sendo que dois desses pares (G+L e E+K) contaram inicialmente as peras de uma caixa (3+3+3=9) e depois adicionaram 9+9=18. Os outros dois pares adicionaram seis parcelas de 3 chegando ao mesmo resultado. Os restantes três recorrem à multiplicação para resolver a tarefa, embora, por vezes, começassem por apresentar alguma adição.

A apresentação das estratégias iniciou-se precisamente com o par G+L que apresentou uma estratégia aditiva, dado que pretendeu-se na fase da discussão, que essa adição repetida fosse transformada numa multiplicação.

Após a apresentação do par G+L, a professora pediu ao par F+J para apresentar a sua estratégia, também de adição repetida, mas diferente da anterior, tendo o aluno J referido:

> **J:** Então nós vimos na caixa que cada fila tinha três peras, depois fomos juntando até termos as seis filas.
> **Prof:** Então porque não transformaram a adição numa multiplicação, tendes sempre parcelas iguais?
> **F:** Podia ser… seis vezes o três, ele aparece seis vezes.
> **Prof:** Escrevam então. E os outros amigos transformem também a vossa adição em multiplicação, vamos.

O par G + L veio ao quadro e começou por escrever 3x3=9 e depois 2 x9=18.

Um dos alunos interveio:

> **B:** Olha, seis vezes o três é dezoito e duas vezes o nove também é.
> **Prof:** Pois é, vamos ver porquê? Vamos olhar para as caixas.
> **S:** Pois temos seis filas de três. Mas olhando só por cima temos três filas com três peras.
> **Prof:** Então e porquê depois dois vezes nove? Podes explicar tu, L.

> **L:** Porque são duas camadas, está outra escondida.
> **Prof.**: Sabiam que conseguimos fazer uma expressão numérica única para esses dois produtos?

Os alunos foram desafiados a encontrar essa expressão numérica e após a discussão, e com a ajuda da professora, o aluno S referiu:

> **S:** Temos 3x3 que dá nove e depois fizemos o dobro disso.
> **Prof:** Como podemos representar o dobro de três vezes o três?
> **S:** Eu acho que já sei. Posso ir aí?

O aluno foi ao quadro e escreveu 2x3x3. Foi explorado o significado da expressão apresentada, tendo que ser a professora a escrever 2x (3x3) =18.

Neste momento da aula considerou-se importante atribuir significado às expressões multiplicativas encontradas: o dobro de três filas com três peras cada uma.

Na subtarefa 5.2 verificou-se que os pares recorreram ao mesmo tipo de estratégias da questão anterior. Os alunos que na subtarefa 5.1 recorreram à contagem por saltos, voltaram a usá-la nesta subtarefa 5.2 com saltos de dois em dois, suportados na reta numérica. A adição repetida é maioritariamente usada pelos pares. Os pares que na subtarefa 5.1 tinham utilizado a multiplicação voltaram a usá-la para resolver a tarefa, mas tal como anteriormente, por vezes, os produtos decorreram de uma adição repetida, ou seja, os alunos transformaram a adição repetida numa multiplicação.

A apresentação das estratégias começou pelo par F+J, que mais uma vez, recorreu à adição repetida (2+2+2+2+2+2=12) concluindo que dava doze maçãs. Mais uma vez, a apresentação começou por estratégias mais informais porque pretendeu-se partir dessas estratégias, para as transformar numa multiplicação.

O aluno J salientou a sua insegurança no uso da multiplicação na resolução da tarefa:

> **J:** Pois… era seis vezes o dois. Dava doze também. (…) Nós estamos mais habituados às contas de mais. Desde o primeiro ano que trabalhamos e há pouco tempo é que estamos a trabalhar com a multiplicação.

Parece que a prática que os alunos têm da adição repetida e dos processos de contagem transmitiu-lhes uma maior segurança que o uso da multiplicação.

A passagem de um raciocínio aditivo para um raciocínio multiplicativo é um processo gradual e parece ser também influenciado por este sentimento de confiança em determinados procedimentos.

Os momentos de discussão na aula foram um incentivo para os alunos criticarem as estratégias e aperceberem-se da necessidade de as alterar, nomeadamente para outras que eram mais rápidas e adequadas, procurando que as suas estratégias mais informais fossem também caminhando para um maior formalismo.

A professora solicitou a apresentação da estratégia do par C+N, por ter usado a multiplicação e ter sido o único par que se focou primeiramente numa caixa e depois aplicou a noção do dobro para saber a quantidade de maçãs das duas caixas.

Os alunos explicaram à turma.

> **C:** Nós olhamos para uma caixa e vimos que eram duas filas com três maçãs .(…) Filas, não, colunas, duas colunas com três e fizemos uma multiplicação de dois vezes o três, dava seis. Depois fizemos seis mais seis e dava doze. Transformamos numa multiplicação duas vezes o seis.

Aproveitando o engano do aluno, sobre a distinção entre colunas e filas, a professora pediu aos alunos que se focassem nas filas e nas colunas e encontrassem as multiplicações sugeridas por essa organização de estrutura retangular. Os alunos prontamente sugeriram as expressões 2 x 3 = 6 e 3 x 2=6 e comentaram a troca dos números que permitia obter o mesmo resultado.

A exploração do modelo retangular presente na estrutura das caixas possibilitou, mais uma vez, aos alunos visualizarem e sugerir produtos que evidenciaram a propriedade comutativa da multiplicação.

No que se refere à última questão, apesar das dificuldades iniciais evidenciadas por alguns alunos na compreensão do vocabulário do enunciado (camadas),estas foram ultrapassadas com o esclarecimento da professora.

Analisando as produções dos alunos verificou-se que estes utilizaram maioritariamente uma estratégia aditiva para resolver a subtarefa 5.3, à semelhança das anteriores. Dos sete pares que recorreram à adição, cinco deles resolveram o problema ignorando as informações que decorreram da resolução da subtarefa 5.2 e os outros dois partiram dos factos já conhecidos dessa tarefa para resolverem a subtarefa 5.3. Entre aqueles que ignoraram a informação decorrente da tarefa anterior, encontramos três pares que continuaram focados nas colunas de maçãs e adicionaram oito parcelas de 3, embora um deles tenha apresenta erros de contagem. Os outros dois pares concentraram-se no agrupamento de seis, visível em cada caixa, apresentando a adição repetida 6+6+6+6=24, sendo que um deles sugeriu depois o agrupamento das parcelas, combinando esta adição repetida com a estratégia de dobros (Figura 9).

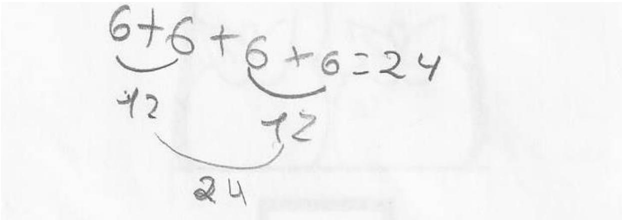


Figura 9- Produção do par G+L

Na apresentação das estratégias este foi o primeiro par (G+L)a quem foi solicitado partilhar a sua estratégia com a turma. Este par apesar de ter apresentado uma adição repetida, notou-se já alguma preocupação em agrupar as parcelas para facilitar o cálculo. O par recorreu às gravuras que representavam as caixas de fruta para explicar à turma a sua estratégia.

L: Nós fizemos seis, mais seis, mais seis e mais seis e deu vinte e quatro.
Prof: Vamos lá ver onde estão esses seis. Diz-nos tu, G.
G: Então são seis daqui de cima mais os seis que estão por baixo nesta caixa e depois o mesmo na outra caixa.
L: Fizemos seis mais seis que dava doze e os outros seis também. Depois fizemos doze, mais doze que são vinte e quatro…Era mais rápido.
R: Pois era! Nós enganámo-nos e não deu vinte e quatro.

A professora não quis adiantar aqui a exploração do dobro, porque pretendia que fosse o par seguinte a fazê-lo. Por isso solicitou ao par C+N que apresentasse a sua estratégia de resolução.

N: Nós vimos que em cada caixa há seis maçãs em cima e seis em baixo, isso dava-nos doze. Como se tratavam de duas caixas era só multiplicar por dois. Dois vezes doze deu vinte e quatro.
P: Vamos registar. Duas caixas teriam duas vezes a quantidade de maçãs de uma caixa, daí terem registado 2 x12=24. Então esta expressão 2x significa que estou a fazer o quê ao 12?
B: É duas vezes o 12.
S: É um dobro.

Foi solicitado à turma que comparassem as estratégias apresentadas pelo par G+L e C+N, pois pretendia-se realçar que ambas tiveram presente o recurso à noção de dobro, sendo que o primeiro par (G+L) fê-lo num procedimento aditivo e o segundo par (C+N) usou o dobro associado unicamente à multiplicação.

Os alunos começaram por identificar a diferença entre as duas operações: adição e multiplicação. Depois, conduzidos pelo questionamento da professora verificaram que em ambas estava presente uso do dobro:

> **B:** Nós pensámos que o dobro de doze são vinte e quatro.
> **Prof:** Então e os vossos colegas, quando agruparam seis mais seis para obterem 12 e depois 12 mais 12 para obter 24, não estará também aí presente a ideia de dobro?
> **L:** Pois o doze é o dobro de seis.
> **Prof:** Então e o vinte e quatro?
> **L:** Vinte e quatro é o dobro de doze. Nós juntámos para ser mais rápido, não tínhamos tantos números.

A professora voltou a insistir na necessidade dos alunos abandonarem a adição repetida com muitas parcelas e substituírem-na pela multiplicação, estratégia que se revelou mais rápida e eficiente; realçando que a adição repetida de parcelas iguais ocasiona, por vezes erros de contagem devido ao número de parcelas.

Dado que o par I e O utilizaram a adição (3+3+3+3+3+3+3+3) pediu também a esse par para transformá-la num produto. O par não teve dificuldades em encontrar o produto e respondeu prontamente:

> **I:** Podíamos fazer 8x3.
> **Prof:** Então qual é o produto?
> **I:** 3,6,9,..12…15,…18,…21,…24
> **J:** Nós também fizemos a adição igual e deu vinte e quatro. (…)
> **S:**Professora, isso já é a tabuada do 3.

O par parece ter compreendido o significado da multiplicação 8 x3. Para chegar ao produto teve necessidade de fazer uma contagem de três em três, inicialmente mais fluente, mas depois teve necessidade de usar os dedos para contar e chegar ao produto. A professora aproveitou para escrever a sequência que o aluno I dizia oralmente. Uma vez escrita a sequência de números de três em três, e os alunos terem referido que seriam os resultados da tabuada do 3, fez sentido e avançou-se para a construção dessa tabuada, ainda que a sua construção não fosse previsível nesta tarefa.

O facto de se utilizar o quadro interativo para registar e sintetizar as estratégias partilhadas revelou-se de particular importância, pois permitiu construir numa página a tabuada do 3, que foi registada pelos alunos no seu caderno, e voltar ao registo síntese das estratégias apresentadas pelos pares para a tarefa 5, que se encontrava nas páginas anteriores, sem haver necessidade de apagar o quadro e perderem-se os registos.

Antes dos alunos fazerem o seu registo individual sobre a tarefa 5, foi recordada a noção de dobro e a propriedade comutativa da multiplicação que se tornava evidente na estrutura retangular das caixas da fruta que foram apresentadas.

A discussão da tarefa na turma propiciou a construção da tabuada do três no decurso da interação na turma. A construção da tabuada do três não se previu inicialmente para esta tarefa, contudo a situação propiciou-o e pareceu fazer todo o sentido neste contexto.

Em síntese, podemos dizer que esta tarefa não suscitou dificuldades de maior aos alunos, como se disse, trabalharam com grande autonomia; tendo sido facilmente ultrapassada a falta de compreensão do significado do vocábulo " camada".

As estratégias apresentadas pelos pares na resolução desta tarefa continuaram a estar muito pegadas à adição, pelo que se insistiu com os pares, que a ela recorreram, que a transformassem numa multiplicação, de modo a incentivar o seu uso e promover o desenvolvimento do raciocínio multiplicativo. Mesmo quando apresentaram uma multiplicação para resolver a tarefa, em alguns pares, a adição repetida antecedeu essa multiplicação, sendo que, conforme deixaram transparecer, a usaram por lhes transmitir maior segurança.

Nos registos individuais da tarefa optou-se por incluir o registo da adição repetida aliada à multiplicação.

Tarefa 6- Roupa da Maria

A tarefa foi lida em voz alta por um aluno e discutida a " história do problema", como era hábito. A professora recordou uma situação idêntica trabalhada no ano letivo anterior que também implicava a combinação de roupas, em que os alunos, na altura, tiveram oportunidade de concretizar com miniaturas de camisolas e calças feitas em feltro. De seguida os pares trabalharam autonomamente.

Todos os pares, à exceção do grupo A+ K+Q apresentaram nos seus registos uma estratégia adequada. Este grupo evidenciou dificuldades em encontrar uma estratégia e registá-la, tendo optado pela adição de 3+2=5, demonstra claramente dificuldades na compreensão da situação descrita.

Durante o trabalho a pares a professora interveio junto desse grupo (A+ K+Q), colocando-lhes algumas questões que visaram sobretudo perceber o que eles tinham compreendido da situação, recordou a tarefa idêntica realizada no ano letivo anterior, o que lhes permitiu encontrar um caminho para a resolução da tarefa.

O papel do professor no acompanhamento dos pares, nomeadamente daqueles que tinham alguma dificuldade, foi fundamental, para que não desistissem e se envolvessem na resolução da tarefa.

Após a intervenção da professora o referido grupo decidiu abandonar a estratégia da adição e recorrer ao desenho, tal como a maioria dos pares. Não houve possibilidade de voltar a este par durante a fase de trabalho autónomo, pois também houve necessidade de interagir com outros pares. Porém, este grupo (A+ K+Q) não completou as ligações, respondendo que havia apenas 3 maneiras diferentes da Marta se vestir, o que evidencia as suas dificuldades na compreensão da tarefa.

Sete pares modelaram a situação e desenharam as duas saias e as três camisolas, estabelecendo as ligações. Um desses sete pares registou ainda, a expressão multiplicativa 2x3=6. O par E+H recorreu à adição e transformou-a depois numa multiplicação.

O par B + F recorreu ao desenho, fez as ligações/combinações entre as peças de roupa, contudo enganou-se a contar as combinações e respondeu *" A Maria pode vestir-.se de cinco maneiras."*

A partilha das estratégias foi feita com recurso ao quadro interativo, pois este permitia desenhar as saias e as camisolas com as cores referidas na tarefa, tal como vários pares fizeram no seu registo.

A primeira estratégia selecionada para a apresentação foi precisamente a do par B+F, dado que o seu erro pareceu decorrente de distração, com o intuito de que durante a apresentação fosse detetado e corrigindo; o que se veio a verificar. Os alunos fizeram o registo no quadro (Figura 10) e durante a apresentação contaram as seis combinações, concluindo que se tinham enganado.

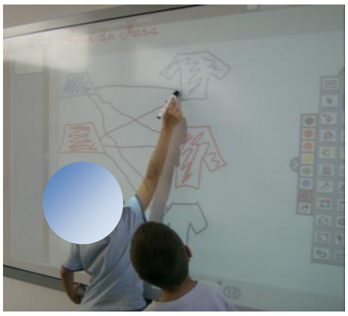


Figura 10- Registo no quadro do par B+F

Perante essa constatação do aluno B, a aluna N interveio:

> **N:** Pois, nós para não nos enganarmos fizemos as ligações com cores diferentes (…) Cada cor era uma maneira diferente de conjugar a saia com a camisola.

O par N + M mostrou aos seus colegas o seu registo (Figura 11).

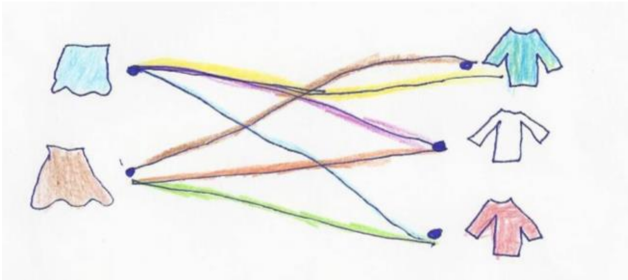


Figura 11- Produção do par N+M

De seguida , a professora solicitou que o par E+H partilhasse a sua estratégia de resolução da tarefa, dado que eles não usaram o desenho e apresentaram já uma multiplicação. Ao apresentaram a sua estratégia o par esclareceu porque tinham optado pelo uso da multiplicação:

> **E:** Nós fizemos três vezes o dois que dava seis. Escrevemos o três que eram as camisolas e o dois eram as saias.
> **Prof**: Porque é que fizeram assim?
> **E:** Porque era das três camisolas. Cada uma dava para conjugar com as duas saias. Era sempre duas combinações para cada uma.
> **Prof:** Os vossos amigos L + C escreveram 2x3=6. Como é que vocês pensaram?
> **L:** Nós desenhámos e depois vimos que cada saia tinha três ligações, eram das três camisas. Nós tínhamos duas saias a combinar com as três camisolas.

As estratégias dos dois pares (E+K e C+L) foram comparadas pelos alunos, tendo sido esclarecido que na situação apresentada, combinação de peças de roupa, ambas as expressões multiplicativas 2x3=6 ou 3x2=6 podiam ser utilizadas, já que ambas traduziam a situação.

Como nenhum dos pares utilizou uma tabela para resolver a tarefa, foram orientados pela professora para esta estratégia de resolução. A tabela foi preenchida com a ajuda dos alunos.

Nesta tarefa que implica o sentido combinatório da multiplicação, que de acordo com dados da investigação é de mais difícil compreensão para os alunos do que o sentido aditivo, o recurso à modelação da situação pela maioria dos pares constituiu uma estratégia adequada e previsível. Apesar de ser uma estratégia muito informal esta foi eficaz, permitindo-lhes uma maior confiança para encarar futuras situações idênticas.

Contudo, também houve a preocupação de realçar as duas expressões multiplicativas sugeridas pelos dois pares e houve a preocupação dos alunos lhe atribuírem significado de acordo com o contexto da tarefa. Apesar das estratégias apresentadas serem ambas eficientes para a resolução da tarefa, o uso das expressões multiplicativas evidenciam uma progressão de alguns alunos para uma linguagem mais formal e houve a preocupação de estimular essa evolução na turma. Todos os alunos registaram a tabela na sua ficha de registo individual, tendo, por vezes, que ser auxiliados pela professora no uso da régua.

Tarefa 7- As idades

Após a exploração da "história do problema" , tendo a professora chamado à atenção para a expressão o dobro da soma . De seguidos os pares trabalharam autonomamente. Houve necessidade de intervir junto de um dos pares. O par B+ F que tinha registado apenas 7+14, foram solicitados a clarificar a que se referiam os números indicados.

Prof: Porque têm 7+14?
B: O 7 são os anos da Maria e o 14 é a idade da prima.
Prof: Como chegaram ao 14?
B: Então se ela tem o dobro da idade da Maria, tem 14.
Prof: Mas porquê juntar a idade das duas?
F: Temos que juntar para saber a idade da tia. Está mal, professora?
Prof: Não disse isso, avancem.

O par ficou a concluir a resolução da tarefa, contudo a professora verificou depois, que não tinham completado a resolução, pois não calcularam o dobro de 21, referindo que a tia tinha 21 anos.

O par I+O apresentou uma estratégia idêntica, chegando à mesma conclusão. Por conseguinte, estes dois pares parecem não ter relido com atenção ou não ter compreendido a expressão " a idade da tia é o dobro da soma da idade da Maria com a idade da prima", ficando apenas pelo cálculo da soma e não do dobro.

O par G+S recorreu à adição e apresentaram uma resposta incorreta. (Figura 12) evidenciando também alguma falta de atenção na leitura do enunciado, sobretudo da parte final relativa à idade da tia.

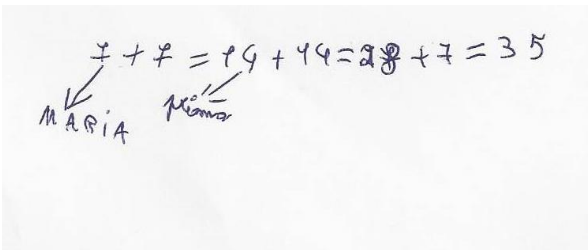


Figura 12- Produção do par G+S

Os outros seis pares apresentaram uma estratégia adequada para resolver o problema e uma resposta completa, tendo recorrido à multiplicação e à noção de dobro. Contudo, o par C+L evidenciou dificuldades inicialmente em encontrar a idade da tia, tendo até estimado que a tia poderia ter 70 anos. A professora incentivou os alunos a reler a tarefa e sublinhar o que era referido acerca da idade da tia. Depois dos alunos referirem o que era pretendido, conseguiram encontrar autonomamente a estratégia adequada.

Para estes alunos, bastou-lhes receber um incentivo da professora, reler o problema e através das questões que lhes foram colocadas, avançaram na resolução da tarefa.

A partilha e discussão das estratégias iniciou-se com o par B+ F porque, na interação mantida come este par, durante o trabalho autónomo a professora percebeu que até pareciam estar num bom caminho para resolver a tarefa, mas no final verificou-se que não compreenderam plenamente a tarefa. Pretendeu-se por isso, que eles conseguissem compreender onde falharam, ultrapassar a dificuldade sentida, trilhando um caminho que lhes permitisse chegar ao resultado correto.

> **B:** Nós fizemos sete mais catorze igual a vinte e um.
> **Prof:** Adicionaram logo sete com catorze? Fizeram logo isso?
> **B:** Não, não! Primeiro escrevi que o dobro de sete são catorze. É a idade da prima da Maria que é o dobro da Maria.
> **Prof:** Pois, essa confusão foi por não terem o registo bem organizado no espaço.
> **F:** Depois fizemos a idade da tia , que é sete mais catorze, deu vinte e um.
> **Prof:** Leiam o problema de novo. O que refere acerca da idade da tia da Maria?(…)
> **F:** A idade da tia é o dobro da soma da idade da Maria com a idade da prima.
> **Prof:** O que fizeram para a idade da tia foi sete mais catorze que vos deu vinte e um. Mas vinte e um será então o dobro da soma dos anos da Maria com os anos da prima?
> **B:** Pois falta aí o dobro.

O par registou 2 x 21, recorrendo à adição, justificando a sua opção.

> **F:** Pois, vinte mais vinte são quarenta. Logo vinte e um mais vinte e um são quarenta e dois anos.

A discussão em grande grupo permitiu a este par concluir a resolução da tarefa.

Dado que os outros seis pares recorreram todos à multiplicação e ao uso dos dobros, conforme o pretendido e apresentado pelo par B+F, apenas foi solicitada a apresentação da estratégia desse par.

O uso da multiplicação e o recurso ao dobro foi evidente nesta tarefa. Era previsível que os alunos recorressem à multiplicação, dado que a noção de dobro parecia ser de fácil compreensão para os alunos.

Tarefa 8- Saquinhos de oferta da Leonor

Durante a apresentação da tarefa recomendou-se aos alunos que ao escreverem uma expressão numérica identificassem a que se referia cada um dos números, para que se compreendesse o significado da mesma. Houve este cuidado pois a quantidade 20 tanto se referia aos vinte bombons da caixa, como aos vinte alunos da turma ou aos vinte sacos de bombons; isso podia gerar alguma confusão. Contudo a opção por estas quantidades foi consciente, dado que pensou-se que a estrutura da caixa 5x4 ou 4x5 , possibilitava a construção da tabuada do 4, na turma existiam os vinte colegas e logo eram necessários os vinte sacos de bombons.

Na subtarefa 8.2 partindo da resolução da tarefa anterior e pelas quantidades envolvidas 5,20 e 100 , pensou-se que a sua resolução estaria mais facilitada.

O par H+ E resolveu a tarefa 8.1 com alguma rapidez e prosseguiu para a subtarefa 8.2, enquanto os restantes concluíram a anterior.

Durante o trabalho autónomo dos pares, ao passar junto do par J+P, a professora verificou que o par tinha tentado usar a multiplicação para resolver a tarefa, mas abandonou essa estratégia e decidiu fazer o desenho dos sacos de bombons. Pediram-se esclarecimentos ao par e que justificassem as suas opções. A aluna J explicou que se sentia mais segura a fazer o desenho, apesar de demorar mais tempo.

Posteriormente houve necessidade de intervir junto do par C+L porque o aluno C discordou da opinião da sua colega L e esta não aceitou a sua justificação. Foi necessária a intervenção da professora, para regular esse conflito de opiniões.

> **Prof:** O que se passa aqui?
> **C:** Ela acha que são dez caixas mas eu penso que não. Não vês que não podem ser dez caixas. Cada uma tem 20 bombons! Isso vai dar mais que cem. São cinco.
> **L:**... Não são dez caixas?! Cada uma tem quantos bombons? (...) Ah, pois era assim não são dez, era metade, são cinco.
> **Prof:** Porque é que eram afinal só cinco e não as dez como tu tinhas estimado?
> **L:** Pois não eram precisas as dez caixas, para isso cada caixa tinha que ter dez bombons… Cem são dez dezenas.
> **Prof:** Pois…cada caixa tem vinte. Que relação existe entre o vinte e o dez?
> **C:** O dobro. Vinte é o dobro de dez.
> **Prof:** Precisamente. Tu dizias dez e afinal são quantas?
> **L:** São cinco caixas com vinte bombons.
> **Prof:** Qual a relação entre o cinco e o dez?
> **L:** É metade.
> **Prof:** Estás a ver. Não eram precisas as dez caixas porque as caixas tinham o dobro de dez bombons, tinham vinte bombons, assim só precisaste de metade. Aí estão as cinco caixas.

As dificuldades reveladas pela aluna L demonstraram que a aluna encarou a subtarefa 8.2 como uma tarefa desligada da subtarefa anterior e que o par a resolveu sem recorrer aos factos que já conhecia.

A interação mantida com o par nesta fase do trabalho autónomo foi importante, primeiramente para amenizar o conflito de opiniões e também para clarificar as ideias do par, nomeadamente da aluna L. A interação com o par permitiu-lhe concluir que o colega C tinha razão, acabando por justificar a razão pela qual eram necessárias as cinco caixas de bombons. Insistiu-se na exploração desta relação entre o dobro e a metade pois a compreensão desta relação será, desde logo, fundamental para os alunos evoluírem na aprendizagem da multiplicação.

Esta gestão de conflito de opiniões no par, obrigou também aos alunos desse par a refletir sobre as suas ideias, a justificá-las e a chegarem a uma conclusão comum.

Na resolução da subtarefa 8.1, o par I+ O apresentou uma estratégia incompleta para resolver o problema, limitando-se a saber a quantidade de bombons necessária para os saquinhos de bombons, e o par B+F apresentou uma adição repetida do quatro com erros de cálculo e sem o cálculo do número de caixas necessárias.

Todos os pares concluíram que uma caixa tinha vinte bombons, sendo que apenas um par usou a multiplicação e apresentou o produto 4x5=20. O par J+P teve necessidade de desenhar a caixa com os vinte bombons e os vinte sacos com quatro bombons cada um. No desenho dos sacos este par adotou uma estrutura retangular, que lhes permitiu concluir que a quantidade de bombons existente em cada fila de sacos equivalia a uma caixa de bombons (Figura 13)

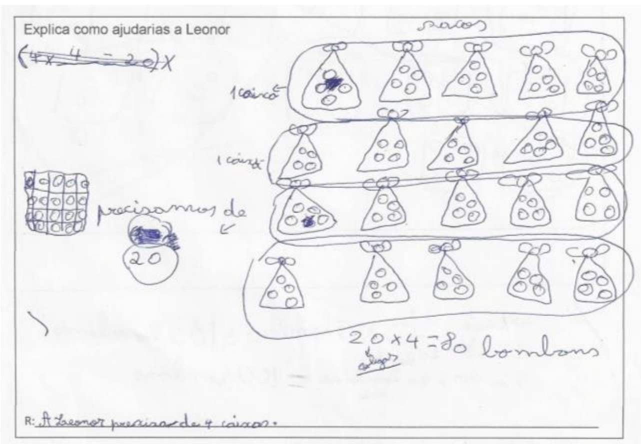


Figura 13- Produção do par J+P

De seguida os pares procuraram calcular a quantidade de bombons necessária para os vinte saquinhos de oferta. Dois pares recorreram à adição repetida de vinte parcelas do quatro suportando, por vezes, a contagem nos dedos; três pares recorreram a uma estratégia de contagem de quatro em quatro e dois pares apresentaram a representação do produto 20x4=80.

Depois disso, os pares procuraram saber a quantidade de caixas necessárias para ter os oitenta bombons. Apenas sete pares completaram a resolução do problema.

O par J + P que recorreu ao desenho concluiu isso pela representação dos sacos e pela forma como os organizou. Dois pares adicionaram o vinte até terem oitenta bombons e verificaram que necessitavam de quatro caixas, sendo que um deles (D+R), apresentou um diagrama em árvore, estabelecendo relações de dobro entre as quantidades envolvidas. O grupo A+Q+K registou uma contagem de vinte em vinte.

Dois pares (C +L e E + H) escreveram uma lista descrevendo a quantidade de caixas e a quantidade de bombons que lhe correspondia. Apenas o par G+S recorreu à multiplicação, apresentando a expressão "4 caixas x 20 bombons = 80 bombons".

A apresentação das estratégias selecionadas iniciou-se com o par D+R, que utilizou uma estratégia contagem de quatro em quatro, e explicou à turma como tinha concluído que eram necessários oitenta bombons para os saquinhos que a Leonor iria oferecer aos colegas, bem como o seu o diagrama em árvore, para encontrar o número de caixas necessárias (Figura 14). Deu-se início com a apresentação desta estratégia, pois a contagem de quatro em quatro permitiu fazer a correspondência entre o número de sacos e o número de bombons e construir a tabuada do quatro.

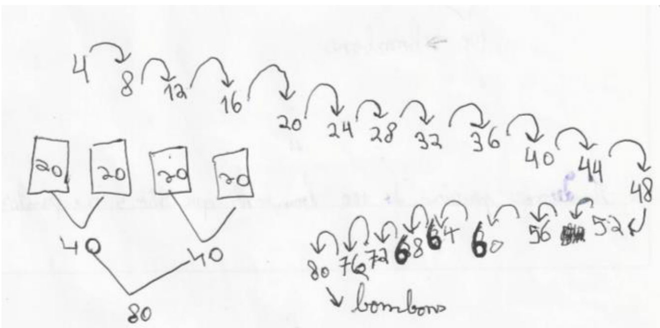


Figura 14- Produção do par D+R

> **R:** Nós pensámos que vinte mais vinte dá quarenta. Para termos oitenta bombons precisávamos de mais quarenta. Por isso eram precisas quatro caixas.
> **D:** Pensámos nos dobros.

Partindo do esquema apresentado pelo par D+R, foi recordada a relação dobro/metade entre as quantidades envolvidas:

Prof: Falta-me perceber qual a relação que existe entre o vinte e o oitenta?(…) Observem as quantidades vinte, quarenta e oitenta.
B: É o dobro do dobro!
Prof. Explica lá isso.
B: Oitenta é o dobro de quarenta e quarenta é o dobro de vinte. É o dobro do dobro.
Prof: Vejam lá bem todos, o dobro de vinte são quarenta, por sua vez o dobro de quarenta são oitenta, portanto como disse o nosso amigo é o dobro de um dobro. Vejamos o que se passa entre os produtos da tabuada do dois e do quatro.

Foram comparados os produtos da tabuada do dois e da tabuada do quatro e estabelecida a relação entre os produtos de cada uma, concluindo-se que existe uma relação de dobro. Pelo que a tabuada do quatro poderia ser entendida como referia o aluno B "É o dobro do dobro".

A professora introduziu a designação quádruplo para substituir a referida pelo aluno.

Através da exploração do diagrama apresentado pelo par, também foi recordada a noção de metade e estabelecida a relação entre os números envolvidos. Os alunos foram de novo questionados sobre a relação que existe entre o vinte e o oitenta.

Prof: Então já sabemos que oitenta é o quádruplo de vinte, o dobro do dobro designa-se por quádruplo. Pensem agora. O vinte que parte é do oitenta?
B: Então quarenta é metade de oitenta e …
S: Pois porque o vinte é metade de quarenta. Quarenta é metade de oitenta.
B: É metade de metade
Prof: Concordam os outros?
Vários: Sim.(…)
Prof: Metade da metade pode chamar-se quarta parte.

Foi introduzida a designação "quarta parte" e feita uma síntese das informações que decorreram da exploração do esquema apresentado pelo par.

A construção intuitiva das noções de quádruplo através do que o aluno chamou "dobro do dobro" e de quarta parte designada por eles de "metade da metade" permitiu aos alunos atribuir significado a essas noções, partindo do contexto apresentado na tarefa. Houve uma intenção clara, desde a elaboração da tarefa, que fossem exploradas estas relações, assim como a relação de dobro entre a tabuada do dois e a do quatro. Treffers e Buys (2001) defendem que a construção da tabuada do 4 deve ter presente a relação de dobro com a tabuada do 2.

De seguida foi solicitada a intervenção do par C+ L, que recorreu à multiplicação, ainda que com algumas divergências iniciais de opinião. Desde o início da tarefa o par adotou o uso da multiplicação e na parte final da tarefa escreveu uma lista, fazendo corresponder a quantidade de caixas à quantidade de bombons (Figura 15).

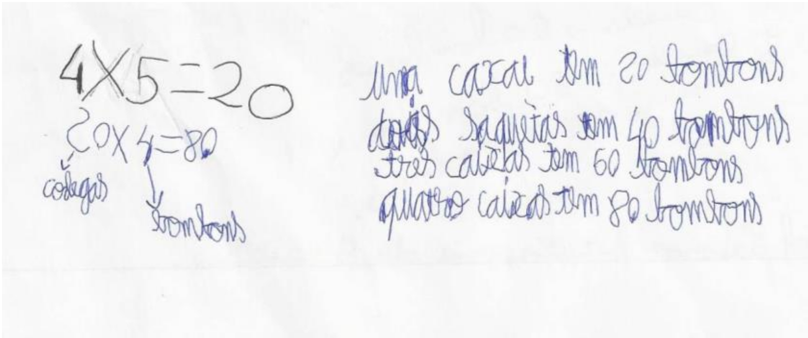


Figura 15- Produção do par C+L

O par C+L explicou à turma e, durante a sua exposição, a professora aproveitou para alertar especialmente os pares que recorreram à adição repetida.

> **C:** Eu sei que 2x4 é o mesmo que 4x2, dá oito. Então era como se fosse quatro vezes as duas dezenas e isso deu oitenta.
> **Prof:** Estão a ver bem mais fácil que uma adição de vinte parcelas, não é, F?
> **F:** Pois, é menos demorada.
> **Prof:** Pois porque além de ser mais demorada, deu em erros de contagem como os vossos, já vos mostro. E depois amiga L?
> **L:** Depois fomos saber quantas caixas precisávamos. Nós sabíamos que uma caixa tem vinte bombons e fomos escrevendo uma caixa são vinte bombons, duas são quarenta e continuamos até ter as quatro caixas. Deu mesmo os oitenta bombons que eram precisos.
> **Prof:** Alguém quer perguntar alguma coisa aos vossos colegas? (…) pelo silêncio prevejo que todos tenham compreendido.

Esta tarefa permitiu aos pares que recorreram à adição repetida terem consciência que foi uma estratégia muito demorada e pouco eficaz, dado o número de parcelas, que ocasionou erros de cálculo.

De seguida, a turma foi solicitada a passar para a sua ficha o registo deste par que estava no quadro. Depois prosseguiu-se com a partilha de estratégias da subtarefa 8.2. À semelhança do que aconteceu na tarefa anterior, o par I+O apresentou uma estratégia incompleta de resolução do problema.

Nesta subtarefa 8.2 predominou o uso da multiplicação, sobretudo na parte inicial do problema, o que pode ter sido influenciado também pelos números envolvidos. Apesar dos alunos apresentarem no seu registo 20x5=100, o produto foi encontrado através da relação 5 x 20 =100. Esta é uma relação numérica que conheciam, trabalhada desde o estudo da centena, pelo que pode ter evitado a necessidade de recorrerem à adição para confirmar o resultado. O uso destes números foi propositado, pois já se antevia que fosse facilitador para incentivar o uso da multiplicação.

Todos os pares recorreram à multiplicação, à exceção do grupo A+K+Q e o par I+O. O grupo A+K+Q usou uma estratégia de contagem por saltos de cinco em cinco e depois a contagem por saltos de vinte em vinte, para encontrar o número de caixas necessárias e fazer os saquinhos com cinco bombons.

No caso do par I+O começaram por desenhar sacos com cinco bombons, abandonaram essa estratégia e depois recorreram a saltos de vinte em vinte, terminando o seu registo com o uso da multiplicação 5x20 = 100. Neste par a multiplicação só surgiu depois de terem feito a contagem de vinte em vinte e perceber que dando os cinco saltos chegavam aos cem, o que evidencia um nível de cálculo ainda muito ligado à contagem, mas deixa também transparecer alguma evolução na aprendizagem neste par, que nas estratégias anteriores não tinham evidenciado.

O segundo passo do problema (o número de caixas necessárias para os saquinhos de cinco bombons), foi encontrado pelos pares recorrendo à contagem por saltos (grupo A+K+Q e I+O), à adição repetida (D+R e B+F), sendo que o par D+R voltou a apresentar a adição repetida combinada com o recurso aos dobros num diagrama de árvore. Dois pares recorreram à escrita de uma lista (C +L e E + H), fazendo a correspondência entre o número de caixas e o número de bombons respetivo. Os pares J+P e G+S recorreram à multiplicação e apenas o par M+N evidenciou, no seu registo, o recurso a factos já conhecidos da tarefa anterior. (Figura 16). Os alunos recorreram ao que sabiam da tarefa anterior, que para ter 80 bombons eram necessárias as quatro caixas, para ter vinte só precisavam de mais vinte bombons, que era equivalente a outra caixa.

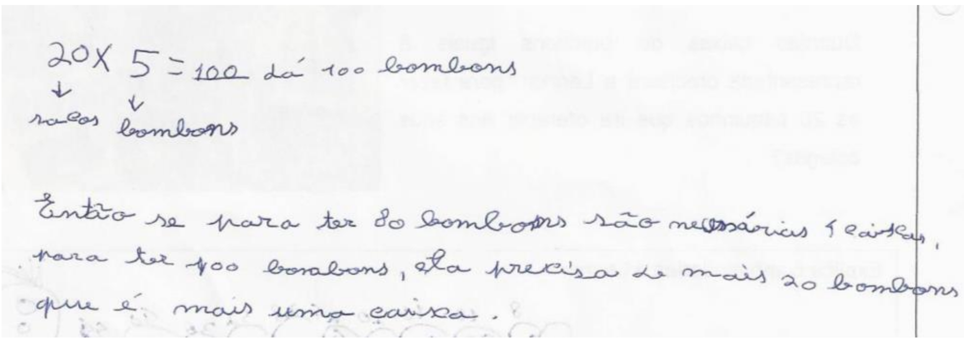


Figura 16- Produção do par M+N

Para a partilha e discussão em grande grupo, apenas foram selecionadas as estratégias dos pares G+S e M+N, pois ambos recorreram a uma expressão multiplicativa e seria importante incentivar a turma a prosseguir com o uso de estratégias mais formais. O aluno G foi solicitado a apresentar a estratégia do seu par.

> **G:** Nós pensámos que eram vinte sacos com cinco bombons e isso deu-nos cem bombons
> **Prof:** Como é que chegaram aos cem?
> **G:** Nós sabemos. (…) então cinco vezes o vinte dá cem por isso aqui também é cem.(…) sabendo isso foi fácil perceber que para ter os cem bombons eram precisas cinco caixas.
> **Prof:** Então escreveram como?
> **G:** Escrevemos 5 caixas vezes os vinte bombons dá cem bombons que são precisos.
> **Prof:** Meus amigos, estes vossos colegas recorreram a uma relação que já conheciam e que trabalhámos logo no primeiro ano, que para ter uma centena precisamos de cinco grupos de vinte.

Importou também que o par M+N clarificasse como os dados obtidos na tarefa 8.1 serviram para a resolução da tarefa 8.2.

O aluno N referiu:

> **N:** Agora precisamos dos vinte sacos, mas não é com quatro, são sacos com cinco bombons. Agora iam ser precisos cem bombons. Depois sabíamos que para ter oitenta bombons tinham sido necessárias quatro caixas. Sabemos que uma caixa tem vinte bombons e pensámos que de oitenta para cem faltavam vinte. Era só preciso mais uma caixa.

Na resolução desta tarefa continuou a assistir-se a alguma variedade de estratégias usadas pela turma: desde estratégias ligadas à adição repetida, escrita de lista, em que há uma correspondência entre o número de caixas e o número de bombons, até ao uso formal da multiplicação. Isto pode evidenciar os diferentes níveis de aprendizagem existentes na turma e a sua heterogeneidade, mas também a maior ou menor segurança que os alunos sentem no uso de uma estratégia em detrimento de outras.

Analisando as estratégias utilizadas pelos pares nas subtarefas 8.1 e 8.2, verifica-se que os pares D+R e B+F, recorreram à adição repetida, quer na subtarefa 8.1, quer na subtarefa 8.2, e os pares que na tarefa 8.1 recorreram ao uso da multiplicação, voltaram a usá-la na resolução da subtarefa 8.2.

É de salientar que na parte inicial da resolução da subtarefa 8.2, predomina o uso da multiplicação, o que faria antever uma maior confiança no uso desta estratégia. Contudo, no seguimento da sua resolução, quando os alunos tiveram que calcular o número de caixas necessárias, volta-se a assistir a uma maior diversidade de estratégias.

Notou-se uma dificuldade inicial na gestão das opiniões no par C+L que, com a intervenção da professora, foi solucionada. As dificuldades dos alunos evidenciadas pelos pares I+O e B+F, que apresentaram uma resolução incompleta na subtarefa 8.1, parecem prender-se com uma falta de leitura do enunciado da tarefa e erros de contagem, desencadeados pela adição repetida das vinte parcelas.

Tarefa 9 – Ida ao cinema

Durante a apresentação da tarefa foi feita a exploração da “história do problema”. A professora alertou os pares para visualizarem com atenção o calendário apresentado.

Durante o trabalho autónomo a pares, a professora observou as produções destes e recordou à turma, a necessidade de identificarem a que se referiam os números das expressões numéricas que registavam.

A maioria dos pares tinha resolvido a tarefa ao final de quinze minutos e alguns já estavam a ler a tarefa seguinte (tarefa 10-prenda do dia da mãe), à exceção dos pares E+H e J+P. Cerca de cinco minutos depois, iniciou-se a partilha e discussão de estratégias na turma, tendo todos os pares dado a tarefa como concluída.

Todos os pares apresentaram uma estratégia completa e eficaz de resolução da tarefa, à exceção dos pares C+L e E+H, que apesar de terem dado a tarefa como concluída, apresentaram uma estratégia incompleta. O par C+L apenas considerou o preço dos bilhetes do Simão e da mãe para uma segunda-feira, e esqueceram-se que eram todas as segundas-feiras do mês de abril. O par E+H considerou apenas o custo dos bilhetes de cinema para o Simão, faltando-lhes adicionar o custo dos bilhetes da mãe.

Os restantes sete pares da turma apresentaram nos seus registos uma estratégia completa e adequada. Um desses sete pares, o par J+P apenas recorreu à adição repetida, três pares recorreram simultaneamente à adição e multiplicação (alguns apresentaram a adição repetida seguida do produto correspondente) e três pares apresentam unicamente expressões multiplicativas.

Durante o trabalho autónomo, todos os pares pareceram estar envolvidos na resolução da tarefa e não manifestaram quaisquer dúvidas, o que não fazia antever esta situação. O facto dos outros grupos já terem terminado a tarefa, pode ter levado a que estes pares se precipitassem e dessem a resolução da tarefa por concluída.

A apresentação e discussão em grande grupo iniciou-se precisamente com os pares que apresentaram uma resolução incompleta, pois pretendia-se que os mesmos avaliassem o trabalho que tinham realizado e conseguissem completar a resolução da tarefa.

O aluno H foi solicitado a ler a tarefa e a partilhar a estratégia de resolução do seu par e o par referiu:

E: Nós fizemos quatro vezes o cinco que dava vinte. Eram os quatro dias … as quatro segundas. Se o bilhete é cinco euros , dava vinte euros. 4x5 são 20.
Prof: Então isso era o custo dos bilhetes de quem?
E: É o que o Simão gasta nas segundas do mês de abril.
Prof: E ele ia sozinho?
Vários: Não.
H: Pois não ... ele ia com a mãe… Faltou os bilhetes da mãe do Simão.
Prof: Seria ?
E: Sim e isso dava também vinte euros . Logo era quarenta.

A turma foi desafiada a encontrar uma expressão única que traduzisse a situação, mas não foi tarefa fácil, havendo a necessidade da professora fornecer algumas pistas.

Prof: Como é que podemos representar o custo dos bilhetes do Simão, através da multiplicação junto com os bilhetes da mãe?
N: Então são 4x5 euros do Simão mais os 4x5 euros dos bilhetes da mãe.
Prof: Porque é que são 4x5?
N: O Simão vai quatro vezes ao cinema, cada bilhete são cinco euros por isso são quatro vezes os cinco euros.
Prof: Então e agora os bilhetes da mãe do Simão?
R: Também são 4x5 como ela disse. Ela vai quatro vezes também. Gasta 4x5 que são vinte.
Prof: Mas queremos saber o custo total dos bilhetes dos dois, como é que escrevemos?
H: Pois , eu acho que temos que juntar os quatro vezes cinco.
Prof: Vem lá escrever ao quadro.

Após discutida a melhor forma de representar a situação descrita no problema através da multiplicação, concluiu-se que poderia ser (4x5) +(4x5). Com este registo no quadro o aluno R fez a seguinte observação:

R: Então isso é duas vezes o quatro vezes cinco. Não é professora?
Prof: Pois, como é que podemos escrever isso matematicamente?

O aluno foi ao quadro e escreveu a expressão 2x4x5, que por sugestão da professora ficou 2x(4x5).

Com o intuito de perceber se o outro par, C+L, conseguia também completar a resolução da tarefa, foram solicitados de seguida a partilhar com a turma a sua estratégia de resolução. O par referiu:

L: Fizemos cinco euros do Simão mais cinco euros para o bilhete da mãe. Deu dez euros. Só contámos uma segunda. Faltavam as outras .
F: Podiam fazer duas vezes o cinco…
C: Sim eram duas vezes o cinco**.** Deu dez.
Prof: Esses dez euros são o quê?
L: O dinheiro do bilhete do Simão e da mãe numa segunda.
S: Mas não era só numa segunda que íamos ao cinema.

B: Pois não era… são quatro segundas.
Prof: Como é que poderiam ter feito para terminar a resolução do problema?
B: Faltou-nos fazer quatro vezes o dez.

Mais uma vez, notou-se a falta de atenção na realização da tarefa por parte destes pares, e alguma precipitação na entrega do registo, sem terem o cuidado de reler a tarefa e avaliar a resolução registada.

Na fase de partilha e discussão em grande grupo os pares conseguiram detetar o que lhes faltava registar e completaram a resolução da tarefa.

As estratégias destes dois pares foram registadas no quadro e comparadas, evidenciando os diferentes caminhos percorridos pelos alunos até chegar à solução do problema, bem como o significado das operações sugeridas pelos pares.

A professora solicitou a apresentação da estratégia do par J+P, que tinham recorrido à adição repetida (Figura 17), tendo proposto às alunas que usassem uma estratégia que fosse mais rápida e igualmente eficiente.

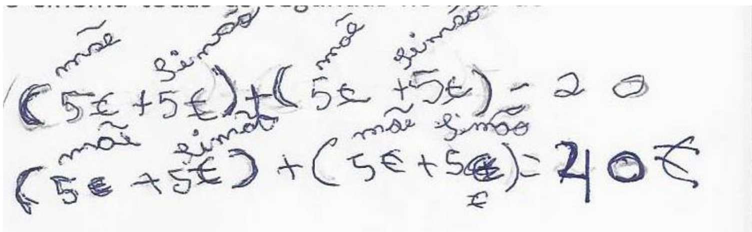


Figura 17- Produção do par J+P

A aluna J respondeu:

J:Podiamos ter feito logo uma multiplicação, oito vezes o cinco.
Prof: Porque oito vezes o cinco?
J: Porque eram oito vezes que lá aparece o cinco.
Prof: E porque é que escreves oito vezes os cinco euros? Podes responder tu,P.
P:Porque o Simão foi com a mãe e era o bilhete dos dois.
Prof: Então vamos lá ver, temos oito bilhetes a cinco euros cada um e isso deu os quarenta euros.

A turma foi desafiada a encontrar uma expressão multiplicativa que traduzisse a adição apresentada pelo par:

Prof: Os nossos amigos poderiam ter traduzido a situação numa expressão multiplicativa diferente. Vejam! Temos sempre a soma de duas parcelas de cinco. Essa adição repetida 5 euros mais 5 euros, como ficaria num produto equivalente?
P: Dois vezes cinco.
Prof: Sim, e isso traduziria toda a expressão?
Vários: Não.
S: Não , isso é só numa segunda. Faltam as outras.

Prof: Então o que propõem?
J: Talvez multiplicar por quatro , pelas quatro segundas.

A aluna escreveu no quadro 4x2x5= e alguns alunos da turma fizeram algumas observações:

B: Então o Simão e a mãe vão ao cinema, cada um paga cinco euros. Por isso é que é 2x5. Isso é numa segunda.
Prof: Então e porque é que escreveram 4x.
J: Porque são as quatro segundas – feiras.
N: Nós fizemos isso 2x5 que dava 10 e depois 4 vezes o 10.
S: Nós também pensamos e vimos que os bilhetes dos dois eram dez euros e fizemos quatro vezes os dez euros, deu quarenta.
Prof: Então, primeiro também souberam quanto custam os bilhetes dos dois e depois é que multiplicaram por 4. Acham que a expressão que a vossa colega escreveu está completa?

Perante a falta de sugestões da turma a professora foi colocando questões, para que os alunos atribuíssem significado à expressão numérica escrita pela aluna J e a reformulassem até chegarem à expressão numérica 4x (2x5€) =40€.

Foi uma preocupação incentivar ao uso da multiplicação e as estratégias de cálculo mais formais, tentando que os grupos que recorreram à adição repetida de parcelas iguais (5+5+5) conseguissem traduzi-las em produtos e usassem a multiplicação para o cálculo. Voltou a desafiar-se a turma a comparar as expressões numéricas encontradas, 2x (4x5), 4x(2x5) e 8x5, e a recordar o seu significado, tendo-se concluído que obtinha-se o mesmo produto e que todas traduziam a situação exposta no problema, surgindo algumas observações:

S: Olha 4x10 é o mesmo que 2x20 e que 8x5
Prof: Porque é que será que isso acontece?(…)
Prof: Foquem a vossa atenção nos produtos 4x10 e 8x5 e observem a relação existente entre os fatores.
S: São multiplicações… tabuadas?
Prof: Sim claro, podemos ter a tabuada do cinco e a do dez. Mas que relação existe por exemplo entre o 8 e o 4?
R: Então o oito é o dobro de quatro.
Prof: Então e os outros fatores, o 10 e o 5. Quero ouvir outros amigos, tu H.
H: Pois também é, o dez é o dobro do 5.
Prof: Concordas com eles, G? Temos uma relação de dobro?
G: Sim (…) o 4 é metade do 8 e o 10 é o dobro do 5.

A turma foi incentivada a construir a tabuada do 5 e depois a do dez e que focarem-se nos produtos da duas tabuadas.

Prof. Já viram bem as duas tabuadas? O que concluem?
L: A tabuada do 10 é muito fácil. Eu já sabia.
Prof: Está bem, então e os produtos da tabuada do 5 e do 10, o que têm a dizer?

A partir dos produtos 2x5 e 2 x10, que alguns pares tinham nos seus registos, foram exploradas as relações de dobro que existem entre as duas tabuadas, bem como os padrões nelas existentes.

A descoberta do padrão existente na tabuada do cinco e do dez, à semelhança do que tinha sido trabalhado nas tabuadas anteriores, ajudou os alunos a memorizar a tabuada, a reconhecerem os múltiplos, constituindo um aspeto fundamental na aprendizagem da multiplicação.

Dado o apego dos alunos ao raciocínio aditivo e a necessidade de desenvolver um raciocínio multiplicativo, o momento de partilha e discussão de estratégias constituiu um momento importante para gerar essa progressão na aprendizagem. Para além disso, nesta fase da discussão, os alunos tiveram a possibilidade de repensar as suas estratégias, refletir sobre aquilo que fizeram, corrigir alguns erros e atribuírem significado às expressões multiplicativas encontradas.

O questionamento aos pares e à turma durante esta fase de discussão e partilha de estratégias permitiu-lhes encontrar expressões numéricas diferentes, que traduziam a situação do problema, estabelecerem relações entre os produtos, contribuindo para um progressivo processo de matematização vertical.

Verificaram-se dificuldades nos dois pares que não concluíram a resolução da tarefa, que pareceram estar relacionadas sobretudo, com a falta de atenção e ponderação na realização da mesma. Contudo, a interação mantida com os pares na fase da discussão, permitiu-lhes ultrapassar as dificuldades e completar a resolução da tarefa.

A utilização do quadro interativo para suportar a síntese, que foi sendo feita, permitiu aos alunos, depois, registarem as tabuadas no seu caderno e preencherem os seus registos individuais.

Tarefa 10 – Prenda do Dia da Mãe

A tarefa 10 decorreu de um contexto vivido na turma, o da recolha de cápsulas nespresso para a realização da prenda do Dia da Mãe. Os alunos questionados não manifestaram dificuldades em transmitir à turma a “história do problema”.

Durante a fase de trabalho autónomo, os pares pareceram estar envolvidos na realização da tarefa, sendo que o grupo A+K+Q discutiu uma estimativa para o número de cápsulas necessárias.

> **K:** Então se somos vinte e um. Cada pregadeira leva cinco cápsulas , devem ser precisas para aí umas cem.

A professora procurou que o aluno K justificasse a sua estimativa?

Prof: Porque é que achas que são cem?
K: Então são vinte meninos e para cada um são precisas cinco nespressos, por isso vinte vezes o cinco dá cem.
Prof: Vejam quantos alunos são. Amigo A, quantos alunos são?
A: Acho que somos vinte e um.
Prof: Então vejam se são as cem cápsulas que necessitam.

Os alunos conseguiram concluir que eram mais do que cem e ficaram a trabalhar autonomamente. Contudo, posteriormente constatou-se que não concluíram a tarefa corretamente, pois apesar de verificarem que eram necessárias 105 cápsulas, quando fizeram a diferença das 50 cápsulas que a turma já tinha recolhido e as necessárias, utilizaram a quantidade 100. Após conversa com o par estes referiram que tinham feito do cinquenta para o cem, porque isso facilitava-lhes o cálculo e que depois esqueceram-se de juntar as outras cinco cápsulas. O grupo não releu a tarefa, nem verificou os resultados obtidos, notando-se mais uma vez, uma falta de ponderação na realização da tarefa.

Os restantes pares resolveram a tarefa de forma eficaz.

Durante o trabalho autónomo não houve necessidade de esclarecer dúvidas junto desses pares, sendo que foram solicitados esclarecimentos a alguns, de forma a perceber-se como tinham obtido o resultado 105. Dois pares (D+R e J+P) registaram 5 x 21 = 105. Seis pares registaram a expressão multiplicativa 21x5 = 105 e quatro pares calcularam o produto, recorrendo ao facto conhecido, 5 x 20 =100, e acrescentaram mais 5. Houve dois pares que adicionaram repetidamente o 21, começando por calcular os vintes e depois juntaram os uns, obtendo 105. Outros dois pares optaram pela decomposição decimal, evidenciando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

A apresentação iniciou-se com o par J+P, que começou pela adição repetida, mas chegou ao resultado da soma, pensando na multiplicação, como evidenciou na apresentação à turma, registando essa multiplicação na sua produção.

J: Nós começamos por juntar cinco vezes o vinte e um e deu-nos cento e cinco.
Prof: Como é que chegaram a esse resultado?
P: Nós fizemos a adição, mas depois pensamos na multiplicação e imaginámos que se fosse cinco vezes o vinte dava cem, depois mais os outros cinco deu cento e cinco.
Prof: Mas então de onde vieram os outros cinco?
J: São cinco cápsulas para o outro menino, somos vinte e um.

A estratégia de cálculo utilizada pelos alunos prevê que a troca da ordem dos fatores não afeta o produto e como tal, usaram esta propriedade da multiplicação para facilitar o cálculo, o que evidencia o uso de factos conhecidos.

A professora pediu ao par D+ R, que tinha optado por recorrer à multiplicação, que explicasse a sua estratégia, contudo a expressão multiplicativa utilizada não representava a situação descrita no problema (Figura 18).

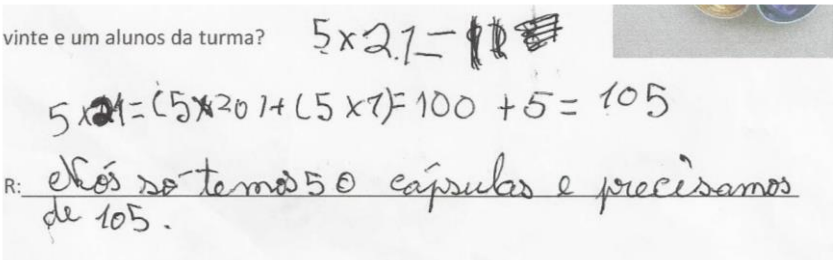


Figura 18- Produção do par D+R

> **R:** Nós fizemos 5x21 e como era mais fácil fazer 5x20 que sabemos que são 100, partimos o 21.
> **Prof:** Fizeram a decomposição do 21. Escrevam lá no quadro.(…)
> **R:** O vinte e um são vinte e mais um, por isso fizemos assim e percebemos que as cápsulas que tínhamos não chegavam .
> **Prof:** Algum par tem uma estratégia igual ou semelhante?
> **S:** Nós também fizemos 5x21 e deu o mesmo resultado.
> **Prof:** E vós o par B+F não recorreram também a esta decomposição do vinte e um para chegar aos 105?
> **B:** Fizemos parecido, mas a nossa conta está ao contrário. Nós fizemos 21x5 e depois fizemos como eles. Como era mais fácil fazer 20x5 e depois juntar 1x5 do que 21x5, fizemos assim.
> **S:** Foi quase igual!
> **Prof:** Será igual?
> **L:** Não é bem igual, é parecido, há uma troca de números.

Depois de um aluno voltar a ler o problema, cada um dos pares referiu o que significava cada um dos fatores do produto 21x5=105 e 5x21 = 105, tendo o par D+R concluído que a sua expressão multiplicativa não traduzia corretamente a situação descrita na tarefa. A maioria da turma também manifestou-se nesse sentido.

A professora realçou que na estratégia apresentada pelo par B+F, recorreram ao uso de uma outra propriedade da multiplicação designada por propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. O recurso ao cálculo do produto dos dois números, bem como a decomposição decimal de um dos fatores, evidencia o uso intuitivo da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e uma progressão na aprendizagem da multiplicação por parte destes alunos.

A partilha em grande grupo permitiu que os outros colegas atribuíssem sentido às estratégias apresentadas, as analisassem criticamente e optassem pela que melhor se adequava à situação descrita na tarefa.

As tarefas 9 e 10 foram exploradas no mesmo dia e a discussão e partilha de estratégias da tarefa 10 estendeu-se para além do tempo previsto, tendo sido concluída após o almoço. Nesta altura a professora apresentou a sua estratégia de resolução da tarefa 10, incentivando os alunos a preencherem uma tabela de proporcionalidade direta (Figura 19).

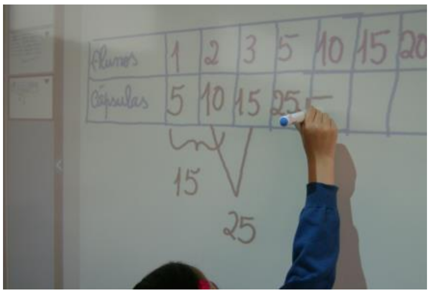


Figura 19- Registos na tabela de proporcionalidade direta

A tabela foi sendo preenchida com os alunos, através da aplicação de conhecimentos da tabuada do 5, tendo sido incentivados a estabelecer relações entre as quantidades já registadas, como por exemplo obter a quantidade de cápsulas necessárias para dez alunos, através do dobro daquelas que eram necessárias para cinco alunos, e a obter a quantidade de cápsulas necessárias para os quinze alunos, recorrendo às quantidades anteriores.

Nesta tarefa os alunos recorreram sobretudo à multiplicação, utilizando o cálculo do produto entre os dois números, estabeleceram algumas relações numéricas para chegarem ao produto e até evidenciaram o uso intuitivo da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. Isto parece revelar um nível de aprendizagem mais formal da multiplicação e progressos no processo de matematização.

Mais uma vez nesta tarefa, ficou evidente que a falta de hábito dos alunos em rever a estratégia utilizada na resolução da tarefa, conduz a erros que se tornaram evidentes para os pares e foram por eles corrigidos na fase de discussão e partilha em grande grupo.

A discussão das estratégias utilizadas pelos alunos em grande grupo pareceu ter favorecido a sua progressão na aprendizagem, permitindo-lhes ter consciência daquilo que fizeram, corrigir erros e tirar conclusões que isoladamente não tinham sido possíveis.

Tarefa 11- Na pizzaria

A tarefa foi apresentada pela professora recordando o contexto real da mesma e a situação real vivida por alguns alunos na festa de aniversário de um colega da turma, numa pizzaria.

Cada par resolveu o problema autonomamente.

Durante o trabalho autónomo dos pares, o par K+S iniciaram a resolução do problema com uma tabela, mas desistiram dessa estratégia, pelo que foram solicitados a justificarem a sua opção.

> **S:** Não conseguimos com a tabela. São dois ingredientes e não conseguimos fazer. Se fosse só um dava.
> **K:** Agora não temos espaço para resolver o problema!
> **Prof:** Virem a folha e registem na parte de trás. E então já pensaram noutra estratégia?
> **S:** Vamos começar a escrever as combinações.

Nesta fase, foi observado que alguns pares, que tinham decidido recorrer a uma tabela, estavam a utilizar apenas um ingrediente. Decorrente disso, a turma foi alertada para que fizesse uma leitura atenta do problema, de modo a perceber quantos ingredientes levava a pizza. Esta intervenção levou a que o par M+Q chamasse a professora e a questionasse:

> **M :** Professora, já lemos mais uma vez. Então aqui não podemos escrever só um, deixa ver… Podemos escolher o fiambre e cogumelos… Podemos combiná-lo com as duas massas.
> **Prof:** Continuem! Sim são sempre dois ingredientes, mas inicialmente estavam a fazer só com um ingrediente, não era?
> **M:** Sim, sim… mas vamos continuar com os dois.

Na realização desta tarefa foi notória a insegurança das alunas deste par na resolução da tarefa, sendo necessária a intervenção da professora, que não lhe fornecendo respostas, as incentivou a prosseguirem na tarefa.

Apesar de a turma ter sido alertada para uma leitura mais cuidadosa da tarefa, houve ainda três pares (B+ F, I+O e C+D) que apresentaram uma resposta incorreta, pois não apresentaram todas as combinações possíveis.

Os restantes seis pares apresentaram uma estratégia eficiente para resolver o problema, respondendo que existiam doze possibilidades diferentes. Três desses seis pares optaram por uma organização esquemática, utilizando setas para combinar os dois ingredientes. Dois pares escreveram uma lista de combinações possíveis e um outro par optou por apresentar uma tabela.

A apresentação iniciou-se com o grupo A+E+H que apresentou uma lista organizada com todas as combinações possíveis, referindo que tinham feito primeiro todas as combinações possíveis com a massa clássica e só depois escreveram as combinações de dois ingredientes com a massa fina. Seguiu-se a apresentação do par J+P, que apresentou um esquema com setas (Figura 20).

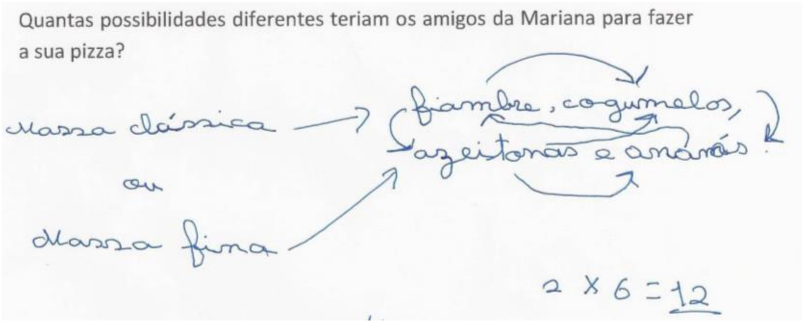


Figura 20- Produção do par J+P

O par J+P explicou:

> **J:** Nós começámos por escrever de um lado os tipos de massa e do outro os ingredientes. Depois fizemos as combinações de dois ingredientes com as setas. Dava seis combinações.
> **P:** Como eram duas massas diferentes, pensei que tínhamos duas vezes aquelas combinações. Dava doze.
> **Prof:** Porquê então 2x6=12, expliquem melhor o significado desse produto.
> **J:** O 2 são os tipos de massa e seis são as combinações de dois ingredientes.

Pedi mais alguns esclarecimentos acerca da estratégia apresentada:

> **Prof:** Então e o produto obtido?
> **J:** São as doze combinações possíveis. Podemos fazer doze pizzas diferentes.
> **Prof:** Se fossem ainda mais ingredientes, seriam muitas setas e isso poderia suscitar alguma confusão. Tendes que estar muito atentos quando usarem esta estratégia.

Por fim, foi solicitada a intervenção do par M+Q, que também apresentou o produto 2x6=12, mas com recurso a uma tabela, dado que esta estratégia apresentava uma estrutura mais organizada, do que qualquer uma das outras estratégias apresentadas.

Figura 21- Produção do par M+Q

O par M+Q justificou a sua opção por esta estratégia, referindo:

> **M:** Pensámos em fazer uma tabela porque já tínhamos feito com a tarefa das saias e das camisolas. Só que primeiro estávamos confusas com os ingredientes. Depois conseguimos fazer as combinações e marcámos estas cruzes para mostrar as combinações com as duas massas… Havia duas massas diferentes, por isso tínhamos que marcar cruzes em cima e em baixo.
> **Prof:** Então e porque é que apresentam também 2x6=12?
> **M:** Porque essa conta mostra que eram duas massas que combinavam com as seis combinações de ingredientes. Deu doze combinações para a pizza.

As estratégias apresentadas pelos pares foram comparadas pela turma, tendo-se concluído que a estratégia do par M+ Q seria mais rápida para resolver o problema, embora as outras também fossem eficientes.

As estratégias utilizadas na tarefa 6- Roupa da Maria continuam a ser utilizadas nesta tarefa, contudo como a situação apresentada era mais complexa, implicando a combinação de duas massas com dois ingredientes, houve mais erros. Ainda assim, é de salientar que a maioria dos pares conseguiu resolver o problema, ainda que recorrendo a estratégias de modelação, o que era expetável atendendo ao sentido da multiplicação implicado, à complexidade da tarefa e à faixa etária dos alunos. Contudo, o uso destas estratégias informais dos alunos e a sua eficiência, oferecem-lhes a confiança necessária para resolver este tipo de situações multiplicativas e mais tarde, atribuírem significado às expressões algébricas que as traduzem.

Tarefa 12- Ramos para o Dia da Mãe

Na aula em que foi explorada a tarefa 12 faltou uma aluna na turma e houve necessidade de reorganizar os pares, ficando apenas oito grupos de trabalho.

A tarefa foi apresentada aos alunos, tendo a professora advertido os alunos para a necessidade de observarem a imagem que ilustrava um dos ramos. Os problemas foram lidos pelos alunos e explorada "a história" de cada um.

Durante o trabalho autónomo dos pares/grupos, a professora apercebeu-se que o par L+N discutia a expressão multiplicativa que representava a situação e não chegavam a um consenso. Foi necessária a sua intervenção para resolver esta situação.

> **N:** Eu digo que é três vezes o seis, mas a L diz o contrário.
> **Prof:** Pensem comigo. Quantos ramos quer comprar a Matilde?
> **N:** Três.
> **Prof:** Quantas rosas tem cada ramo, L?
> **L:** São seis.
> **Prof:** Então, amiga L como é que irão representar a multiplicação?

O diálogo mantido com o par possibilitou às alunas concluírem que seria a expressão adequada à situação seria 3 x 6 .

Também no grupo B+J+P foi necessária a intervenção da professora para que os alunos entrassem em consenso sobre a estratégia a utilizar.

> **B:** Professora, eu acho que devemos fazer primeiro três ramos com seis rosas, saber quanto dá. A aluna P quer fazer de outra maneira.
> **Prof:** Então como é que tu queres fazer?
> **P:** Pois eu acho que devemos saber primeiro quantas rosas tem a florista.
> **Prof:** Então e tu J, o que pensas?
> **J:** Nós precisamos de saber as duas coisas.
> **Prof:** São dois caminhos possíveis. Tendes que decidir por onde vão começar? Não havendo consenso, o chefe de grupo que decida.
> **J:** Sou eu. Vamos … começamos por saber quantas rosas é que a florista tem e depois vemos as rosas dos ramos.

As dificuldades de entendimento no grupo, o conflito de opiniões exigiram também uma resposta a estas situações, de modo a mediar esses conflitos. Contudo na última situação, como se estava perante um grupo de três elementos e dado existir uma chefe de grupo, a decisão esteve mais facilitada e o grupo prosseguiu com a resolução da tarefa.

Durante o acompanhamento ao trabalho autónomo dos alunos verificou-se não haver outras dificuldades na resolução da tarefa. No final todos os grupos apresentaram uma estratégia adequada e resolvem a tarefa 12.1 de forma eficiente. Seis pares/grupos usaram a multiplicação e recorreram a factos conhecidos das tabuadas do três, do dois e do dez. Os outros dois pares (K+O e I+S) utilizam simultaneamente a multiplicação e a adição para resolver o problema.

O facto de os alunos estarem a trabalhar com pequenas quantidades, dado que se tratavam apenas de três ramos com seis rosas, não revelou a ineficácia da estratégia da adição repetida. Apesar de serem quantidades pequenas, a maioria da turma privilegiou o uso da multiplicação, o que pode ser revelador de alguma progressão no raciocínio multiplicativo.

A partilha de estratégias foi iniciada por um dos pares que recorreu ao uso simultâneo da adição e da multiplicação, porque pretendia-se insistir com esses pares no uso da multiplicação. O par K+O referiu:

> **K:** Nós vimos que a Matilde queria três ramos, e por isso fizemos três vezes o seis.
> **Prof:** Porquê 3x6 ?
> **K:** Porque eram três ramos com seis rosas cada um, como o que está na imagem. Isso deu dezoito. Depois fizemos dez mais dez rosas que a florista tinha.
> **Prof:** Em vez dessa adição poderiam ter usado uma multiplicação, não era O?
> **O:** Sim dois vezes dez, são vinte.
> **B:** Nós fizemos isso.

A professora incentivou os alunos ao uso da multiplicação para resolver o problema:

> **Prof:** Então vamos lá usar unicamente a multiplicação e façam o vosso registo no quadro como se estivessem agora a resolver a tarefa.

Os alunos desse par conseguiram resolver a tarefa utilizando unicamente a multiplicação como se pretendia, encontrando primeiramente a quantidade de rosas necessárias para os três ramos, depois calcularam a quantidade de rosas existente na florista e compararam-nas, chegando à conclusão que a florista tinha as rosas necessárias para os três ramos.

Dado que outros pares tinham começado pela quantidade de rosas existente na florista e só depois calcularam a quantidade de rosas necessária para os três ramos, a turma foi questionada, para incentivar à participação desses pares.

> **J:** Nós começamos por saber as rosas que a florista tinha e fizemos dois baldes vezes as dez rosas de cada balde e vimos que a florista tinha vinte rosas. Depois fomos ver as rosas que eram precisas para os ramos. Fizemos três vezes o seis que dá dezoito.

As duas estratégias apresentadas foram comparadas e ambas consideradas corretas pela turma.

Relativamente à tarefa 12.2, não se verificaram dificuldades na sua resolução e todos os grupos apresentaram uma estratégia eficaz.

Houve dois pares que recorreram ao uso da adição e da multiplicação em simultâneo e depois usam a subtração. Quatro pares recorreram unicamente ao uso da multiplicação e depois calcularam a diferença entre o valor entregue e o custo dos ramos. Houve pares que calcularam mentalmente a quantia de dinheiro entregue pela Matilde e que foi possível de perceber durante a interação mantida com esses pares aquando do trabalho autónomo.

O par F+M teve dificuldades no cálculo da multiplicação 3x12 = 36, tendo necessidade de escrever a tabuada do três, até chegar a esse produto.

A partilha de estratégias em grande grupo iniciou-se com a apresentação desse par F+M, com a intenção de que encontrassem, na interação e discussão com a turma, uma estratégia mais rápida para o cálculo de 3x12=. Só depois disso é que se previa a apresentação de um par que recorresse unicamente à multiplicação.

O par F+M registou a sua estratégia no quadro e apresentou-a à turma:

> **F:** A Matilde tinha duas notas de vinte euros, isso eram quarenta euros, porque duas vezes vinte dá quarenta. Depois ela tinha que pagar três ramos e cada uma custava doze euros. Fizemos 3x12 que deu trinta e seis euros e fizemos uma conta de menos. Percebemos que ainda lhe sobravam quatro euros.
> **Prof:** Não sei se todos percebemos como é que chegaram ao produto de 3x12?
> Explica lá tu essa parte, amiga M.

M: Nós tivemos que fazer a tabuada do 3 na parte de trás da folha até chegar ao 3x12. Juntámos sempre mais três.
Prof: Seria necessário escrever toda a tabuada do três? Poderiam ter partido de produtos que já conheciam ou não?

Alguns alunos intervieram e referiram:
N: Nós pensamos que três vezes o dez são trinta e depois juntamos seis que era o resultado de três vezes o dois.
B: Também podemos decompor o doze. Escreves três vezes o dez e depois juntas três vezes o dois. Também dá.
Prof: Então se um ramo custa doze euros, poderiam ter pensado na dúzia. Dois ramos custarão quanto?
Vários: Vinte e quatro.
Prof: Porquê?
L: Então o dobro de doze são vinte e quatro.
Prof: Então e se fossem três ramos, E?
E: Eram trinta e seis.(…) porque eram três vezes o doze.

A oportunidade foi aproveitada para referir que três vezes o doze é calcular o triplo de doze e imaginando que os ramos tinham uma quantidade diferente de rosas, praticou-se o cálculo mental, calculando o triplo de algumas quantidades.

Os alunos N e B registaram no quadro as expressões numéricas sugeridas e foram solicitados a esclarecerem o seu significado. O registo do aluno B permitiu evidenciar, mais uma vez, o uso da propriedade distributiva em relação à adição.

A discussão em grande grupo das estratégias apresentadas permitiu aos alunos refletir sobre o que tinham feito, reformular ideias e encontrar procedimentos que se situassem ao nível de um cálculo mais formal, que atribuíssem significado à multiplicação e calculassem os produtos, fazendo uso das propriedades da multiplicação.

Deste modo, a discussão em grande grupo desta tarefa promoveu oportunidades aos alunos de desenvolverem capacidades de reflexão e fortalecerem o uso do cálculo formal da multiplicação e assim progredirem no processo de aprendizagem desta operação, o que deixa transparecer as potencialidades de um ensino exploratório na aprendizagem da multiplicação.

Tarefa 13- Corrida de bicicletas

Esta tarefa foi lida e explorada “a história” do problema com os alunos antes do trabalho autónomo a pares e recordada a noção de triplo trabalhada na tarefa 12.

Durante o trabalho autónomo, houve necessidade de intervir junto do par L+P que escreveu inicialmente que na segunda-feira, o Leonardo tinha andado três quilómetros. Foi-lhes sugerido que voltassem a ler a tarefa e dirigidas algumas questões, com o objetivo de refletirem sobre o que já tinham feito e conseguirem reformular a sua produção. Após a leitura os alunos conseguiram detetar o seu erro e corrigi-lo.

> **Prof:** Já leram então quantos quilómetros andou o Leonardo na segunda?
> **N:** Andou só um quilómetro.
> **Prof:** Então vejam o que escreveram.
> **N:** Pois é, é só um. No dia seguinte é que foi o triplo, foram três.

Nesta situação foi fundamental a intervenção da professora, que apesar de não aprovar nem desaprovar o registo realizado, pela sua sugestão de leitura da tarefa e questionamento ao par, permitiu que verificassem o resultado obtido e confrontassem com a situação descrita, concluindo que se tinham enganado. Possivelmente, sem esta intervenção, a resolução correta da tarefa deste par estaria comprometida.

Ainda durante esta fase de trabalho autónomo houve também necessidade de questionar o par F+M acerca da estratégia utilizada. O par explicou a estratégia à professora.

> **F:** Na segunda andou só um quilómetro, depois na terça andou o triplo, são três. Na quarta é o triplo de três que são seis.
> **Prof:** Como é que calcularam o triplo de três?
> **F:** Então, três vezes o três não são seis?!
> **Prof:** Não sei, vocês é que tem que me dizer.
> **M:** Não é nada disso! É duas vezes o três. Está mal!
> **Prof:** Então vejam lá, decidam como é que fica. Voltem a ler tudo e comparem com o que já fizeram.

Posteriormente, o par abandonou a resolução anterior e iniciou um novo registo. Este par evidenciou alguma dificuldade no cálculo do triplo, devido a uma fraca memorização dos fatos numéricos associados à tabuada do três.

Ao analisar as produções dos oito pares verificou-se que sete deles apresentaram uma estratégia de resolução eficaz.

Apesar da supervisão realizada aos pares, o par K+ O esqueceu-se de calcular o triplo de três, pelo que concluiu erradamente, que o Leonardo andou mais do que vinte e cinco quilómetros na quarta, quando o esperado seria na quinta-feira. Este par, para além disso, também apresentou algumas confusões no cálculo do triplo de nove, tendo recorrido à adição repetida para chegar ao produto (Figura 22).

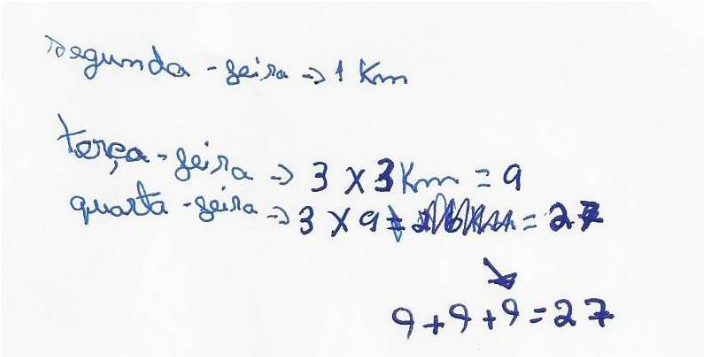


Figura 22- Produção do par K+O

A partilha e a discussão de estratégias iniciou-se precisamente por este par, K+O, por ser o único par que não apresentou uma resolução eficaz da tarefa, que parece ter-se ficado a dever, em grande parte, a distração e à falta de reavaliação da sua estratégia. Assim, a aluna O foi solicitada a reler a tarefa e a partilhar a estratégia do par.

> **K:** Nós escrevemos que na segunda ele andou um quilómetro. Depois na terça andou o triplo de três que são nove e na quarta fizemos três vezes o nove que é vinte e sete.
> **Prof:** Como é que chegaram ao produto do triplo de nove?
> **O:** Fizemos a adição, porque primeiro deu vinte e seis.
> **Prof:** Em que dia é que o Leonardo andou mais que vinte e cinco quilómetros?
> **K:** Foi na quarta.
> **Vários:** Não! Foi na quinta.

A professora não permitiu que fossem os outros colegas a explicar a resolução correta da tarefa, para que fossem as alunas a fazê-lo. Deste modo, a turma foi acompanhando o par, que foi fazendo o seu registo no quadro, à medida que foram sendo questionadas até concluírem que faltava calcular o triplo do segundo dia.

> **K:** Eu bem lhe disse que faltava o três vezes um, não tem o triplo de um. Mas ela teimou!"
> **Prof:** Então, amiga O como é que vamos fazer?
> **O:** Pois é, falta fazer três vezes um, o nove vem no dia a seguir.

Este momento de partilha e discussão das estratégias, a exploração que foi feita e o questionamento que é dirigido ao par K+O foi importante para que estas tivessem a possibilidade de analisar criticamente a sua produção. O par K+O teve, assim, a oportunidade de identificar e compreender o que faltava fazer, podendo corrigir o erro e refazer todo o caminho de resolução da tarefa.

Tarefa 14 – Bolo do Dia da Mãe

A tarefa foi lida e explorada “a história” do problema, sendo que os alunos questionados não evidenciaram dificuldades na compreensão da situação descrita no problema.

Durante o trabalho autónomo dos pares, a aluna E disse à professora que precisavam de saber quantos ovos levavam os oito bolos, mas que seria difícil fazer 8 x6 e que tinham que escrever a tabuada do seis.

A professora também recordou aos alunos que identificassem a que se referiam os números que registavam em cada uma das expressões numéricas, especificando se tratavam-se dos ovos ou dos bolos; de forma a clarificar o significado dessas expressões.

Os pares K+O, G+S e o grupo C+D+Q demoraram mais tempo que o previsto para concluir a tarefa, necessitando de mais dez minutos. Os restantes pares resolveram-na dentro do tempo previsto. O par S+I resolveu a tarefa rapidamente e avançou para uma tarefa no manual que lhes permitiu exercitar produtos de tabuadas conhecidas.

A análise das produções dos pares/grupos permitiu distinguir dois processos diferentes na resolução da tarefa. A maioria dos pares optou por calcular o número total de ovos que são necessários para fazer os oito bolos e só depois encontrar uma estratégia para saber a quantidade de caixas de ovos necessárias. Apenas o par S+I começou por se centrar na imagem da caixa de ovos, percebeu, através da estrutura da mesma, que uma caixa de ovos dá para fazer dois bolos, prosseguiu e escreveu uma lista onde apresentou a correspondência entre o número de caixas e os bolos que podiam ser feitos.

Para calcular a quantidade de ovos necessária para os oito bolos, todos os pares sugeriram a expressão 8 x 6=48, à exceção do grupo A+H+E que construiu a tabuada do seis até obter o produto de seis vezes o oito. Este par construiu depois a tabuada do doze para encontrar o número de caixas de ovos necessárias.

A apresentação no grupo turma iniciou-se com um dos pares que usou a multiplicação, mas que também recorreu à adição para encontrar o número de caixas de ovos necessárias para fazer os oito bolos, suportando-se numa relação de dobros. Pretendia-se primeiramente que o par refletisse sobre a sua estratégia de resolução e conseguisse encontrar uma alternativa para a adição repetida. Para além disso, o uso dos dobros permitiria rever com a turma noções já trabalhadas de dobro e quádruplo.

O par G+R mostrou à turma o seu registo (Figura 23) e esclareceu:

R: Nós escrevemos a multiplicação oito vezes o seis, mas depois era difícil e nós pensámos em fazer contagens de seis em seis. Contamos de seis em seis. Demos saltos e vimos que era quarenta e oito.
Prof: Então e depois?
G: Depois fizemos doze mais doze…
Prof: Passem lá o vosso esquema no quadro e depois expliquem.(…)
R: Nós vimos que uma caixa tinha doze ovos. Por isso juntamos doze mais doze, mais doze, mais doze… Escrevemos primeiro que doze mais doze dava vinte e quatro e depois escrevemos os outros doze, que juntos também dão vinte e quatro. Sabíamos que vinte e quatro mais vinte e quatro dá quarenta e oito, que eram os ovos.
Prof: Porque é que depois também acrescentam os seis?
R: Foi só para ver se dava os oito bolos.
G: Pois depois vimos que eram precisas quatro caixas.
M: Dava também as quatro caixas. Nós começamos por fazer as adições de seis em seis até ter quarenta e oito e vimos isso.

A professora recordou que a adição repetida pode ocasionar erros e é muito mais demorada.

Prof: Pois o vosso par recorreu sempre à adição do seis. A multiplicação tornará mais rápido o cálculo, imaginem que em vez de oito bolos teriam cem, nunca mais acabavam as parcelas!

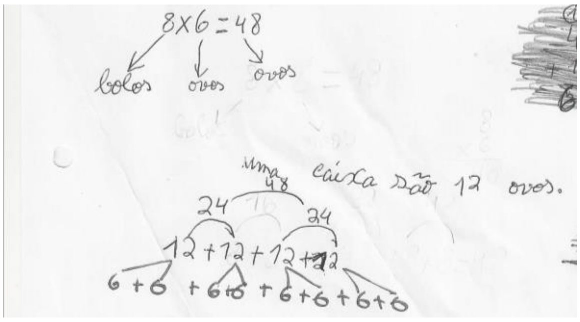


Figura 23- Produção do par G+R

O par F+M tinha usado a adição repetida, ainda que tivesse transformado no final, a adição numa multiplicação. Assim, apresentaram o recurso à multiplicação, embora suportada também num raciocínio aditivo. No entanto, as quantidades envolvidas ainda não permitiam o uso de factos conhecidos da tabuada, pois implicavam o conhecimento da tabuada do seis, que só foi construída com a exploração desta tarefa.

A estratégia apresentada pelo par G+R foi aproveitada para rever o dobro e o quádruplo, pelo que os alunos estabeleceram relações entre os números, incentivados pelo questionamento da professora.

A apresentação e discussão das estratégias prosseguiram com o grupo A+ H+E. O grupo demonstrou ter compreendido a situação apresentada na tarefa, tendo recorrido à multiplicação. Partiram da multiplicação 8x6 =, mas ao construírem a tabuada houve alguma desatenção e no final surge 6x8=48 em vez de 8x6=48 (Figura 24).

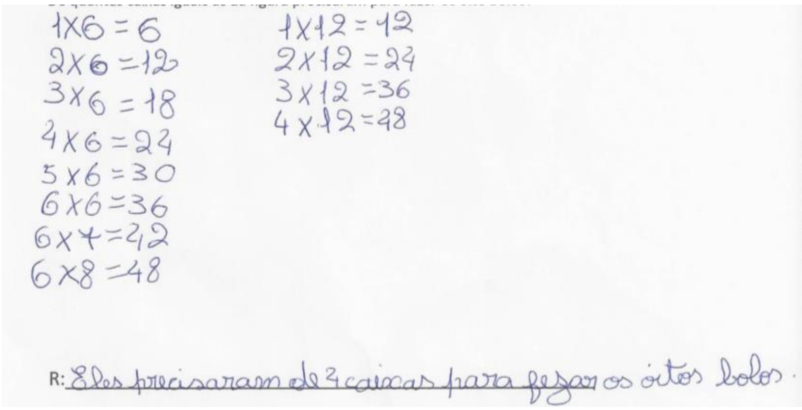


Figura 24- Produção do grupo A+H+E

A estratégia do par foi aproveitada para os alunos construírem a tabuada do seis no seu caderno e descobrirem o padrão que nela existia.

Poderiam também ter sido estabelecidas as relações entre a tabuada do seis e do doze, contudo isso não foi feito, porque a intenção foi a de focar a atenção dos alunos na construção da tabuada do seis, a partir deste contexto da caixa de ovos, e na identificação de um padrão na mesma, que lhes facilitasse a sua memorização e mais tarde a identificação dos múltiplos de seis.

A discussão de estratégias em grande grupo terminou com a apresentação do par I+S que recorreu à escrita de uma lista, fazendo a correspondência entre o número de caixas de ovos e a quantidade de bolos que era possível fazer. Esta estratégia permitiu explorar com os alunos relações de proporcionalidade, entre as quantidades, e incentivar o recurso, ainda que intuitivo, ao sentido proporcional da multiplicação.

O par I+S começou por referir:

I: Nós fizemos que uma caixa dava para dois bolos.
Prof: Como é que perceberam isso?
S: Fui eu que lhe disse. Porque a caixa tem seis ovos em cima que davam para um bolo.
I: Pois os outros seis de baixo davam para fazer outro bolo.
S: Duas caixas davam para o dobro dos bolos. Depois fomos sempre fazendo.

Foi sugerido a este par, I+S, que organizassem a sua lista numa tabela, o que foi feito com a contribuição de todos. Explorou-se com os alunos esta tabela e depois estendeu-se para além das quatro caixas, propondo que os alunos encontrassem a quantidade de caixas necessárias para fazer dez, doze, quinze, dezasseis e vinte bolos. Essas quantidades foram encontradas partindo de outras já registadas na tabela. A extensão da tarefa, mesmo sendo feita só no quadro, pretendeu tornar mais visível o sentido proporcional da multiplicação com outras quantidades maiores.

4.1. Percurso de aprendizagem num contexto de ensino exploratório

A implementação da sequência de tarefas, num total de catorze, decorreu entre os finais de janeiro e o início de maio, num contexto de ensino exploratório.

As tarefas apresentadas constituíram sempre o ponto de partida para a construção da noção de multiplicação, a exploração de diferentes sentidos desta operação e as suas propriedades.

As discussões, os pedidos de esclarecimento, as justificações fornecidas pelos alunos, durante o trabalho a pares e sobretudo no momento de partilha e discussão das estratégias na turma conduziram à exploração dos sentidos e das propriedades da multiplicação.

A construção das tabuadas foi também acontecendo, decorrente da exploração dos contextos destas tarefas, que possibilitaram dar sentido à sua construção e conferir significado aos produtos obtidos.

A análise das estratégias utilizadas pelos alunos para resolver as tarefas permitiu a elaboração de um quadro-síntese (Apêndice 2). Nesse quadro não se incluíram as duas tarefas que envolviam especificamente o sentido combinatório, dado que nestas os alunos recorreram sobretudo à modelação da tarefa, através do uso de esquemas de ligação ou escrita das combinações possíveis.

A tarefa 3 não foi incluída nessa síntese, dado que na construção da receita os alunos também usaram uma estratégia de dobros, tal como era pretendido e não houve uma variedade de estratégias de resolução.

As estratégias de resolução evidenciadas ao longo desta sequência de tarefas foram categorizadas com base nas propostas por vários autores (e.g. Anghileri (1989), Kouba (1989), Mulligan e Mitchelmore (1997), Baek (1998), Ambrose, Baek e Carpenter (2003) e Sheron e Fuson (2005)).

À semelhança destes autores, fez-se uma hierarquização das estratégias de resolução, começando por aquelas que estão ligadas a procedimentos informais, até às estratégias que evidenciam um cálculo mais formal com o uso explícito da multiplicação, atendendo aos níveis de aprendizagem de Treffers e Buys (2001). Isso permitiu também ter uma leitura mais facilitada das estratégias utilizadas e perceber a sua frequência.

Desta forma as estratégias de resolução dos alunos foram classificadas como: estratégia de modelação da tarefa (desenho, uso de traços ou bolas para representar a situação), contagem unitária, contagem por saltos/contagem rítmica, adição repetida, escrita de lista, o uso dos dobros, uso da multiplicação formal com recurso a fatos numéricos já conhecidos ou decomposição decimal dos fatores.

A estratégia de modelação da situação, nomeadamente o recurso ao desenho e esquemas de ligações foi muito frequente na resolução dos problemas de sentido combinatório da multiplicação, o que era previsível atendendo à faixa etária dos alunos e às dificuldades de compreensão do sentido combinatório da multiplicação. Nos restantes problemas não foi uma estratégia muito frequente, estando presente na tarefa inicial nas produções do grupo A+G+H, na tarefa 4 nas produções dos pares I+J e F+Q e na tarefa 8 nas produções do par J+P.

A contagem unitária surgiu apenas na tarefa inicial nas produções do grupo A+G+H, o mesmo que recorreu ao desenho, sendo substituída pela contagem por saltos ou pela adição repetida, cuja soma foi frequentemente obtida com recurso à contagem.

A contagem por saltos suportada na reta numérica, em que são registados os vários números, surge apenas na primeira tarefa e depois torna-se numa contagem rítmica, onde não há o recurso à reta e os alunos registam apenas a contagem (Exemplo: 2,4,6,8,10), dependendo dos agrupamentos e quantidades envolvidas. Este tipo de contagem aparece nos registos de alguns pares até à tarefa 8. A partir daí, estas contagens não são evidentes, apenas o par F+M volta a usá-la na última tarefa que envolvia as contagens de seis em seis, o que serviu de ponto de partida para a construção da tabuada do 6. É de salientar que nessa contagem os alunos recorreram aos dedos, para contar ou quantificar a quantidade de agrupamentos já contados.

A adição repetida foi uma estratégia muito frequente ao longo da exploração de todas as tarefas, sendo progressivamente substituída pela multiplicação. Houve pares que utilizaram simultaneamente a adição e a multiplicação até ao final da exploração da sequência de tarefas. Uma das razões para a elevada frequência desta estratégia pode estar relacionada com o facto de os alunos se sentirem mais seguros a usar a adição do que a multiplicação, como foi referido por uma das alunas entrevistadas (aluna I). Segundo a aluna, o uso da multiplicação era uma boa estratégia para resolver o problema, contudo preferia usar a adição com parcelas iguais, porque o cálculo com a adição era mais fácil, pois também não tinha ainda memorizado bem as tabuadas. Ainda, a (pouca) grandeza dos números envolvidos também não revelou, em muitos casos, a ineficácia desta estratégia, a adição com parcelas iguais, pelo que foi utilizada durante bastante tempo. Estudos anteriores (Mulligan & Mitchelmore, 1997) comprovaram também que as crianças usavam a adição para resolver problemas multiplicativos.

A escrita de uma lista surgiu nas tarefas que envolveram o sentido combinatório, em que os alunos escreveram todas as combinações possíveis. Surgiram também nas tarefas 2, 8 e 14, mas aqui para evidenciar uma relação de correspondência, um pouco, à semelhança do que aconteceu numa tabela de proporcionalidade direta, mas apresentada num formato mais descritivo.

Contrariando o estudo de Mendes (2012), em que foi pouco usual o recurso aos dobros para resolver as tarefas, neste estudo o uso dos dobros foi uma estratégia utilizada frequentemente pelos alunos, inicialmente baseada nos dobros associados à adição e depois também associada à multiplicação, com o progressivo domínio da tabuada do 2. Os contextos e a grandeza dos números (números inferiores a 100), apresentados nos problemas, e o facto de os alunos estarem habituados a usar a designação dos dobros na resolução de tarefas ligadas às estratégias de cálculo da adição, podem ter contribuído para que tal tenha sucedido.

O uso de fatos conhecidos da multiplicação foi pouco evidente e surgiu sobretudo na parte final da exploração da sequência de tarefas, quando os alunos já tinham um maior domínio das tabuadas. Corroborando com o estudo de Anghileri (1989), esta estratégia surgiu também em pares onde estavam os alunos com melhor aproveitamento na disciplina de matemática e que aparentavam um nível de aprendizagem de cálculo formal.

Notou-se uma evolução progressiva do recurso à multiplicação, à medida que se foi avançando na exploração da sequência de tarefas. Alguns alunos começaram por modelar a situação, utilizaram a contagem, recorreram à adição e só depois recorreram à multiplicação, socorrendo-se frequentemente de estratégias mistas para resolver os problemas. Outros começaram logo por recorrer a estratégias aditivas e progressivamente usaram a multiplicação e recorreram, ainda que frequentemente de modo intuitivo, a propriedades da multiplicação para resolverem as tarefas. Contrariamente ao que sucedeu no estudo de Ambrose, Baek e Carpenter (2003), vários alunos deste estudo aplicam, ainda que de modo intuitivo, a propriedade comutativa da multiplicação para resolver as tarefas, tal como se verificou logo na tarefa 2- Arrumação de sapatos com o par P+S e seguiu-se na tarefa 4- Jogo dos Pés, em que a maioria dos grupos usam a propriedade comutativa, aplicando os dobros para preencher a tabela, embora reconhecessem que a tarefa não se traduzia uma situação de dobro.

A adição repetida de parcelas iguais para resolver estas tarefas foi dominante, sendo que nas tarefas finais a maioria dos grupos recorreu a estratégias multiplicativas para resolver os problemas. Esta evolução pode ter sido motivada pelo conhecimento e aplicação dos produtos das tabuadas, uma maior confiança dos alunos no recurso às estratégias multiplicativas, incentivada pelas experiências vividas em tarefas anteriores e a apropriação de estratégias apresentadas por outros pares, permitida pela discussão e partilha em grande grupo.

A análise das estratégias utilizadas pelos alunos na resolução da sequência de tarefas apresentada, evidencia um percurso comum ao identificado em outras investigações (e.g. Anghileri (1989), Kouba (1989), Mulligan e Mitchelmore (1997, Sheron e Fuson (2005)), ou seja, de um modo geral, os alunos começaram por utilizar principalmente procedimentos de contagem, passaram pelos procedimentos aditivos para depois usarem sobretudo procedimentos multiplicativos adequados às situações propostas.

É certo que este percurso não foi assim tão linear, nem se processou de igual modo para todos os alunos, contudo verificou-se que mesmo os alunos que inicialmente recorreram à modelação, recorrendo a desenhos, abandonaram essa estratégia e evoluíram para estratégias ligadas ao uso da adição e da multiplicação; sendo que a reorganização dos pares também contribuiu para esta situação. Para além disso, numa mesma tarefa (e.g. Tarefa 8), houve alunos que recorrereram à multiplicação formal e logo de seguida, recorreram a procedimentos de adição e até de contagem, contudo esta situação de acordo com Gravemeijer (1994,1999, citado em Pinto (2011)), não deve ser encarado como um retrocesso no processo de matematização, sendo possível os alunos transitarem de um nível superior para um inferior.

Há que salientar também que numa mesma tarefa surgiram duas estratégias de resolução, sendo evidente em várias tarefas o uso simultâneo da adição repetida de parcelas iguais e o uso da multiplicação, situação encontrada noutros estudos, nomeadamente por Sherin e Fuson (2005), que as denominam de estratégias híbridas. Neste estudo, quando os alunos recorriam simultaneamente à adição repetida e à multiplicação, como aconteceu na tarefa 9 com o par I+O e na tarefa 12.1 com os pares K+O e I+S enquadraram-se as estratégias nas duas categorias.

As estratégias informais utilizadas pelos alunos na resolução dos problemas com contextos facilmente reconhecíveis constituíram o ponto de partida para o desenvolvimento de conceitos e conexões matemáticas. Assim, partiu-se de contextos familiares aos alunos que lhes permitiram a modelação da tarefa, utilizar desenhos e esquemas para representar a situação descrita no problema e resolvê-lo. Estes modelos informais suportaram o raciocínio dos alunos e ajudaram-nos a resolver as tarefas, e foi a partir deles que se foi construindo o conhecimento e a compreensão da multiplicação, tal como foi defendido por vários investigadores (e.g. Freudenthal (1991), Treffers (1991), Gravemeijer e Terwel (2000 a,2000b), van den Heuvel-Panhuizen (2001, 2003)), que salientam a importância da resolução de problemas de contexto, no desenvolvimento do processo de matematização horizontal e vertical.

Relativamente às dificuldades reveladas pelos alunos ao longo da exploração da sequência de tarefas, estas relacionaram-se essencialmente com a estratégia a utilizar para uma eficaz resolução da tarefa. Esta foi a maior dificuldade referida também pelos alunos entrevistados. Seis dos sete alunos entrevistados referiram que encontrar uma estratégia adequada para resolver o problema foi a sua maior dificuldade.

As alunas I e L referiram ainda que, por vezes, a seleção da estratégia suscitava-lhes muitas dificuldades, dado que podiam usar estratégias diferentes, mas que umas eram mais rápidas ou adequadas que as outras:

> **I**: A minha dificuldade é saber como vou resolver o problema, descobrir uma estratégia. (…) É saber qual é a estratégia que devo utilizar para dar uma resposta certa…pode ser uma conta de mais, a multiplicação ou até um desenho.
> **L:** Às vezes não sei se é melhor fazer um desenho, mas demora muito. Outras vezes pode-se fazer uma conta de mais ou de vezes, o pior é decidir o que vamos fazer.

Ao longo da exploração desta sequência de tarefas houve várias situações em que foi necessária a intervenção da professora para ajudar os pares a repensar as suas estratégias. O acompanhamento aos pares permitiu frequentemente que estes refletissem sobre o trabalho desenvolvido, detetassem erros e reformulassem estratégias que conduziram a uma resolução eficaz da tarefa. Noutras situações, esse processo ocorreu durante a fase de apresentação e discussão em grande grupo, em que a professora solicitou, propositadamente, a intervenção de alguns pares, que tinham evidenciado essa dificuldade, para que conseguissem corrigir ou completar a resolução da tarefa, e que não tinha sido possível durante o trabalho autónomo.

Verificaram-se também algumas situações de falta de compreensão do enunciado escrito da tarefa, ligadas, por vezes, a termos ou palavras que desconheciam. Também no estudo de Anghileri (1989), as maiores dificuldades dos alunos na resolução deste tipo de problemas, que envolvem multiplicação, prenderam-se com a linguagem, a diferença entre o inglês comum e o inglês matemático e o uso de alguns termos.

O facto de ser uma turma de segundo ano que se encontrava numa fase inicial de consolidação da leitura e escrita, e de cerca de 1/4 da turma apresentar ainda um aproveitamento aquém do desejável na disciplina de português, exigindo um trabalho diferenciado da turma nesta disciplina, pode ter contribuído para a manifestação destas dificuldades. Ainda que o problema fosse lido e a "história do problema" fosse discutida com toda a turma e fossem clarificados alguns termos, houve necessidade de intervir junto de alguns pares para que a interpretação da situação descrita na tarefa não constituísse um entrave à sua resolução.

Durante a entrevista o aluno R referiu-se à importância de ser explorada a "história do problema":

> **R:**Quando lemos sozinhos, muitas vezes não percebemos. Depois de falarmos da história do problema ficou mais fácil. Mesmo quando estou a falar com o meu par, aconteceu que ele explicava-me algumas coisas que eu não entendia bem ou eu explicava a ele.

As dificuldades referidas anteriormente pareceram estar, frequentemente, associadas à falta de atenção durante a exploração da "história do problema", a precipitações iniciais na realização da tarefa e à falta de hábito de alguns alunos em reler a tarefa e confrontar a situação descrita com a estratégia por eles utilizada.

Uma vez explorada a história do problema, e apesar das advertências da professora, alguns alunos precipitaram-se na resolução do mesmo, não voltaram a reler o enunciado do problema e isso ocasionou uma resolução incompleta. Esta situação foi muito evidente na tarefa 7 - Idades, em que alguns pares esqueceram-se de calcular o dobro da soma, ficando só pela soma das idades da Maria e da prima. A exploração da "história do problema" realizada com a turma parece ter favorecido alguns alunos que apresentavam algumas dificuldades na leitura e interpretação de enunciados, mas também pode ter levado a que alguns alunos, uma vez feita a interpretação do problema, se precipitassem a resolvê-lo e não fizessem uma leitura mais atenta durante o trabalho autónomo.

Todos os alunos entrevistados reconheceram que durante a realização da tarefa a pares havia necessidade de reler a tarefa. Contudo três deles referiram que depois de resolver o problema, não tinham o hábito de rever todo o trabalho desenvolvido nem confirmar os resultados obtidos, outros referiram que nem sempre o faziam, dependendo do tempo que tinham.

> **D:** Depois de termos encontrado a estratégia para resolver o problema, resolvíamos tudo… Não , não tenho o hábito de voltar a ler tudo .
> **E:** Não costumo reler tudo no fim nem ir verificar outra vez os resultados, Só volto a ler a pergunta e a resposta do problema para ver se está bem escrito.
> **R:** Não costumo reler tudo, nem verificar os resultados. Está feito e pronto!
> **N:** Quando tenho tempo, costumo ler tudo, vou rever para ver se está tudo como era pedido e tudo registado como eu queria.
> **I:** Costumamos ler tudo no final de estar feito, para ver se a resposta está de acordo com a pergunta… quer dizer fazemos isso quando temos tempo.

Pontualmente existiram alguns conflitos dentro dos pares devido à divergência de opiniões, sendo necessária a intervenção da professora para amenizar essas situações, debater as ideias com o par, estes avançarem na resolução da tarefa e envolverem-se em encontrar uma produção final do par.

Verificou-se também alguma falta de iniciativa dos alunos para solicitar esclarecimentos aos colegas durante a partilha de estratégias, tendo que ser a professora a fazê-lo. Os alunos apresentavam as suas estratégias, justificavam as suas ideias e alguns alunos até sugeriam alternativas aos colegas, contudo não questionavam os pares durante a apresentação e discussão em grande grupo. A participação dos alunos na discussão em grande grupo teve que ser provocada pela professora.

Todas as aulas decorreram de acordo com o modelo de aula de um ensino exploratório, previsto em Oliveira et al. (2013): apresentação da tarefa, trabalho autónomo /trabalho a pares, partilha e discussão em grande grupo e sistematização das ideias matemáticas.

Neste estudo, a discussão e a sistematização das ideias matemáticas não apareceram dissociadas, pois à medida que se foi fazendo a discussão, sistematizou-se e institucionalizaram-se as aprendizagens matemáticas, ainda que no final fosse feita uma sistematização geral das ideias matemáticas, para que a turma reconhecesse os conceitos e procedimentos matemáticos envolvidos e os registasse no seu caderno e/ou na ficha de registo individual. Stein et al. (2008) também não consideraram as duas últimas fases dissociadas, embora chamem síntese, em vez de sistematização das ideias, adotada neste estudo.

Na fase de apresentação da tarefa, para além de se ler a tarefa, considerou-se fundamental explorar a "história do problema", questionando os alunos sobre o que tinham percebido do enunciado do problema – Qual a história que o problema contava. Através das questões que eram dirigidas pela professora, procurou-se que os alunos demonstrassem compreender a situação descrita do problema e se apropriassem da tarefa. Para além disso, nas questões que a professora dirigiu também houve a intenção de garantir a adesão dos alunos à tarefa, sobretudo porque na turma existiam vários alunos que manifestavam dificuldades de atenção e concentração na realização das tarefas e alguma precipitação na sua resolução. Estas são intenções que Oliveira et al. (2013) também incluíram no seu quadro síntese das ações intencionais do professor na prática de um ensino exploratório da Matemática.

Na fase de trabalho autónomo a professora circulou pela sala, observando o trabalho dos pares, intervindo junto deles para pedir esclarecimentos acerca do que já tinham registado. Esta intervenção da professora junto dos pares, durante o trabalho autónomo revelou-se indispensável para o ultrapassar de algumas dificuldades, dado que foi o seu questionamento, solicitando aos alunos que clarificassem as suas ideias e justificassem os seus procedimentos, que lhes permitiu refletir sobre o trabalho realizado, reformular estratégias e aperfeiçoar os seus registos. Neste sentido, partilhamos das ideias de Oliveira et al. (2013), ou seja, que o questionamento da professora aos alunos, o pedido de justificações para os seus procedimentos promoveu o raciocínio matemático.

Por vezes, esta intervenção da professora permitiu também aumentar a confiança dos alunos e motivá-los para avançarem na resolução da tarefa. Assim, durante o acompanhamento ao trabalho autónomo houve a preocupação de observar o envolvimento dos alunos no trabalho. Por isso, os alunos foram questionados e solicitados a apresentarem esclarecimentos, justificações das suas ideias, para se perceber se o trabalho desenvolvido era efetivamente uma produção construída pelos dois elementos. Esta preocupação evidenciada pela professora é também salientada por Stein et al. (2008) quando se refere ao papel do professor no acompanhamento ao trabalho autónomo.

Esse acompanhamento permitiu também à professora identificar e selecionar as estratégias para a apresentação e discussão em grande grupo. A professora não se limitou a observar quem estava a trabalhar, mas houve uma preocupação de monitorizar o trabalho da turma, tal como sugerem diversos autores (e.g. Canavarro (2011), Canavarro et al. (2013), Oliveira et al. (2013) e Stein et al. (2008)), que defendem um ensino exploratório da Matemática.

A professora procurou selecionar diversos tipos de estratégias: estratégias incompletas ou com erros, estratégias de contagem, estratégias aditivas e estratégias multiplicativas, para apresentação e discussão em grande grupo. Inicialmente privilegiaram-se estratégias mais informais, nomeadamente o desenho, as contagens e a adição, pois já se previa que fossem as dominantes e pretendeu-se partir delas para dar significado à multiplicação.

À medida que se foi caminhando na exploração da sequência de tarefas privilegiou-se sobretudo as estratégias em que havia o recurso à multiplicação ou à adição repetida, sendo que no último caso desafiaram-se os alunos a transformá-la em multiplicação e a encontrar expressões multiplicativas equivalentes, para incentivar ao uso de estratégias mais formais.

Partilhando das ideias de diversos autores (e.g. Freudenthal (1991), Gravemeijer (2004,2005), Gravemejer e Bakker (2006), Gravemeijer e Terwel (2000 a, 2000 b)) neste estudo, partiu-se das estratégias informais dos alunos para o desenvolvimento de conceitos e conexões matemáticas, permitindo aos alunos reinventarem a matemática mais formal que se pretendia atingir.

O trabalho a pares pareceu ter sido benéfico para o trabalho desenvolvido, pois possibilitou aos alunos trocarem ideias, discordarem, argumentarem, chegarem a consensos; constituindo um momento de interação gerador de aprendizagem.

A reorganização dos pares também parece ter favorecido o trabalho desenvolvido pelos alunos, sendo evidente no caso da aluna I. Inicialmente o seu par (I+O) necessitou de grande acompanhamento da professora para conseguir avançar na resolução da tarefa, sendo que nas tarefas iniciais apresentaram resoluções incompletas ou inadequadas. A reorganização dos grupos possibilitou à aluna I trabalhar com outros alunos, notando-se uma maior segurança para intervir e esclarecer as ideias, apresentando estratégias mais eficazes. O par com o qual passou a trabalhar parece ter favorecido o envolvimento desta aluna na realização das tarefas.

Partilhando das ideias de César (1995,1999) o trabalho a pares contribuiu por um lado, para a apreensão de conhecimentos e a aquisição de competências matemáticas, e por outro, para os alunos aprenderem a respeitar os colegas e a gerir as diferentes opiniões.

Os alunos entrevistados referiram-se ao papel do trabalho a pares na exploração da sequência de tarefas, salientando sobretudo a ajuda mútua que lhes permitiu resolverem as tarefas.

> **D:** Eu tinha muitas dificuldades, no início, em ler e perceber o problema, depois foi mais fácil. O meu colega ajudou-me a ter menos dificuldades, porque ele ajudava-me a ler. Depois eu já conseguia perceber e ajudá-lo no trabalho.
> **E:** Ajudamo-nos uns aos outros… porque discutimos as nossas ideias e nós conseguimos chegar à resposta certa, percebemos bem como se faz.
> **L:** Quando eu estava com dificuldades em perceber alguma coisa, o meu par ajudava-me a fazer os cálculos. Outras vezes, com a aluna I eu também lhe explicava algumas coisas para ela perceber melhor.
> **N:** Foi muito bom trabalhar com outros colegas, saber como ele pensa, como é que trabalhamos juntos, saber coisas que ele sabe e eu posso não conseguir tão bem ou ao contrário, eu ajudá-lo a perceber outras coisas. Quando fiquei a trabalhar com o aluno C tive que o ajudar a reler a tarefa. Depois ele já me conseguiu ajudar.

A fase de apresentação e discussão das estratégias em grande grupo constituiu um momento privilegiado neste estudo, indo frequentemente para além do tempo previsto para a sua realização. Ao longo da apresentação dos pares, a professora revelou preocupação em questionar os alunos, pedir esclarecimentos, para que todos percebessem e atribuíssem significado ao que estava a ser transmitido e de que forma se adequava à situação descrita no enunciado do problema. Contudo, e dado que a maioria dos alunos não revelava iniciativa em solicitar esclarecimentos aos colegas que estavam a apresentar, esses pedidos partiram quase sempre da professora. Talvez fosse necessário dar-lhes mais tempo e incentivá-los mais para que fossem os alunos a solicitar esses esclarecimentos, em vez de ser a professora a questionar logo o par durante a apresentação. Para se assegurar que os outros alunos estavam a perceber e a acompanhar o raciocínio dos colegas que apresentavam as estratégias, a professora solicitou-lhes o confronto e a comparação das diferentes estratégias apresentadas.

A sistematização das ideias foi-se fazendo em simultâneo com a discussão, confrontando as estratégias apresentadas, analisando as suas características, realçando a sua eficácia e registando no quadro os conceitos e procedimentos que se pretendiam evidenciar acerca da noção de multiplicação, da construção das tabuadas e do conhecimento das propriedades comutativa e distributiva da multiplicação. Para além disso, foram feitas conexões com conhecimentos anteriores, como por exemplo na tarefa 8, em que a revisão da noção de dobro permitiu aos alunos chegar à designação "dobro do dobro" e a professora introduzir o conceito de quádruplo.

Corroborando com as ideias de Oliveira et al. (2013) e Canavarro (2011) de que é importante que haja um suporte do registo escrito das ideias resultantes da sistematização, para os alunos terem acesso e fazerem os seus registos individuais, neste estudo o quadro interativo que serviu de suporte à síntese da tarefa revelou-se cumpridor dessa missão. A sistematização das ideias decorrentes da discussão em grande grupo foi sendo feita no quadro para que os alunos pudessem registá-las nos seus cadernos e/ou na sua ficha de registo individual.

Desta forma, a interação mantida em diferentes momentos da aula, proporcionou situações em que os alunos puderam refletir sobre o seu trabalho, partilhar e refletir sobre as suas estratégias, contactar com as estratégias apresentadas por outros pares, compará-las e avaliá-las, situações estas que parecem ter promovido o desenvolvimento da aprendizagem da multiplicação. Corroborando com as ideias de Cengiz, Kline e Grant (2011, citados em Menezes, Oliveira e Canavarro (2013)), neste estudo a partilha de estratégias e o facto de os alunos terem de justificar as suas ideias, argumentar e negociar significados parece tê-los ajudado a construir novos conhecimentos e a ampliar os existentes.

A reflexão provocada pelo questionamento da professora, a sua insistência com os alunos para o uso da multiplicação em substituição da adição repetida de parcelas iguais, o desafiar os alunos a encontrarem expressões multiplicativas equivalentes e a atribuição de significados às expressões multiplicativas encontradas parecem ter contribuído para o uso de símbolos e de uma linguagem matemática formal por parte dos alunos e por conseguinte, para a aprendizagem da multiplicação, ou seja, para a progressão no processo de matematização.

A capacidade de refletir sobre aquilo que fazem e que os outros fazem, foi considerada por Freudenthal (1975,1991) como uma condição necessária ao processo de matematização, pelo que as discussões com toda a turma acerca das estratégias de resolução do problema, as interpretações e ideias irão aumentar a probabilidade de ocorrerem essas mudanças no processo de matematização.

Quando questionados acerca da importância que atribuíam ao momento de partilha e discussão em grande grupo, os alunos entrevistados pareceram reconhecer que esse momento foi importante para a aprendizagem. Os alunos R, L e N realçaram que esse momento foi importante para quem estava a apresentar e a partilhar as suas estratégias:

> **R:** Eu acho que foi importante mostrar aos amigos da turma como é que fizemos para resolver o problema, explicar a nossa estratégia, pensamos sobre o que fizemos e isso é bom.
> **L:** Gosto de falar e explicar aos outros como fiz. Quando eu vou explicar, tenho que pensar primeiro no que vou dizer e lembro-me de como é que nós pensámos para resolver o problema.
> **N:** É importante partilharmos as nossas estratégias, porque assim também vamos para a outra escola a saber mais, estamos mais preparados para saber apresentar um trabalho de grupo.

Neste sentido, a organização do discurso necessária à apresentação em grande grupo, a reflexão sobre o trabalho desenvolvido e a necessária organização do seu pensamento são processos que estes alunos reconheceram como necessários para a apresentação e discussão das ideias em grande grupo, corroborando com o ponto de vista de Boavida et al. (2008), que salientaram a importância da partilha de raciocínios para quem os enuncia, ao exigir a organização e clarificação do seu pensamento.

Todos os alunos entrevistados referiram que a partilha de estratégias em grande grupo permitiu-lhes também ouvir os outros pares, saber como é que eles tinham feito para resolver a tarefa e contactar com diferentes estratégias. Os alunos referiram também que esse momento permitiu-lhes apropriarem-se das estratégias de outros pares e usá-las noutras tarefas:

> **D:** Foi importante… aprendemos mais quando ouvimos as estratégias dos outros e vemos se elas são boas ou não para resolver outros problemas.
> **L:** Eu ouço as estratégias dos meus colegas, depois guardo-as na cabeça para ver se consigo utilizá-las noutro problema.

A discussão das estratégias em grande grupo permitiu também que os pares, cuja estratégia de resolução não tinha possibilitado a eficácia pretendida, analisassem criticamente as suas afirmações, detetassem erros e repensassem estratégias que conduziram à resolução eficaz da tarefa. Os alunos entrevistados reconheceram esta intenção da professora e consideraram-na benéfica para a aprendizagem, tal como referiram os alunos D e S:

> **D:** Quando nós partilhávamos as estratégias… quem não tinha resolvido bem a tarefa, também apresentava a estratégia. Depois a professora fazia perguntas e eles conseguiam encontrar uma maneira diferente para resolver bem a tarefa.

> **S:** Se tivéssemos uma estratégia que não era boa para resolver a tarefa, quando era a apresentação na turma, conseguíamos corrigir o que estava errado e melhorar o nosso trabalho. Assim conseguíamos aprender.

A exploração das tarefas assente num ensino exploratório possibilitou oportunidades dos alunos desenvolverem as capacidades transversais da matemática, realçadas no Programa de Matemática do Ensino Básico - PMEB (ME, 2007): a resolução de problemas, o raciocínio matemático e a comunicação matemática.

As limitações do ensino exploratório que sobressaem deste estudo prendem-se com o tempo exigido para a sua planificação e realização na aula, bem como a sua complexidade. A complexidade do ensino exploratório da Matemática também foi referida por Stein et al. (2008), por este ser considerada difícil de pôr em prática pelos professores.

Um ensino exploratório exigiu da professora uma preparação mais cuidada das tarefas a trabalhar com os alunos, tendo em conta os objetivos que pretendia atingir, antecipando possíveis resoluções dos alunos e as dificuldades que podiam apresentar. A preparação foi particularmente exigente dado que obrigou necessariamente a que a professora mobilizasse diversos aspetos do seu conhecimento didático, nomeadamente da prática letiva que é exigida por um ensino exploratório, do conhecimento que tem da Matemática, daquilo que o currículo considera fundamental desenvolver com os alunos, a experiência que tem do trabalho com a turma e a forma como os alunos aprendem.

A exploração das tarefas na sala de aula revelou-se também bastante exigente para a professora. O acompanhamento aos pares durante o trabalho autónomo exigiu que estivesse atenta às dificuldades que surgiam, tentasse clarificar ideias com os alunos, pedir-lhes justificações e perceber como tinham pensado. Por vezes, perante as dificuldades de vários pares no mesmo momento, nem sempre foi fácil assegurar um acompanhamento efetivo a todos.

A seleção das estratégias a apresentar em grande grupo e a sua sequenciação implicou que a professora visse nelas as potencialidades para fazerem emergir os conceitos pretendidos e alcançar os objetivos pensados aquando da planificação da tarefa. Aqui a antecipação da tarefa facilitou esta seleção, dado que algumas das estratégias apresentadas pelos pares, já tinham sido previstas nessa fase de planificação.

Além do que era previsto, a professora teve que lidar também com algumas situações inesperadas, como por exemplo o que aconteceu na tarefa 5 - Na Frutaria da Tita, em que não se previa a construção da tabuada do 3, mas a discussão das estratégias propiciou a sua construção.

A gestão e condução que a professora fez da discussão em grande grupo refletiram a sua preocupação primeiramente em atingir os objetivos previstos para cada tarefa, mas também, ir para além disso. Assim, quando o discurso o permitiu e considerou ser oportuno ocorreram o que Cengiz et al. (2011, citado em Oliveira et al. (2013)) caracterizam de episódios de ampliação. Ao longo da exploração da sequência de tarefas frequentemente a professora desafiou os alunos a encontrarem resoluções alternativas, promoveu o uso de estratégias eficazes, incentivou a turma ao uso da multiplicação e a encontrar expressões multiplicativas equivalentes às apresentadas pelos pares.

Ainda que seja um ensino que requer mais tempo e seja mais exigente para o professor, a exploração desta sequência de tarefas no contexto de um ensino exploratório deixou evidentes inúmeras vantagens deste modelo de ensino, vindo corroborar com ideias dos defensores desta prática de ensino (e.g. Canavarro (2011), Ponte (2005), Oliveira, Menezes e Canavarro (2013), Stein et al. (2008)), contribuindo para que a aprendizagem da multiplicação fosse construída pelos alunos, atribuindo sentido ao uso da operação e significado às expressões multiplicativas encontradas.

CAPÍTULO 5- CONCLUSÃO

Neste capítulo apresenta-se uma síntese do estudo, no qual se recorda o problema e as questões de investigação, a metodologia utilizada e o contexto em que se desenvolveu. De seguida apresentam-se as principais conclusões relativas às questões de investigação. Segue-se um conjunto de recomendações e limitações e por último, uma reflexão final.

5.1. SÍNTESE DO ESTUDO

Este estudo decorreu da necessidade de contribuir para uma aprendizagem com significado da multiplicação e uma melhoria das práticas educativas, dado que a aprendizagem da multiplicação constitui um dos aspetos fundamentais da aprendizagem matemática durante os primeiros anos.

Assim, o estudo teve como objetivo perceber como se processa a aprendizagem da multiplicação a partir da resolução de uma sequência de tarefas, num contexto de ensino exploratório. Decorrentes do objetivo deste estudo, procurou-se dar resposta às seguintes questões de investigação:

i) Que estratégias e dificuldades apresentam os alunos na resolução de problemas, para a aprendizagem da multiplicação, que compõem a sequência de tarefas?
ii) Quais as potencialidades e as limitações de um ensino exploratório na aprendizagem da multiplicação?

Por conseguinte, a prática educativa assentou no modelo de aula de ensino exploratório, conforme o desenhado por Oliveira et al. (2013), onde foi realizada uma sequência de catorze tarefas, que visavam promover a aprendizagem da multiplicação em alunos do segundo ano de escolaridade, assentes em problemas de contexto para a exploração de diferentes sentidos e propriedades da multiplicação. Deste modo, considerou-se pertinente fundamentar este estudo no ensino exploratório e nos princípios básicos da Educação Matemática Realista, bem como em dados da investigação relacionados com o ensino e a aprendizagem da multiplicação.

Atendendo ao objetivo definido para este estudo, às questões de investigação, ao duplo papel do professor- investigador e à necessidade de melhoria das práticas educativas, a metodologia do estudo assentou no paradigma de Investigação-Ação.

Para a recolha de dados recorreu-se a técnicas baseadas na observação com registos áudio das aulas, a análise das notas de campo, às produções dos alunos e a entrevistas realizadas a um grupo de alunos. Neste estudo, o investigador assumiu o duplo papel de professora e investigadora, tendo explorado a sequência de tarefas com a sua turma de segundo ano de escolaridade.

Para a análise e interpretação dos dados e, atendendo ao objetivo do estudo, considerou-se adequado recorrer à análise de conteúdo e à análise de discurso, cruzando os dados provenientes das aulas em que foram exploradas as tarefas com os possibilitados pelas entrevistas, promovendo a triangulação de dados.

5.2. Principais conclusões do estudo

Partindo da análise dos dados resultantes deste estudo, atendendo ao objetivo e com vista a responder às questões de investigação, inferiram-se as principais conclusões:

5.2.1. Estratégias e dificuldades apresentadas pelos alunos

A natureza das tarefas propostas aos alunos, ao assentar na resolução de problemas de contexto, influenciou a diversidade de estratégias apresentadas pelos pares como salientam os defensores da Matemática Realista (e.g. Freudenthal (1991), Gravemeijer e Terwel (2000 a, 200b) e van den Heuvel-Panhuizen (2000)).

O duplo papel do contexto das tarefas influenciaram a aprendizagem da multiplicação. Por um lado, o facto de terem sido explorados problemas de contexto permitiu aos alunos utilizar as suas próprias estratégias baseadas no seu conhecimento informal, fazendo surgir uma variedade de estratégias de resolução.

Por outro lado, consideraram-se também os contextos das próprias tarefas suportados no uso de modelos que favoreceram o conhecimento da multiplicação e das suas propriedades. Na tarefa inicial recorreu-se ao uso de saquetas com igual número de cromos o que favoreceu o uso da adição repetida e a iniciação à multiplicação. Treffers e Buys (2001) consideram que o modelo de grupos iguais deverá constituir o ponto de partida para a aprendizagem da multiplicação. Também o uso de estruturas retangulares como as caixas de futa na tarefa 5- Frutaria da Tita e da caixa de bombons na tarefa 8- Saquinhos de oferta de bombons apoiaram a exploração da propriedade comutativa da multiplicação.

A análise e interpretação dos dados recolhidos permitiram perceber que as estratégias usadas pelos alunos para resolver os problemas nomeadamente a modelação, o recurso a estratégias de contagem, a adição repetida, o uso dos dobros e o uso da multiplicação, foram também identificadas em estudos anteriores por diversos autores (e.g. Anghileri (1989), Kouba (1989), Mulligan e Mitchelmore (1997) e Sheron e Fuson (2005)).

A análise permitiu-nos concluir que, no geral, assistiu-se a uma progressão no uso da multiplicação para resolver as tarefas, embora essa evolução não se processasse de igual modo para todos os alunos. Assim, os procedimentos de contagem utilizados pelos alunos até à tarefa 8, retomado apenas na última tarefa pelo par F+M, foram sendo substituídos por procedimentos mais formais, nomeadamente o uso das operações da adição, com a adição repetida de parcelas iguais, e o uso da multiplicação, existindo alguns alunos que recorrem, ainda que intuitivamente, a propriedades da multiplicação para resolver as tarefas.

Notou-se um apego ao uso da adição repetida evidente nas produções de alguns pares, que continuaram a registá-la conjuntamente com a multiplicação, influenciado pelo maior conhecimento e segurança que tinham na adição. O uso de estratégias de contagem e de adição repetida conjuntamente com o uso da multiplicação também foi referido por Sherin e Fuson (2005) e designando-as por estratégias híbridas. Kouba (1989) verificou também que o uso da adição repetida para resolver problemas de multiplicação era uma estratégia muito frequente entre os alunos do segundo ano envolvidos no seu estudo.

Relativamente ao uso da estratégia dos dobros presente em alguns dos estudos referidos anteriormente, os resultados obtidos neste estudo vieram contrariar o verificado no estudo de Mendes (2012), em que o uso dos dobros era uma estratégia pouco usual. Neste estudo o uso dos dobros surge com alguma frequência, influenciado pelo conhecimento dos dobros que os alunos tinham do trabalho desenvolvido sobre as estratégias de cálculo da adição e progressivamente aplicado à multiplicação, com o domínio da tabuada do 2.

Neste estudo os alunos aplicaram a propriedade comutativa da multiplicação, ainda que inicialmente de modo intuitivo, em diversas tarefas, nomeadamente as ligadas ao uso de estruturas retangulares; o que contraria o estudo de Ambrose, Baek e Carpenter (2003), em que essa propriedade não foi facilmente aplicada pelas crianças do estudo.

Na resolução de problemas que envolviam o sentido combinatório os alunos recorreram à modelação da tarefa, que era previsível, atendendo à faixa etária e à complexidade implicada neste sentido da multiplicação. O sentido combinatório da multiplicação pareceu ser de mais difícil compreensão que o sentido aditivo, o que veio corroborar com as ideias apresentadas em estudos anteriores (e.g. Kouba (1989), Mulligan (1992), Mulligan e Mitchelmore (1997)).

O uso das propriedades da multiplicação, sobretudo a propriedade comutativa foi evidente em tarefas que se suportaram no modelo retangular, como as tarefas 2, 5 e 8. A propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição foi usada por alguns alunos de modo intuitivo, sobretudo quando sentiram necessidade de recorrer à decomposição decimal de um dos fatores, para facilitar o cálculo.

De um modo geral, os alunos parecem ter desenvolvido aspetos importantes na aprendizagem da multiplicação, nomeadamente a capacidade para usar a multiplicação na resolução de problemas, a familiaridade com o sentido aditivo da multiplicação, com a propriedade comutativa da multiplicação e a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

Tendo em conta os níveis de aprendizagem definidos por Treffers e Buys (2001), a evolução registada nas estratégias utilizadas pelos alunos permitiu considerar que no final da exploração da sequência de tarefas, se encontravam num nível de cálculo superior, ao que tinham quando iniciaram a exploração desta sequência de tarefas e que por conseguinte, o trabalho desenvolvido permitiu o desenvolvimento da aprendizagem da multiplicação.

A avaliação formativa feita em diferentes momentos, através das fichas de avaliação intercalar e sumativas do segundo e terceiros períodos permitiu constatar que, no geral, os alunos conseguiram aplicar os conhecimentos sobre a multiplicação.

Há a salientar também que os resultados dos alunos de segundo ano do agrupamento de escolas no ano letivo 2013/14 melhoraram nos domínios Números e Operações e Geometria e Medida, com uma descida na taxa de insucesso. Vinte alunos da turma envolvida neste estudo realizaram os testes intermédios, sendo que a taxa de insucesso da turma no domínio Números e Operações foi de 35%, inferior aos 46,8% da média do agrupamento registada nesse ano letivo e claramente inferior à média do agrupamento no ano letivo anterior de 58,3%. Para os valores apresentados contribuíram certamente uma multiplicidade de fatores, no qual poderá também incluir-se o trabalho desenvolvido com a turma neste estudo.

As dificuldades mais evidenciadas pelos alunos durante a exploração da sequência de tarefas prenderam-se sobretudo com a seleção de uma estratégia adequada e eficaz para a resolução da tarefa. Seis dos sete alunos entrevistados referem-na como a sua maior dificuldade. A precipitação de alguns alunos na resolução da tarefa sem reler o enunciado do problema condicionou também a eficácia da estratégia de resolução utilizada. As dificuldades estiveram também relacionadas com dificuldades de compreensão do enunciado do problema por parte de alguns alunos, sendo que a interação com o par e com a professora, em diferentes momentos da aula, contribuíram para ultrapassar muitas dessas dificuldades. Anghileri (1989) concluiu também que as maiores dificuldades dos alunos na resolução deste tipo de problemas que envolvem multiplicação prendiam-se com a compreensão da linguagem utilizada e o conhecimento de alguns termos.

5.2.2. Potencialidades e limitações do ensino exploratório

O trabalho a pares possibilitou momentos de interação entre os alunos que os enriqueceu pela interajuda, a partilha e discussão de ideias, tendo como objetivo a produção de um produto comum. Para além disso, os alunos tiveram que saber manter uma interação entre pares, saber ouvir os outros, concordar ou discordar, negociar acordos, gerir conflitos de opiniões, para que juntos conseguissem resolver a tarefa. Desta forma, o trabalho a pares, tal como referiu César (1995, 1999) no seu estudo, potenciou por um lado o desenvolvimento de competências cognitivas e por outro de competências sociais.

Os momentos de partilha e discussão em grande grupo e a consequente sistematização das ideias constituíram momentos privilegiados de construção de saber e de atribuição de significados na aprendizagem da multiplicação. Para além disso, constituíram também oportunidades de promoção das competências transversais da matemática: a resolução de problemas, o raciocínio e a comunicação matemática, tal como apontava o Programa de Matemática do Ensino Básico - PMEB (ME, 2007).

O facto de terem sido valorizadas as produções e os processos próprios de resolução dos pares nessa fase da partilha em grande grupo, proporcionou a estes alunos a oportunidade de reinventarem o seu conhecimento, fazer a ponte entre as suas estratégias informais com o conhecimento formal, quando progressivamente atribuíram significado ao uso da multiplicação e das suas propriedades e desenvolveram conhecimentos sobre a multiplicação, tal como defendem vários autores da Educação Matemática Realista (e.g. Freudenthal (1991), Gravemeijer (2004,2005), Gravemeijer e Terwel (2000 a, 2000 b)). Neste sentido a discussão em grande grupo e a inerente sistematização das ideias permitiu o processo de matematização horizontal.

A atitude questionadora da professora nos diferentes momentos da aula incentivou os alunos à reflexão sobre o trabalho desenvolvido, permitiu-lhes avaliar a eficácia das diferentes estratégias apresentadas e apropriarem-se de outras estratégias mais formais. A professora teve a preocupação de insistir com os alunos no uso da multiplicação e na descoberta de expressões multiplicativas equivalentes, incentivá-los a estabelecer relações entre produtos, de forma a progredirem na aprendizagem da multiplicação e no processo de matematização vertical.

Aliada à natureza das tarefas propostas aos alunos que permitiram uma diversidade de estratégias de resolução, a prática assente num ensino exploratório com o seu carácter marcadamente interativo influenciou a atividade matemática da turma e o modo como os alunos adquiriram e interiorizaram os diferentes aspetos ligados à multiplicação.

As ações da professora assumiram neste estudo um carácter multidimensional e relacional, particularmente complexas neste tipo de ensino, sendo um misto de ações que tinham sido planeadas e outras ações que emergiram da aula; revelando-se uma ação particularmente exigente, tal como a considera (Ponte, 2005).

As limitações de um ensino exploratório prenderam-se sobretudo com dois aspetos: por um lado o tempo que exigiu para pô-lo em prática e por outro lado a sua exigência e complexidade.

Adotar um ensino exploratório nas aulas de matemática implicou que a professora disponibilizasse mais tempo para a preparação das tarefas e a sua exploração nas aulas. Decorrente das reuniões semanais realizadas com as colegas do mesmo ano, foi salientada esta demora na exploração das atividades planificadas para a aprendizagem da multiplicação.

Trata-se de um tipo de ensino que exigiu da professora uma atitude muito atenta do trabalho que os alunos desenvolviam nos diferentes momentos da aula, uma mobilização de conhecimentos e uma capacidade de organização da aula e de condução do discurso, que não é tão exigente num ensino dito tradicional.

Apesar destas limitações, neste estudo encontraram-se claramente muito mais vantagens em insistir na continuidade de um ensino exploratório e julga-se que uma maior experiência dos professores neste tipo de ensino ajudará a diminuir os constrangimentos referidos.

5.3. Recomendações e limitações do estudo

Dada a natureza da área de investigação em que este estudo se insere, é possível sugerir algumas recomendações para o trabalho pedagógico na sala de aula e para a investigação neste domínio.

Ficou evidente neste estudo que o modo como os alunos trabalharam durante a resolução das tarefas, produziu efeitos significativos na forma como eles interagiram entre si e com a professora e o modo como aprenderam.

Reconhecendo as vantagens de um ensino exploratório para o desenvolvimento de capacidades de resolução de problemas, comunicação e raciocínio matemático e a construção de uma aprendizagem matemática com significado, realça-se a necessidade de se investir mais neste tipo de ensino; o que exigirá também o investimento dos professores na sua formação contínua.

Umas das limitações deste estudo prendem-se com o facto de a sequência de tarefas apenas contemplar a resolução de problemas e não serem contempladas tarefas de outra natureza, como cadeias de cálculo associadas à multiplicação, ainda que os alunos tivessem aplicado procedimentos de cálculo em exercícios do manual.

Importa também referir que uma das limitações deste estudo resulta do facto de se estudar uma turma, orientada pela professora – investigadora, num determinado contexto, pelo que será necessário acautelar quaisquer generalizações a outros contextos educativos.

Outra limitação deste estudo prende-se com os constrangimentos inerentes ao tempo disponível para se fazer a recolha de dados. Sendo a aprendizagem da multiplicação um processo gradual, que se inicia no segundo ano, mas que continua nos anos seguintes, existirão aspetos ligados à aprendizagem da multiplicação que este estudo não pode comportar.

Assim seria interessante que fosse desenvolvido um estudo onde se conseguisse perceber, de forma mais aprofundada, como é que a aprendizagem da multiplicação vai progredindo e se processa a passagem do raciocínio aditivo para o raciocínio multiplicativo, à medida que o universo numérico se vai alargando, e passará também a incluir os números racionais.

5.4. Reflexão final

No seu trabalho diário qualquer professor questiona-se sobre a forma como as aulas decorrem e os aspetos que pode melhorar. Ao longo deste estudo estiveram bem presentes essas preocupações enquanto professora: possibilitar uma aprendizagem significativa da matemática e aqui, mais precisamente da multiplicação e contribuir para a melhoria das práticas educativas. Contudo ao assumir-se o duplo papel de professora e investigadora, a reflexão sobre a prática exigiu mais do que um mero ato de olhar e refletir sobre as aulas.

Implicou considerarem-se os procedimentos metodológicos necessários à realização da investigação e delinear um projeto de investigação, um plano de ação que foi-se reajustando à medida que se observavam e analisavam os efeitos da prática. Exigiu uma disponibilidade e a abertura de analisar criticamente as suas ações enquanto professora, reajustá-las quando se considerou ser necessário, mobilizar conhecimentos e estratégias de intervenção que pudessem potenciar a aprendizagem dos alunos.

O duplo papel de professora e investigadora assumido neste estudo levou a que a professora procurasse realizar o seu trabalho na aula, mas simultaneamente, adotasse a faceta de investigadora, ao preparar a recolha e a análise dos dados, exigindo dela uma atitude de reflexão sistemática e profunda sobre o modo como o trabalho ia decorrendo.

Conciliar o papel de professora com o de investigadora durante as aulas não foi tarefa fácil. Por um lado existiu a preocupação com a ação enquanto professora, o acompanhamento aos alunos, tentando que as dificuldades fossem ultrapassadas, que eles conseguissem encontrar estratégias de resolução eficazes para as tarefas, discutir com eles as suas ideias e "agarrar" as suas intervenções, conduzir a discussão, de modo a que a exploração da tarefa possibilitasse atingir os objetivos para os quais tinha sido pensada. Por outro lado implicou a recolha do máximo possível de dados, gravar o que se passava na aula e registar anotações, sendo que, frequentemente, os registos das notas de campo foram feitos no final da aula, após a exploração da tarefa.

A construção desta sequência de tarefas exigiu pesquisa, planificação, reflexão e avaliação do trabalho desenvolvido, tarefa após tarefa e requereu uma análise mais aprofundada após a exploração de toda a sequência de tarefas. A pesquisa realizada possibilitou à professora enriquecer os seus conhecimentos acerca das temáticas envolvidas no estudo e ter uma melhor perceção acerca do processo de aprendizagem da multiplicação.

É de salientar também a experiência da frequência deste mestrado, pelas pesquisas e leituras que exigiu, as discussões e a partilha de ideias que contribuíram para um maior enriquecimento pessoal e profissional. Importa realçar o seminário de investigação promovido pela Escola Superior de Educação e Ciências Sociais do Instituto Politécnico de Leiria, em que os alunos deste mestrado tiveram oportunidade de participar, e que possibilitou-lhes também algum aprofundamento teórico em temas relevantes da Educação Matemática, bem como o contacto com os resultados de investigações realizadas pelas oradoras presentes, acerca de temáticas diretamente relacionadas com a educação matemática e com o estudo realizado.

Com a transcrição das gravações das aulas houve uma melhor perceção dos aspetos que se deveriam alterar na prática educativa. A gravação das aulas e a sua análise foi uma tarefa muito útil para este estudo e sê-lo-á para qualquer professor, na medida em que permitiu refletir de forma mais distanciada e objetiva sobre o trabalho que estava a ser desenvolvido e consequentemente sobre a forma de o melhorar.

Todo o trabalho de análise de dados possibilitou ter um conhecimento aprofundado do modo como os alunos foram construindo a aprendizagem da multiplicação, perceber de que forma a exploração que foi feita das tarefas e o ambiente de sala de aula influenciaram essa aprendizagem.

Assim, a realização deste estudo para além de engrandecer a faceta de professora, permitiu também aumentar os seus conhecimentos sobre o modo como se constrói uma investigação suportada nas práticas de ensino da Matemática.

De acordo com o referido por Sanches (2005) um estudo desta natureza impôs a necessária combinação entre o processo investigativo e a reflexão crítica com a prática de ensino, tornando-a mais informada, mais sistemática e rigorosa. Por consequência, influenciou a formação da professora enquanto profissional de ensino e enquanto investigadora, sendo que ambas as facetas parecem ter beneficiado deste duplo papel.

Conciliar todo o outro trabalho da escola, com o acompanhamento à família e o tempo necessário para dedicar a este estudo não foi uma caminhada fácil. No entanto, o incentivo de diversas pessoas que acompanharam este processo e a aprendizagem realizada ao longo das aulas de mestrado e durante a realização deste estudo possibilitou essa caminhada.

Ao longo deste percurso houve momentos de desânimo, surgiram muitas dúvidas e incertezas e houve momentos em que a sobrecarga de trabalho impediu dedicar o tempo pretendido e necessário para aprofundar algumas reflexões.

Contudo chegados aqui, o balanço final desta experiência é que valeu a pena, foi sem dúvida muito positivo, e que o esforço investido neste estudo não só promoveu a aprendizagem da multiplicação dos alunos como ajudou a professora- investigadora a crescer, enquanto pessoa e profissional.

Referências bibliográficas

Abrantes, P., L. Serrazina, & I. Oliveira (1999). *A Matemática na educação básica*. Lisboa: ME/DEB.

Ambrose, R., Baek, J. M., & Carpenter, T. P. (2003). *Children's invention of multidigit multiplication and division algorithms*. Consultado em 14.06.2014, Disponível em http://www.uta.edu/faculty/ tjorgens/ pastcourses/.pdf

Anghileri, J. (1989). An investigation of young children's understanding of multiplication. *Educational Studies in Mathematics*, 20 (pp. 367-385). Consultado em 12.06.2014, Disponível em http://www.jstor.org/stable/3482314

Anghileri, J. (Ed.). (2002). *Principles and practices in arithmetic teaching*. Buckingham: Open University Press.

Baek, J. (1998). Children's Invented Algorithms for Multidigit Multiplication Problems In Morrow, L.& Kenney, M. (Eds.) , *Yearbook 1998. The Teaching and Learning of algorithms in school matemathics* (pp 151-160). Reston. NCTM

Baek, J. (2005) . Children´s Mathematical Understanding and Invented Strategies for Multidigit Multiplication . *Teaching Children Mathematics Vol. 12, No. 5* , 242-247) . Consultado em 30.06.2014, Disponível em http://www.jstor.org

Bishop, A., & Goffree, F. (1986). Classroom organization and dynamics. In B. Christiansen, A. G. Howson, & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 309-365). Dordrecht: D. Reidel. Consultado em 12.11.2013, Disponível em http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/fdm/bibliografia.htm

Boavida, A. M. (1993). *Resolução de problemas em educação matemática: Contributo para uma análise epistemológica e educativa das representações pessoais dos professores* (tese de mestrado). Lisboa: APM

Boavida, A., Paiva, A.. Cebola, G., Vale, I., & Pimentel, T. (2008). *A Experiência Matemática no Ensino Básico*. Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores do 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico. Lisboa: ME-DGIDC

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação*. Porto: Porto Editora

Carraher, T.N., Carraher, D.W., e Schliemann, A.D. (1985). Mathematics in the streets and in school. *British Journal of Developmental Psychology*, 3, 21-29.

Carpenter, T. P., Franke, M. L., Jacobs, V. R., Fennema, E., e Empson, S. B. (1998). A longitudinal study of invention and understanding in children's multidigit addition and subtraction. *Journal for research in mathematics education*, 3-20

Carpenter, T. P., Moser, J. M., & Bebout, H. C. (1988). Representation of addition and subtraction words problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, 345-357

.
Canavarro, A.P.(2011). Ensino exploratório da Matemática: práticas e desafios. *Educação Matemática 115.* 11-17: APM

Canavarro, A., Oliveira, H., & Menezes, L. (2012). Práticas de ensino exploratório da matemática: o caso de Célia. In L. Santos (Eds.), *Investigação em Educação Matemática 2012: Práticas de ensino da Matemática* (pp. 255–266). Portalegre: SPIEM.

Canavarro, A., & Santos, L. (2012). Explorar tarefas matemáticas. In L. Santos (Eds.), *Investigação em Educação Matemática 2012: Práticas de ensino da Matemática* (pp.99–104). Portalegre: SPIEM.

César, M. (1995). Interacção entre pares e resolução de tarefas matemáticas In *Actas do VI Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 225-240). Lisboa: APM.

César, M. (1999) . *Interações sociais e apreensão de conhecimentos matemáticos- A investigação contextualizada* . Consultado em 01.08.2015, Disponível em http://spiem.pt/DOCS/ATAS_ ENCONTROS/1999

Coutinho, C.P. (2005). *Percursos da Investigação em Tecnologia Educativa em Portugal- uma abordagem temática e metodológica a publicações científicas (1985-2000).* Braga: Universidade do Minho

Coutinho, C., P. (2011) .*Metodologia de Investigação em Ciências Sociais e Humanas: Teoria e prática* (2,ª edição) .Coimbra: Almedina

Coutinho, C. P., Sousa, A., Dias, A., Bessa, F., Ferreira, M. J., & Vieira, S. (2009). Investigação-Acão : metodologia preferencial nas práticas educativas. *Revista Psicologia, Educação e Cultura, 13:2* ,355- 379

DGEBS (1990). Programa do 1.º Ciclo do Ensino Básico: Ministério da Educação

Dolk, M. (2008) Problemas realistas: Um ponto de partida para uma sequência de oportunidades de aprendizagem. In Brocardo,J., Serrazina,L., Rocha, I. (Org.) *O sentido de número: reflexões que entrecruzam teoria e prática* (pp 159- 182). Coleção Educação. Lisboa: Escolar Editora

Equipa do Projeto Desenvolvendo o sentido do número: perspetivas e exigências curriculares (2007) . *Desenvolvendo o sentido de número - Materiais para o professor do 1.º ciclo, Volume II*. Lisboa: APM

Ferreira, E. (2012) . *O Desenvolvimento do sentido de número no âmbito da resolução de problemas de adição e subtração no 2.º ano de escolaridade* (Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa). Lisboa

Franke, M. L., Kazemi, E., e Battey, D. (2007). Mathematics teaching and classroom practice. In F. K. Lester, Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 257-315). Charlotte, NC: Information Age

Fosnot, C., & Dolk, M. (2001). *Young mathematicians at work: Constructing number sense, addition, and subtraction.* Portsmouth, NH: Heinemann

Freudenthal (1975). *Perspectivas da Matemática*. Trad. Fernando C. Lima. Rio de Janeiro: Zahar Editores

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education*: China Lectures . Dordrecht, The Netherlands: Kluwer

GAVE (21012) . *Projeto Testes Intermédios Relatório 2011*/2012. Lisboa : Ministério da Educação

Guimarães, H. M. (2005). A resolução de problemas no ensino da Matemática: Alguns passos do seu percurso no discurso curricular em Portugal. In L. Santos, A. P. Canavarro & J. Brocardo (Eds.), *Educação matemática: Caminhos e encruzilhadas*(pp. 275-279). Lisboa: APM

Gonçalves, A. C. J. (2008). *O Desenvolvimento do sentido de número num contexto de resolução de problemas em alunos do 1.º Ciclo do Ensino Básico* (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Gravemeijer, K. (2004) Creating opportunities for students to reinvent mathematics In *The 10th International Congress on Mathematical Education-ICME10* (pp1-17). Consultado em 23.08.2014, Disponível em http://www.staff.science.uu.nl/ ~savel101/ edsci10 / literature/ gravemeijer /1994.pdf

Gravemeijer, K. (2005). What makes mathematics so difficult, and what can we do about it? In L. Santos, A. P. Canavarro, & J. Brocardo (Eds.), *Educação matemática: Caminhos e encruzilhadas* (pp. 83- 101). Lisboa: APM. Disponível em http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/fdm/bibliografia.htm

Gravemeijer, K., & van Galen, F. (2003). Facts and algorithms as products of students' own mathematical activity. Disponível em http://393methods1.wikispaces.com/file/view/ Gravemeijer +% 26+van+Galen.pdf

Gravemeijer , K e Terwel , J.(2000 a) Hans Freudenthal a mathematician on didactics and curriculum theory In *Journal of Curriculum Studies,* 32(6), 777-796 (on-line) Consultado em 10.08.2014, Disponível em http://dare.ubvu.vu.nl/ handle/1871/10770

Gravemeijer , K & Terwel , J. (2000 b) Hans Freudenthal, un matemático en Didáctica y teoría curricular In *Journal of Curriculum Studies,* 32(6), 777-796 (on-line).Consultado em 10.08.2014, Disponível em http://dare.ubvu.vu.nl / handle/ 1871/10912

Greer, B. (1992). Multiplication and division as models of situations. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 276-295). New York: Macmillan Publishing Company.

Guimarães, H. M. (2005). A resolução de problemas no ensino da Matemática: Alguns passos do seu percurso no discurso curricular em Portugal. In L. Santos, A. P. Canavarro & J. Brocardo (Eds.), *Educação matemática: Caminhos e encruzilhadas* (pp. 275-279). Lisboa: APM

IAVE (2013). *Projeto Testes Intermédios- 1.º Ciclo do Ensino Básico Relatório 2013* (2013). Lisboa: Ministério da Educação

Kamii, C. e Dominick, A. (1998). The harmful effects of algorithms in grades 1-4. In L. J. Morrow e Margaret J. Kenney (Eds.), *The teaching and learning of algorithms in school mathematics* (pp.130-140). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Keijzer, R. (2003). *Teaching formal mathematics in primary education: Fraction learning as mathematising process*. Utrecht: Freudenthal Institute. Consultado em 15.05.2014, Disponível em http://dare.ubvu.vu.nl/handle/1871/33206

Kouba, V.L. (1989). Children's Solution Strategies for Equivalent Set Multiplication and Division Word Problems. In *Journal for Research in Mathematics Education* Vol. 20, No. 2 (Mar., 1989), 147-158, Consultado em 25.07.2014, Disponível em http://www.jstor.org/ stable/749279

Latorre, A. (2003). *La investigación-acción: Conocer y cambiar la práctica educativa.* Barcelona: Editorial Graó

Martinho, M. H., e Ponte, J. P. (2005). Comunicação na sala de aula de Matemática: Práticas e reflexão de uma professora de Matemática. In J. Brocardo, F. Mendes & A. M. Boavida (Eds.), *Actas do XVI Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 273-293). Setúbal: APM

Matos, João Filipe (2004) . Investigação-ação.Consultado em 08.11.2013, Disponível em http://www.educ.fc.ul.pt /docentes/ jfmatos/mestrados/ucp/investigação.ppt

Matos, José Manuel (2008). A resolução de problemas e a identidade da educação matemática em Portugal. In Luengo, R.; Gómez, B.; Camacho, M. & Blanco, L. (Eds.), *Investigación en educación matemática XII* (pp. 141-158). Badajoz: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Maximo-Esteves, L. (2008). *Visão Panorâmica da Investigação-Acção*. Porto: Porto Editora

ME (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa

MEC (2013). *Programa de Matemática para o Ensino Básico*. Lisboa

ME-DEB (2001). *Currículo Nacional do Ensino Básico- Competências Essenciais*. Lisboa

Mendes, F. (2012). *A aprendizagem da multiplicação numa perspectiva de desenvolvimento do sentido de número : um estudo com alunos do 1.º ciclo.* (Tese de doutoramento não publicada). Universidade de Lisboa

Mendes,F., Brocardo, J. & Oliveira, H. (2013) A evolução dos procedimentos usados pelos alunos: contributo de uma experiência centrada na multiplicação. *Quadrante, Vol. XXII, Nº 1*, 133-162: APM

Mendes, F. & Delgado, C. (2008). A aprendizagem da multiplicação e o desenvolvimento do sentido de número In Brocardo,J., Serrazina,L., Rocha, I. (Org.) *O sentido de número: reflexões que entrecruzam teoria e prática* (pp 159- 182) Coleção Educação. Lisboa: Escolar Editora

Menezes,L., Oliveira,H. & Canavarro; A.P.(2013) . Descrevendo as práticas de ensino exploratório da matemática: o caso da professora Fernanda In *Actas del VII CIBEM*. Montevideo. Disponível em http://www.researchgate.net/publication/ 258317991

Mesquita-Pires, C. (2010). A Investigação-acção como suporte ao desenvolvimento profissional docente . *EDUSER: revista de educação, Vol. 2(2*): Instituto Politécnico de Bragança

Mulligan, J.T. (1992). Children's solutions to multiplication and division word problems: a longitudinal study. *Mathematics Education Research Journal, Vol.4. N. º1*, 24-42.Consultado em 25.06.2014, Disponível em http://alearningplace.com.au/wp-content/uploads/ 2014/01/attachments /MERJ_4_1_Mulligan.pdf

Mulligan, J. T., & Mitchelmore, M. C. (1997). Young children's intuitive models of multiplication and division. In *Journal for Research in Mathematics Education, 28,* 309-331.Consultado em 18.08.2014, Disponível em http://www.jstor.org/stable/ 749783

NCTM (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar*. Lisboa: APM e IIE.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a Matemática escolar.* Lisboa: APM

Oliveira, H., Menezes, L. & Canavarro, A. (2013). Conceptualizando o ensino exploratório da Matemática: Contributos da prática de uma professora do 3.º ciclo para a elaboração de um quadro de referência. *Quadrante, Número Temático-Práticas de ensino de Matemática* Vol. XXII, Nº 2, 29-53.Lisboa:APM

Pinto, H. G. (2011). *O desenvolvimento do sentido da multiplicação e da divisão de números racionais* (Tese de doutoramento). Departamento de Didática. Universidade de Lisboa

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J.P., Mata-Pereira, J., e Quaresma, M. (2013). Ações do professor na condução de discussões matemáticas. *Quadrante, Número Temático-Práticas de ensino de Matemática* Vol. XXII, Nº 2, 55-81.Lisboa:APM

Ponte, J. , Matos, J.M., Abrantes, P. (1998) . *Investigação em educação matemática : implicações curriculares* . Lisboa: IIE e ME

Ponte,J., Nunes, C., e Quaresma, M. (2008). *Explorar, investigar, interagir na aula de Matemática Elementos fundamentais para a aprendizagem*. Consultado em 22.08.2014, Disponível em www.ie.ul.pt/pls/portal/docs

Ponte, J. P., e Santos, L. (1998). Práticas lectivas num contexto de reforma curricular. *Quadrante, 7*(1), 3–33: APM

Ponte, J. ; Serrazina,L. (2000). *Didáctica da Matemática para o 1.º Ciclo do ensino básico*. Lisboa: Universidade Aberta

Ponte, J. P., e Serrazina, L. (2004). Práticas profissionais dos professores de Matemática. *Quadrante*, 13(2), 51-74: APM

Rocha, M. I., e Menino, H. A. (2009). Desenvolvimento do sentido do número na multiplicação: um estudo de caso com crianças de 7/8 anos. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *12*(1), 103-134.Consultado em 10.04.2014, Disponível em http://www.scielo.org.mx/scielo

Sanches, I. (2005) . Compreender, agir, mudar, incluir. Da investigação-acção à educação inclusiva. *Revista Lusófona de Educação*, 5,127-142:CeiED Universidade Lusófona de Humanidades e Tecnologias

Serrazina (2009). O Programa de Formação Continua em Matemática para professores do 1° e 2° Ciclo do Ensino Básico: balanço possível. *Interacções n.º12*, 4-22:. Coimbra: Instituto Superior Miguel Torga

Sherin, M. G. (2002). A balancing act: Developing a discourse community in a mathematics classroom. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *5*, 205-233: Springer

Sherin, B., e Fuson, K. (2005). Multiplication strategies and the appropriation of computational resources. *Journal for research in mathematics education*, 347-395: Springer

Stanic, G. M. A., e Kilpatrick, J. (1989). Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum. In R. I. Charles & E. A. Silver (Eds.), *The teaching and assessing of mathematical problem solving* (pp. 1-22). Reston, VA: NCTM e LawrenceErlbaum. Consultado em 22.07.2014, Disponível em http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/fdm/ textos/stanic-kilpatrick%2089.pdf.

Stein, M. K., e Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for refl ection: From research to practice.in *Mathematics Teaching in the Middle School*, 3, 268–275.

Stein, M. K., Engle,R.A., Smith, M.S. e Hughes,E.K.(2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five Practices for Helping teachers Move Beyond Show and Tell in *Mathematical Thinking and Learning,10* (4) , 313-340. Consultado em 02.01.2014, Disponível em http://www.tandfonline.com/toc/ hmtl20/ 10 /4#. UtGG 0kap3IU

Teixeira, E. (2003). A análise de dados na pesquisa científica: Importância e desafios em estudos organizacionais in *Desenvolvimento em Questão*, *1* (2), pp 177 – 201.Consultado em 18.08.2015, Disponível em http://www.spell.org.br/documentos/ver/20204

Treffers, A., & Buys, K. (2001). Grade 2 (and 3) – Calculation up to 100. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Children Learn Mathematics,* (pp. 61-88). Freudenthal Institute, Utrecht University & National Institute for Curriculum Development. The Netherlands: Sense Publishers.

Veia, L. (1996) *A resolução de problemas, o raciocínio e a comunicação no primeiro ciclo do ensino básico. Três estudos de caso* (Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM

van den Heuvel-Panhuizen, M. (2000). *Mathematics education in the Netherlands: A guided tour*. Freudenthal Institute . Consultado em 20.08.2014, Disponível em http://www.fisme.science.uu.nl

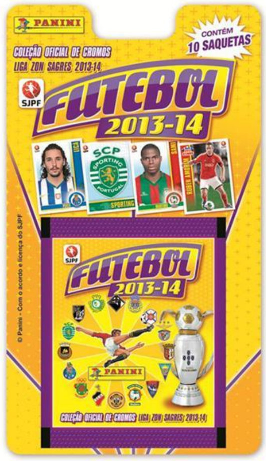
van den Heuvel-Panhuizen, M. (2001). A learning-teaching trajectory as a hold for teaching primary-school mathematics in the Netherlands. In *Didactics of Mathematics and Informatics in Education. 5th Panhellenic Conference with International Participation* (pp. 21-39).Consultado em 15.12.2014, Disponível em http://www.fisme.science.uu.nl/publicaties

van den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). The didactical use of models in realistic mathematics education: An example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics*, *54*(1), 9-35 : Springer

Verschaffel, L., Greer, B., & de Corte, E. (2007). Whole numbers concepts and operations in F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning ,Vol. II* (pp. 557-628). Reston, VA: NCTM.

Apêndice 1

Tarefa 1 - Coleção de cromos



O Simão faz coleção de cromos de futebol da época 2013-2014.

A mãe do Simão comprou-lhe dez saquetas de cromos. Cada saqueta tem seis cromos.

Quantos cromos comprou a mãe do Simão?

Tarefa 2 - Arrumação de sapatos

A Leonor está a remodelar o seu quarto e chegou a hora de pensar na arrumação dos sapatos.

A Leonor tem 12 pares de sapatos para arrumar.

A Leonor e a mãe viram este organizador num catálogo.

Um organizador será suficiente para arrumar os 12 pares de sapatos da Leonor?

R:____

Tarefa 3 - Bolo de iogurte

No dia do aniversário do Henrique a sua mãe fez um bolo de iogurte delicioso para a sua festa na sala de aula.

A turma pediu-lhe a receita para fazer o bolo na escola e partilhar no lanche de oferta aos pais. A mãe do Henrique aconselhou-nos a fazer o dobro da dose referida na receita.

Bolo de iogurte

1 iogurte de aromas

6 ovos

3 copos de iogurte de açúcar

3 copos de iogurte de farinha

Meio copo de óleo

2 colheres de café de fermento

Qual a quantidade de cada um dos ingredientes necessária para fazermos o dobro da receita?

Tarefa 4 - Jogo dos pés

5.1.Ontem na aula de Educação Física fizemos o jogo dos pés.

Agora preenche a tabela com as quantidades adequadas.:

Número de alunos	Número de pés
3	
	8
5	
	12
7	
9	
	20
14	
16	

5.2. Quantos pés têm todos os alunos da turma?

R:____

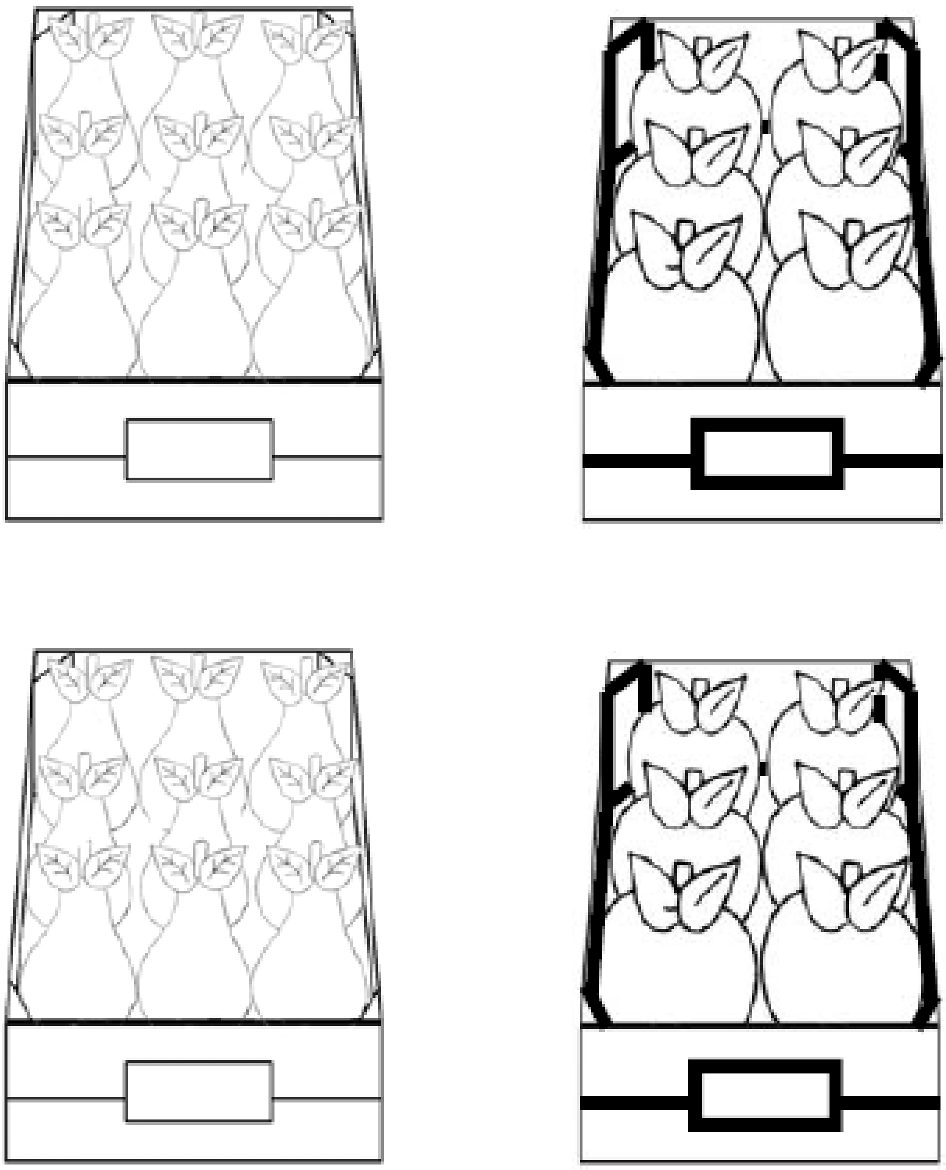
5.3. Quantos alunos seriam necessários para juntarmos 62 pés?

R:____

Tarefa 5- Na frutaria da Tita

A Mafalda foi às compras com a mãe à frutaria da Tita.

Enquanto a mãe estava às compras a Mafalda observava as caixas da fruta e estava muito interessada a contar as peras rochas e as maçãs.



(Adaptado da Brochura Desenvolvendo o sentido de número: perspetivas e exigências)

4.1-Quantas peras rochas existiam nas duas caixas?

(Explica a tua estratégia)

R:____

4.2-Quantas maçãs existiam nas duas caixas?
(Explica a tua estratégia)

R:____

4.3- Se a caixa das maçãs tiver duas camadas, quantas maçãs existem nas duas caixas?
(Explica a tua estratégia)

R:____

Tarefa 6- Roupa da Maria

A Maria vai participar na festa da sua escola de música, onde terá que vestir uma saia e uma camisola. Ela tem duas saias (uma azul e outra castanha) e três camisolas (uma azul, outra branca e outra vermelha) que pode vestir para ir à festa da escola de música.

De quantas maneiras diferentes poderá a Maria vestir-se?

R:____

Tarefa 7- As idades

A prima e a tia da Maria também a acompanharam à festa. Descobre as suas idades , sabendo que a Maria tem sete anos, a prima tem o dobro da sua idade e a idade da tia é o dobro da soma da idade da Maria com a idade da prima.

R:____

Tarefa 8- Saquinhos de oferta da Leonor

8.1.A Leonor faz anos e quer preparar umas ofertas para os seus 20 colegas da turma. Ela quer oferecer saquinhos com 4 bombons.

No supermercado ela encontrou a bom preço a caixa de bombons representada.

Quantas caixas de bombons iguais à representada precisará a Leonor para fazer os 20 saquinhos que irá oferecer aos seus colegas?

Explica como ajudarias a Leonor

8.2. E se em vez de 4 bombons a Leonor colocasse 5 bombons, de quantas caixas ele precisaria?

Explica como ajudarias a Leonor

Tarefa 9- Ida ao cinema

A mãe do Simão prometeu-lhe que todas as segundas- feiras do próximo mês de abril irão ao cinema, pois nesses dias o bilhete será mais barato e só custa 5,00€ cada um.

Quanto gastará o Simão e a mãe se forem ao cinema todas as segundas no mês de abril?

R:____

Tarefa 10- Prenda do Dia da Mãe

A turma começou com a recolha de cápsulas nespresso para as pregadeiras que faremos para oferecer às mães no Dia da Mãe. Já recolhemos meia centena de cápsulas. Será que já temos cápsulas nespresso suficientes para fazer as pregadeiras para os vinte e um alunos da turma?

R:____

Tarefa 11- Na pizzaria

A festa de aniversário da Mariana foi na Telepizza e cada colega pode fazer a sua própria pizza. Cada um pode escolher apenas um tipo de massa e dois ingredientes diferentes para fazer a sua pizza.

As opções de escolha eram as seguintes:

Massa clássica ou **Massa fina**

Ingredientes (a escolher dois) : **fiambre, cogumelos, azeitonas, ananás**

Quantas possibilidades diferentes teriam os amigos da Mariana para fazer a sua pizza?

R:____

Tarefa 12- Corrida de bicicletas

O Leonardo anda a treinar para a corrida de bicicletas das Festas do Centenário do Concelho. Para o seu treino decidiu que andaria sempre o triplo do que tinha andado no dia anterior.
Na segunda ele andou um quilómetro. Na terça andou o triplo do que andou na segunda.
Na quarta andou o triplo do que andou na terça e assim sucessivamente até ao final da semana.
Qual o dia da semana em que o Leonardo percorreu mais do que vinte e cinco quilómetros?

Tarefa 13- Bolo do Dia da Mãe

Na Pastelaria Real todos os dias fazem bolos deliciosos.

No fim de semana tiveram várias encomendas de bolos do Dia da Mãe. Cada bolo levou seis ovos .

Eles fizeram oito bolos para o Dia da Mãe.

De quantas caixas iguais às da figura precisaram para fazer os oito bolos?

Tarefa 14- Ramos para o Dia da Mãe

14.1 A Matilde foi à florista da praça para comprar três ramos para oferecer às suas avós e à mãe no Dia da Mãe. Pegou no catálogo e escolheu três ramos iguais aos da figura .

A florista disse-lhe que tinha apenas dois baldes com 10 rosas vermelhas cada uma. Será que as rosas chegaram para fazer os três ramos de rosas vermelhas que a Matilde queria?

R:____

14.2 A Matilde deu para pagar duas notas de 20 € . Sabendo que cada ramo custou doze euros, quanto recebeu de troco a Matilde?

R:____

Apêndice 2

Estratégias	Tarefa 1	Tarefa 2	Tarefa 4.2	Tarefa 4.3	Tarefa 5.1	Tarefa 5.3	Tarefa 7	Tarefa 8.1	Tarefa 8.2	Tarefa 9	Tarefa 10	Tarefa 12.1	Tarefa 13	Tarefa 14
Estratégia incompleta ou inadequada	I+Q	G+L I+Q		F+Q D+O L+P R+M			I+O B+F G+S	I+O B+F		C+L , E+H	A+K+Q		K+O	
Modelação com recurso ao desenho/riscos/bolas	A+H+G		J+I F+Q					J+P						
Contagem unitária	A+H+G													
Contagem por saltos Contagem rítmica	O+D	R+M E+K J+F	D+O L+P	A+H+B J+I	D+Q M+R			E+H, D+R G+S A+K+Q	I+O A+K+Q					F+M
Adição repetida	B+L C+N M+R				F+J G+L I+O E+K	A+B+H D+Q M+R F+J I+O, E+K G+L		N+M A+K+Q D+R	D+R B+F	J+P I+O B+F A+K+Q	J+P I+O	K+O I+S		K+O G+R
Escrita de lista		A+H						C+L E+H	C+L E+H					I+S N+L B+J+P
Uso dos dobros	E+K	C+N	H+B+A G+S C+N E+K	C+N		G+L	D+R E+H, C+L M+N J+P A+K+Q	D+R	D+R	I+O J+P				I+S G+R
Multiplicação	F+J P+S	P+S D+O C+N		G+S	A+B+H P+S C+N	C+N P+S		C+L G+S	G+S J+P	G+S M+N D+R I+O B+F A+K+Q	J+P,I+O M+N G+S, E+H C+L D+R B+F	K+O I+S B+D+Q G+R A+E+H L+N J+P F+M	A+E+H B+D+Q G+R L+N I+S J+P F+M	N+L B+J+P C+D+Q A+E+H
Uso de fatos conhecidos			M+R	E+K					M+N		G+S,E+H,C+L,M+N			
Decomposição decimal dos fatores											D+R, B+F			

Tabela 4- Quadro síntese de estratégias de resolução das tarefas apresentadas pelos pares

APÊNDICE 3

Guião da entrevista

Objetivos:

- Recolher informações sobre a perceção dos alunos acerca da resolução de problemas que fizeram parte da sequência de tarefas
- Identificar dificuldades sentidas pelos alunos durante a resolução desses problemas
- Perceber a importância atribuída pelos alunos ao trabalho a pares e o seu contributo para ultrapassar algumas dificuldades
- Perceber a importância dos momentos de apresentação e discussão das estratégias de resolução na aula

Introdução : Tal como te disse queria conversar contigo um pouco acerca do trabalho que desenvolvemos durante a exploração das tarefas em que trabalhamos acerca da multiplicação e saber a tua opinião sobre o trabalho que foi desenvolvido aqui na turma.
Vou propor-te a gravação da entrevista para depois ser mais fácil para mim lembrar-me do que conversámos.

Questões:

1- Gostaste de resolver problemas que temos vindo a trabalhar sobre a multiplicação? Porquê?

2- Quando vos foi apresentado o problema como é que o teu par procedeu para chegar à resposta?

3- Quais as tuas dificuldades quando resolveste esses problemas?

4- Consideras que o trabalho ter sido feito a pares pode ajudar-te a ultrapassar essas dificuldades? Porquê?

5- Qual a importância que tiveram para ti os momentos de apresentação e partilha das estratégias de resolução na aula para a aprendizagem?