

# Curvas Geodésicas em Superfícies

by J. P. FATELO AND N. MARTINS-FERREIRA

ESTG, CDRSP,  
Instituto Politécnico de Leiria

## 1 Introdução

O nome *Geodésica* tem a sua origem na Grécia antiga onde já se sabia que a Terra ("Geo") não era plana. Como encontrar o caminho mais curto entre lugares da superfície terrestre era então uma questão importante. Daí em diante, as curvas de menor comprimento entre dois pontos numa determinada superfície ficaram conhecidas como geodésicas. A noção de geodésica foi formalizada com rigor a partir do século XVIII, com o surgimento do cálculo diferencial. No início do século XX, a teoria da relatividade geral, na qual as geodésicas têm um papel de destaque (ver por exemplo [3]), veio definitivamente reforçar a importância do estudo destas curvas.

No espaço euclidiano, todos aprendemos que o caminho mais curto entre dois pontos é o segmento de reta que os liga. Em geometria não euclidiana, encontrar uma geodésica é, em geral, uma tarefa árdua que, na maior parte dos casos, se consegue realizar apenas com a ajuda de aproximações numéricas. O objetivo deste artigo é introduzir, de forma concisa, as ferramentas necessárias para abordar este problema no caso de superfícies em  $\mathbb{R}^3$ . Em particular, são apresentadas as equações diferenciais que a parametrização de uma curva geodésica deve verificar.

Vejamus um exemplo: considere a superfície cônica, parcialmente representada na figura seguinte, na qual os pontos **A** e **B** pertencem a um paralelo, ou seja, a uma circunferência contida na superfície e num plano perpendicular ao eixo de simetria da mesma.

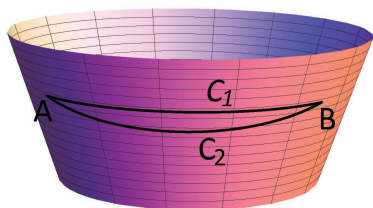


Fig. 1: Vista parcial de um cone com um paralelo e uma geodésica

Numa primeira análise, poderíamos pensar que a distância mais curta, sobre a superfície, entre **A** e **B** seria percorrida ao longo do paralelo que liga os dois pontos (curva  $C_1$  assinalada na figura). Todavia, isso não corresponde

à verdade, uma vez que girar em torno do cone sobre paralelos de menor raio equivale a uma menor distância percorrida. Contudo, um desvio de  $C_1$  também implica percorrer uma distância adicional. Assim, é necessário ponderar o que se ganha em percorrer um perímetro mais curto e o que se perde ao afastar-se da curva  $C_1$ . A solução para este problema de otimização é naturalmente uma geodésica que, no caso da figura, é a curva  $C_2$ .

A determinação de geodésicas numa superfície cônica é relativamente simples, principalmente porque o cone é localmente isométrico a um plano, o que significa, em particular, que as geodésicas no cone são as imagens de retas do plano. O mesmo acontece numa superfície cilíndrica. Mas, em geral, o problema de encontrar as geodésicas numa superfície qualquer é bastante mais complicado.

Uma superfície regular  $\sigma$  em  $\mathbb{R}^3$  pode ser parametrizada por uma função  $\vec{\sigma} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  da forma

$$\vec{\sigma}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (1)$$

onde  $x$ ,  $y$  e  $z$  são funções diferenciáveis de duas variáveis reais. Por exemplo, a função vetorial  $\vec{s}$  definida por

$$\vec{s}(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, r^2), \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad r \geq 0$$

parametriza um parabolóide elíptico,

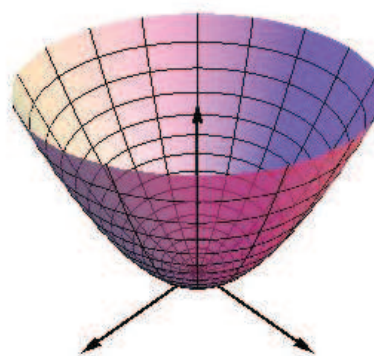


Fig. 2: Parabolóide elíptico

enquanto a função

$$\vec{w}(x, y) = (x, y, x^2 - y^2), \quad x, y \in \mathbb{R}$$

parametriza um parabolóide hiperbólico.

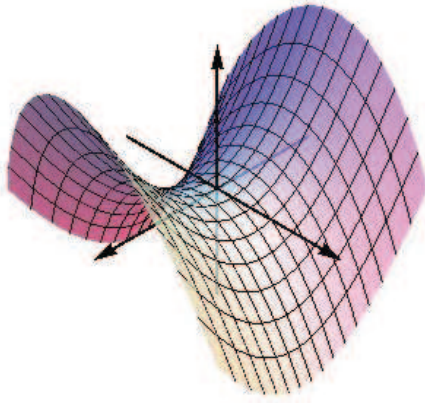


Fig. 3: Paraboloide hiperbólico

## 2 Equações das geodésicas

Se uma superfície é parametrizada conforme (1), então uma curva dessa superfície admite a parametrização

$$\vec{r}(t) = \vec{\sigma}(u(t), v(t)), \quad t \in I \subseteq \mathbb{R}, \quad (2)$$

onde  $u$  e  $v$  são funções reais de uma variável real. Por conseguinte, a uma curva de superfície com determinadas características estão associadas expressões específicas  $u = u(t)$  e  $v = v(t)$ . Em particular, se a superfície for Riemanniana, ou seja, se estiver equipada de uma métrica, é possível dar um significado ao comprimento de uma curva e caracterizar curvas geodésicas.

Para determinar a métrica correspondente a uma superfície Riemanniana parametrizada por (1), consideram-se variações infinitesimais  $du$  e  $dv$  dos parâmetros  $u$  e  $v$  às quais corresponde um deslocamento infinitesimal  $\vec{d\sigma}$  na superfície dado por

$$\vec{d\sigma} = \left( \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv, \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv, \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv \right).$$

O tensor métrico  $g$  é uma matriz simétrica ( $g_{ij} = g_{ji}$ ) definida, através da norma  $ds = \|\vec{d\sigma}\|$ , por

$$(ds)^2 = (du \ dv) g \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}.$$

Por exemplo, os tensores métricos dos paraboloides elíptico e hiperbólico apresentados acima são, respetivamente, os seguintes:

$$g_s = \begin{pmatrix} 1 + 4r^2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}, \quad g_w = \begin{pmatrix} 1 + 4x^2 & -4xy \\ -4xy & 1 + 4y^2 \end{pmatrix}.$$

Conhecendo o tensor métrico associado a uma superfície, podemos calcular o comprimento  $L$  de uma curva limitada da mesma, digamos  $\gamma$ , pela fórmula

$$L = \int_{\gamma} ds.$$

Dados dois pontos, um caminho geodésico entre eles é uma curva que, pelo menos localmente, minimiza  $L$ . Mostra-se (ver por exemplo [2]) que, numa superfície Riemanniana  $\sigma$  em  $\mathbb{R}^3$ , o problema de encontrar uma curva geodésica parametrizada pela expressão (2) reduz-se à resolução do seguinte sistema de equações diferenciais de 2.<sup>a</sup> ordem não lineares acopladas:

$$\ddot{u} + \Gamma_{11}^1 \dot{u}^2 + 2\Gamma_{12}^1 \dot{u}\dot{v} + \Gamma_{22}^1 \dot{v}^2 = 0 \quad (3)$$

$$\ddot{v} + \Gamma_{11}^2 \dot{u}^2 + 2\Gamma_{12}^2 \dot{u}\dot{v} + \Gamma_{22}^2 \dot{v}^2 = 0. \quad (4)$$

Uma variável com um "ponto" sobreposto representa a derivada da variável em ordem ao parâmetro  $t$ :

$$\dot{u} = \frac{du}{dt}, \quad \dot{v} = \frac{dv}{dt}, \quad \ddot{u} = \frac{d^2u}{dt^2}, \quad \ddot{v} = \frac{d^2v}{dt^2}.$$

Os oito coeficientes  $\Gamma_{ij}^k$  ( $i, j, k = 1, 2$ ), chamados símbolos de Christoffel, podem ser obtidos diretamente a partir do tensor métrico  $g$  através da fórmula

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^3 (g^{-1})^{kl} (g_{il,j} + g_{jl,i} - g_{ij,l}),$$

onde  $(g^{-1})^{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ) são os elementos do tensor inverso de  $g$  e as derivadas de  $g$  são denotadas por

$$g_{ij,1} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial u}, \quad g_{ij,2} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial v}.$$

Na resolução das equações diferenciais, é crucial notar que qualquer solução  $(u, v)$  do sistema de equações (3) e (4) verifica a condição

$$g_{11} \dot{u}^2 + 2g_{12} \dot{u}\dot{v} + g_{22} \dot{v}^2 = C. \quad (5)$$

Esta propriedade, que facilmente se demonstra, tem como interpretação física o facto de uma geodésica ser percorrida a velocidade constante  $\|\frac{ds}{dt}\| = C \in \mathbb{R}$ . Efetivamente, é possível deduzir as equações (3) e (4) impondo a condição que a aceleração de uma partícula que percorre uma geodésica deve ser perpendicular à superfície, não havendo nenhuma aceleração tangencial (e portanto nenhuma força tangencial) aplicada à partícula. Isto significa que uma geodésica é o caminho que uma partícula livre, em movimento, percorre naturalmente.

Segue a apresentação explícita das equações (3) e (4) em dois casos particulares importantes: superfícies de revolução e gráfico de uma função real de duas variáveis reais.

## 3 Superfícies de revolução

Uma superfície de revolução é obtida por rotação de uma curva plana simples de  $\mathbb{R}^3$  em torno de uma reta contida no mesmo plano da curva e que não a intersesta. Esta reta é designada por eixo de revolução. Sem perda de generalidade, podemos escolher o eixo de revolução como sendo

o eixo dos  $z$ . Neste caso, a parametrização de uma superfície de revolução toma a seguinte forma

$$\vec{\sigma}(\alpha, \theta) = (r(\alpha) \cos \theta, r(\alpha) \sin \theta, z(\alpha)), \quad (6)$$

onde as funções  $r$  e  $z$  são funções diferenciáveis e  $\theta \in [0, 2\pi[$ . Por exemplo, com  $r(\alpha) = \alpha$ ,  $z(\alpha) = \alpha^2$  e  $\alpha \geq 0$ , obtemos a parametrização de um parabolóide elíptico; com  $r(\alpha) = 2 + \cos \alpha$ ,  $z(\alpha) = \sin \alpha$  e  $\alpha \in [0, 2\pi[$ , obtemos a parametrização de um *torus* [4].

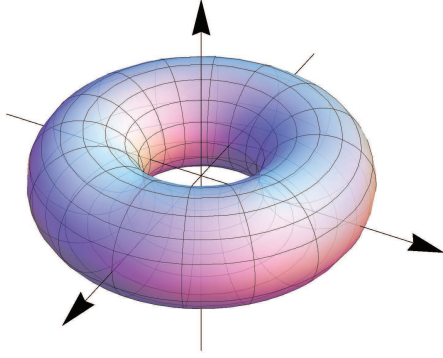


Fig. 4: Torus

Numa superfície de revolução parametrizada conforme (6), o sistema de equações (3)-(4) assume a seguinte forma:

$$\ddot{\alpha} = \frac{r r'}{r'^2 + z'^2} \dot{\theta}^2 - \frac{r' r'' + z' z''}{r'^2 + z'^2} \dot{\alpha}^2$$

$$r \ddot{\theta} = -2 r' \dot{\theta} \dot{\alpha}.$$

No exemplo do cone com parametrização

$$\vec{\sigma}(\alpha, \theta) = (\alpha \cos \theta, \alpha \sin \theta, \alpha)$$

estas equações reduzem-se a

$$\ddot{\alpha} = \frac{\alpha}{2} \dot{\theta}^2$$

$$r \ddot{\theta} = -2 \dot{\theta} \dot{\alpha},$$

e a equação (5), com a escolha  $C = 1$ , escreve-se

$$2 \dot{\alpha}^2 + \alpha^2 \dot{\theta}^2 = 1.$$

Este sistema de equações admite a solução  $\dot{\alpha}(t) = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$  e  $\dot{\theta}(t) = 0$ , o que significa que qualquer geratriz do cone é um caminho geodésico. As outras soluções têm a seguinte forma:

$$\alpha(t) = \sqrt{C_1^2 + \frac{(t + C_2)^2}{2}}$$

$$\theta(t) = \sqrt{2} \arctg\left(\frac{t + C_2}{\sqrt{2} C_1}\right) + C_3.$$

Os valores das constantes  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$  distinguem as várias geodésicas existentes na mesma superfície. Por exemplo, a indicação de um ponto por onde passa uma

determinada geodésica bem como de um vetor unitário tangente à geodésica nesse ponto determina essas constantes. Vale a pena observar que a escolha  $C = 1$  pode ser substituída pela escolha de outro valor constante de  $C$ , mudando assim apenas a parametrização da curva geodésica mas não a curva em si. Na figura seguinte estão representados alguns caminhos geodésicos no cone exemplificado.

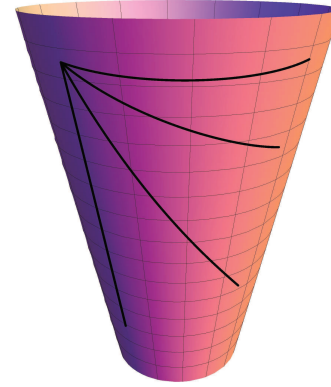


Fig. 5: Exemplo de caminhos geodésicos numa superfície de revolução

## 4 Gráfico de uma função

O gráfico de uma função  $f$ , real de duas variáveis reais, é convenientemente parametrizado por

$$\vec{\sigma}(x, y) = (x, y, f(x, y)). \quad (7)$$

Neste caso, as geodésicas  $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), f(x(t), y(t)))$  são obtidas após resolver o seguinte sistema de equações diferenciais

$$\ddot{x} = \frac{-f_x}{1 + f_x^2 + f_y^2} (f_{xx} \dot{x}^2 + 2f_{xy} \dot{x} \dot{y} + f_{yy} \dot{y}^2)$$

$$\ddot{y} = \frac{-f_y}{1 + f_x^2 + f_y^2} (f_{xx} \dot{x}^2 + 2f_{xy} \dot{x} \dot{y} + f_{yy} \dot{y}^2).$$

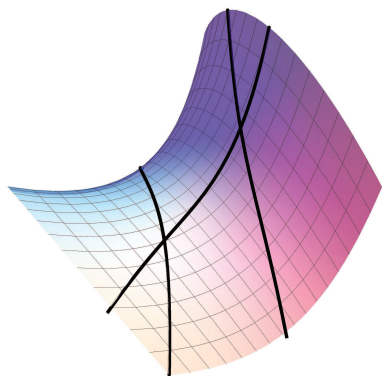
É usada a notação  $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$  e similarmente para as derivadas parciais de segunda ordem  $f_{xx}$ ,  $f_{xy}$  e  $f_{yy}$ . No exemplo do parabolóide hiperbólico apresentado no início, as equações reduzem-se a

$$\ddot{x} = \frac{4x}{1 + 4x^2 + 4y^2} (\dot{y}^2 - \dot{x}^2)$$

$$\ddot{y} = \frac{4y}{1 + 4x^2 + 4y^2} (\dot{x}^2 - \dot{y}^2).$$

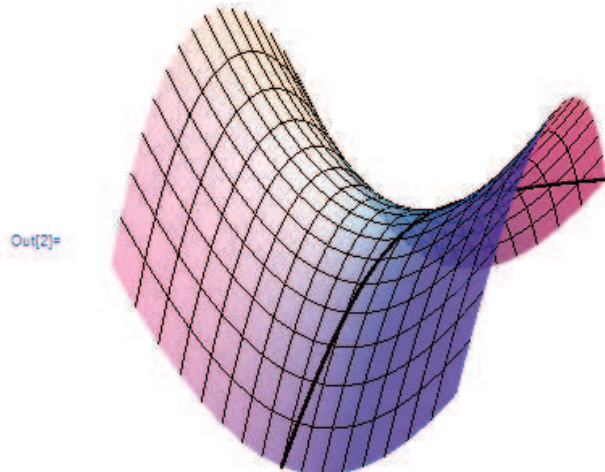
Na próxima figura estão representadas algumas curvas geodésicas no parabolóide hiperbólico obtidas por aproximação numérica de soluções das equações anteriores.

Fig. 6: Exemplo de caminhos geodésicos numa superfície



Na maioria dos casos, a determinação de geodésicas é possível apenas com o apoio de aplicações computacionais. As soluções apresentadas geometricamente neste artigo, bem como as figuras expostas foram geradas usando a aplicação Mathematica [1]. Segue um exemplo com duas linhas de comando no Mathematica para determinar e representar uma geodésica e a superfície considerada.

```
In[1]:= sol = NDSolve[{{x''[t] =  $\frac{-4x[t]}{1+4(x[t])^2+4(y[t])^2} (x'[t]^2 - y'[t]^2)$ ,
  y''[t] =  $\frac{4y[t]}{1+4x[t]^2+4y[t]^2} (x'[t]^2 - y'[t]^2)$ , x[0] = 0,
  y[0] = -1, x[10] = 1, y[10] = 1}, {x, y}, {t, 0, 10}]
Out[1]:= {{x -> InterpolatingFunction[{{0., 10.}}, <>], y -> InterpolatingFunction[{{0., 10.}}, <>]}}
In[2]:= Show[ParametricPlot3D[{x, y, x^2 - y^2}, {x, -1, 1}, {y, -1, 1},
  Boxed -> False, Axes -> False, PlotStyle -> Directive[Opacity[0.75]]],
  ParametricPlot3D[Evaluate[{x[t], y[t], x[t]^2 - y[t]^2} /. sol, {t, 0, 10}],
  PlotRange -> All, PlotStyle -> {Thickness[0.0075], Black}], ImageSize -> 350]
```



## References

- [1] Wolfram Research, Inc., Mathematica, Version 9.0, Champaign, IL (2012).
- [2] A. Pressley, *Elementary Differential Geometry, 2nd Edition*, Springer Undergraduate Mathematics Series, London, 2010.
- [3] L. Ryder, *Introduction to general relativity*, Cambridge University Press, New York, 2009.
- [4] R. T. Jantzen, *Geodesics on the Torus and other Surfaces of Revolution Clarified Using Undergraduate Physics Tricks with Bonus: Nonrelativistic and Relativistic Kepler Problems*, <http://arxiv.org/abs/1212.6206> [math.DG], 2012.