

Instituto Politécnico de Leiria



Relatório

Mestrado em Educação e Tecnologia em Matemática

*Modelação de Problemas Utilizando a Teoria de
Grafos: uma aplicação ao estudo da gestão do
material circulante numa rede metropolitana.*

Carlos Alberto Sequeira B. Abel

Leiria, maio de 2012

Instituto Politécnico de Leiria



Relatório

Mestrado em Educação e Tecnologia em Matemática

Modelação de Problemas Utilizando a Teoria de Grafos: uma aplicação ao estudo da gestão do material circulante numa rede metropolitana.

Relatório de Mestrado realizado sob a orientação do Professor Doutor Miguel Patrício, docente na Escola Superior de Tecnologia e Gestão do Instituto Politécnico de Leiria e coorientação da Professora Doutora Ana Mendes, docente na Escola Superior de Tecnologia e Gestão do Instituto Politécnico de Leiria.

Carlos Alberto Sequeira B. Abel

Leiria, maio de 2012

À Minha Família

AGRADECIMENTOS

A concretização deste trabalho só foi possível graças à ajuda de algumas pessoas que me acompanharam.

Ao Professor Doutor Miguel Patrício e à Professora Doutora Ana Mendes, pela orientação, pela dedicação e pelo entusiasmo com que abraçaram este projeto.

Ao Professor Doutor David Canca, da Universidade de Sevilha, ao Professor Doutor Alejandro Zarzo da Universidade Politécnica de Madrid e à Professora Doutora Lúcia Fernandez da Universidade de Granada, que através dos meus orientadores me deram a conhecer este tema e que sempre estiveram disponíveis para esclarecer eventuais dúvidas e para apoiar este projeto. A eles os meus maiores agradecimentos.

À minha esposa, Ana Paula Abel, pelo constante incentivo.

Aos meus filhos, João Abel e Gonçalo Abel, pela compreensão e pelo apoio.

A todos os que de forma direta ou indireta me acompanharam neste trajeto.

Muito obrigado a todos!

RESUMO

O planeamento de uma rede ferroviária pode ser perspectivado de diferentes modos. Terá de se estudar a necessidade de ligações, desenhar a rede de linhas, estabelecer horários de circulação, contratar funcionários, adquirir material circulante, definir um plano de manutenção, antecipar a resposta a condições adversas, etc.. Neste âmbito, a classe de problemas que é usualmente denominada na literatura inglesa por problemas de *rolling stock* é posterior à definição dos horários de circulação de comboios e foca-se na alocação do material circulante disponível aos serviços previstos durante um determinado período horário, isto é, às viagens previstas nos horários dos comboios. Pretende-se gerir esse material de forma a que os custos sejam mínimos, custos esses que estão geralmente relacionados com a realização de viagens sem passageiros ou com tempo de inatividade de comboios nas estações.

Problemas de *rolling stock* podem ser descritos em linguagem matemática recorrendo-se à teoria dos grafos. Tipicamente, estações de comboios nos instantes de tempo de abertura e fecho da rede e nos restantes instantes em que sejam referidas nos horários, serão os vértices de um grafo que ilustrará o papel de cada unidade circulante ao longo de um dia. Serão representadas por arestas todas as possibilidades de movimentação dos comboios, bem como os seus períodos de inatividade. Das restrições impostas pela realidade física e pelo operador da rede resulta um sistema de equações e inequações, que serão consideradas em conjunto com uma função objetivo que se pretende minimizar.

O objetivo principal deste relatório é a modelação e resolução de um problema de *rolling stock* inspirado no metro do Porto. Será considerado um exemplo em que tomamos apenas três linhas, mas que é facilmente generalizável a situações mais complexas. Recorremos ao software de otimização Lingo para a resolução numérica desse problema, conseguindo desta forma, indicar quantos comboios são necessários para assegurar a prestação dos serviços previstos, bem como de que forma deverão ser movimentados.

Palavras-chave: Material circulante, otimização, gestão de frota, teoria de grafos.

ABSTRACT

There are several aspects involved in railway planning, namely determining passenger demand, designing the railway network, establishing the timetables, hiring the correct number of employees, acquiring all the necessary material, defining a maintenance plan, anticipating the response to unexpected situations, etc.. In this context, the huge capital investments involved in the *rolling stock* justify the importance of looking for its efficient circulation. Once the timetables have been set, there are several ways to allocate the trains to ensure all services. A main goal in *rolling stock* management is to minimize costs that may usually be expressed as a function of both the amount of kilometers of circulation of trains without passengers and of the time trains remain in the stations.

Rolling stock problems may be described mathematically resorting to graph theory. Typically, train stations will be represented, at each relevant time instant, by vertices of a graph. Edges will in turn represent all the possibilities of train displacement or inactivity. Physical restrictions, as well as others imposed by the rail network managers, will be expressed by a system of equations and inequalities. These will be considered together with an objective function that we see to minimize, giving rise to a mathematical problem.

The main goal of this report is to model and solve a rolling stock problem based on the railway network of Oporto. An example with only three lines will be considered, which is at the same time simple enough to enable a useful illustration of the method and generalisable to more complex situations. The optimization modeling software Lingo will be used to determine the numerical solution of the problem. This will allow determining the minimum amount of *rolling stock* necessary to ensure the services set in the timetable, as well as how it should be allocated to minimize the objective function.

Keywords: Rolling stock, optimization, fleet management, graph theory.

ÍNDICE DE FIGURAS

Fig. 1.1 - Representação das sete pontes de Königsberg.....	6
Fig. 1.2 - Grafo representativo do problema das pontes de Königsberg.....	7
Fig. 1.3 - Grafo representativo do problema do Império Romano.....	11
Fig. 1.4 - Grafos representativos do problema da fábrica de tijolos.....	12
Fig. 1.5 - Grafo representativo da prestação de dois serviços.....	16
Fig. 2.1 - Grafos representativos dos serviços das linhas E, A e D do metro do Porto.....	26
Fig. 3.1 - Rede de metropolitano com apenas uma linha.....	30
Fig. 3.2 - Serviços da rede de metropolitano com apenas uma linha.....	30
Fig. 3.3 - Proveniência e possíveis destinos do comboio que parte da estação Sul.....	32
Fig. 3.4 - Possíveis proveniências e destinos dos comboios que partem da estação Norte.....	33
Fig. 3.5 - Possíveis deslocamentos noturnos de comboios.....	34
Fig. 3.6 - Rede de metropolitano com duas linhas.....	35
Fig. 3.7 - Serviços da rede de metropolitano com duas linhas.....	35
Fig. 3.8 - Possíveis proveniências dos comboios colocados na estação Sul da linha 1.....	37
Fig. 3.9 - Possíveis proveniências dos comboios colocados na estação Norte da linha 1.....	37
Fig. 3.10 - Possíveis proveniências dos comboios colocados na estação Sul da linha 2.....	38
Fig. 3.11 - Possíveis proveniências dos comboios colocados na estação Norte da linha 2.....	38
Fig. 3.12 - Possibilidades de deslocamentos, origens e destinos numa rede metropolitana com duas linhas.....	39
Fig. 3.13 - Possíveis destinos dos comboios que terminam na estação Norte da linha 1.....	43
Fig. 3.14 - Possíveis destinos dos comboios que terminam na estação Norte da	

linha 2.....	43
Fig. 3.15 - Possíveis destinos dos comboios que terminam na estação Sul da linha 1.....	44
Fig. 3.16 - Possíveis destinos dos comboios que terminam na estação Sul da linha 2.....	44
Fig. 4.1 - Grafo 1 dos resultados do problema de uma linha.....	49
Fig. 4.2 - Grafo 2 dos resultados do problema de uma linha.....	50
Fig. 4.3 - Resultados do problema de duas linhas.....	51
Fig. 4.4 - Resultados do problema do metro do Porto.....	53
Fig. D.1 - Mapa da rede do metro do Porto.....	82

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 2.1 - Dados do problema do metro do Porto.....	25
Tabela 2.2 - Tempos dos percursos entre as estações onde é possível depositar comboios e as estações onde não é possível fazê-lo.....	27
Tabela D.1 - Linhas do metro do Porto.....	77
Tabela D.2 - Túneis do metro do Porto.....	80

ÍNDICE

Dedicatória.....	v
Agradecimentos.....	vii
Resumo.....	ix
Abstract.....	xi
Índice de figuras.....	xiii
Índice de tabelas.....	xv

PREFÁCIO **1**

CAPÍTULO I – INTRODUÇÃO **5**

1.1 - Sobre a teoria de grafos.....	5
1.2 - Planeamento ferroviário.....	13
1.3 - Problemas de rolling stock.....	15
1.4 - Esquema do relatório.....	18

CAPÍTULO II - DESCRIÇÃO DO PROBLEMA **19**

2.1 - Gestão de um serviço ferroviário.....	19
2.2 - Revisão da literatura relacionada com problemas de rolling stock	22
2.3 - Dados do problema.....	24

CAPÍTULO III - MODELAÇÃO MATEMÁTICA **29**

3.1 - Problema de uma linha.....	29
3.2 - Problema de duas linhas.....	34
3.3 - Problema do metro do Porto.....	39

CAPÍTULO IV – RESULTADOS **47**

4.1 - Resolução numérica dos problemas.....	47
---	----

4.2 - Resultados.....	49
4.2.1 - Problema de uma linha.....	49
4.2.3 - Problema de duas linhas.....	50
4.2.3 - Problema do metro do Porto.....	52
CAPÍTULO V - CONCLUSÕES E TRABALHO FUTURO	55
5.1 - Conclusões.....	55
5.2 - Possível trabalho futuro.....	56
REFERÊNCIAS	57
ANEXO A	61
ANEXO B	65
B.1 - Dados do problema da secção 3.1.....	65
B.2 - Programa aplicado ao problema da secção 3.1.....	66
B.2 - Output do programa aplicado ao problema da secção 3.1.....	71
ANEXO C	73
C.1 - Dados do problema da secção 3.2.....	73
C.2 - Output do programa aplicado ao problema da secção 3.2.....	74
ANEXO D	77
D.1 - Rede do metro do Porto.....	77
D.2 - Mapa da rede do metro do Porto.....	82

“A ideia chave na modelação matemática, consiste em tomar a situação original e simplificá-la, de tal modo que fiquemos com uma nova visão sobre o problema original.”

Joseph Malkevitch (1974) a respeito da modelação em grafos.

PREFÁCIO

Da minha atividade profissional faz parte a lecionação da disciplina de Matemática Aplicada às Ciências Sociais (MACS), que contém um capítulo dedicado a modelos de grafos. Assim, surgiu para mim, de forma natural, a escolha deste tema de trabalho entre os que foram propostos aos alunos de Mestrado em Educação e Tecnologia em Matemática.

A inclusão do estudo de grafos em programas curriculares na área de matemática não é novidade, pois já em 1989 o *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) inseria a matemática discreta, que contemplava a teoria de grafos, no ensino secundário, [1].

Num documento onde constam recomendações sobre a formação inicial de professores de matemática, publicado pela Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa das Ciências da Educação (SEM/SPCE) e pela Associação de Professores de Matemática (APM) a teoria de grafos é um tema considerado fundamental na formação de futuros professores de matemática do 3º ciclo do ensino básico e do secundário, [2].

No ensino secundário, os modelos de grafos utilizam-se na análise de situações reais relacionadas com sistemas de distribuição, nos quais muitas vezes é necessário utilizar métodos heurísticos.

Citando o Programa de MACS, [3]:

“Pretende-se que os estudantes interpretem algumas situações de sistemas de distribuição e explorem diversas soluções para problemas que lhes sejam postos em cada situação. As situações a escolher devem poder ser representadas na essência por um sistema de pontos e linhas unindo alguns desses pontos. Está fora de questão uma introdução teórica sistematizada da teoria de grafos, mas alguns dos raciocínios comuns aos teoremas dos circuitos de Euler e Hamilton não devem ser evitados.

Definições e notações podem ser introduzidas à medida que forem sendo necessárias e úteis para a clareza e economia da linguagem e devem ser tanto quanto possível inteligíveis no âmbito das situações em estudo.

Os problemas históricos podem ser apresentados nas aulas, mas podem servir para desenvolver atividades de consulta e projetos.

Se os exemplos apresentados se referirem a situações concretas nas comunidades, as propostas de solução podem ser apresentadas aos responsáveis. Desse modo, desenvolvem-se competências úteis para a intervenção cívica, ao mesmo tempo que se desenvolvem competências fundamentais ao nível da comunicação envolvendo matemática.”

A inclusão de modelos de grafos na modelação matemática no programa da disciplina de MACS, poderá indiciar que no futuro, a curto ou a médio prazo, será possível apostar mais no ensino da modelação de problemas utilizando métodos da teoria de grafos. Este género de trabalho a desenvolver no ensino da Matemática, possibilitará uma maior visibilidade das aplicações dessa teoria, podendo servir como fator de motivação e para incrementar um conjunto maior de capacidades e competências nos alunos.

Modelação de Problemas Utilizando a Teoria de Grafos: uma aplicação ao estudo da gestão do material circulante numa rede metropolitana.

A modelação de situações do quotidiano recorrendo à otimização e a grafos, no contexto de aulas, oferece grandes possibilidades de treino de pensamento criativo, proporcionando um desenvolvimento de competências ao nível da resolução de problemas, da comunicação e do raciocínio, o que poderá beneficiar todo o processo de ensino/aprendizagem da matemática. A constatação da existência de diversas soluções para um mesmo problema permite melhorar o raciocínio, incrementar o espírito crítico e desenvolver a comunicação oral, nomeadamente através de debates na sala de aula, bem como a comunicação escrita

Assim, um dos objetivos deste trabalho é dar a conhecer uma aplicação concreta de uma área do saber matemático ainda pouco divulgada no ensino secundário, muito útil à modelação e posterior resolução de uma grande variedade de problemas reais, que poderá servir como estratégia de motivação para o estudo da disciplina de matemática.

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

É objetivo do presente capítulo introduzir conceitos e ideias transversais a este relatório. Para permitir um enquadramento adequado começa-se por referir brevemente alguns tópicos da história da teoria dos grafos e apresentam-se alguns aspetos relacionados com a gestão de frota de transportes ferroviários. Seguidamente, estabelece-se uma ligação entre problemas de *rolling stock* e a teoria dos grafos. Conclui-se com uma descrição resumida dos conteúdos deste relatório.

1.1 SOBRE A TEORIA DE GRAFOS

Devido ao seu largo espectro de aplicação, a literatura de teoria de grafos é muito vasta. Deste modo, neste trabalho não se pretende ser-se exaustivo na análise da literatura, nem tão pouco fornecer uma amostragem representativa da ampla variabilidade de aplicações. Pretende-se somente ilustrar essa mesma variabilidade no âmbito de alguma literatura por nós estudada.

A complexidade da realidade física obriga frequentemente ao recurso a modelos simplificados quando se pretende resolver um problema concreto. Tais modelos permitem muitas vezes determinar uma solução para o problema em questão, ou pelo menos fornecem um enquadramento que possibilita o estabelecimento de estratégias de resolução. Em muitas situações os modelos matemáticos a que se recorre são grafos. Estes podem ser descritos como esquemas onde se utilizam pontos (ou vértices) ligados por linhas (ou arestas) para representar as relações estabelecidas no problema.

A extraordinária simplicidade dos grafos confere-lhes um grande poder de modelação de situações do nosso quotidiano, que permite resolver muitos problemas interessantes tratados na matemática atual. Uma rede de metro é um exemplo de uma

realidade física que pode ser esquematizada recorrendo a um grafo, onde os vértices representam as estações e as arestas as linhas existentes entre as mesmas. Assim, o problema de determinar a forma mais rápida de chegar de uma estação a outra, corresponderia na terminologia da teoria de grafos a encontrar o caminho mais curto entre dois vértices, através de algoritmos adequados.

É usual identificar-se a origem da teoria de grafos com a publicação, pela Academia das Ciências de St. Petersburg, de um artigo de Euler motivado pelo problema das sete pontes de Königsberg, em 1736, cf. [4]:

Problema das sete pontes de Königsberg

Este problema consistia em verificar se um habitante desta cidade poderia partir de um determinado local, percorrer exatamente uma vez cada ponte e regressar ao ponto de partida.

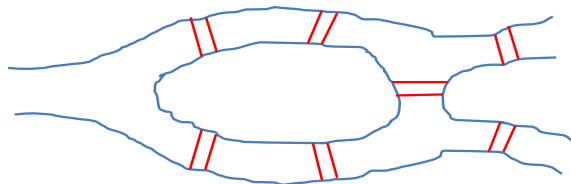


Fig. 1.1 – Representação das sete pontes de Königsberg.

Euler concluiu que tal não seria possível. A conclusão a que chegou tem por base um raciocínio que capta a essência do problema e coloca de lado tudo o que é acessório para o mesmo: pode desenhar-se um esquema recorrendo a quatro pontos A, B, C e D, que correspondem às quatro partes em que o rio que atravessa a cidade a divide, e unir esses pontos com curvas que representam as pontes (ver figura 1.2).

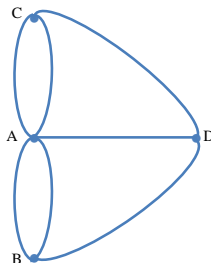


Fig. 1.2 – Grafo representativo do problema das pontes de Königsberg.

O raciocínio proposto por Euler encontra-se ilustrado na figura 1.2. Facilmente se verifica que o problema dado é equivalente ao seguinte:

“Partindo de um dos quatro pontos, será possível traçar um percurso que englobe todas as curvas uma única vez, regressando depois ao ponto de partida?”

Euler demonstrou que se isso fosse possível, então o número de arestas do grafo (pontes da cidade) ligadas a cada vértice do grafo (partes da cidade) deveria ser par, isto porque, nesse caso, cada parte da cidade deveria ter, no mínimo, uma ponte para entrar e outra ponte diferente para sair.

Este exemplo, que pertence à classe de problemas do tipo do carteiro chinês, é um exemplo clássico da teoria de grafos, que tem como outros exemplos a classe de problemas do tipo do caixeiro-viajante, o problema das quatro cores, o lema dos apertos de mão ou o problema do cavalo do jogo de xadrez. Note-se que estes dois últimos problemas também foram abordados por Euler, cf. [5].

Incluimos de seguida uma breve descrição destes problemas clássicos:

Problema do carteiro chinês

Nos problemas desta classe, o objetivo é percorrer todas as arestas uma única vez. Quando isso não for possível, pretende-se encontrar o menor percurso, ou seja, o percurso que repete menos arestas.

Este tipo de problemas foi enunciado pela primeira vez pelo matemático chinês Meigu Guan, em 1962, cf. [6].

Problema do caixeiro viajante

Pretende-se, a partir de um vértice genérico, visitar todos os restantes vértices uma única vez e regressar ao vértice inicial percorrendo a menor distância (medida pela soma dos pesos das arestas) possível.

Problema das quatro cores

Em 1852 foi formulado o problema de determinar o número mínimo de cores necessárias para colorir mapas de modo a que países ou regiões com fronteiras em comum pudessem ser pintados com cores diferentes. Este problema esteve na origem de um grande número de trabalhos de investigação sobre grafos, cf. [6].

O teorema das quatro cores estabelece que não são necessárias mais de quatro cores para colorir um mapa, de modo que regiões adjacentes sejam pintadas com cores diferentes.

Problema do cavalo do jogo de xadrez

Este problema, que tem várias soluções, foi objeto de investigação de diversos matemáticos para além de Euler durante o século XIX, cf. [5], podendo ser formulado do seguinte modo:

“Será possível movimentar o cavalo do jogo de xadrez de forma a visitar todas as casas do tabuleiro uma só vez e regressar ao ponto de partida?”

Lema dos apertos de mão

O lema dos apertos de mão poderá ser enunciado da seguinte forma:

“Se um grupo de amigos se cumprimentar com um aperto de mão sempre que há um encontro, então o número de amigos que apertam a mão um número ímpar de vezes é par.”

O problema pode ser formulado recorrendo à terminologia da teoria de grafos. Para demonstrar este resultado, basta mostrar que num grafo, o número de vértices de valência (número de arestas que incidem num determinado vértice) ímpar é par. Optamos por incluir esta demonstração por ser simples e em simultâneo ilustrativa do formalismo matemático da teoria de grafos.

Demonstração:

Sabemos que a soma total das valências dos vértices de um grafo é igual ao dobro do número de arestas, pois cada aresta incide em dois vértices.

$$\text{Temos, então: } \sum_{x_p \in G} v(Gx_p) + \sum_{x_i \in G} v(Gx_i) = 2|A|.$$

Onde,

- $|A|$ - Dimensão do grafo G
(número de arestas do grafo $G = (V,A)$, com V - conjunto dos vértices do grafo G e A - conjunto das arestas do grafo G);
- $v(Gx)$ - Valência do vértice x do grafo G ;
- x_p - Vértice de valência par; x_i - Vértice de valência ímpar.

Modelação de Problemas Utilizando a Teoria de Grafos: uma aplicação ao estudo da gestão do material circulante numa rede metropolitana.

$\sum_{x_p \in G} v(Gx_p)$ é par, pois a soma de n números pares (valências dos vértices x_p) é ainda um número par.

Assim, $\sum_{x_i \in G} v(Gx_i)$ é também par, pois a soma de um número par [neste caso $\sum_{x_p \in G} v(Gx_p)$] com um número ímpar, daria um número ímpar.

Como a soma total das valências dos vértices de valência ímpar [$\sum_{x_i \in G} v(Gx_i)$] é par, podemos concluir que existe um número par de vértices de valência ímpar.

Embora se considere que Euler deu início à teoria dos grafos em 1736, a maioria dos problemas supra referidos é mais recente. Na verdade, apenas dois séculos após a publicação do referido artigo de Euler, surgiu o primeiro livro de teoria de grafos, da autoria do matemático húngaro Denes König, intitulado *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen*, cf. [7]. König dedicou toda a sua vida como professor e investigador à teoria de grafos. Em 1936 escreveu um tratado sobre grafos, cf. [6], que contribuiu bastante para divulgação do tema. Não tendo conseguido solucionar o problema das quatro cores, contribuiu, contudo, para a resolução de muitos outros.

Também no século XX, Paul Erdős, William Tutte, Frank Harary e Edsger Dijkstra, com as suas pesquisas e os seus livros, contribuíram significativamente para o crescimento, aperfeiçoamento e divulgação da teoria de grafos. O primeiro destacou-se na formulação de problemas. Por outro lado, William Tutte, com os seus numerosos artigos e livros, contribuiu, também, para o desenvolvimento da teoria de grafos. No que diz respeito a Frank Harary, que mereceu o *petit nom* de “*Mr. Graph Theory*”, é considerado como o grande impulsionador da teoria moderna de grafos. Ainda hoje, o seu livro *Graph Theory*, de 1969, é tido como a obra de referência de maior relevo sobre o tema. Harary aplicou a teoria de grafos em áreas muito diversificadas: Matemática, Física, Ciências da Computação, Linguística, Geografia, Antropologia e Música, entre outras.

A partir de 1970 a evolução crescente das ciências da computação impulsionou um incremento significativo das publicações na área da teoria de grafos, cf. [7].

Modelação de Problemas Utilizando a Teoria de Grafos: uma aplicação ao estudo da gestão do material circulante numa rede metropolitana.

Aparecem assim associados a esta teoria diversos algoritmos, dos quais destacamos os algoritmos do vizinho mais próximo, do peso das arestas, de Kruskal, de Prim e o mais famoso de todos, o algoritmo de Dijkstra.

Note-se que muitas situações do nosso quotidiano poderão ser modeladas recorrendo à teoria dos grafos. Exemplificando, em projetos de arquitetura é importante construir o grafo de acessibilidades entre divisões, para se determinar o número de andares que uma determinada construção deverá conter. Se esse grafo não for planar (um grafo diz-se planar quando as arestas só se cruzam em vértices) deverão ponderar-se soluções que contemplem vários andares, caso contrário será possível encontrar uma solução numa única planta. Outro exemplo de ordem prática, embora aplicável a um problema bem antigo, foi discutido em 2004 por Stephen Benecke, [8].

Trata-se do problema clássico de gestão de recursos humanos do imperador Constantino (274-337 D. C.). Este tinha à sua disposição 4 exércitos para proteger qualquer uma das oito regiões do seu império, tendo em simultâneo que atender a diversas considerações: a colocação de um exército numa determinada região garantia a defesa dessa região; uma região ocupada por dois exércitos garantia a defesa dessa região e de uma outra que lhe fosse adjacente; duas regiões não podiam ser atacadas simultaneamente (desta forma, quando um exército fosse obrigado a movimentar-se para defender uma região vizinha, a região de onde saiu não ficaria desprotegida).

O grafo seguinte mostra que nessas condições eram necessários, no mínimo, 4 exércitos para defender o império romano, colocando um exército em cada um dos vértices (regiões) v_1 e v_5 e dois exércitos em v_3 .

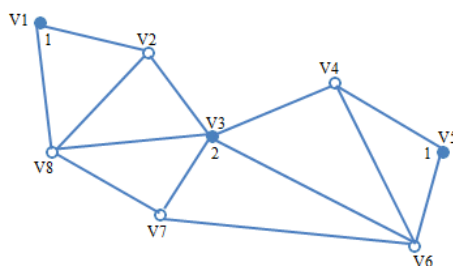


Fig. 1.3 – Grafo representativo do problema do Império Romano.

Modelação de Problemas Utilizando a Teoria de Grafos: uma aplicação ao estudo da gestão do material circulante numa rede metropolitana.

Também Wynand Winterback, [9], em 2005, utilizou grafos para descrever um outro problema clássico.

Este problema consiste em determinar o número mínimo de cruzamentos entre os carris de um pequeno comboio destinado ao transporte de tijolos, desde os fornos onde são fabricados até aos locais de armazenamento. A pertinência deste problema prende-se com o facto de haver uma probabilidade elevada de, durante a viagem, as rodas do comboio saltarem dos carris sempre que há um cruzamento de linhas. Considerando os fornos e os armazéns como vértices e sendo as ligações por carris entre forno e armazém, as arestas, é possível modelar este problema utilizando a teoria de grafos e determinar o número mínimo de cruzamentos. Na figura 1.4 temos duas soluções possíveis:

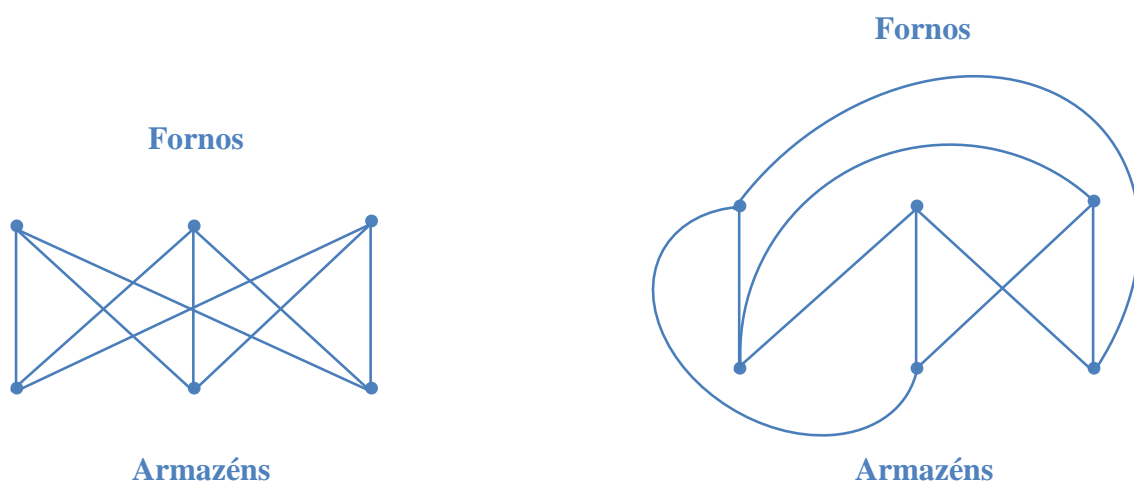


Fig. 1.4 – Grafos representativos do problema da fábrica de tijolos.

Há diversos trabalhos bem recentes de aplicação da teoria dos grafos. Apenas em Portugal, não sendo exaustivos, podemos listar alguns exemplos:

Em 2006, Domingos Silva, [10], utilizou alguns princípios da teoria de grafos na representação e análise da rede de transportes de Guimarães. Susana Caldas, [11], em 2007, serviu-se da otimização em grafos para proceder à modelação de redes sócio tecnológicas. Também Joanne Laranjeiro, [12], em 2008, usou a teoria de grafos no seu

estudo sobre os contributos para a análise e caracterização de interações em fóruns de discussão online. Ainda em 2008, Bruno Oliveira, [13], desenvolveu um processo de construção semi automático das diversas auto estradas que a Brisa possui, onde faz referência, também, à utilização de grafos.

1.2 PLANEAMENTO FERROVIÁRIO

No passado e durante várias décadas, um dos indicadores do nível de desenvolvimento de um país era a densidade da sua rede ferroviária. Atualmente, as economias dos países dependem, em grande escala, do transporte de passageiros e mercadorias, cf. [14]. Neste contexto, as empresas ferroviárias confrontam-se com uma grande e em geral crescente concorrência. Os caminhos de ferro viram fugir uma parte expressiva dos seus clientes para os transportes rodoviários. Também o tráfego aéreo desviou muitos passageiros dos comboios. Por este motivo e com o intuito de atrair clientes, os operadores ferroviários viram-se obrigados a aumentar a qualidade dos serviços e, em simultâneo, a diminuir os custos, procurando assim uma maior eficiência, que proporcionasse padrões elevados de conforto a preços mais baixos. Tal implica não só uma melhoria do material circulante, mas também um melhor planeamento de serviços. Este último determina em grande parte a eficiência das empresas ferroviárias; se no passado era abordado de uma forma intuitiva, atualmente investe-se cada vez mais na automatização e otimização dos serviços, cf. [14,15]. Destacamos a importância do planeamento do tempo de vida útil do material circulante, a sua manutenção e custos consequentes, a previsão da procura, o ajustamento da oferta e ainda despesas com pessoal, como algumas variáveis fundamentais para a eficaz rentabilização do transporte ferroviário, cf. [16,17].

Como veremos na secção 2.1 de forma mais pormenorizada, o planeamento ferroviário poderá incidir sobre os horários, sobre o material circulante ou mesmo sobre as tripulações, entre outros aspetos. No caso dos horários, aquilo que se pretende otimizar diz respeito aos locais onde os comboios deverão ser ligados e aos momentos em que deverão circular. Deverá determinar-se, relativamente ao material circulante, o

Modelação de Problemas Utilizando a Teoria de Grafos: uma aplicação ao estudo da gestão do material circulante numa rede metropolitana.

número de locomotivas e de carruagens necessárias e o modo como estas deverão ser distribuídas e usadas nos comboios. Quanto ao planeamento das tripulações, este geralmente diz respeito aos números de maquinistas e de outros funcionários necessários para a prestação dos serviços, e ao modo como se deverão distribuir pelos comboios. Mas devemos ter em conta que os problemas subjacentes aos diferentes planeamentos têm características muito diferentes. Enquanto os horários estabelecem apenas os períodos de tempo destinados ao fornecimento de cada um dos serviços da rede ferroviária, tendo em conta a procura, de acordo com a hora e o dia em que são prestados, a gestão das tripulações e o planeamento do material circulante dependem e estão subordinados aos recursos disponíveis. Há ainda a considerar que as unidades circulantes apresentam limitações muito específicas, podendo mesmo inviabilizar determinadas ligações ou serviços, sendo a tripulação bastante mais flexível, pois pode deslocar-se facilmente entre linhas, embora também tenha limitações particulares e por vezes difíceis de prever, cf. [14,18].

Por tudo o que foi dito até ao momento, podemos concluir que os dois principais objetivos da planificação do material circulante de uma rede ferroviária são melhorar a qualidade dos serviços prestados e reduzir os custos. Um serviço de boa qualidade deverá ser capaz de atrair novos passageiros, evitando, simultaneamente, o abandono dos seus clientes habituais. Se os serviços apresentarem uma elevada qualidade, então as pessoas sentir-se-ão motivadas para utilizar o comboio, em alternativa aos transportes rodoviários, públicos ou privados, por regra muito mais poluentes, e que, nas grandes cidades, provocam grandes congestionamentos no trânsito, cf. [18,19]. Reveste-se assim de particular importância a prevenção e minimização de atrasos de transportes ferroviários, bem como a gestão dos consequentes efeitos negativos, com a ajuda de um bom planeamento do material circulante, cf. [16,17].

A atenção que os problemas relacionados com o planeamento ferroviário despertam nos investigadores matemáticos não é recente. Muitos desses problemas são de carácter combinatório, onde a investigação operacional exerce um papel preponderante. Nos últimos anos, tem-se assistido ao desenvolvimento de programas de computador especialmente criados para a melhoria da gestão ferroviária. Para o sucesso da aplicação dos mesmos, muito contribuiu o incremento exponencial das capacidades

dos computadores. No entanto, tendo em conta as exigências de complexidade de modelos e o correspondente grande número de variáveis a considerar, as ferramentas atualmente existentes poderão ser insuficientes para abranger todas as exigências de planeamento. Problemas cada vez mais complexos levam a maiores necessidades de investigação, ao aperfeiçoamento das aplicações já existentes e ao aparecimento de outras, cf. [20,21].

1.3 PROBLEMAS DE ROLLING STOCK

Neste trabalho de investigação é abordado o problema particular da gestão de material circulante de uma rede ferroviária, que na literatura de origem inglesa se designa por problema de *rolling stock*.

Rolling stock é a designação atribuída ao material (locomotivas, carruagens ou vagões) que circula em linhas de caminho de ferro ou metropolitanas. Como já foi referido, uma das principais despesas das empresas ferroviárias, provém, precisamente, do material circulante. A sua gestão cuidada e rigorosa é essencial pelo impacto que tem a nível financeiro e também para um cumprimento adequado dos serviços programados em cada linha, tenham eles a ver com o transporte de passageiros, ou com o transporte de mercadorias.

O ponto de partida para um problema de *rolling stock* é o conhecimento das linhas ferroviárias, a definição dos serviços a prestar, os tipos de composições que deverão percorrer as linhas, respetivos horários e demais especificações. A resolução de um problema deste tipo consiste na minimização de custos relacionados com a alocação do material circulante necessário à prestação dos serviços programados e consequente minimização do número de comboios imprescindíveis à realização dos serviços previstos nas condições pretendidas.

Um dado fundamental do problema é a possibilidade de se acrescentar ou retirar carruagens ou vagões aos comboios em determinadas estações. Para além disso, é essencial definir os locais onde será colocado o material circulante fora do tempo de serviço, tendo em conta as estações preparadas para o efeito. De facto, devido às

Modelação de Problemas Utilizando a Teoria de Grafos: uma aplicação ao estudo da gestão do material circulante numa rede metropolitana.

limitações de espaço das estações, nem sempre a localização onde o material circulante deverá iniciar o serviço no início da janela temporal, coincide com aquela disponível para o guardar. Acresce como dificuldade à modelação destes problemas a necessidade de estabelecimento de um plano de manutenção para o material circulante, que deverá ser recolhido e inspecionado após um determinado número de dias ou de quilómetros percorridos. A inclusão de estações destinadas à manutenção torna estes problemas ainda mais complexos. Ao longo deste relatório serão discutidas outras considerações importantes para uma boa modelação do problema. Nesta secção restringimo-nos ao exemplo simples ilustrado na figura 1.5. Nesta, apresenta-se um grafo que, após a introdução de mais alguns elementos que por ora omitimos, permite ilustrar o problema da determinação do número mínimo de comboios necessários à prestação de dois serviços, no sentido que referimos anteriormente.

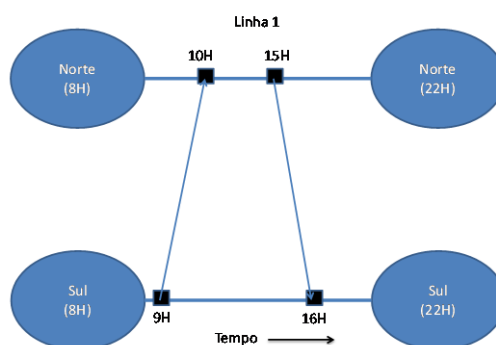


Fig. 1.5 – Grafo representativo da prestação de dois serviços.

Consideremos duas estações, a que chamaremos estação Norte e estação Sul. O horário de funcionamento de cada uma das estações será, neste exemplo, entre as 8 e as 22 horas. No grafo da figura 1.5 encontram-se representadas por quatro vértices as estações, no momento de abertura e no momento do fecho. Para além disso, unem-se com linhas horizontais os dois vértices que representam cada estação. Estas linhas são apenas auxiliares, pretendendo representar a evolução do tempo em cada estação. É sobre estas linhas que se incluem os restantes vértices, que representam os momentos de chegada ou partida de comboios à estação respetiva. Assim, a linha inclinada para a

Modelação de Problemas Utilizando a Teoria de Grafos: uma aplicação ao estudo da gestão do material circulante numa rede metropolitana.

direita, com uma seta a apontar para cima, que parte do vértice etiquetado com 9 horas e chega ao vértice etiquetado com 10 horas, representa o trajeto de um comboio que sai da estação Sul e chega à estação Norte nas horas indicadas. De forma análoga, a linha com uma seta a apontar no sentido Norte-Sul representa um comboio que parte da estação Norte às 15 horas e chega à estação Sul às 16 horas. Às duas arestas representadas por linhas inclinadas chamamos serviços.

Na resolução do problema deste exemplo e dos restantes apresentados neste relatório, teremos em conta que movimentos noturnos, definidos como movimentos de comboios fora do horário de abertura, são indesejáveis. Para além disto, também será de evitar que comboios iniciem os seus serviços muito após o horário de abertura: tanto quanto possível, os comboios disponíveis deverão ser utilizados ao máximo. Estes dois aspetos são pontos cruciais do modelo que propomos para a resolução de problemas de *rolling stock*.

No caso concreto dos serviços representados na figura 1.5, cada serviço poderá ser efetuado por um comboio distinto que, findo o serviço, permanece na estação de destino até ao encerramento da mesma. Alternativamente, o comboio que assegura o serviço Sul-Norte poderá efetuar o serviço Norte-Sul, visto que terá 5 horas de permanência na estação, que deverão ser suficientes para tratar dos aspetos logísticos envolvidos na inversão de marcha de um comboio. Esta segunda alternativa economiza no número de composições.

Há ainda a considerar o aspeto da possibilidade de permanência dos comboios nas estações. Nem sempre uma estação permite que um comboio nela pernoite, ou então tem um número limitado de comboios que poderá albergar. Por essa razão ou por outras conveniências, terão de se considerar as possíveis movimentações de comboios sem passageiros durante o horário de encerramento das estações, os já referidos movimentos noturnos. Estes, bem como as possibilidades para um determinado comboio quando está numa estação (permanecer na mesma, inverter o sentido da marcha, etc.), deverão ser representados no grafo por arestas adicionais. Tal será feito, para outros exemplos, no capítulo 3.

Resumindo, em problemas de *rolling stock* pretende-se planear uma circulação apropriada do material circulante, minimizando o número de quilómetros a realizar em

vazio, bem como o tempo de permanência dos comboios nas estações, tornando assim também reduzido o número de composições necessárias para assegurar os serviços.

1.4 ESQUEMA DO RELATÓRIO

No primeiro capítulo deste relatório é feita uma apresentação sucinta da história da teoria de grafos. Referem-se de seguida alguns aspetos relacionados com a gestão de frota de transportes ferroviários. Seguidamente, estabelece-se uma ligação entre problemas de *rolling stock*, que se podem enquadrar matematicamente no âmbito da teoria de grafos, e esta teoria. Conclui-se com a atual descrição resumida dos conteúdos deste relatório.

Dá-se início ao segundo capítulo com a definição das fases que normalmente são consideradas na análise dos problemas de transporte ferroviário. É concedida especial atenção ao tema central deste relatório, o estágio da gestão do material circulante. Faz-se a revisão de alguma literatura existente, relacionada com os problemas de *rolling stock*. Na última secção deste capítulo, introduz-se o problema baseado na rede do metro do Porto que nos propomos analisar.

No terceiro capítulo são introduzidas notações específicas, de forma a permitir e a facilitar a modelação de problemas de *rolling stock*. Serão considerados três problemas, um por secção: o primeiro pretende ilustrar alguns aspetos típicos de uma abordagem de teoria de grafos a um problema de *rolling stock*, recorrendo para tanto a um exemplo muito simples de um problema de uma linha que oferece três serviços; no segundo exemplo consideramos duas linhas, que oferecem um número total de sete serviços, o que permite introduzir toda a notação necessária para a resolução do problema central deste relatório; este último problema, inspirado na rede de metro do Porto, é apresentado na secção final deste capítulo.

No quarto capítulo são apresentadas e discutidas as soluções dos três problemas formulados no capítulo anterior.

No quinto capítulo apresenta-se uma reflexão final sobre o trabalho de investigação realizado. São ainda apresentadas algumas sugestões para trabalho futuro.

CAPÍTULO II

DESCRIÇÃO DO PROBLEMA

A gestão de uma rede ferroviária engloba diferentes aspetos, que discutiremos neste capítulo. É concedida especial atenção ao estágio da gestão do material circulante. Fazemos uma revisão sobre a literatura matemática que versa sobre problemas de *rolling stock*. Finalmente, na última secção deste capítulo, definiremos o problema central desta dissertação, baseado na rede do metro.

2.1 GESTÃO DE UM SERVIÇO FERROVIÁRIO

Os problemas de planeamento de transportes ferroviários podem ser perspectivados de diferentes maneiras. Estas serão tipificadas hierarquicamente no que se segue, cf. [22,23,24]:

Desenho de redes

O primeiro passo na implementação de uma rede ferroviária reside no estabelecimento da rede de linhas, que tipicamente se denomina por “desenho de redes”. Este deverá ser pensado de forma a dar resposta à procura dos passageiros e a considerações de teor financeiro, político ou outras. Trata-se de um planeamento a longo prazo; assim sendo, os grandes investimentos necessários aconselham cautela e obrigam a não comprometer eventuais futuras expansões da rede.

Modelação de Problemas Utilizando a Teoria de Grafos: uma aplicação ao estudo da gestão do material circulante numa rede metropolitana.

Desenho de linhas

As linhas que farão parte da rede ferroviária devem ser definidas com rigor, em termos das estações de origem, estações de chegada e estações intermédias, de forma a dar resposta à procura global prevista entre estações.

Desenho de serviços

É necessário definir o número e o tipo de serviços que se deverão oferecer em cada linha. Uma empresa ferroviária poderá disponibilizar, numa mesma linha, pelo menos dois tipos de serviços: um serviço normal que efetue paragens em todas as estações e um serviço expresso, mais rápido, em que os comboios param apenas em algumas estações. Em determinadas situações, é possível oferecer serviços que não se iniciam nem na primeira nem na última estação de uma linha. É usual considerarem-se também serviços de diferentes categorias, tendo em conta padrões de qualidade distintos.

Horários (*Timetabling*)

É fundamental determinar os horários dos diferentes serviços, o chamado *timetabling*. A definição dos horários torna-se mais complicada quando, na mesma linha, se tem de considerar aspetos como o cruzamento de comboios que circulem em sentidos opostos ou a ultrapassagem entre comboios que circulem com velocidades substancialmente diferentes no mesmo sentido.

Gestão do material circulante (*Rolling Stock*)

Uma vez conhecidas as linhas, os serviços e os horários, torna-se necessário determinar quais são as locomotivas, as carruagens e, possivelmente, os vagões que deverão assegurar a prestação de cada serviço, bem como as suas características. É relevante também o número de carruagens a colocar em cada composição, bem como a

Modelação de Problemas Utilizando a Teoria de Grafos: uma aplicação ao estudo da gestão do material circulante numa rede metropolitana.

disposição das mesmas em comboios de passageiros, ou seja, a ordem por que deverão ser colocadas carruagens de primeira e segunda classes, ou até, se for esse o caso, carruagens-bar, carruagens com WC ou com alguma característica específica. Deverão ser definidas as estações onde se podem juntar ou separar diferentes unidades de um comboio, onde estes podem permanecer durante a noite, bem como, que viagens devem efetuar em horário noturno. Estas últimas são necessárias para posicionar os comboios para que seja possível prestar os serviços agendados para o dia seguinte, mas implicam custos para o gestor da rede.

Geralmente, uma rede ferroviária é constituída por várias linhas, cada uma com os seus serviços, aos quais são atribuídos comboios com determinadas capacidades. Cada comboio percorrerá uma linha, em ambos os sentidos, um determinado número de vezes durante o dia. Contudo, determinada composição poderá percorrer uma linha e, quando chegar ao final da mesma, assegurar um serviço de uma linha diferente. Portanto, as idas e os regressos podem ser feitos por composições diferentes, o que também deverá ser previsto.

Denomina-se, na literatura inglesa, por *rolling stock* o material circulante nas redes ferroviárias. A gestão do mesmo consiste em assegurar uma resposta eficiente aos serviços programados mantendo os custos controlados.

Em particular, existe o problema de calcular o número de comboios necessários para atender aos serviços desenhados. Para além disso, importa contabilizar o número de quilómetros percorridos por cada locomotiva e cada carruagem, que em geral é determinante para a previsão do momento em que se deverá fazer a manutenção desse material. Pelo exposto, os problemas de *Rolling Stock* são muito complexos, especialmente se for considerada essa manutenção, que normalmente deve ser feita em lugares específicos (certas estações que disponham de instalações especiais).

Gestão dos turnos de trabalho

É essencial a determinação de turnos de trabalho, para a qual se deverá atender às necessidades dos diferentes serviços e dos trabalhadores, bem como a aspetos legais.

Gestão do pessoal

Os maquinistas e outros funcionários terão de ser distribuídos por turnos, atendendo às suas necessidades e aspirações pessoais e a conveniências do serviço.

2.2. REVISÃO DA LITERATURA RELACIONADA COM PROBLEMAS DE ROLLING STOCK

Nos últimos anos, têm sido tratados vários problemas relacionados com a gestão de material circulante. Os artigos disponíveis na literatura abordam problemas de *rolling stock* em diversas variantes, cada uma com as suas próprias particularidades. À semelhança do que foi dito relativamente à literatura da teoria de grafos, também no caso da literatura relacionada com os problemas de gestão de *rolling stock*, apesar de ser bem mais escassa, não há a intenção de se ser exaustivo na análise e descrição da literatura existente. Pretende-se somente mostrar alguma da diversidade dessa literatura e contextualizar o presente trabalho.

Canca, J. et. al, [22,23,24], estudaram problemas de *rolling stock* em redes metropolitanas espanholas.

Ben-Khedher et al., [25], estudaram o problema de alocação de unidades de comboios franceses de alta velocidade.

Schriver, A., [26], considerou o problema de minimização do número de comboios de diferentes tipos numa linha. Neste caso, a única condição à realização de dois serviços consecutivos era a disponibilidade de comboios. O modelo proposto não considera a ordem das unidades circulantes nas composições.

Alfieri, A. et. al, [18] e Groot, R., [20], descreveram um modelo para determinar a circulação de unidades de comboio de diferentes tipos, numa única linha, e consideraram, também, a ordem segundo a qual essas unidades circulantes deverão ser colocadas nas composições.

Modelação de Problemas Utilizando a Teoria de Grafos: uma aplicação ao estudo da gestão do material circulante numa rede metropolitana.

Fioole, P. et. al, [27], apresentaram um modelo para resolver um problema que permite a separação e a combinação de unidades circulantes.

Brucker, J. et. al, [28], estudaram o reposicionamento das carruagens de uma estação para a outra, considerando a formação dos comboios, ou seja, a localização de unidades com diferentes características, previamente fixada.

Cordeau, J. et. al, [29], abordaram um problema relacionado com as diferentes constituições dos comboios, tendo em conta também distintos troços de uma linha. Neste caso, um grupo de unidades compatíveis, fossem elas locomotivas ou carruagens de primeira ou de segunda classe, podiam deslocar-se apenas ao longo de uma parte da via ferroviária. No modelo considerado era possível também alterar a formação dos comboios.

Cordeau, J. et. al, [30], alargaram o modelo considerado em [29], de forma a contemplarem um maior número de restrições, nomeadamente as relacionadas com a manutenção do material circulante.

Lingaya, N. et. al, [31], propuseram um modelo que tem em conta o número esperado de passageiros e a conseqüente necessidade de retirar ou de adicionar carruagens em alguns locais de determinadas linhas, bem como a ordem segundo a qual estas deverão ser colocadas nos comboios. Estes autores consideraram outras limitações que frequentemente acontecem na realidade dos caminho de ferro, tais como requisitos relacionados com a manutenção de todo o material circulante.

Abbink, E. et al, [21], apresentaram um modelo que pretende minimizar a escassez de material circulante durante as horas de ponta. Esse modelo considera a atribuição de material circulante com diferentes capacidades, de acordo com a variação da procura ao longo do dia.

Van Monfort, [32], apresentou um modelo cujo objetivo é minimizar o número de locomotivas, carruagens e vagões e o número de quilómetros que percorrem. Este modelo tem em consideração carruagens de primeira e de segunda classe e a ordem que podem ocupar nas composições.

Modelação de Problemas Utilizando a Teoria de Grafos: uma aplicação ao estudo da gestão do material circulante numa rede metropolitana.

2.3 DADOS DO PROBLEMA

Nesta secção iremos definir o problema principal que este relatório pretende discutir. Para tal, teremos de caracterizar a rede de metropolitano a modelar. Consideraremos apenas questões relacionadas com o material circulante, partindo do conhecimento das diferentes linhas da rede, dos horários de saída e de chegada nas diferentes estações e das estações onde os comboios podem permanecer durante a noite. Assumiremos que, nessas estações, não há limitação relativamente ao número de comboios que aí podem pernoitar. Pressupomos também que os comboios têm todos a mesma tipologia e que não se podem movimentar sem passageiros durante o período diurno. No fim desta secção, listamos várias simplificações que assumimos.

Pretende-se com o presente problema ilustrar uma situação real, usando informações da empresa Metro do Porto (ver anexo D). Consideraremos somente três linhas da rede:

- A linha Azul, ou linha A, entre o Estádio do Dragão e Senhor de Matosinhos, com uma extensão de 15,6 km, constituída por 23 estações.
- A Linha Amarela, ou linha D, que liga Santo Ovídio, em Gaia, ao Hospital de São João, no Porto. Ao longo dos 9,2 km desta linha existem 16 estações.
- A Linha Violeta, ou linha E, que faz a ligação entre o Estádio do Dragão e o Aeroporto, tem 21 estações, distribuídas ao longo de 16,7 km.

Modelação de Problemas Utilizando a Teoria de Grafos: uma aplicação ao estudo da gestão do material circulante numa rede metropolitana.

Na tabela 2.1 são apresentados, de forma abreviada, os horários dos comboios nas três linhas. São denotados como tendo sentido “UP” os serviços direccionados às estações de Senhor de Matosinhos, Hospital de São João e Aeroporto e sentido “DW” os serviços direccionados às estações do Dragão e de Santo Ovídio.

Linha		Nº de Serviços	1º Serviço (h:m)		Último Serviço (h:m)		Duração (em min.)	Frequência (em min.)	
Trabalho	Metro do Porto		UP	DW	UP	DW		Hora	Freq.
1	E (Roxa)	2×38	6:10	5:58	0:48	0:36	35	30	
2	A (Azul)	2×102	6:15	6:15	1:00	1:00	39	6-7	15
								7-20	10
								20-01	15
3	D (Amarela)	2×157	6:10	6:10	1:00	1:00	25	6-7	10
								7-20	6
								20-21	12
								21-01	15
TOTAL		594							

Tabela 2.1 – Dados do problema.

Modelação de Problemas Utilizando a Teoria de Grafos: uma aplicação ao estudo da gestão do material circulante numa rede metropolitana.

Na figura 2.2 encontram-se ilustrados os serviços das linhas E, A e D. Devido à densidade dos dados e para permitir uma melhor visualização, optou-se por não representar os dados correspondentes a viagens no sentido Norte-Sul cujo horário de partida excedesse as 16 horas.

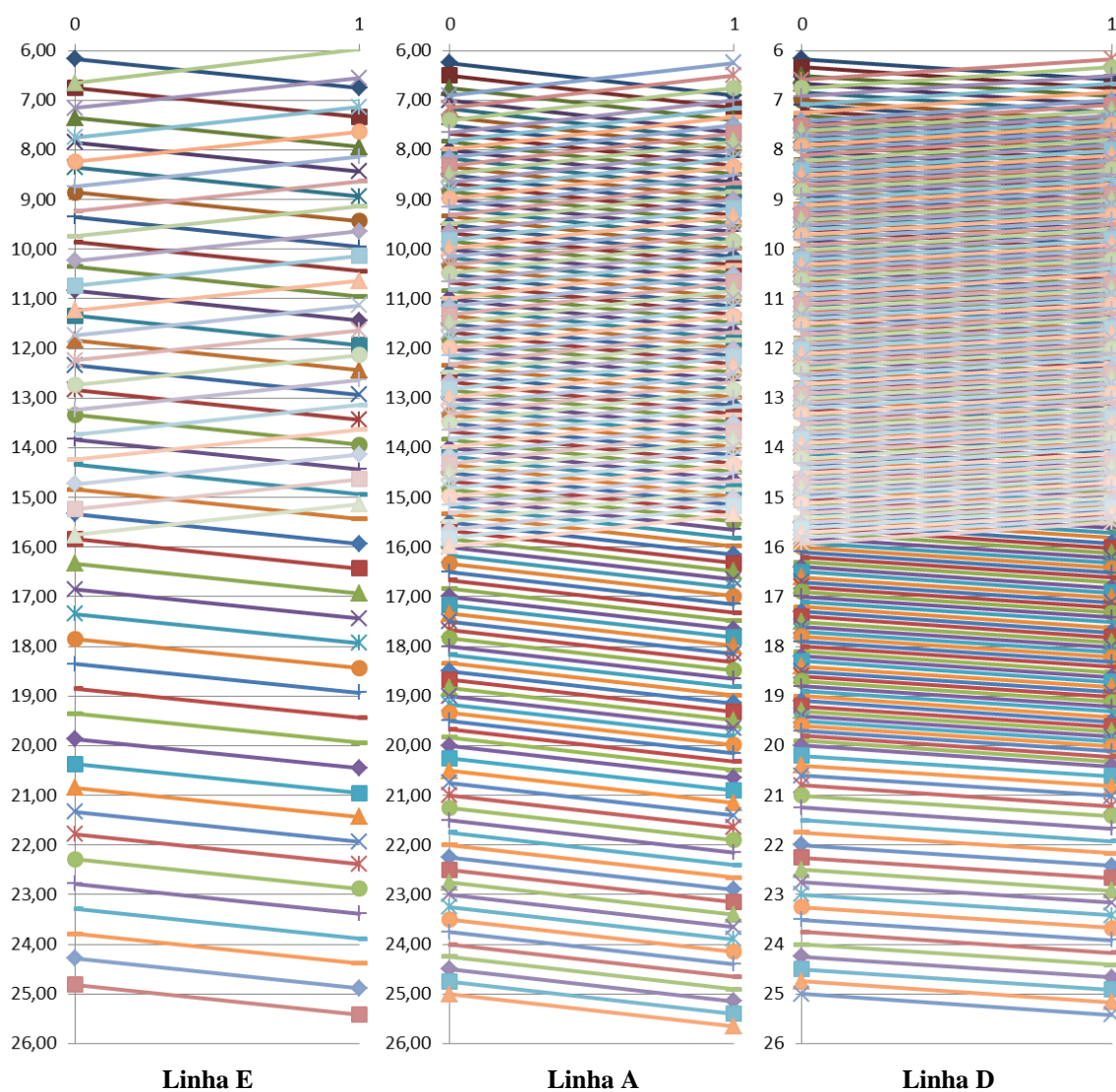


Fig. 2.1 – Grafos representativos dos serviços das linhas E, A e D do metro do Porto

Modelação de Problemas Utilizando a Teoria de Grafos: uma aplicação ao estudo da gestão do material circulante numa rede metropolitana.

Neste problema, consideramos que as estações do Aeroporto e de Santo Ovídeo não permitem o estacionamento de comboios durante a noite, pelo que se torna necessário encontrar alternativas eficazes. Esta é uma hipótese nossa que não foi retirada de dados reais, mas que servirá para efeitos de ilustração.

Necessitamos de mais um dado para poder analisar o problema. Recorde-se que pretendemos minimizar custos associados com deslocações em vazio. Importa portanto conhecer as distâncias entre estações, para poder estimar e comparar esses mesmos custos. Estas podem ser inferidas da tabela 2.2.

	Dragão (P)	Hospital de S. João (P)	S. de Matosinhos (P)
Aeroporto	34m 40s	37m 45s	32m 15s
S. Ovídeo	21m 40s	24m 45s	44m 5s

Tabela 2.2 – Tempos dos percursos entre as estações onde é possível depositar comboios e as estações onde não é possível fazê-lo.

Os dados aqui incluídos caracterizam a parte da rede ferroviária que pretendemos analisar neste relatório, ilustrativa da rede de metro do Porto. O modelo matemático que propomos para a resolução do problema resultante de minimização de custos na gestão do *rolling stock* será apresentado na secção 3.3. A respetiva solução encontra-se descrita na secção 4.2.3.

Sistematizamos de seguida as simplificações que consideramos na modelação do problema:

- Todos os serviços previstos são realizados, sem exceção ou imprevistos e de forma pontual;
- Durante o horário de abertura da rede não se realizam viagens em vazio;

Modelação de Problemas Utilizando a Teoria de Grafos: uma aplicação ao estudo da gestão do material circulante numa rede metropolitana.

- Durante o horário de abertura da rede, cada comboio realiza serviços numa única linha, podendo trocar de linha apenas durante o horário noturno;
- Os horários de cada linha são diários, não havendo alterações dos mesmos ao longo dos anos;
- Não existem limitações ao número de comboios que podem estar estacionados em simultâneo numa determinada estação;
- Não existem limitações relativamente ao número de comboios que podem pernoitar nas estações que permitem estacionamento noturno;
- Todos os comboios têm a mesma tipologia, ou esta é irrelevante;

CAPÍTULO III

MODELAÇÃO MATEMÁTICA

Neste capítulo são introduzidas notações específicas, de forma a permitir e a facilitar a modelação de problemas de *rolling stock*. Serão considerados três problemas, um por secção: o primeiro pretende ilustrar alguns aspetos típicos de uma abordagem da teoria de grafos a um problema de *rolling stock*, recorrendo para tanto a um exemplo muito simples de um problema de uma linha que oferece três serviços; no segundo exemplo consideramos duas linhas, que oferecem um número total de sete serviços, o que permite introduzir toda a notação necessária para a resolução do problema que pretendemos abordar neste relatório; este último problema é apresentado na secção final deste capítulo, sendo uma versão simplificada do problema de *rolling stock* do metro do Porto.

3.1. PROBLEMA DE UMA LINHA

Tipicamente, uma rede de metropolitano terá várias linhas e um grande número de serviços. Nesta secção, cujo objetivo é a descrição de problemas de *rolling stock* utilizando linguagem matemática apropriada, evitaremos a complexidade de uma situação realística. Recorreremos para tanto a um exemplo muito simples de uma rede com apenas uma linha e três serviços. Sem perda de generalidade, consideraremos que a linha tem dois sentidos, Sul-Norte e Norte-Sul, e às estações terminais da linha chamaremos a estação Sul e a estação Norte (ver figura 3.1).

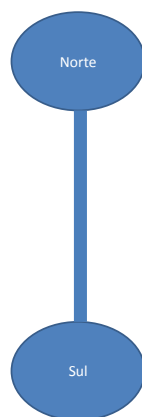


Figura 3.1 - Rede de metropolitano com apenas uma linha.

Quanto aos serviços realizados no horário oficial de funcionamento da rede, entre as 8 e as 22 horas, assumiremos que está prevista a deslocação de um comboio de Sul para Norte, que partirá da estação de origem às 9 horas e chegará à estação de destino às 10 horas. Está também prevista a deslocação de dois comboios de Norte para Sul. O primeiro partirá às 11 horas e chegará às 12 horas e o segundo partirá às 14 horas e chegará às 15 horas. Esta informação encontra-se esquematizada no grafo da figura 3.2.

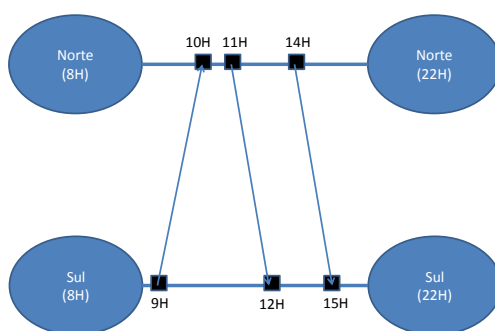


Figura 3.2 - Serviços da rede de metropolitano com apenas uma linha.

Representou-se cada uma das estações terminais nos instantes de abertura e de encerramento do horário de funcionamento, no lado esquerdo e no lado direito da figura, respetivamente. As linhas horizontais representam assim cada uma das estações

Modelação de Problemas Utilizando a Teoria de Grafos: uma aplicação ao estudo da
gestão do material circulante numa rede metropolitana.

ao longo do dia, com o decorrer das horas. Os três serviços previstos estão representados pelas setas entre as linhas horizontais, sendo possível a leitura do sentido em que o serviço se realiza e o horário de partida e de chegada do mesmo.

Foquemo-nos agora no problema da gestão do *rolling stock* desta rede de metropolitano. Pretendemos minimizar o número total de comboios que são necessários para assegurar os serviços previstos. Naturalmente, poderemos utilizar um comboio distinto para realizar cada um dos três serviços. Porém, talvez seja possível que o mesmo comboio realize mais do que apenas um serviço, o que se traduzirá numa economia.

Para a formulação do problema será útil completar o grafo da figura 3.2 e introduzir alguma notação. As estações consideradas nos vários momentos de chegada e partida de comboios, bem como na abertura e encerramento da rede ao público, serão os vértices do grafo. Quanto às arestas, que representam movimentos de comboios ou as suas permanências em estações, será necessário considerar outras para além das três já representadas. Começando porém por estas últimas, denotaremos por x_{11}^N , x_{11}^S e x_{12}^S (linha, serviço) o número de comboios que, na linha 1, fazem o primeiro serviço no sentido Sul-Norte, o primeiro serviço no sentido Norte-Sul e o segundo serviço no sentido Norte-Sul, respetivamente. Como cada serviço calendarizado deverá ser realizado por um único comboio, terá de se impor:

$$x_{11}^N = x_{11}^S = x_{12}^S = 1$$

Analisemos agora de onde provém e qual é o destino de cada um dos comboios que fazem os serviços (ver figura 3.3). Tomemos o comboio que, na linha 1, faz o primeiro serviço no sentido Sul-Norte, ao qual está associada a variável x_{11}^N . Sendo este o primeiro serviço do dia, o comboio terá de estar localizado na estação Sul no início do período de funcionamento da rede. Deste modo, o número i_{11}^N de comboios que, na linha 1, no instante $t=8h$ se encontram na estação e que farão o serviço 1 no sentido Sul-Norte terá de ser igual a 1. Porém, após fazer o serviço 1, o comboio poderá permanecer na estação Norte até ao instante final de funcionamento da rede e neste caso, o número f_{11}^S de comboios que fizeram o serviço 1 da linha 1 no sentido Sul-Norte e que

Modelação de Problemas Utilizando a Teoria de Grafos: uma aplicação ao estudo da gestão do material circulante numa rede metropolitana.

permanecem na estação até ao instante $t=22h$, será igual a 1. Em alternativa, o comboio poderá fazer o serviço número 1 da linha 1, no sentido Norte-Sul e, neste caso, o número y_{111}^{NS} de comboios da linha 1, provenientes do Sul, que farão esse mesmo serviço será igual a 1. Há ainda a considerar a possibilidade de o comboio fazer o serviço número 2 do sentido Norte-Sul, caso em que se terá $y_{112}^{NS}=1$.

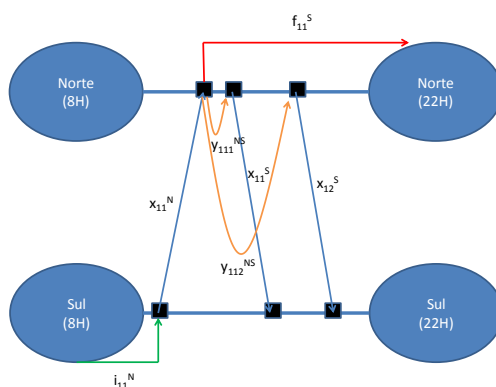


Figura 3.3 – Proveniência e possíveis destinos do comboio que parte da estação Sul.

Uma análise semelhante poderá ser realizada relativamente aos comboios que, na linha 1, fazem os serviços 1 e 2 no sentido Norte-Sul, associados às variáveis x_{11}^S e x_{12}^S , respetivamente (ver figura 3.4). O primeiro destes poderá provir da estação Norte (caso em que $i_{11}^S=1$) ou eventualmente será o comboio que efetuou o serviço 1 no sentido Sul-Norte (caso em que $y_{111}^{NS}=1$). Finalmente, não terá alternativa a ficar na estação Sul até findar o horário de abertura da linha (logo, tem-se $f_{11}^N=1$). De forma análoga, o comboio que fará o segundo serviço Norte-Sul poderá ter permanecido desde as 8 horas na estação Norte ($i_{12}^S=1$) ou talvez seja o mesmo comboio que efetuou o serviço 1 no sentido Sul-Norte (de onde vem que $y_{112}^{NS}=1$). Também não terá alternativa a permanecer até às 22 horas na estação Sul ($f_{12}^N=1$).

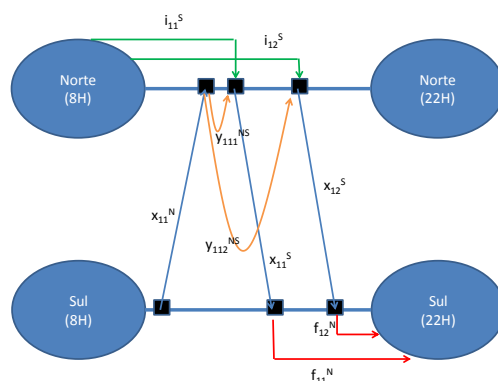


Figura 3.4 – Possíveis proveniências e destinos dos comboios que partem da estação Norte.

Todos os movimentos de comboios descritos até agora são realizados durante o dia, com ou sem passageiros. Para além destes, é importante considerar também o que acontece a cada comboio durante o período noturno, isto é, o período que decorre das 22 horas de um dia até às 8 horas do dia seguinte, em que a rede se encontra encerrada ao público. Distinguímos entre duas situações: os comboios que, encontrando-se numa estação às 22 horas, nela permanecem até às 8 horas do dia seguinte e os comboios que se deslocam durante a noite de uma estação para a outra, (ver figura 3.5). Denotaremos por p_1^S e p_1^N o número de comboios da linha 1 que permanecem durante o período noturno, na estação Norte e na estação Sul, respetivamente. Ficarão assim em condições de efetuarem os serviços previstos para o dia seguinte, nos sentidos Norte-Sul e Sul-Norte, respetivamente. Quanto ao número de comboios que nesse período se deslocam da estação Norte para a estação Sul e o número de comboios que se deslocam da estação Sul para a estação Norte, serão denotados por d_{11}^{NS} e d_{11}^{SN} , respetivamente.

Eventualmente, poderá haver alguma estação onde os comboios não possam permanecer durante o período noturno, já que nem todas as infraestruturas estarão preparadas para esse efeito. Recorreremos à variável e_1^N para indicar se a estação Norte permite a permanência de comboios durante a noite. Esta variável será igual a 1 caso tal seja possível e igual a zero caso contrário. De forma análoga $e_1^S=1$ indica que a estação Sul permite estacionamento noturno, enquanto $e_1^S=0$ indica o contrário. Neste exemplo consideraremos que ambas as estações permitem o estacionamento de comboios, ou seja, $e_1^S = e_1^N=1$.

Finalmente, denotaremos por Δ_t o intervalo de tempo necessário para que um comboio possa inverter o sentido da sua marcha. No caso particular deste exemplo, irá assumir-se que $\Delta_t = 0,1$.

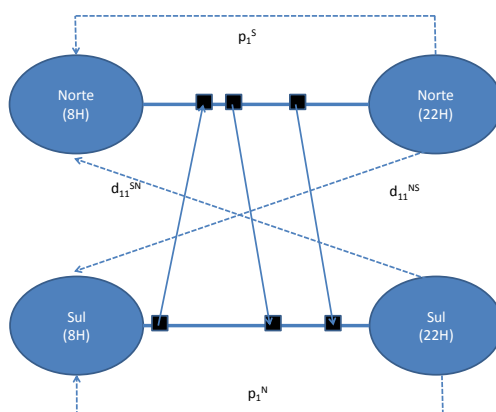


Figura 3.5 – Possíveis deslocações noturnas de comboios.

3.2 PROBLEMA DE DUAS LINHAS

Se em vez de apenas uma linha ferroviária considerarmos mais, há alguns aspetos que deverão ser referidos, de que daremos conta nesta secção. O objetivo a que aqui nos propomos diz respeito à introdução de conceitos relevantes para a modelação de um problema simples, mas ilustrativo, com duas linhas, conceitos estes que poderão ser facilmente estendidos ao caso de um problema com mais linhas. Por uma questão de simplicidade e para permitir uma ilustração mais eficaz, iremos cingir-nos a um exemplo que consiste na rede de metropolitano fictícia representada na figura 3.6 e que descrevemos de seguida.

Modelação de Problemas Utilizando a Teoria de Grafos: uma aplicação ao estudo da gestão do material circulante numa rede metropolitana.

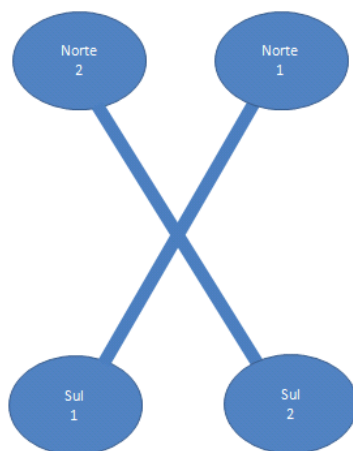


Figura 3.6 - Rede de metropolitano com duas linhas.

Designaremos as linhas por linha 1 e linha 2. Para cada uma destas, devemos assumir o conhecimento prévio dos horários de funcionamento. Neste exemplo, vamos supor que as linhas estão ambas abertas das 8 às 22 horas. Os serviços de cada uma das linhas encontram-se esquematizados na figura 3.7.

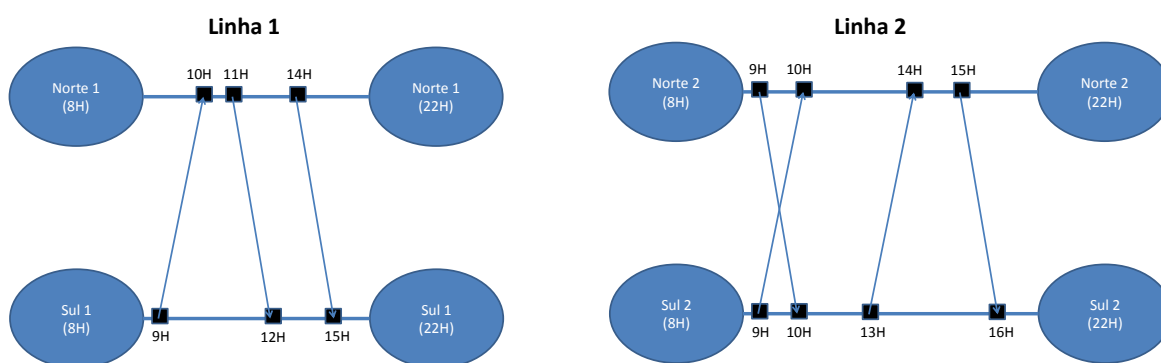


Figura 3.7 – Serviços da rede de metropolitano com duas linhas.

Para a movimentação dos comboios que asseguram cada um dos serviços calendarizados, usaremos notações semelhantes às aquelas a que recorremos anteriormente. As notações aqui introduzidas encontram-se listadas no Anexo A. Para

Modelação de Problemas Utilizando a Teoria de Grafos: uma aplicação ao estudo da gestão do material circulante numa rede metropolitana.

exemplificar, relativamente à linha 2, x_{21}^N representa o número de comboios que fazem o primeiro serviço no sentido Sul-Norte e x_{21}^S e x_{22}^S representam o número de comboios que efetuam o primeiro e o segundo serviços, respetivamente, no sentido Norte-Sul. No que diz respeito ao número de comboios que, após terem efetuado na linha 2 o primeiro serviço no sentido Sul-Norte, realizam o serviço 2 da mesma linha, no sentido inverso, a notação utilizada será y_{212}^{NS} . As restantes variáveis serão então definidas de forma óbvia.

Em problemas com mais do que apenas uma linha, especial atenção deverá ser dispensada à proveniência dos comboios que no início do horário de abertura se encontram colocados em cada estação. Note-se que, para além dos movimentos diurnos, terão de ser considerados também os movimentos dos comboios após o horário de fecho da rede. Estes são necessários por duas razões: algumas estações têm restrições quanto ao número de comboios que podem ser estacionados nas mesmas durante o período noturno, mas também é necessário movimentar comboios por forma a assegurar que os há, em cada estação, em número suficiente para assegurar os serviços calendarizados.

Tomando como exemplo o comboio que, às 9 da manhã, assegura o primeiro serviço do dia no sentido Sul – Norte da linha 1, este poderá ter permanecido na estação Sul. Denotamos por p_1^N o número de comboios, orientados para Norte, que permanecem na estação Sul da linha 1 durante o período noturno (ver figura 3.8). Alternativamente, o comboio poderá ter-se deslocado, fora do horário de abertura da rede, da estação Norte da mesma linha, ou poderá provir das estações Norte ou Sul da linha 2. São necessárias variáveis que expressem essas possibilidades: denotamos por d_{11}^{NS} o número de comboios que se deslocam, durante o período noturno, da estação Norte da linha 1 para a estação Sul da mesma linha. As notações d_{21}^{SS} e d_{21}^{NS} correspondem ao número de comboio que se deslocam da estação Sul da linha 2 para a estação Sul da linha 1 e da estação Norte da linha 2 para a estação Sul da linha 1, respetivamente (ver figura 3.8).

Modelação de Problemas Utilizando a Teoria de Grafos: uma aplicação ao estudo da gestão do material circulante numa rede metropolitana.

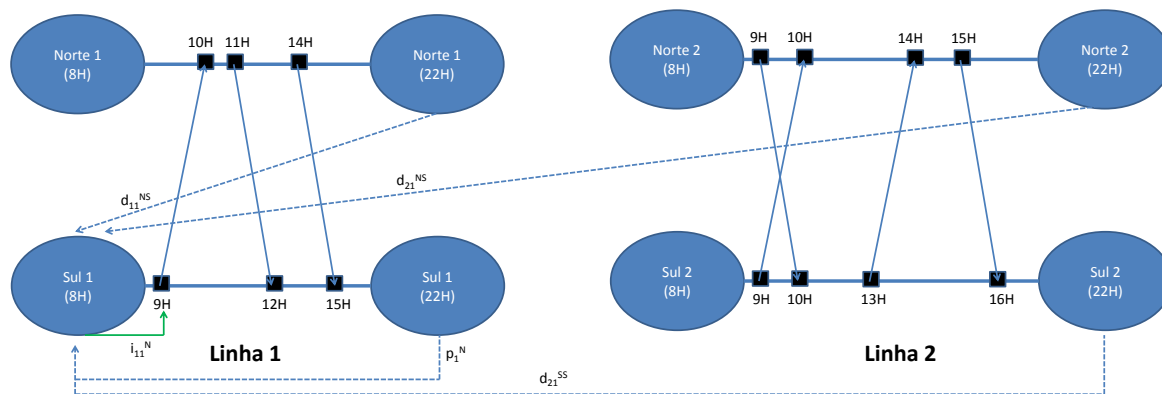


Figura 3.8 – Possíveis proveniências dos comboios colocados na estação Sul da linha 1.

De forma análoga, a figura 3.9 mostra a origem dos comboios que no início do horário de abertura se encontram colocados na estação Norte da linha 1, cujas proveniências poderão ser as estações Sul dessa linha ou da linha 2 (o que se repercute em d_{11}^{SN} e d_{21}^{SN} , respetivamente), ou então a estação Norte da linha 2 (relacionada com d_{21}^{NN}). Há ainda a possibilidade de esses comboios terem permanecido durante a noite nessa estação (a variável correspondente é p_1^S).

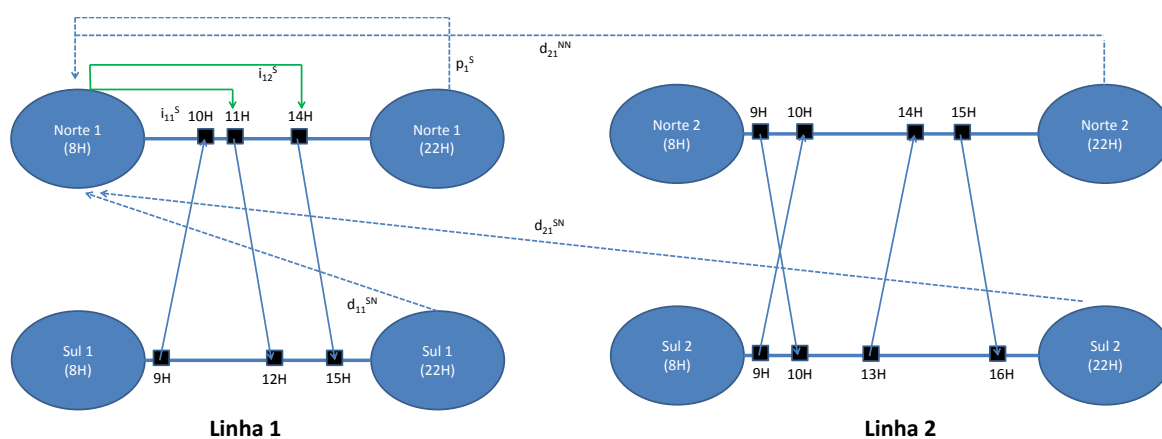


Figura 3.9 – Possíveis proveniências dos comboios colocados na estação Norte da linha 1.

Modelação de Problemas Utilizando a Teoria de Grafos: uma aplicação ao estudo da gestão do material circulante numa rede metropolitana.

Quanto às origens dos comboios colocados nas estações Sul e Norte da linha 2 no início do dia, a notação é análoga (ver figuras 3.10 e 3.11).

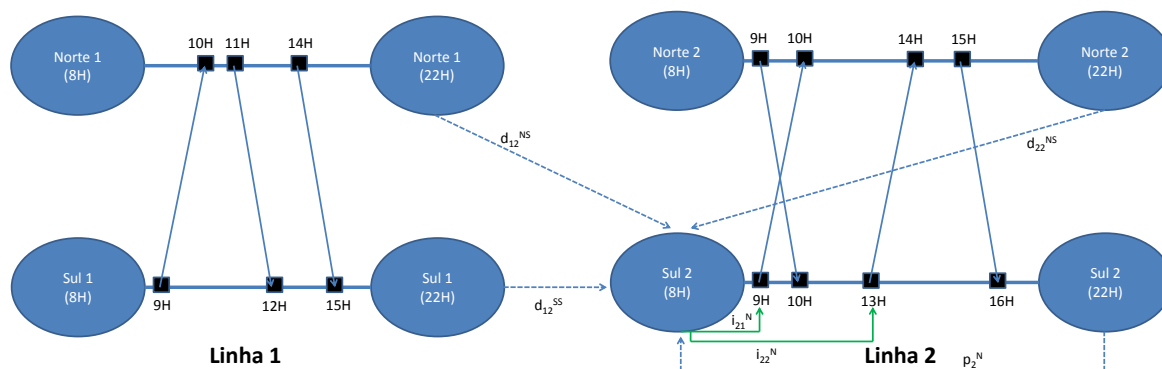


Figura 3.10 – Possíveis proveniências dos comboios colocados na estação Sul da linha 2.

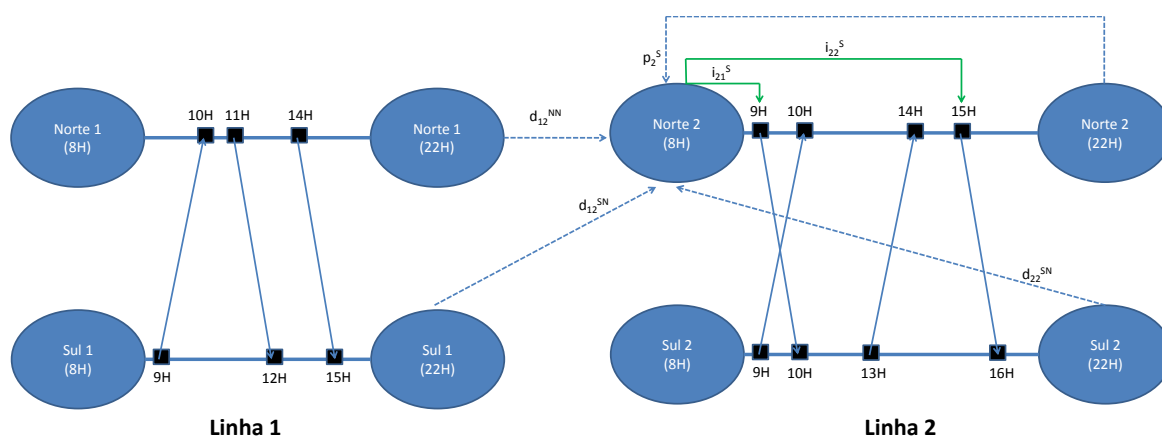


Figura 3.11 – Possíveis proveniências dos comboios colocados na estação Norte da linha 2.

Para o exemplo descrito, o grafo representado na figura 3.12 reúne todas as possibilidades de deslocações, origens e destinos. O número restrito de linhas neste exemplo permite uma interpretação do mesmo, que será generalizável a situações envolvendo um número maior de linhas. Porém, um número superior de linhas tornará o grafo visualmente muito pesado, o que inviabiliza uma resolução intuitiva ou manual de problemas de *rolling stock*. O exemplo da figura 3.12 é útil por permitir visualizar a resolução matemática do problema.

Modelação de Problemas Utilizando a Teoria de Grafos: uma aplicação ao estudo da gestão do material circulante numa rede metropolitana.

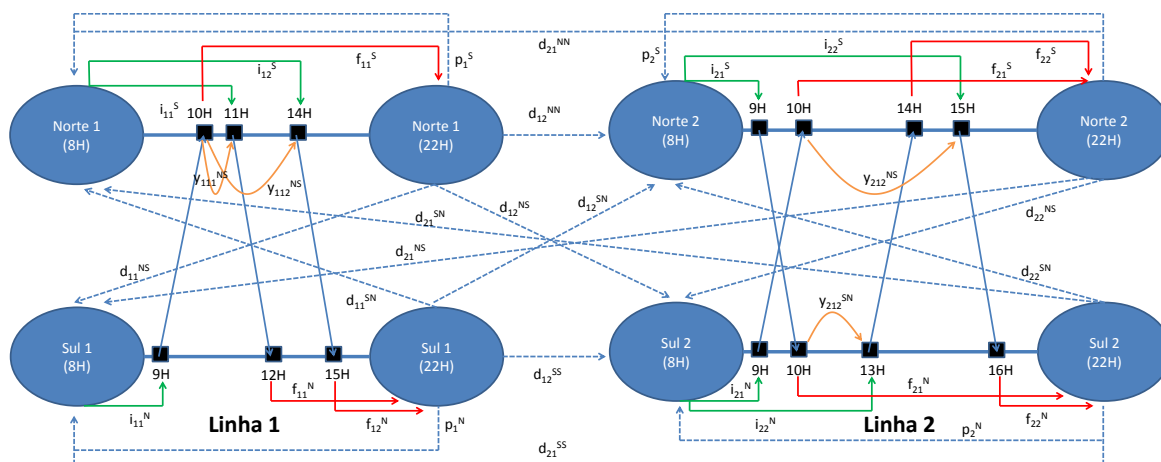


Figura 3.12 – Possibilidades de deslocamentos, origens e destinos numa rede metropolitana com duas linhas.

Na secção 4.2.2 resolveremos o problema de *rolling stock* para este exemplo fictício de duas linhas de metropolitano. Para tanto, necessitaremos de definir ainda quais das estações da rede permitem a permanência noturna de comboios. Assumiremos neste exemplo que apenas as estações da linha 1 permitem essa permanência, isto é, recorrendo a uma notação análoga ao caso de termos apenas uma linha, $e_1^S = e_1^N = 1$ e $e_2^S = e_2^N = 0$. Desta forma, todos os comboios que terminam o dia de trabalho na linha 2, deverão deslocar-se em vazio para uma das estações terminais da linha 1.

3.3 PROBLEMA DO METRO DO PORTO

O problema central deste relatório, apresentado na secção 2.3 e referente à rede do metro do Porto, pode ser descrito recorrendo à notação apresentada na secção anterior (ver Anexo A), ressaltando a diferença de o número de linhas consideradas ser agora maior. Pretendemos aqui formular o problema matematicamente. Seja L o conjunto de linhas e $S(i)$ o conjunto dos serviços de uma linha i .

Modelação de Problemas Utilizando a Teoria de Grafos: uma aplicação ao estudo da gestão do material circulante numa rede metropolitana.

Em primeiro lugar, devemos ter em conta que cada serviço que liga a estação Sul à estação Norte de uma determinada linha é assegurado por um único comboio. Esta restrição poderá traduzir-se recorrendo à condição apresentada a seguir:

$$x_{ij}^N = 1, \quad \forall i \in L, \forall j \in S(i) \quad (1)$$

Também um determinado serviço que parta da estação Norte para a estação Sul de uma linha, é realizado por um único comboio, o que pode ser descrito por:

$$x_{ij}^S = 1, \quad \forall i \in L, \forall j \in S(i) \quad (2)$$

É agora necessário introduzir mais algumas notações. Desta forma, as variáveis \underline{tS}_{jk}^i e \underline{tN}_{jk}^i representam os horários de partida das estações Sul e Norte, respetivamente, dos comboios que realizam o serviço k da linha j . De igual modo, \underline{tS}_{jk}^f e \underline{tN}_{jk}^f dizem respeito aos horários dos comboios que chegam às estações Norte e Sul, respetivamente.

De forma análoga ao definido na secção anterior, Δ_t representará o tempo que um comboio necessitará para inverter o sentido da sua marcha. Um comboio que tenha efetuado um serviço numa determinada linha, no sentido Sul - Norte, poderá posteriormente realizar qualquer serviço na mesma linha no sentido contrário, desde que esse serviço se inicie Δ_t horas após a conclusão do serviço já efetuado. Poderá em alternativa decidir-se que o comboio deverá permanecer depositado na estação Norte até ao final do período de funcionamento da estação. Sendo estas duas as únicas possibilidades, pode-se escrever:

$$x_{ij}^N = f_{ij}^S + \sum_{r \in S(i) : \underline{tN}_r^i - \underline{tS}_j^f \geq \Delta_t} y_{ijr}^{NS}, \quad \forall i \in L, j \in S(i) \quad (3)$$

Um raciocínio análogo relativamente a um comboio que haja realizado um serviço no sentido Norte-Sul permitirá estabelecer a condição:

Modelação de Problemas Utilizando a Teoria de Grafos: uma aplicação ao estudo da gestão do material circulante numa rede metropolitana.

$$x_{ij}^S = f_{ij}^N + \sum_{r \in S(i) : t_{ir}^i - t_{jr}^f \geq \Delta_t} y_{ijr}^{SN}, \quad \forall i \in L, j \in S(i) \quad (4)$$

Um serviço de uma determinada linha no sentido Sul - Norte poderá ser efetuado por qualquer comboio que tenha realizado um serviço em sentido contrário na mesma linha, desde que haja tempo para inverter a marcha. Poderá ainda ser realizado por um comboio colocado na estação Sul da linha:

$$x_{ij}^N = i_{ij}^N + \sum_{r \in S(i) : t_{ij}^i - t_{ir}^f \geq \Delta_t} y_{ijr}^{SN}, \quad \forall i \in L, j \in S(i) \quad (5)$$

Um raciocínio análogo relativamente a um comboio que realiza um serviço no sentido Norte-Sul permitirá estabelecer a condição:

$$x_{ij}^S = i_{ij}^S + \sum_{r \in S(i) : t_{ij}^i - t_{ir}^f \geq \Delta_t} y_{ijr}^{NS}, \quad \forall i \in L, j \in S(i) \quad (6)$$

As equações (1) - (6) são relativas a cada serviço com passageiros. Consideremos agora a proveniência dos comboios que no instante inicial de funcionamento da rede se encontram na estação Sul de uma linha. Trata-se de comboios que terão permanecido durante a noite nessa estação após efetuarem o último serviço do dia ou que fizeram um deslocamento em vazio da estação Norte da mesma linha ou de qualquer estação de uma linha diferente.

Matematicamente esta restrição poderá traduzir-se utilizando a seguinte condição, onde se optou por distinguir, entre os comboios provenientes de outras linhas, aqueles que terminaram o seu último serviço diurno na estação Norte e os que o fizeram na estação Sul:

$$\sum_{k \in S(i)} i_{ik}^N = p_i^S + \sum_{j \in L} d_{ij}^{NS} + \sum_{j \in L: j \neq i} d_{ji}^{SS}, \quad \forall i \in L \quad (7)$$

Modelação de Problemas Utilizando a Teoria de Grafos: uma aplicação ao estudo da gestão do material circulante numa rede metropolitana.

Por outro lado, os comboios que no início do horário de funcionamento se encontram na estação Norte de uma linha terão ficado depositados nessa estação ou são comboios que, após efetuarem o último serviço do dia, se deslocaram em vazio de outras estações:

$$\sum_{k \in S(i)} i_{ik}^S = p_i^N + \sum_{j \in L} d_{ji}^{SN} + \sum_{j \in L; j \neq i} d_{ji}^{NN}, \quad \forall i \in L \quad (8)$$

Deverá ser tomado ainda em consideração o destino a dar às composições após a realização do seu último serviço diário. Estas poderão permanecer nas estações onde concluíram a jornada diária, para que, no dia seguinte, possam, nas mesmas linhas, efetuar os seus primeiros serviços. Assim, os comboios que concluíram o seu último serviço na estação Norte (Sul) de uma dada linha, poderão pernoitar nessa estação, para que, no dia seguinte, efetuem algum serviço na mesma linha, mas em sentido contrário. Poderão, em alternativa, realizar uma deslocação, fora de serviço, para a estação Sul (Norte) da mesma linha ou para estações de linhas diferentes. Novamente optamos por distinguir entre comboios cujo destino da viagem em vazio é uma estação Norte, daqueles cujo destino é uma estação Sul. Em linguagem matemática, as considerações tecidas poderão ser expressas, para comboios que concluíram o último destino com passageiros na estação Norte, da seguinte forma:

$$\sum_{k \in S(i)} f_{ik}^S = p_i^S + \sum_{j \in L} d_{ij}^{NS} + \sum_{j \in L; j \neq i} d_{ij}^{NN}, \quad \forall i \in L \quad (9)$$

Modelação de Problemas Utilizando a Teoria de Grafos: uma aplicação ao estudo da gestão do material circulante numa rede metropolitana.

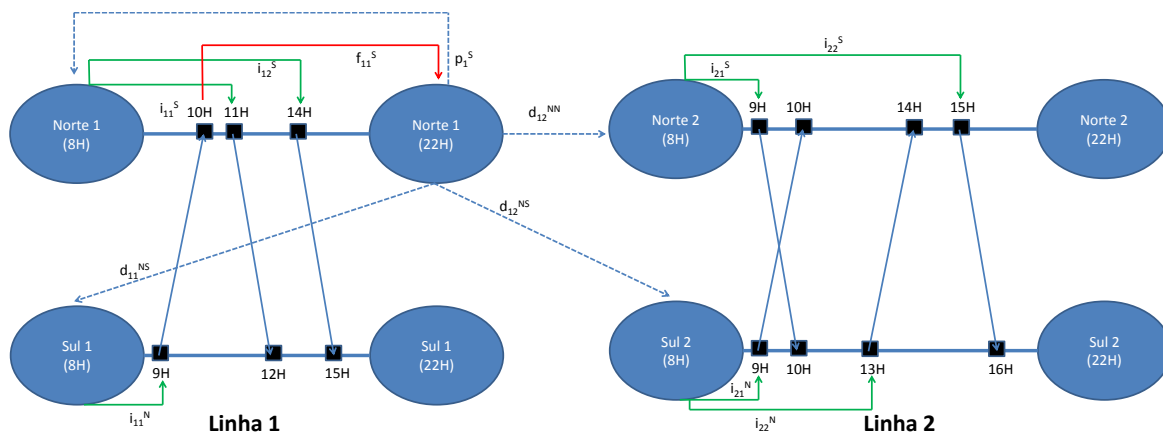


Figura 3.13 – Possíveis destinos dos comboios que terminam na estação Norte da linha 1.

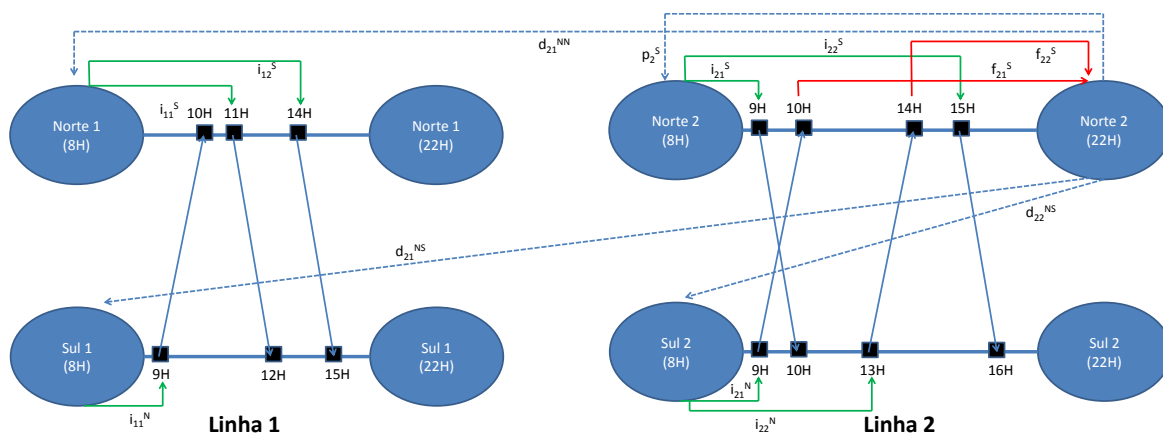


Figura 3.14 – Possíveis destinos dos comboios que terminam na estação Norte da linha 2.

Para os comboios cujo destino diurno final era a estação Sul, tem-se:

$$\sum_{k \in S(i)} f_{ik}^N = p_i^N + \sum_{j \in L} d_{ij}^{SN} + \sum_{j \in L; j \neq i} d_{ij}^{SS}, \quad \forall i \in L \quad (10)$$

Modelação de Problemas Utilizando a Teoria de Grafos: uma aplicação ao estudo da gestão do material circulante numa rede metropolitana.

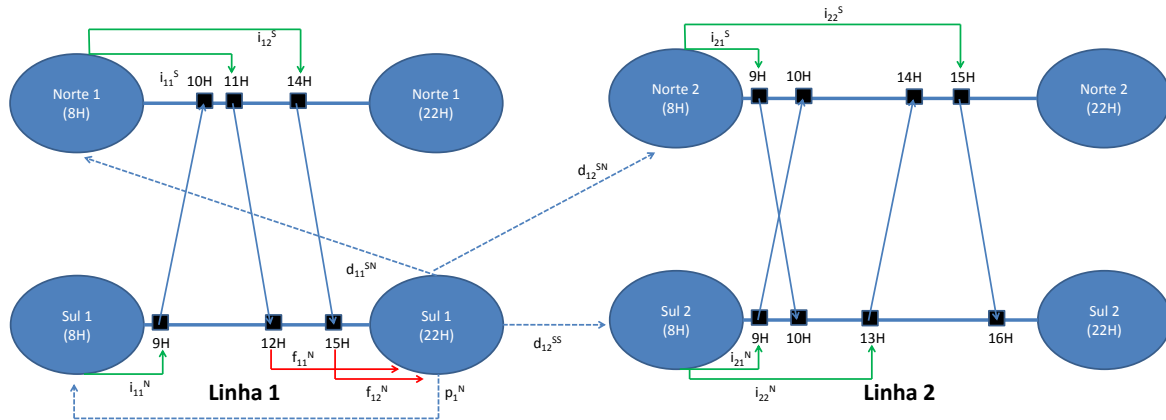


Figura 3.15 – Possíveis destinos dos comboios que terminam na estação Sul da linha 1.

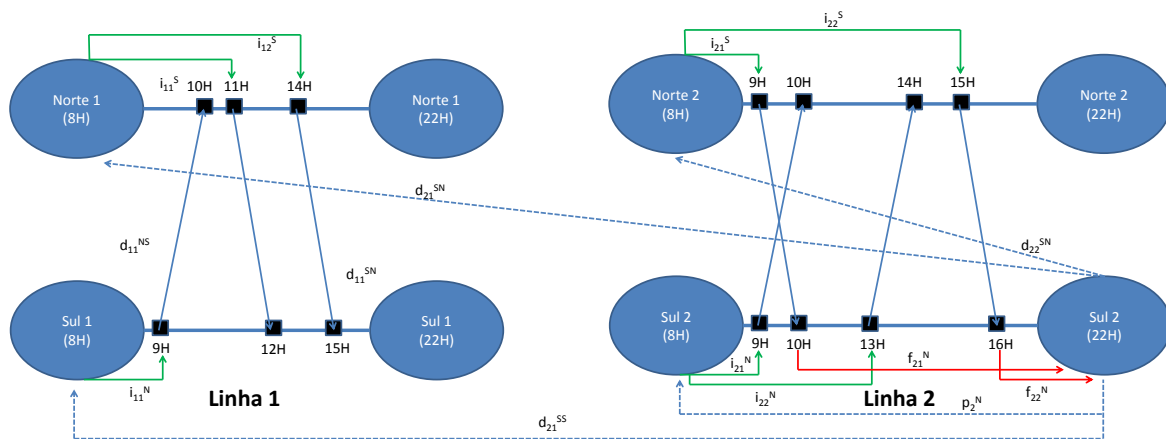


Figura 3.16 – Possíveis destinos dos comboios que terminam na estação Sul da linha 2.

Naturalmente, teremos de considerar também as limitações, decorrentes de restrições logísticas, do número de comboios que poderão permanecer numa determinada estação. De acordo com a notação introduzida anteriormente, a variável e_i^S tomará o valor 1 quando a estação Sul da linha i permitir o depósito de comboios, sendo 0 caso contrário. Poderemos recorrer então a essa variável para exprimir o facto de que não deverão permanecer mais comboios numa estação em que seja possível estacionar do que os serviços que é previsto partirem dessa estação. De outro modo, o número de composições a permanecer durante a noite na estação Sul da linha i , não deverá exceder o produto do número de serviços da linha ($|S(i)|$) pelo valor da variável e_i^S , ou seja:

Modelação de Problemas Utilizando a Teoria de Grafos: uma aplicação ao estudo da gestão do material circulante numa rede metropolitana.

$$p_i^N \leq e_i^S \cdot |S(i)|, \quad \forall i \in L \quad (11)$$

De igual forma, também para o número de comboios que permanecem na estação Norte da linha i podemos estabelecer a condição seguinte:

$$p_i^S \leq e_i^N \cdot |S(i)|, \quad \forall i \in L \quad (12)$$

Será natural ainda restringir o número de deslocações fora de serviço, dentro de uma mesma linha, da estação Sul para estação Norte: este não deverá exceder o produto entre o valor da variável indicativa da capacidade de estacionar comboios na estação Norte dessa linha, e o número de serviços a efetuar nessa linha, ou seja:

$$d_{ii}^{SN} \leq e_i^N \cdot |S(i)|, \quad \forall i \in L \quad (13)$$

Também relativamente ao número de movimentações em vazio, dentro de uma mesma linha, da estação Norte para estação Sul, teremos:

$$d_{ii}^{NS} \leq e_i^S \cdot |S(i)|, \quad \forall i \in L \quad (14)$$

No modelo apresentado pretende-se minimizar o número de movimentos realizados em vazio (sem passageiros) bem como o tempo de paragem dos comboios, desde o início do horário de abertura, até ao primeiro serviço efetuado.

A expressão matemática deste objetivo é possibilitada pela definição de uma função objetivo. Nesta, a cada deslocação em vazio é associado um determinado custo, que se pretende que esteja relacionado com o número de quilómetros da mesma e com outros fatores a definir pelo operador da rede. Em geral, considera-se mais dispendioso fazer uma deslocação em vazio que envolva uma mudança de linha do que uma deslocação dentro da mesma linha pelo que as primeiras são mais penalizadas. Assim, na função objetivo será associado um peso w_{ik}^{SS} , w_{ik}^{SN} , w_{ik}^{NN} e w_{ik}^{NS} às variáveis d_{ik}^{SS} , d_{ik}^{SN} , d_{ik}^{NN} e d_{ik}^{NS} .

Modelação de Problemas Utilizando a Teoria de Grafos: uma aplicação ao estudo da gestão do material circulante numa rede metropolitana.

Também os tempos de inatividade dos comboios desde o instante de abertura até ao instante de realização do primeiro serviço, serão usados para definir pesos na função objetivo. Representaremos por T_a o horário de abertura da rede. Assim, associaremos às variáveis i_{ij}^N e i_{ij}^S os pesos $\alpha(t\underline{S}_{ij}^i - T_a)$ e $\alpha(t\underline{N}_{ij}^i - T_a)$, respetivamente. Finalmente, a função objetivo pode ser expressa por:

Função objetivo

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in L} \sum_{k \in L: k \neq i} w_{ik}^{NN} \times d_{ik}^{NN} + \sum_{i \in L} \sum_{k \in L: k \neq i} w_{ik}^{SS} \times d_{ik}^{SS} + \sum_{i \in L} \sum_{k \in L: k \neq i} w_{ik}^{NS} \times d_{ik}^{NS} + \sum_{i \in L} \sum_{k \in L: k \neq i} w_{ik}^{SN} \times d_{ik}^{SN} + \\ & + \sum_{i \in L} \sum_{k \in L: k=i} w_{ik}^{NS} \times d_{ik}^{NS} + \sum_{i \in L} \sum_{k \in L: k=i} w_{ik}^{SN} \times d_{ik}^{SN} + \sum_{i \in L} \sum_{j \in S: t\underline{S}_{ij}^i \neq 0} \alpha(t\underline{S}_{ij}^i - T_a) \times i_{ij}^N + \\ & + \sum_{i \in L} \sum_{j \in S: t\underline{N}_{ij}^i \neq 0} \alpha(t\underline{N}_{ij}^i - T_a) \times i_{ij}^S \end{aligned}$$

(15)

Em todos os exemplos deste relatório, α tomará o valor 1. Tomaremos os pesos de viagens em vazio em que o material circulante efetue uma mudança de linha como sendo superiores aos das restantes viagens em vazio, sendo os respetivos valores de 100 e 50. Estas escolhas refletem os custos relativos que prevemos serem associados às variáveis que queremos minimizar. Naturalmente, tanto a função objetivo como os pesos poderão ser redefinidos em função de especificações do operador da rede de metropolitano.

Em conclusão, resolver um problema de rolling stock traduz-se matematicamente em resolver o problema de minimizar a função definida em (15), sujeita às restrições (1) - (14).

CAPÍTULO IV

RESULTADOS

Os problemas das secções 3.1, 3.2 e 3.3 foram formulados como problemas de minimização. Para os resolver numericamente, recorreremos ao software Lingo. As várias soluções são apresentadas e discutidas neste capítulo.

4.1 RESOLUÇÃO NUMÉRICA DOS PROBLEMAS

Num problema de otimização, pretende-se encontrar a solução ótima entre todas as soluções possíveis para o problema. Como vimos, os problemas de *rolling stock* com que lidamos neste trabalho consistem na minimização da função objetivo (15), sujeita às restrições (1) - (14). Trata-se de um conjunto de problemas de otimização linear, para cuja resolução recorreremos ao software Lingo. Para a implementação numérica do modelo proposto, baseámo-nos num programa desenvolvido por Canca, J., Zarzo, A., Fernández, L. e seus colaboradores, que apresentaram um modelo para problemas de *rolling stock* em 2010, [34]. A adaptação do modelo proposto para o caso do problema apresentado na secção 3.1 deu origem às linhas de código incluídas no Anexo B.2. Optámos por manter tanto da notação do programa original quanto possível, para permitir futuras interações e trocas de opiniões com os autores do mesmo. No Anexo A incluímos uma tabela que permite fazer a conversão entre a notação proposta neste relatório e a utilizada no programa. Naturalmente, terão de ser fornecidos os dados respeitantes às especificações para cada um dos problemas que pretendemos resolver, nomeadamente os horários de chegada e destinos dos comboios bem como as possibilidades de estacionamento dos mesmos. Nos anexos B.1 e C.1 incluímos os dados relativos aos problemas de uma e duas linhas, respetivamente. A quantidade extensa de

Modelação de Problemas Utilizando a Teoria de Grafos: uma aplicação ao estudo da gestão do material circulante numa rede metropolitana.

dados do problema inspirado no metro do Porto leva a que optemos por não os apresentar.

Considera-se que cada linha tem um determinado número de serviços que, de acordo com a linguagem utilizada no programa, poderão ser realizados em dois sentidos, *up* ou *down*. Para cada serviço são considerados os horários previstos para a partida e para a chegada dos comboios. Os horários das partidas dos serviços *up* são designados *HOUP* e os de chegada à última estação, *HDESTUP*. Em sentido contrário, sentido *down*, o instante de início de cada viagem é designado por *HODW* e o instante de chegada por *HDESTDW*. Além disso, se o tempo de início de um serviço é 0 considera-se que esse serviço não existe.

Para cada linha define-se o instante do início e do fim dos conjuntos dos serviços no sentido *up*, *OUP* e *FUP*, respetivamente, e *ODW* e *FDW* para o sentido *down*. O programa utiliza *DEPOT_UP* e *DEPOT_DW* para a possibilidade de os comboios pernoitarem no início ou no fim de cada linha, respetivamente. No caso de a estação onde chegam os serviços *up* (*down*) permitir o depósito de comboios, a variável *DEPOT_DW* (*DEPOT_UP*) toma o valor 1, caso contrário, esse valor é 0. Quando uma estação não permite o depósito de composições, os comboios que circulam na linha terão que vir de outra estação, da mesma linha ou de uma linha diferente.

No modelo constante neste programa, *NTRENES_UP* e *NTRENES_DW* dão-nos o número de comboios necessários, no início do dia, em cada linha, nos sentidos *up* e *down*, respetivamente.

O programa utiliza as variáveis *X_UP* no sentido *up* de cada linha e *X_DW* no sentido contrário, que têm que tomar o valor 1 para todos os serviços programados.

A conexão entre serviços realizados em sentidos contrários só poderá ser feita quando o horário de início de um serviço for posterior ao horário de chegada de outro programado para o sentido oposto e decorrer um intervalo de tempo entre esses dois momentos superior a um determinado valor. Portanto, quando for possível, ligam-se os comboios que, após um serviço no sentido *up* possam realizar um serviço no sentido *down*, ou ao contrário. Para ligar os serviços, considera-se uma matriz auxiliar, *AUP* no sentido *up* e *ADW* no sentido *down*, que se devem preencher com “1’s” e “0’s”,

Modelação de Problemas Utilizando a Teoria de Grafos: uma aplicação ao estudo da gestão do material circulante numa rede metropolitana.

dependendo da possibilidade, ou não, de ligar o serviço *up* com o serviço *down*, e vice-versa. As variáveis X_{UP_DW} e X_{DW_UP} dizem respeito às conexões entre serviços.

4.2 RESULTADOS

4.2.1 PROBLEMA DE UMA LINHA

Como descrito anteriormente, uma solução numérica para o problema apresentado na secção 3.1 pode ser encontrada recorrendo ao programa implementado no Lingo. Na figura 4.1 apresentamos um grafo que representa essa solução.

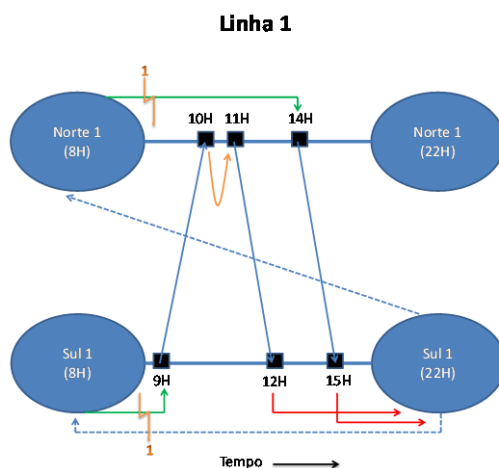


Fig. 4.1 – Grafo 1 dos resultados do problema de uma linha.

Output do programa	
(cf. Anexo B.3):	
NTRENES_UP(1)	1
NTRENES_DW(1)	1
<u>TOTAL:</u>	2

Modelação de Problemas Utilizando a Teoria de Grafos: uma aplicação ao estudo da gestão do material circulante numa rede metropolitana.

Podemos observar que o comboio utilizado no primeiro e único serviço no sentido Sul – Norte, irá efetuar depois um dos serviços programados em sentido contrário, permanecendo na estação Sul até ao início do dia seguinte para repetir o percurso descrito anteriormente. Como durante o dia não são permitidos movimentos sem passageiros, o outro serviço previsto para o sentido Norte – Sul deverá ser assegurado por um comboio diferente que, uma vez chegado à estação Sul, aí permanecerá até final do dia, voltando depois em vazio à estação Norte para realizar o mesmo serviço no dia seguinte.

Podemos deste modo concluir que são necessários dois comboios para assegurar a prestação dos três serviços.

De uma forma esquemática, os ciclos de movimentos dos comboios poderão ser representados como na figura 4.2.

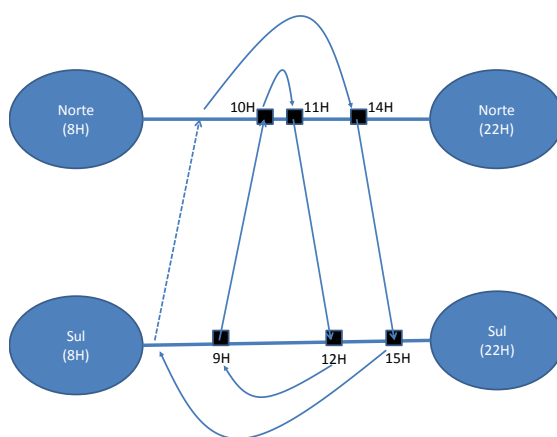


Fig. 4.2 – Grafo 2 dos resultados do problema de uma linha.

4.2.2 PROBLEMA DE DUAS LINHAS

O problema de duas linhas apresentado na secção 3.2 pode também ser resolvido recorrendo ao programa implementado no Lingo.

Representamos os resultados obtidos no grafo da figura 4.3 e apresentamo-los no output do anexo C.2.

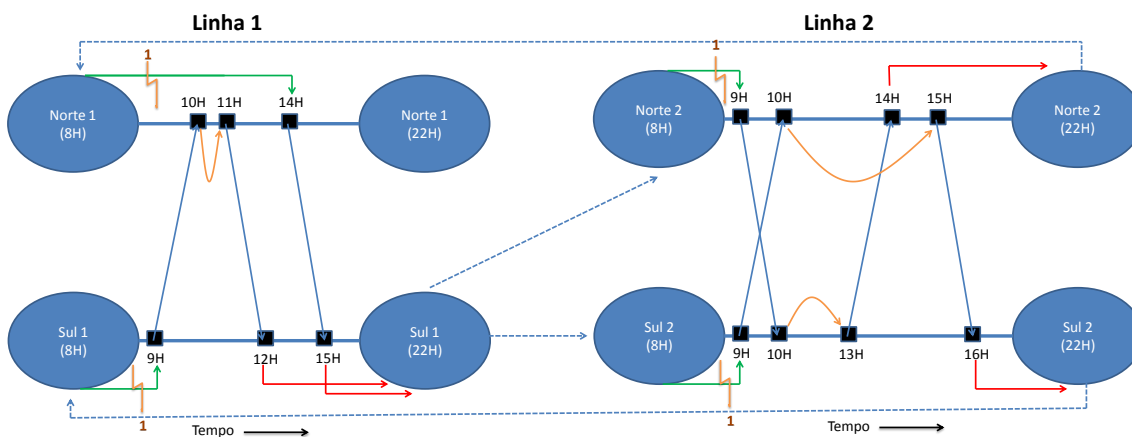


Fig. 4.3 – Resultados do problema de duas linhas.

Output do programa	
(cf. Anexo C.2):	
NTRENES_UP(1)	1
NTRENES_UP(2)	1
NTRENES_DW(1)	1
NTRENES_DW(2)	1
<u>TOTAL:</u>	4

Para assegurar os sete serviços previstos, são necessários quatro comboios, dois para efetuarem os três serviços da linha 1 e outros dois para realizarem os quatro serviços da linha 2.

Como durante a noite a linha 2 não permite o depósito de composições, no final do dia todos os comboios que aí circularam deverão deslocar-se em vazio para as estações da linha 1. O comboio que efetua o primeiro serviço da linha 1 poderá realizar também o primeiro serviço dessa linha em sentido contrário, pernando depois na estação Sul da linha 1. No dia seguinte este comboio deverá estar disponível numa das estações da linha 2 para efetuar o seu primeiro serviço do dia. Assumindo como destino

Modelação de Problemas Utilizando a Teoria de Grafos: uma aplicação ao estudo da gestão do material circulante numa rede metropolitana.

a estação Sul, esse comboio poderá realizar, no dia seguinte, o primeiro serviço no sentido Sul – Norte e o segundo no sentido contrário, deslocando-se depois em vazio para estação Sul da linha 1, onde deverá permanecer durante a noite, de forma a repetir-se o ciclo descrito anteriormente. O comboio que parte da estação Norte da linha 1 para realizar o segundo serviço termina logo a seguir o seu dia de trabalho na estação Sul, onde deverá pernoitar, deslocando-se em vazio para a estação Norte da linha 2, de forma a realizar o primeiro serviço no sentido Norte-Sul e o segundo no sentido inverso, movimentando-se depois, também em vazio, para a estação Norte da linha 1, onde ficará depositado.

4.2.3 PROBLEMA DO METRO DO PORTO

Iremos finalmente abordar o problema inspirado no metro do Porto, introduzido na secção 2.3 e formulado na secção 3.3. A resolução numérica do problema com o programa implementado no Lingo origina o output apresentado e ilustrado na figura 4.4. Conclui-se que a realização dos 594 serviços das linhas A, E e D do metro do Porto pode ser assegurada por 26 comboios:

Output do programa:	
NTRENES_UP(1)	2.000000
NTRENES_UP(2)	5.000000
NTRENES_UP(3)	6.000000
	13
NTRENES_DW(1)	2.000000
NTRENES_DW(2)	5.000000
NTRENES_DW(3)	6.000000
	13
<u>TOTAL:</u>	26

Modelação de Problemas Utilizando a Teoria de Grafos: uma aplicação ao estudo da gestão do material circulante numa rede metropolitana.

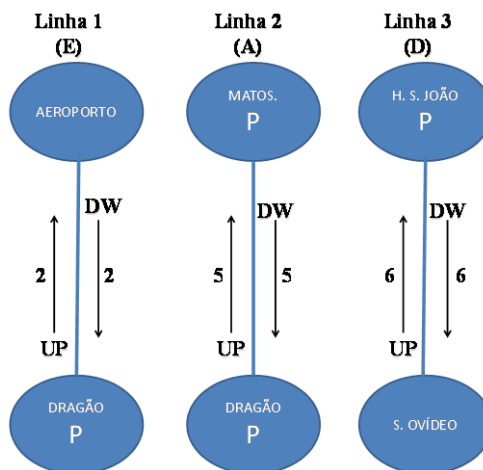


Fig. 4.4 – Resultados do problema do metro do Porto.

Na linha A, onde se realizam diariamente 204 serviços, são necessários dez comboios (cinco em cada sentido). Os 314 serviços da linha D poderão ser realizados por apenas doze comboios (seis em cada sentido). Finalmente, bastarão quatro comboios para assegurar a realização dos 76 serviços da linha E (dois em cada linha).

CAPÍTULO V

CONCLUSÕES E TRABALHO FUTURO

Apresentamos neste capítulo uma reflexão final sobre o trabalho de investigação realizado. São ainda apresentadas algumas sugestões para trabalho futuro.

5.1 CONCLUSÕES

Neste trabalho foi desenvolvido um modelo matemático para a circulação de comboios na rede do metro do Porto, com o objetivo de minimizar os custos associados à mesma. Consideraram-se como ponto de partida do modelo os horários de circulação dos comboios. Tomaram-se em consideração várias restrições impostas pela realidade física. Naturalmente, contemplar todas as variáveis seria uma tarefa impossível, pelo que nos restringimos àquelas que julgámos serem mais relevantes.

Optámos por começar por abordar problemas em que os dados tinham uma dimensão reduzida, o que proporcionou uma mais fácil ilustração e interpretação dos resultados obtidos, tendo-se verificado concordância entre estes e aqueles que seriam expectáveis. Relativamente ao problema central deste trabalho, este foi inspirado na rede de metro do Porto. O elevado número de serviços oferecidos pela mesma e a resultante dificuldade de interpretação de resultados fez com que se optasse por seleccionar apenas três das seis linhas da rede.

O modelo que propomos será porém facilmente extensível a casos em que se considerem mais linhas ou mesmo a outras redes de transporte. Em particular, para se conseguir a modelação completa da rede de metro do Porto, será necessário juntar os dados relativos às outras linhas (B, C, F), redefinir em que estações os comboios podem permanecer durante o período noturno de acordo com indicações do gestor da rede, bem

Modelação de Problemas Utilizando a Teoria de Grafos: uma aplicação ao estudo da gestão do material circulante numa rede metropolitana.

como, eventualmente, considerar os diferentes tipos de composições que circulam no metro do Porto ou outros aspetos que se venham a verificar, da análise e discussão de soluções numéricas obtidas, se deverem implementar.

Finalmente, note-se que o trabalho presente se insere numa das muitas áreas de aplicação da teoria de grafos. É da opinião do autor desta dissertação que poderá ser ponderada a inclusão desta teoria em mais programas de matemática ao nível do ensino secundário. O enorme potencial desta teoria para modelar situações da realidade e o facto de demonstrar grandes capacidades no campo da comunicação matemática poderão contribuir para incentivar o desenvolvimento de formas diferentes de raciocínio e técnicas de resolução de uma grande variedade de problemas.

5.2 TRABALHO FUTURO

Tendo em conta o modelo abordado neste trabalho, novos estudos poderão ser desenvolvidos em trabalhos futuros. Os modelos a propor poderão incluir mais detalhe. Em particular, destaca-se a existência de comboios com diferentes capacidades e serviços ou de estações onde poderão ser retiradas ou acrescentadas carruagens às composições (tendo em conta a procura nos diferentes períodos do dia e em dias da semana com programas de transporte distintos). Também se poderá incluir a possibilidade de viagens em vazio durante o período diurno, a existência de imprevistos, a coexistência de diversos prestadores de serviço ou mesmo aspetos como a possibilidade de interface com outros meios de transporte. Note-se que o modelo que foi proposto não estabelece condições para planear as movimentações necessárias à manutenção dos comboios. Tal poderá ser implementado, tendo em conta que tipicamente se exige que após um determinado número de quilómetros percorridos ou tempo decorrido, cada carruagem e cada locomotiva terá de ser inspecionada ou reparada.

Entendemos que a continuação e o melhoramento do trabalho presente poderão contribuir para o aumento da eficiência, da economia e do aproveitamento dos recursos que se encontram ao dispor da rede do metro do Porto.

REFERÊNCIAS

- [1] National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar*. Lisboa: APM e IIE.
- [2] Albuquerque, C., Nápoles, S., Rocha, I., Santos, L., Veloso, E. (2006). *Formação Matemática do Futuro Professor*. Lisboa: SEM/SPCE e APM.
- [3] DEB (2001). *Programa de Matemática Aplicada às Ciências Sociais*. Lisboa: Departamento do Ensino Secundário, Ministério da Educação.
- [4] Chartrand, G., Oellermann, R. (1993). *Applied and Algorithmic Graph Theory*. New York: McGraw-Hill.
- [5] Berge, C. (1987). *Graphes*. Paris: Gauthier-Villars.
- [6] Alsina, C. (2010). *Mapas del metro y redes neuronales. La Teoría de grafos*. Barcelona: RBA Coleccionables.
- [7] Netto, P. (2001). *Grafos: teoria, modelos e algoritmos*, São Paulo: Edgard Blucher.
- [8] Benecke, S. (2004). *Higher Order Domination of Graphs (Master's Thesis)*. South Africa: University of Stellenbosch.
- [9] Winterback, W. (2005). *The crossing number of a graph in the plane (Master's Thesis)*. South Africa: University of Stellenbosch.

Modelação de Problemas Utilizando a Teoria de Grafos: uma aplicação ao estudo da gestão do material circulante numa rede metropolitana.

- [10] Silva, D. (2006). *Sistemas de informação geográfica para transportes – uma aplicação aos transportes urbanos de Guimarães (Tese de Mestrado)*. Lisboa: Universidade Nova de Lisboa.
- [11] Caldas, S. (2007). *Optimização em grafos num contexto de redes sociais, tecnológicas e no ensino da Matemática. Estudo do problema de balanceamento de uma comunidade na World Wide Web (Tese de Doutoramento)*. Lisboa: Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.
- [12] Laranjeiro, J. (2008). *Contributos para a Análise e Caracterização de Interações em Fóruns de Discussão Online (Tese de Mestrado)*. Porto: Faculdade de Ciências da Universidade do Porto.
- [13] Oliveira, B. (2008). *Navegação 3D sobre sistemas de informação reais (Tese de Mestrado)*. Lisboa: Universidade Técnica de Lisboa.
- [14] Maróti, G. (2006). *Operations Research Models for Railway Rolling Stock Planning (D. Thesis)*. Eindhoven: Technische Universiteit Eindhoven.
- [15] Goosens, J. (2004). *Models and algorithms for railway rolling stock planning (D. Thesis)*. Netherlands: University of Maastricht.
- [16] Bodin, L., Mingozzi, A., Baldacci, R., Ball, M. (2000). *The rollon-rollof vehicle routing problem*. Transportation Science.
- [17] Crainic, T., Florian, M., Lear, J. (1990). *A model for strategic planning of national freight transportation by rail*. Transportation Science.
- [18] Alfieri, A., Groot, R., Kroon, L., Schrijver, A. (2006). *Efficient circulation of railway rolling stock*. Transportation Science.

- [19] Assad, A. (1980). *Models for rail transportation*. Transportation Research.
- [20] Groot, R. (1996). *Minimum circulation of railway stock: an integer programming algorithm (Master's Thesis)*. Amsterdam: University of Amsterdam.
- [21] Abbink, E., Berg, B., Kroon, L., Salomon, M. (2002). *Allocation of railway rolling stock for passenger trains*, Netherlands: Erasmus University Rotterdam.
- [22] Canca, J., Altarejos, A., Rodríguez, L., Durán, E. (2010). *Análisis de capacidad y gestión de unidades rodantes en líneas compartidas por varios proveedores de servicios*. Madrid: Instituto Universitario de Ingeniería del Automóvil.
- [23] Canca, J., Caro, G., Durán, E. (2010). *Diseño de una metodología para la evaluación de la eficiencia de redes de metro basada en DEA*. San Sebastián: Universidad del País Vasco, Servicio editorial.
- [24] Canca, J., Rubio, M., Durán, E., Caro, G. (2010). *Un nuevo enfoque para la determinación de horarios de unidades rodantes*. San Sebastián: Universidad del País Vasco, Servicio editorial.
- [25] Ben-Khedher, N., Kintanar, J., Queille, C., Stripling, W. (1998). *Schedule optimization at SNCF: from conception to day of departure*. Interfaces.
- [26] Schrijver, A. (1993). *Minimum Circulation of railway stock*. Amsterdam: Center for Mathematics and Computer Science.
- [27] Fioole, P., Kroon, L., Maróti, G., Schrijver, A. (2006). *A rolling stock circulation model for combining and splitting of passenger trains*. European Journal of Operational Research.

Modelação de Problemas Utilizando a Teoria de Grafos: uma aplicação ao estudo da gestão do material circulante numa rede metropolitana.

- [28] Brucker, J., Hurink, T., Rolfes, T. (1998). *Routing of railway carriages: A case study*. Osnabrücker Schriften zur mathematik.
- [29] Cordeau, J., Soumis, F., Desrosiers, J. (2000). *A Benders decompositions approach for the and car as signment problem*. Transportation Science.
- [30] Cordeau, J., Soumis, F., Desrosiers, J. (2001). *Silmultaneous as signment of locomotives and cars to passenger trains*. Operations Research.
- [31] Lingaya, N., Cordeau, J., Desaulniers, G., Soumis, F. (2002). *Operational car assignment at VIA rail Canada*. Transportation Research.
- [32] Van Montfort, J. (1997). *Optimizing railway carriage circulation with integral linear programming (Master's Thesis)*. Amsterdam: University of Amsterdam.
- [33] Canca, J., Zarzo, A., Fernández, L. (2010). *Rolling Stock Model for Railway Transport in a Multi-Provider Environment*. Buenos Aires: Conference Proceedings, ALIO-INFORMS Joint International Meeting.
- [34] Metro do Porto em <http://www.metroporto.pt>.

Modelação de Problemas Utilizando a Teoria de Grafos: uma aplicação ao estudo da gestão do material circulante numa rede metropolitana.

ANEXO A

TABELA COMPARATIVA		
Variáveis do trabalho	Variáveis do programa	Breve descrição
i_{ij}^N	$X_OR_UP(i, j)$	Número de comboios que efetuam como primeiro serviço do dia o serviço j, no sentido Sul-Norte, na linha i.
i_{ij}^S	$X_OR_DW(i, j)$	Número de comboios que efetuam como primeiro serviço do dia o serviço j, no sentido Norte-Sul, na linha i.
x_{ij}^N	$X_UP(i, j)$	Número de comboios que efetuam o serviço j, no sentido Sul-Norte, da linha i.
x_{ij}^S	$X_DW(i, j)$	Número de comboios que efetuam o serviço j, no sentido Norte-Sul, da linha i.
y_{ijk}^{NS}	$X_UP_DW(i, j, k)$	Número de comboios que efetuam o serviço k, no sentido Norte-Sul, na linha i, após terem efetuado o serviço j no sentido oposto.
y_{ijk}^{SN}	$X_DW_UP(i, j, k)$	Número de comboios que efetuam o serviço k, no sentido Sul-Norte, na linha i, após terem efetuado o serviço j no sentido oposto.
f_{ij}^S	$X_DW_FIN(i, j)$	Número de comboios que permanecem até ao final do horário de abertura na estação Norte da linha i, após terem efetuado o serviço j no sentido Sul-Norte.

Modelação de Problemas Utilizando a Teoria de Grafos: uma aplicação ao estudo da gestão do material circulante numa rede metropolitana.

f_{ij}^N	$X_UP_FIN(i, j)$	Número de comboios que permanecem na estação Sul da linha i , após terem efetuado o serviço j no sentido Norte-Sul.
p_i^N	$X_FIN_OR_ARR_ARR(i, i)$	Número de comboios que permanecem na estação Sul da linha i durante o período noturno.
p_i^S	$X_FIN_OR_ABA_ABA(i, i)$	Número de comboios que permanecem na estação Norte da linha i durante o período noturno.
d_{ij}^{SS}	$X_FIN_OR_ARR_ARR(i, j)$, com $j \neq i$	Número de comboios que se deslocam da estação Sul da linha i para a estação Sul da linha j , durante o período noturno.
d_{ij}^{NN}	$X_FIN_OR_ABA_ABA(i, j)$, com $j \neq i$	Número de comboios que se deslocam da estação Norte da linha i para a estação Norte da linha j , durante o período noturno.
d_{ij}^{SN}	$X_FIN_OR_ARR_ABA(i, j)$	Número de comboios que se deslocam da estação Sul da linha i para a estação Norte da linha j , durante o período noturno.
d_{ij}^{NS}	$X_FIN_OR_ABA_ARR(i, j)$	Número de comboios que se deslocam da estação Norte da linha i para a estação Sul da linha j , durante o período noturno.
e_i^S	DEPOT_UP	Variável que indica se a estação Sul da linha i permite o depósito de comboios durante a noite.
e_i^N	DEPOT_DW	Variável que indica se a estação Norte da linha i permite o depósito de comboios durante a noite.
\underline{tS}_{jk}^i	HOUNP(j,k)	Horário de partida da estação Sul do comboio que realiza o serviço k da linha j .
\underline{tS}_{jk}^f	HDESTUP(j,k)	Horário de chegada à estação Norte do comboio que realiza o serviço k da linha j .

Modelação de Problemas Utilizando a Teoria de Grafos: uma aplicação ao estudo da gestão do material circulante numa rede metropolitana.

\underline{tN}_{jk}^i	HODW(j,k)	Horário de partida da estação Norte do comboio que realiza o serviço k da linha j.
\underline{tN}_{jk}^f	HDESTDW(j,k)	Horário de chegada à estação Sul do comboio que realiza o serviço k da linha j.
T_a		Horário de abertura da rede.

ANEXO B

B.1 DADOS DO PROBLEMA DA SECÇÃO 3.1

Linha 1	Sul	Horário	Parque (Não – 0; Sim – 1)	
			Início	Fim
		9,00	0,00	1
		10,00	0,00	
	Norte	11,00	14,00	1
			12,00	

Horário Início (Sul)	HOU	9,00	0,00
Horário Início (Norte)	HODW	11,00	14,00
Horário Fim (Sul)	HDESTUP	10,00	0,00
Horário Fim (Norte)	HDESTDW	12,00	15,00

Parque		Linha 1
Estação Sul	DEPOTUP	1
Estação Norte	DEPOTDW	1

B.2 PROGRAMA APLICADO AO PROBLEMA DA SECÇÃO 3.1

SETS:

LINEA/1..1/:OUP,ODW,FUP,FDW,DEPOT_UP,DEPOT_DW,NTRENES_UP,NTRENES_DW;

SERVICIO/1..2/;;

LINSERV_UP(LINEA,SERVICIO):HOUP,HDESTUP,X_UP;

LINSERV_DW(LINEA,SERVICIO):HODW,HDESTDW,X_DW;

LINKS_UP_FIN(LINSERV_UP):X_DW_FIN;

LINKS_DW_FIN(LINSERV_DW):X_UP_FIN;

LINKS_OUP_INI(LINSERV_UP):X_OR_UP;

LINKS_ODW_INI(LINSERV_DW):X_OR_DW;

LINKS_FIN_UP_INI(LINEA,LINEA):X_FIN_OR_ABA_ABA,X_FIN_OR_ABA_ARR;

LINKS_FIN_DW_INI(LINEA,LINEA):X_FIN_OR_ARR_ARR,X_FIN_OR_ARR_ABA;

LINKS_UP_DW(LINEA,SERVICIO,SERVICIO):AUP,X_UP_DW;

LINKS_DW_UP(LINEA,SERVICIO,SERVICIO):ADW,X_DW_UP;

ENDSETS

DATA:

HOUP=@OLE('C:\Users\CarlosAbel\Documents\METM\Programas\Problema_de_uma_linha.xlsx','HOUP');

HODW=@OLE('C:\Users\CarlosAbel\Documents\METM\Programas\Problema_de_uma_linha.xlsx','HODW');

HDESTUP=@OLE('C:\Users\CarlosAbel\Documents\METM\Programas\Problema_de_uma_linha.xlsx','HDESTUP');

Modelação de Problemas Utilizando a Teoria de Grafos: uma aplicação ao estudo da
gestão do material circulante numa rede metropolitana.

```
HDESTDW=@OLE('C:\Users\CarlosAbel\Documents\METM\Programas\Problema_de_
_uma_linha.xlsx','HDESTDW');
```

```
DEPOT_UP=
@OLE('C:\Users\CarlosAbel\Documents\METM\Programas\Problema_de_uma_lin
ha.xlsx','DEPOTUP');
```

```
DEPOT_DW=
@OLE('C:\Users\CarlosAbel\Documents\METM\Programas\Problema_de_uma_lin
ha.xlsx','DEPOTDW');
```

```
AUP=0;
```

```
ADW=0;
```

```
OUP=9;
```

```
ODW=11;
```

```
FUP=10;
```

```
FDW=15;
```

```
TIMELIMIT=0.1
```

ENDDATA

CALC:

```
@FOR(LINEA(I):
```

```
  @FOR(SERVICIO(J):
```

```
    @FOR(SERVICIO(K):
```

```
      AUP(I,J,K)=0;
```

```
      ADW(I,J,K)=0;);););
```

```
@FOR(LINEA(I):
```

```
  @FOR(SERVICIO(J) | HOUP(I,J) #NE# 0:
```

```
    @FOR(SERVICIO(K) | HODW(I,K) #NE# 0:
```

```
      AUP(I,J,K)=@IF(HDESTUP(I,J) #LT# (HODW(I,K)
```

```
TIMELIMIT), 1,0););););
```

```
@FOR(LINEA(I):
```

```
  @FOR(SERVICIO(J) | HODW(I,J) #NE# 0:
```

Modelação de Problemas Utilizando a Teoria de Grafos: uma aplicação ao estudo da gestão do material circulante numa rede metropolitana.

```
@FOR (SERVICIO (K) | HOUP (I, K) #NE# 0:
      ADW (I, J, K) = @IF ( HDESTDW (I, J) #LT# (HOUP (I, K) -
TIMELIMIT), 1, 0);););
```

ENDCALC

!Condição (1) da secção 3.3!

```
@FOR (LINSERV_UP (I, J) | HOUP (I, J) #NE# 0: X_UP (I, J) = 1);
```

!Condição (2) da secção 3.3!

```
@FOR (LINSERV_DW (I, J) | HODW (I, J) #NE# 0: X_DW (I, J) = 1);
```

!Condições (3) da secção 3.3!

```
@FOR (LINEA (I) :
      @FOR (SERVICIO (J) | HOUP (I, J) #NE# 0:
            X_UP (I, J) = @SUM (SERVICIO (K) | AUP (I, J, K) #EQ# 1:
            X_UP_DW (I, J, K) ) + X_DW_FIN (I, J);););
```

!Condições (4) da secção 3.3!

```
@FOR (LINEA (I) :
      @FOR (SERVICIO (J) | HODW (I, J) #NE# 0:
            X_DW (I, J) = @SUM (SERVICIO (K) | ADW (I, J, K) #EQ# 1:
            X_DW_UP (I, J, K) ) + X_UP_FIN (I, J);););
```

```
@FOR (LINEA (I) :
      @FOR (SERVICIO (J) :
            @FOR (SERVICIO (K) :
                  X_UP_DW (I, J, K) <= AUP (I, J, K);
                  X_DW_UP (I, J, K) <= ADW (I, J, K););););
```

!Condição (6) da secção 3.3!

```
@FOR (LINEA (I) :
      @FOR (SERVICIO (J) | HODW (I, J) #NE# 0:
            X_DW (I, J) = @SUM (SERVICIO (K) : AUP (I, K, J) * X_UP_DW (I, K, J) ) +
            X_OR_DW (I, J);););
```

Modelação de Problemas Utilizando a Teoria de Grafos: uma aplicação ao estudo da gestão do material circulante numa rede metropolitana.

!Condição (5) da secção 3.3!

```
@FOR (LINEA (I) :
    @FOR (SERVICIO (J) | HOUP (I, J) #NE# 0:
        X_UP (I, J) = @SUM (SERVICIO (K) : ADW (I, K, J) * X_DW_UP (I, K, J) ) +
X_OR_UP (I, J) ; ) ; ) ;
```

!Condição (7) da secção 3.3!

```
@FOR (LINEA (I) :
@SUM (SERVICIO (J) | HOUP (I, J) #NE# 0: X_OR_UP (I, J) ) = @SUM (LINEA (K) :
X_FIN_OR_ARR_ARR (K, I) ) + @SUM (LINEA (K) : X_FIN_OR_ABA_ARR (K, I) ) ;
```

!Atribuição dos comboios de saída no sentido UP!

```
NTRENES_UP (I) = @SUM (SERVICIO (J) | HOUP (I, J) #NE# 0: X_OR_UP (I, J) ) ; ;
```

!Condição (8) da secção 3.3!

```
@FOR (LINEA (I) :
@SUM (SERVICIO (J) | HODW (I, J) #NE# 0: X_OR_DW (I, J) ) = @SUM (LINEA (K) :
X_FIN_OR_ABA_ABA (K, I) ) + @SUM (LINEA (K) : X_FIN_OR_ARR_ABA (K, I) ) ;
```

!Atribuição dos comboios de saída no sentido DOWN!

```
NTRENES_DW (I) = @SUM (SERVICIO (J) | HODW (I, J) #NE# 0: X_OR_DW (I, J) ) ; ;
```

!Condição (10) da secção 3.3!

```
@FOR (LINEA (I) :
@SUM (SERVICIO (J) | HDESTDW (I, J) #NE# 0: X_UP_FIN (I, J) ) = @SUM (LINEA (K) :
X_FIN_OR_ARR_ABA (I, K) ) + @SUM (LINEA (K) : X_FIN_OR_ARR_ARR (I, K) ) ; ;
```

!Condição (9) da secção 3.3!

```
@FOR (LINEA (I) :
@SUM (SERVICIO (J) | HDESTUP (I, J) #NE# 0: X_DW_FIN (I, J) ) = @SUM (LINEA (K) :
X_FIN_OR_ABA_ARR (I, K) ) + @SUM (LINEA (K) : X_FIN_OR_ABA_ABA (I, K) ) ; ;
```

```
@FOR (LINEA (I) :
```

!Condição (12) da secção 3.3!

```
X_FIN_OR_ABA_ABA (I, I) <= DEPOT_DW (I) * @SIZE (SERVICIO) ;
```

Modelação de Problemas Utilizando a Teoria de Grafos: uma aplicação ao estudo da gestão do material circulante numa rede metropolitana.

!Condição (11) da secção 3.3!

X_FIN_OR_ARR_ARR(I, I) <= DEPOT_UP(I) * @SIZE(SERVICIO);

!Condição (14) da secção 3.3!

X_FIN_OR_ABA_ARR(I, I) <= DEPOT_UP(I) * @SIZE(SERVICIO);

!Condição (13) da secção 3.3!

X_FIN_OR_ARR_ABA(I, I) <= DEPOT_DW(I) * @SIZE(SERVICIO);

!Condição (7) da secção 3.3!

@FOR(LINEA(I) :

@SUM(SERVICIO(J) | HOUP(I, J) #NE# 0 : X_OR_UP(I, J)) = @SUM(LINEA(K) :

X_FIN_OR_ARR_ARR(K, I)) + @SUM(LINEA(K) : X_FIN_OR_ABA_ARR(K, I));

!Condição (8) da secção 3.3!

@FOR(LINEA(I) :

@SUM(SERVICIO(J) | HODW(I, J) #NE# 0 : X_OR_DW(I, J)) = @SUM(LINEA(K) :

X_FIN_OR_ABA_ABA(K, I)) + @SUM(LINEA(K) : X_FIN_OR_ARR_ABA(K, I));

!Função objetivo da secção 3.3!

MIN =

@SUM(LINEA(I) : @SUM(LINEA(K) | K #NE# I :

100 * X_FIN_OR_ABA_ABA(I, K))) +

@SUM(LINEA(I) : @SUM(LINEA(K) | K #NE# I :

100 * X_FIN_OR_ARR_ARR(I, K))) +

@SUM(LINEA(I) : @SUM(LINEA(K) | K #NE# I :

100 * X_FIN_OR_ABA_ARR(I, K))) +

@SUM(LINEA(I) : @SUM(LINEA(K) | K #NE# I :

100 * X_FIN_OR_ARR_ABA(I, K))) +

@SUM(LINEA(I) : @SUM(LINEA(K) | K #EQ# I :

50 * X_FIN_OR_ABA_ARR(I, K))) +

@SUM(LINEA(I) : @SUM(LINEA(K) | K #EQ# I :

50 * X_FIN_OR_ARR_ABA(I, K))) +

@SUM(LINEA(I) : @SUM(SERVICIO(J) | HOUP(I, J) #NE# 0 :

(HOUP(I, J) - 9) * X_OR_UP(I, J))) +

@SUM(LINEA(I) : @SUM(SERVICIO(J) | HODW(I, J) #NE# 0 :

(HODW(I, J) - 9) * X_OR_DW(I, J));

END

Modelação de Problemas Utilizando a Teoria de Grafos: uma aplicação ao estudo da gestão do material circulante numa rede metropolitana.

B.3 OUTPUT DO PROGRAMA APLICADO AO PROBLEMA DA SECÇÃO 3.1

<u>Variable</u>	<u>Value</u>
TIMELIMIT	0.1000000
OUP (1)	9.000000
ODW (1)	11.00000
FUP (1)	10.00000
FDW (1)	15.00000
DEPOT_UP (1)	1.000000
DEPOT_DW (1)	1.000000
NTRENES_UP (1)	1.000000
NTRENES_DW (1)	1.000000
HOUN (1, 1)	9.000000
HOUN (1, 2)	0.000000
HDESTUP (1, 1)	10.00000
HDESTUP (1, 2)	0.000000
X_UP (1, 1)	1.000000
X_UP (1, 2)	0.000000
HODW (1, 1)	11.00000
HODW (1, 2)	14.00000
HDESTDW (1, 1)	12.00000
HDESTDW (1, 2)	15.00000
X_DW (1, 1)	1.000000
X_DW (1, 2)	1.000000
X_DW_FIN (1, 1)	0.000000
X_DW_FIN (1, 2)	0.000000
X_UP_FIN (1, 1)	1.000000
X_UP_FIN (1, 2)	1.000000
X_OR_UP (1, 1)	1.000000
X_OR_UP (1, 2)	0.000000
X_OR_DW (1, 1)	1.000000
X_OR_DW (1, 2)	0.000000
X_FIN_OR_ABA_ABA (1, 1)	0.000000
X_FIN_OR_ABA_ARR (1, 1)	0.000000
X_FIN_OR_ARR_ARR (1, 1)	1.000000
X_FIN_OR_ARR_ABA (1, 1)	1.000000
AUP (1, 1, 1)	1.000000
AUP (1, 1, 2)	1.000000
AUP (1, 2, 1)	0.000000
AUP (1, 2, 2)	0.000000
X_UP_DW (1, 1, 1)	0.000000
X_UP_DW (1, 1, 2)	1.000000
X_UP_DW (1, 2, 1)	0.000000
X_UP_DW (1, 2, 2)	0.000000
ADW (1, 1, 1)	0.000000
ADW (1, 1, 2)	0.000000
ADW (1, 2, 1)	0.000000
ADW (1, 2, 2)	0.000000
X_DW_UP (1, 1, 1)	0.000000
X_DW_UP (1, 1, 2)	0.000000
X_DW_UP (1, 2, 1)	0.000000
X_DW_UP (1, 2, 2)	0.000000

Modelação de Problemas Utilizando a Teoria de Grafos: uma aplicação ao estudo da gestão do material circulante numa rede metropolitana.

ANEXO C

C.1. DADOS DO PROBLEMA DA SECÇÃO 3.2

			Horário		Parque (Não - 0; Sim - 1)
			Início	Fim	
Linha 1	Sul	Início	9,00	0,00	1
		Fim	10,00	0,00	
	Norte	Início	11,00	14,00	1
		Fim	12,00	15,00	
Linha 2	Sul	Início	9,00	13,00	0
		Fim	10,00	14,00	
	Norte	Início	9,00	15,00	0
		Fim	10,00	16,00	

Horário Início (Sul)	HOU P	Linha 1	9,00	0,00
		Linha 2	9,00	13,00
Horário Início (Norte)	HODW	Linha 1	11,00	14,00
		Linha 2	9,00	15,00
Horário Fim (Sul)	HDESTUP	Linha 1	10,00	0,00
		Linha 2	10,00	14,00
Horário Fim (Norte)	HDESTDW	Linha 1	12,00	15,00
		Linha 2	10,00	16,00

Parque		Linha 1	Linha 2
Estação Sul	DEPOTUP	1	0
Estação Norte	DEPOTDW	1	0

Modelação de Problemas Utilizando a Teoria de Grafos: uma aplicação ao estudo da gestão do material circulante numa rede metropolitana.

C.2. OUTPUT DO PROGRAMA APLICADO AO PROBLEMA DA SECÇÃO 3.2

<u>Variable</u>	<u>Value</u>
TIMELIMIT	0.1000000
OUP (1)	9.000000
OUP (2)	9.000000
ODW (1)	11.00000
ODW (2)	11.00000
FUP (1)	10.00000
FUP (2)	10.00000
FDW (1)	15.00000
FDW (2)	15.00000
DEPOT_UP (1)	1.000000
DEPOT_UP (2)	0.000000
DEPOT_DW (1)	1.000000
DEPOT_DW (2)	0.000000
NTRENES_UP (1)	1.000000
NTRENES_UP (2)	1.000000
NTRENES_DW (1)	1.000000
NTRENES_DW (2)	1.000000
HOUP (1, 1)	9.000000
HOUP (1, 2)	0.000000
HOUP (2, 1)	9.000000
HOUP (2, 2)	13.00000
HDESTUP (1, 1)	10.00000
HDESTUP (1, 2)	0.000000
HDESTUP (2, 1)	10.00000
HDESTUP (2, 2)	14.00000
X_UP (1, 1)	1.000000
X_UP (1, 2)	0.000000
X_UP (2, 1)	1.000000
X_UP (2, 2)	1.000000
HODW (1, 1)	11.00000
HODW (1, 2)	14.00000
HODW (2, 1)	9.000000
HODW (2, 2)	15.00000
HDESTDW (1, 1)	12.00000
HDESTDW (1, 2)	15.00000
HDESTDW (2, 1)	10.00000
HDESTDW (2, 2)	16.00000
X_DW (1, 1)	1.000000
X_DW (1, 2)	1.000000
X_DW (2, 1)	1.000000
X_DW (2, 2)	1.000000
X_DW_FIN (1, 1)	0.000000
X_DW_FIN (1, 2)	0.000000
X_DW_FIN (2, 1)	0.000000
X_DW_FIN (2, 2)	1.000000
X_UP_FIN (1, 1)	1.000000
X_UP_FIN (1, 2)	1.000000
X_UP_FIN (2, 1)	0.000000
X_UP_FIN (2, 2)	1.000000

Modelação de Problemas Utilizando a Teoria de Grafos: uma aplicação ao estudo da
gestão do material circulante numa rede metropolitana.

X_OR_UP(1, 1)	1.000000
X_OR_UP(1, 2)	0.000000
X_OR_UP(2, 1)	1.000000
X_OR_UP(2, 2)	0.000000
X_OR_DW(1, 1)	1.000000
X_OR_DW(1, 2)	0.000000
X_OR_DW(2, 1)	1.000000
X_OR_DW(2, 2)	0.000000
X_FIN_OR_ABA_ABA(1, 1)	0.000000
X_FIN_OR_ABA_ABA(1, 2)	0.000000
X_FIN_OR_ABA_ABA(2, 1)	0.000000
X_FIN_OR_ABA_ABA(2, 2)	0.000000
X_FIN_OR_ABA_ARR(1, 1)	0.000000
X_FIN_OR_ABA_ARR(1, 2)	0.000000
X_FIN_OR_ABA_ARR(2, 1)	1.000000
X_FIN_OR_ABA_ARR(2, 2)	0.000000
X_FIN_OR_ARR_ARR(1, 1)	0.000000
X_FIN_OR_ARR_ARR(1, 2)	1.000000
X_FIN_OR_ARR_ARR(2, 1)	0.000000
X_FIN_OR_ARR_ARR(2, 2)	0.000000
X_FIN_OR_ARR_ABA(1, 1)	0.000000
X_FIN_OR_ARR_ABA(1, 2)	1.000000
X_FIN_OR_ARR_ABA(2, 1)	1.000000
X_FIN_OR_ARR_ABA(2, 2)	0.000000
AUP(1, 1, 1)	1.000000
AUP(1, 1, 2)	1.000000
AUP(1, 2, 1)	0.000000
AUP(1, 2, 2)	0.000000
AUP(2, 1, 1)	0.000000
AUP(2, 1, 2)	1.000000
AUP(2, 2, 1)	0.000000
AUP(2, 2, 2)	1.000000
X_UP_DW(1, 1, 1)	0.000000
X_UP_DW(1, 1, 2)	1.000000
X_UP_DW(1, 2, 1)	0.000000
X_UP_DW(1, 2, 2)	0.000000
X_UP_DW(2, 1, 1)	0.000000
X_UP_DW(2, 1, 2)	1.000000
X_UP_DW(2, 2, 1)	0.000000
X_UP_DW(2, 2, 2)	0.000000
ADW(1, 1, 1)	0.000000
ADW(1, 1, 2)	0.000000
ADW(1, 2, 1)	0.000000
ADW(1, 2, 2)	0.000000
ADW(2, 1, 1)	0.000000
ADW(2, 1, 2)	1.000000
ADW(2, 2, 1)	0.000000
ADW(2, 2, 2)	0.000000
X_DW_UP(1, 1, 1)	0.000000
X_DW_UP(1, 1, 2)	0.000000
X_DW_UP(1, 2, 1)	0.000000
X_DW_UP(1, 2, 2)	0.000000
X_DW_UP(2, 1, 1)	0.000000
X_DW_UP(2, 1, 2)	1.000000
X_DW_UP(2, 2, 1)	0.000000
X_DW_UP(2, 2, 2)	0.000000

ANEXO D

D.1 CARACTERIZAÇÃO DA REDE DO METRO DO PORTO

O metro do Porto é um sistema de transportes públicos da área metropolitana do Porto, que consiste numa rede ferroviária eletrificada, subterrânea no centro do Porto e à superfície na periferia. É uma rede relativamente recente constituída por seis linhas, distribuídas por sete concelhos: Porto, Maia, Matosinhos, Póvoa de Varzim, Vila do Conde, Vila Nova de Gaia e Gondomar.

Linha	Azul (A)	Vermelha (B)	Verde (C)	Amarela (D)	Violeta (E)	Laranja (F)
Nome Popular	Linha de Matosinhos	Linha da Póvoa	Linha da Trofa/Maia	Linha de Gaia	Linha do Aeroporto	Linha de Gondomar
Ligação	Senhor de Matosinhos ↕ Estádio do Dragão	Póvoa de Varzim ↕ Estádio do Dragão	Campanhã ↕ ISMAI	Hospital de S. João (Porto) ↕ S. Ovídio (Gaia)	Aeroporto ↕ Estádio do Dragão	Senhora da Hora ↕ Fânzeres
Extensão	15,6 km	33,6 km	19,6 km	9,2 km	16,7 km	17,4 km
Nº de Estações	23	35	25	16	21	24
Tempo de viagem	39 m 35 s	61 m 30 s	41 m	24 m 45 s	34 m 40 s	39 m
Melhor frequência	10 m	30 m	15 m	6 m	30 m	15 m

Tabela D.1 – Linhas do metro do Porto, cf. [34].

Modelação de Problemas Utilizando a Teoria de Grafos: uma aplicação ao estudo da gestão do material circulante numa rede metropolitana.

A linha A é a principal e historicamente a mais importante das seis linhas do metro do Porto e conta com as seguintes estações: Senhor de Matosinhos, Mercado, Brito Capelo, Matosinhos Sul, Câmara de Matosinhos, Parque Real, Pedro Hispano, Estádio do Mar, Vasco da Gama, Senhora da Hora (ligação às linhas B, C, E e F), Sete Bicas, Viso, Ramalde, Francos, Casa da Música, Carolina Michaëlis, Lapa, Trindade (ligação à linha D), Bolhão, Campo 24 de Agosto, Heroísmo, Campanhã (ligação à linha C) e Estádio do Dragão (ligação às linhas B, E e F). Nesta linha as viagens têm uma frequência de 10 minutos entre as 7 e as 20 horas, entre as estações de Senhor de Matosinhos e de Estádio do Dragão, com alguns veículos a terem seguimento para Fânzeres. Entre as 6 e as 7 horas e a partir das 20 horas, a frequência é de 15 minutos, no entanto, as viagens a partir das 21 horas ligam apenas as estações de Senhor de Matosinhos e de Trindade.

A linha B tem dois tipos de serviços, o normal que efetua paragens em todas as estações: Póvoa de Varzim, São Brás, Portas Fronhas, Alto do Pega, Vila do Conde, Santa Clara, Azurara, Árvore, Varziela, Espaço Natureza, Mindelo, Modivas Centro, Modivas Sul, Vilar Pinheiro, Lidador, Pedras Rubras, Verdes (ligação à linha E), Crestins, Esposade, Custóias, Fonte do Cuco (ligação à linha C), Senhora da Hora (ligação às linhas A e F), Sete Bicas, Viso, Ramalde, Francos, Casa da Música, Carolina Michaëlis, Lapa, Trindade (ligação à linha D), Bolhão, Campo 24 de Agosto, Heroísmo, Campanhã (ligação à linha C) e Estádio do Dragão (ligação às linhas A, E e F); e o Expresso, que efetua paragens nas estações: Póvoa de Varzim, Portas Fronhas, Vila do Conde, Varziela, Mindelo, Pedras Rubras, Senhora da Hora (ligação às linhas A, C, E e F) e nas estações seguintes, até ao Estádio do Dragão (ligação às linhas A, E e F), tendo uma frequência de 30 minutos e um tempo de viagem de 53 minutos.

A linha C aproveita o antigo traçado da antiga linha de Guimarães até à Trofa, com exceção do centro da Maia, onde efetua um pequeno desvio, de modo a servir o centro da cidade, permitindo assim o acesso do concelho da Maia à rede do metro do Porto. A linha C contempla as seguintes estações: ISMAI, Castelo da Maia, Mandim, Zona Industrial, Fórum da Maia, Parque da Maia, Custió, Araújo, Pias, Cândido dos

Modelação de Problemas Utilizando a Teoria de Grafos: uma aplicação ao estudo da gestão do material circulante numa rede metropolitana.

Reis, Fonte do Cuco (ligação às linhas B e E), Senhora da Hora (ligação às linhas A e F), Sete Bicas, Viso, Ramalde, Francos, Casa da Música, Carolina Michaëlis, Lapa, Trindade (ligação à linha D), Bolhão, Campo 24 de Agosto, Heroísmo e Campanhã (ligação às linhas A, B, E, e F)

A linha D desempenha um papel fundamental no eixo Norte-Sul do sistema de transportes públicos da área metropolitana do Porto. Fazem parte desta linha as seguintes estações: Santo Ovídio, D. João II, João de Deus, Câmara de Gaia, General Torres, Jardim do Morro, São Bento, Aliados, Trindade (ligação às linhas A, B, C, E e F), Faria Guimarães, Marquês, Combatentes, Salgueiros, Pólo Universitário, IPO e Hospital de São João.

A linha E liga a cidade do Porto, desde o Estádio do Dragão, ao seu Aeroporto, no concelho da Maia. Esta linha usa o canal da linha B, acrescentando 1480m e duas novas estações. As estações desta linha são: Aeroporto, Botica, Verdes (ligação à linha B) Crestins, Esposade, Custóias, Fonte do Cuco (ligação à linha C), Senhora da Hora (ligação às linhas A e F), Sete Bicas, Viso, Ramalde, Francos, Casa da Música, Carolina Michaëlis, Lapa, Trindade (ligação à linha D), Bolhão, Campo 24 de Agosto, Heroísmo, Campanhã (ligação à linha C) e Estádio do Dragão (ligação às linhas A, B e F).

A linha F efetua serviço em tronco comum com a linha B, até à Senhora da Hora, mas conta com mais 10 estações. Esta linha serve a zona Este da área metropolitana do Porto, servindo zonas de elevada densidade populacional. Entre as estações de Estádio do Dragão e de Venda Nova, a linha descreve um “V” invertido: parte da freguesia de Campanhã, no Porto, segue para Norte até Rio Tinto e Baguim do Monte, descendo depois até Cabanas. Cerca de um quilómetro do trajeto faz-se em túnel, cruzando a fronteira entre Porto e Gondomar e evitando conflitos com as linhas da CP e com a estrada da Circunvalação. As estações desta linha são: Senhora da Hora (ligação às linhas A, B, C e E), Sete Bicas, Viso, Ramalde, Francos, Casa da Música, Carolina Michaëlis, Lapa, Trindade (ligação à linha D), Bolhão, Campo 24 de Agosto, Heroísmo, Campanhã (ligação à linha C), Estádio do Dragão (ligação às linhas A, B e

Modelação de Problemas Utilizando a Teoria de Grafos: uma aplicação ao estudo da gestão do material circulante numa rede metropolitana.

E), Contumil, Nasoni, Nau Vitória, Levada, Rio Tinto, Campainha, Baguim, Carreira, Venda Nova e Fânzeres.

Da rede do metro do Porto apenas fazem parte os cinco túneis seguintes:

TÚNEL	EXTENSÃO (em metros)
Campanhã – Trindade	2300
Salgueiros – Ponte	4000
Lapa	500
Túnel J	274
Contumil – Rio Tinto	950

Tabela D.2 – Túneis do Metro do Porto, cf. [34].

O Túnel Campanhã – Trindade permite fazer a ligação entre as estações de Campanhã e Trindade. O túnel serve cinco linhas: A, B, C, E e F e ao longo do túnel estão as estações do Bolhão, do Campo 24 de Agosto e do Heroísmo.

O túnel Salgueiros – Ponte permite fazer a ligação entre a estação de Salgueiros e a Ponte Luís I. O túnel serve a linha D e ao longo do túnel podemos encontrar as estações de Salgueiros, dos Combatentes, do Marquês, de Faria Guimarães, da Trindade II, dos Aliados e de São Bento.

O Túnel da Lapa é um túnel que permite fazer a ligação entre as estações da Lapa e da Trindade. Faz ainda a ligação ao Túnel J, que é usado apenas por composições fora de serviço, e que permite a circulação de comboios entre a rede principal (que engloba as linhas A, B, C, E e F) e o Túnel Salgueiros – Ponte (linha D), pois o seu objetivo é fazer a transferência de composições das linhas A, B, C, E e F para a linha D e vice-versa.

O Túnel Contumil – Rio Tinto permite fazer a ligação entre as estações de Nau Vitória e Levada, fronteira da cidade do Porto com o município de Gondomar, servindo

Modelação de Problemas Utilizando a Teoria de Grafos: uma aplicação ao estudo da gestão do material circulante numa rede metropolitana.

a linha F. Este túnel foi construído para evitar conflitos com as linhas da CP e com a Estrada da Circunvalação.

A rede do metro tem uma extensão total de 70 quilómetros de linhas comerciais duplicadas, maioritariamente à superfície, com 9,5 quilómetros de rede “enterrada”, com 81 estações, das quais 14 são subterrâneas.

A sua frota é constituída por 102 veículo que, em cada linha e em cada sentido, podem transportar 9000 pessoas por hora. O metro é movido a eletricidade e, portanto, extremamente silencioso.

A frota do metro é constituída por dois tipos de veículos, o Eurotram e o Flexity Swift. Os primeiros são 72, têm capacidade para 80 passageiros e podem atingir uma velocidade máxima de 80 km/h, enquanto os segundos, mais robustos, mais confortáveis e com maior capacidade de transporte (100 passageiros), são 30, podendo atingir 100 quilómetros horários. Os veículos Flexity Swift destinam-se prioritariamente às linhas vermelha e verde.

Os dois tipos de veículos podem ser acoplados em conjuntos de dois (composições duplas), onde cada composição tem uma cabine (locomotiva) em cada extremo.

Em média, os comboios permanecem parados durante 30 segundos nas estações de término e de correspondência e durante 20 segundos nas restantes.

D.2 MAPA DA REDE DO METRO DO PORTO

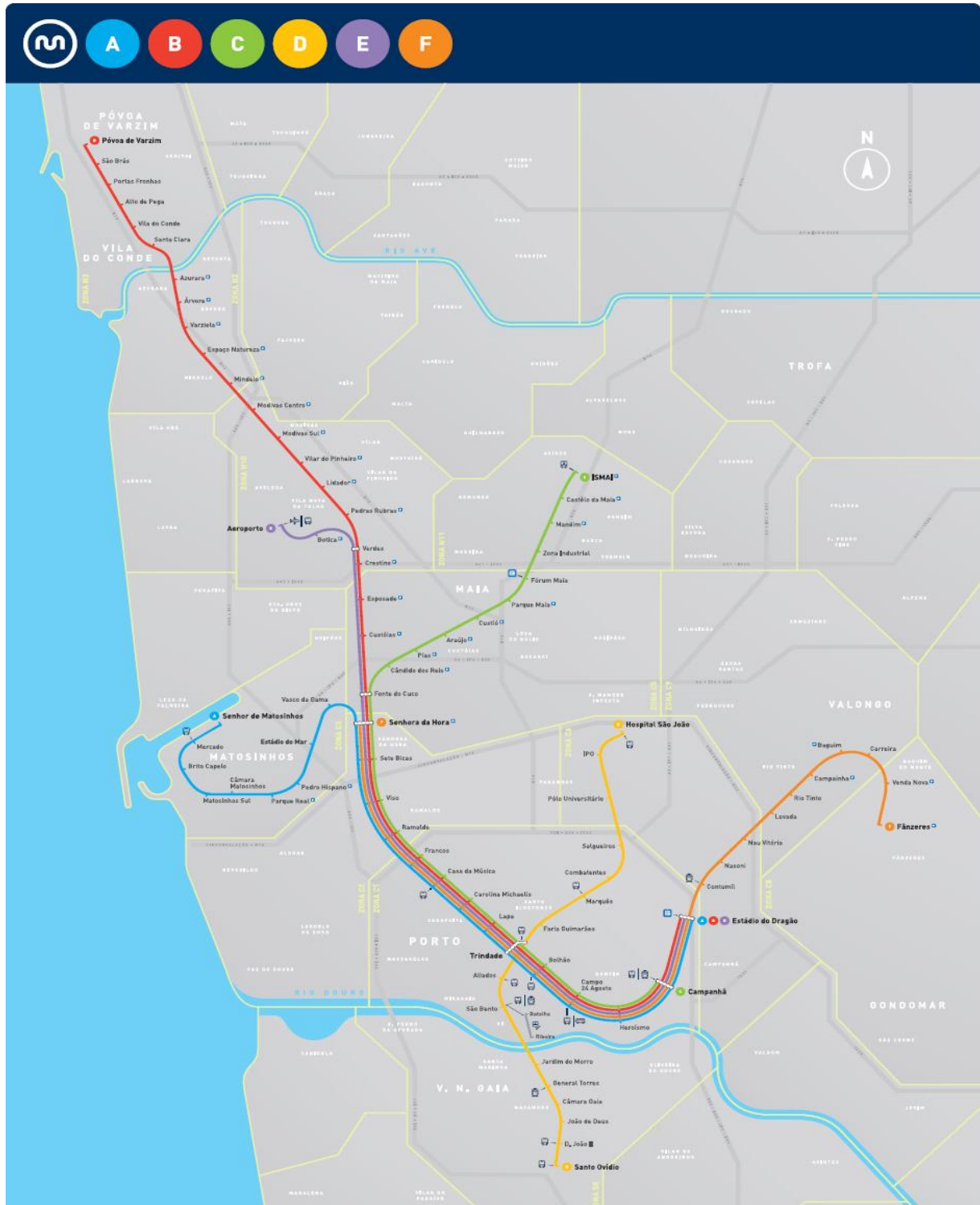


Fig. D.1 – Mapa da rede do Metro do Porto, retirado de [34].