

Dissertação para obtenção do grau de  
Mestre em Matemática, especialidade  
em Matemática Pura, ramo de Álgebra.



## **AGRADECIMENTOS**

À Professora Doutora Olga Maria da Silva Azenhas, pelo apoio e orientação durante a realização desta dissertação. Os seus conhecimentos e a sua disponibilidade foram determinantes para a concretização deste trabalho.

À Andrea, pelo incentivo e paciência ao longo das diversas fases deste trabalho e, sobretudo, por tudo quanto prescindiu para que chegasse este momento.

À minha família e amigos, pelas manifestações de apoio e pela minha ausência neste período.

A todos os meus colegas que, de alguma forma, me ajudaram na realização deste trabalho.



# Índice

<b>1</b>	<b>Preliminares</b>	<b>1</b>
1.1	Relações de congruência . . . . .	1
1.2	Monóide livre . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Quadros de Young e algoritmo de inserção Schensted</b>	<b>11</b>
2.1	Quadros de Young . . . . .	11
2.2	Algoritmo de inserção de Schensted . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Monóide pláxico e invariantes de Greene</b>	<b>25</b>
3.1	As relações de Knuth e o monóide pláxico . . . . .	26
3.2	Invariantes de Greene . . . . .	30
3.3	Caracterização das classes pláxicas num bialfabeto . . . . .	39
<b>4</b>	<b>O monóide dos quadros de Young</b>	<b>43</b>
4.1	Produto de quadros pelo algoritmo de Schensted . . . . .	44
4.2	Produto de quadros pelo <i>jeu de taquin</i> . . . . .	46
<b>5</b>	<b>Correspondência de Robinson-Schensted</b>	<b>57</b>
5.1	Quadro de inserção . . . . .	58
5.2	Simetria entre os quadros $P(w)$ e $Q(w)$ . . . . .	64
<b>6</b>	<b>Operações copláticas</b>	<b>75</b>
6.1	Classes copláticas . . . . .	76

6.2	Operadores lineares na álgebra livre $\mathbb{Z}\langle A \rangle$ . . . . .	78
6.3	Palavras de Yamanouchi . . . . .	90
6.4	Grafos de cristal . . . . .	95
<b>7</b>	<b>Uma acção do grupo simétrico na álgebra livre <math>\mathbb{Z}\langle A \rangle</math></b>	<b>107</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>117</b>

# Introdução

Neste trabalho estudamos construções combinatórias em quadros de Young. Destacamos o algoritmo de inserção de Schensted e o algoritmo de deslizamento de Schützenberger ou “*jeu de taquin*”. O algoritmo de inserção de Schensted associa a uma palavra no alfabeto  $A$  um único quadro de Young no alfabeto  $A$ , chamado quadro de Schensted. A relação definida pelas palavras, no monóide livre  $A^*$ , com o mesmo quadro de Schensted, é uma congruência  $\equiv$  em  $A^*$ , chamada congruência pláxica. Esta congruência em  $A^*$  é gerada pelas relações de Knuth e, por isso, também chamada congruência de Knuth. O monóide  $A^*/\equiv$  é chamado o monóide pláxico no alfabeto  $A$ . Como numa classe pláxica existe um único quadro de Young, o conjunto  $Tab(A)$  dos quadros de Young, no alfabeto  $A$ , fica então munido com a estrutura de monóide, pondo o produto de dois quadros  $P_1$  e  $P_2$  igual ao quadro congruente com a palavra  $P_1 P_2$ . O produto de dois quadros, no alfabeto  $A$ , pode ser calculado de duas formas: usando o algoritmo de inserção de Schensted ou o *jeu de taquin*. O *jeu de taquin* transforma um quadro truncado no alfabeto  $A$  num quadro de Young no alfabeto  $A$ , congruente com a palavra do quadro truncado. A correspondência de Robinson-Schensted estabelece uma bijecção entre palavras de  $A^*$  e pares de quadros  $(P, Q)$ , onde  $P$  é um quadro no alfabeto  $A$  e  $Q$  é um quadro standard com a mesma forma de  $P$ . Fixando o quadro  $P$  nesta bijecção concluímos que os elementos da classe pláxica de  $P$  estão em bijecção com os quadros standard com a forma de  $P$ . O conjunto das palavras em  $A^*$  com um mesmo quadro de inserção  $Q$ , classes copláxicas no alfabeto  $A$ , são as componentes conexas de um grafo colorido em  $A^*$  onde as arestas são definidas à custa dos operadores  $e_i$  e  $f_i$  na álgebra livre associativa  $\mathbb{Z}\langle A \rangle$ . A estrutura das classes copláxicas fica perfeitamente determinada pelas componentes conexas cujo conjunto dos vértices é  $Tab(A, \lambda)$ , os quadros no alfabeto  $A$  com forma  $\lambda$ . Por fim, obtemos uma representação linear de  $S_n$  na álgebra livre  $\mathbb{Z}\langle A \rangle$ .

No primeiro capítulo deste texto, expomos algumas noções e resultados utilizados nos capítulos seguintes. Estudamos relações de equivalência num conjunto, congruências num semigrupo e congruências geradas por uma relação num semigrupo. Introduzimos ainda as noções de alfabeto, de monóide livre e outros conceitos relativos a palavras. Nos capítulos seguintes,  $A$  denotará sempre um alfabeto finito e totalmente ordenado e  $A^*$  o monóide livre das palavras no alfabeto  $A$ .

No segundo capítulo, fazemos uma breve digressão pela combinatória dos quadros de Young e dos quadros de Young truncados. Descrevemos o algoritmo de inserção de Schensted que associa a cada palavra  $w \in A^*$  um e um só quadro de Young,  $P(w) = \mathbf{t}$ , quadro de Schensted de  $w$ . O passo fundamental deste algoritmo consiste em inserir uma letra  $x \in A$  num quadro  $\mathbf{t}$ . O resultado é um novo quadro com mais uma letra que  $\mathbf{t}$  e as entradas serão as letras de  $\mathbf{t}$  juntamente com a letra  $x$ . Este algoritmo, que é reversível, deve-se a C. Schensted [20] e foi criado com o objectivo de determinar o comprimento máximo de uma subpalavra não decrescente, ou decrescente, de  $w$ .

Uma vez que podem existir várias palavras com o mesmo quadro de Schensted, no terceiro capítulo, começamos por investigar a relação entre as palavras no alfabeto  $A$  com o mesmo quadro de Schensted. Esta relação é uma relação de equivalência em  $A^*$ . Ao estudarmos a relação entre duas palavras, no alfabeto  $A$ , de comprimento três da forma  $(2, 1)$  e com o mesmo quadro de Schensted, obtemos as relações de Knuth [9] em  $A^*$ . Estas relações geram uma congruência  $\equiv$  em  $A^*$ , chamada congruência plácica ou de Knuth. Ao monóide  $A^*/\equiv$  chamamos monóide plácico. De facto, duas palavras são congruentes à Knuth se e só se tiverem o mesmo quadro de Schensted. Mais, cada classe plácica em  $A^*$ , conjunto das palavras no alfabeto  $A$  com um mesmo quadro de Schensted, contém exactamente um quadro de Young no alfabeto  $A$ . Ou seja, o conjunto dos quadros de Young no alfabeto  $A$  é um transversal para  $A^*$ . Esta unicidade é fulcral para os capítulos seguintes. O desenvolvimento desta teoria apoia-se nos invariantes plácicos de Greene [4]. Os invariantes plácicos de Greene interpretam a forma de um quadro de Young em função dos comprimentos das subpalavras não decrescentes e decrescentes das palavras congruentes com esse quadro. Mais exactamente, os invariantes plácicos de Greene [4],

$l_k(w)$  e  $l'_k(w)$ , são o máximo das somas dos comprimentos de  $k$  linhas disjuntas de  $w$  e o máximo das somas dos comprimentos de  $k$  colunas disjuntas de  $w$ , respectivamente. Estes números não são alterados pelas relações de Knuth e o teorema de Greene mostra que  $l_k(w)$  e  $l'_k(w)$  são iguais à soma das primeiras  $k$  linhas e colunas do quadro  $P(w)$ , respectivamente. Como corolário do teorema de Greene obtemos o teorema de Schensted: o comprimento máximo de uma subpalavra não decrescente de  $w$ ,  $l_1(w)$ , é dado por  $\lambda_1$ , o número de caixas da primeira linha de  $P(w)$ , e o comprimento máximo de uma qualquer subpalavra decrescente de  $w$ ,  $l'_1(w)$ , é dado por  $\lambda'_1$ , o número de caixas da primeira coluna de  $P(w)$ . Na parte final deste capítulo descrevemos as classes pláxicas sobre um bialfabeto.

No quarto capítulo, sabendo que cada classe pláxica em  $A^*$  contém um único quadro de Young no alfabeto  $A$ , estudamos o monóide  $Tab(A)$  dos quadros de Young no alfabeto  $A$ . O produto de dois quadros  $P_1, P_2 \in Tab(A)$  é o único quadro de Young na classe pláxica da palavra  $P_1P_2 \in A^*$ , obtida por concatenação das palavras  $P_1$  e  $P_2$ . Este produto pode ser calculado de duas formas. Primeiro utilizamos o algoritmo de inserção Schensted. O produto de  $P_1$  por  $P_2$ , calculado por este algoritmo, é o resultado da inserção das letras de  $P_2$  no quadro  $P_1$ . Outra forma de calcular o produto de dois quadros é usando o algoritmo de deslizamento de Schützenberger, ou *jeu de taquin* [3]. Este algoritmo, que é também reversível, transforma um quadro truncado num quadro de Young, que é congruente com a palavra do quadro truncado. Estes dois cálculos produzem o mesmo resultado porque cada classe pláxica contém apenas um quadro, neste caso, o único quadro congruente com a palavra  $P_1P_2$ .

No capítulo seguinte estudamos a correspondência de Robinson-Schensted [17], [20] que estabelece uma bijecção entre as palavras de  $A^*$  e os pares de quadros  $(P, Q)$ , onde  $P$  é um quadro no alfabeto  $A$  e  $Q$  um quadro standard com a mesma forma de  $P$ . Para  $w \in A^*$ ,  $P(w)$  é o quadro obtido pela aplicação do algoritmo de inserção de Schensted à palavra  $w$  e  $Q(w)$  o quadro standard, com a mesma forma de  $P(w)$ , que regista a ordem pela qual as letras de  $w$  vão sendo inseridas na construção de  $P(w)$  pelo algoritmo de inserção de Schensted. Se o quadro  $P$  for também um quadro standard, obtemos a correspondência de Robinson [17], que estabelece uma bijecção entre permutações e

pares de quadros standard. Se na correspondência de Robinson-Schensted fixarmos o quadro  $P$ , obtemos uma bijecção entre a classe pláxica do quadro  $P$  e o conjunto dos quadros standard com a forma de  $P$ . Investigamos ainda a relação de simetria entre estes quadros  $P(w)$  e  $Q(w)$ . No caso de  $w$  ser uma palavra standard, digamos com  $n$  letras, podemos considerar  $w$  como uma permutação  $\sigma$  em  $S_n$  e o quadro  $Q(\sigma)$  é igual ao quadro  $P(\sigma^{-1})$ . Ou seja, se  $(P, Q)$  parametriza a palavra  $\sigma$ , então  $(Q, P)$  parametriza a palavra  $\sigma^{-1}$ . Assim a correspondência de Robinson-Schensted para palavras standard toma a forma  $\sigma \rightsquigarrow (P(\sigma), P(\sigma^{-1}))$ . Usando o conceito de standardização de uma palavra, generalizamos este resultado para o caso geral de  $w \in A^*$ .

No sexto capítulo verificamos que o conjunto das palavras no alfabeto  $A$  com um mesmo quadro de inserção, chamado classe copláxica de  $A^*$ , tem a estrutura de grafo colorido. Para isso, definimos os operadores lineares  $e_i$ ,  $f_i$  e  $\sigma_i$  na álgebra livre associativa  $\mathbb{Z}\langle A \rangle$ . Esta álgebra pode ser identificada com a álgebra dos polinómios de variáveis não-comutativas  $a_1, \dots, a_n$  cuja base é formada pelos monómios nestas variáveis, ou seja, pelas palavras no alfabeto  $A$ . Estes operadores lineares não alteram o quadro de inserção de uma palavra e são compatíveis com a congruência pláxica. As palavras cuja forma é igual à valoração, são chamadas de Yamanouchi, e verificam a propriedade: se uma classe pláxica contém uma palavra de Yamanouchi, então contém apenas palavras de Yamanouchi. Isto quer dizer que toda a classe copláxica contém uma e uma só palavra de Yamanouchi. A unicidade advém do facto de o quadro de inserção, que indexa a classe copláxica, ter a mesma forma que o quadro de Yamanouchi. Munidos dos operadores  $e_i$  e  $f_i$  e das palavras de Yamanouchi, estamos em condições de definir um digrafo  $\Gamma$  colorido cujos vértices são as palavras de  $A^*$  e as arestas são definidas à custa dos operadores  $f_i$ . As classes copláxicas são as componentes conexas deste digrafo. Como duas classes copláxicas são isomorfas, como subgrafos de  $\Gamma$ , se e só se estão indexadas por dois quadros standard da mesma forma; para conhecer o grafo colorido das classes copláxicas basta conhecer os grafos coloridos das classes copláxicas dos quadros de Yamanouchi. Estes grafos coloridos são também chamados de cristal da partição  $\lambda$ , quando o quadro de Yamanouchi tem forma  $\lambda$ , os seus vértices são todos os quadros de Young de forma  $\lambda$  no alfabeto  $\{1, 2, \dots, |\lambda|\}$ .

Finalmente, no último capítulo, mostramos que os operadores  $\sigma_i$  satisfazem as relações de Moore-Coxeter. Determinamos, deste modo, uma representação linear de  $S_n$  na álgebra livre  $\mathbb{Z}\langle A \rangle$ .

Ao longo deste trabalho, a numeração das definições, proposições, teoremas, exemplos, etc., é consecutiva e constituída por dois números em que o primeiro indica o capítulo e o segundo a sua ordem nesse capítulo. Em alguns casos, no sentido de facilitar uma consulta rápida de um assunto, será também indicada a página onde este se encontra.



# Capítulo 1

## Preliminares

Neste capítulo introduzimos alguns conceitos e resultados básicos para este trabalho. Relação de equivalência, classe de equivalência, conjunto quociente, congruência num semigrupo e congruência gerada por uma relação num semigrupo. Estes conceitos e resultados são importantes para a introdução do monóide pláxico no capítulo 3. Apresentamos ainda a noção de monóide livre  $A^*$ , sobre um alfabeto finito  $A$ , e outras noções relacionadas com palavras, necessárias ao longo deste trabalho.

Para o estudo de relações de equivalência e congruências consultámos as referências GRILLET [5], HOWIE [6] e SOBRAL [21]. Para os conceitos relacionados com monóides livres e palavras consultámos FULTON [3], HOWIE [7] e LOTHAIRE [14].

### 1.1 Relações de congruência

Seja  $X$  um conjunto não vazio. Uma **relação (binária)**  $R$  em  $X$  é um subconjunto de  $X \times X = \{(a, b) : a, b \in X\}$ . Escrevemos  $aRb$  para designar  $(a, b) \in R$ .

Uma **relação de equivalência** em  $X$  é uma relação  $R$  em  $X$  tal que,  $aRa$ ,  $aRb$  implica  $bRa$  e, se  $aRb$  e  $bRc$ , então  $aRc$ , para  $a, b, c \in X$ . Neste contexto, a **classe de equivalência** de  $a \in X$  é o conjunto  $[a] = \{b \in X : aRb\}$ .

O resultado seguinte, de fácil verificação, mostra que o conjunto das classes de equivalência de  $X$ , por uma relação de equivalência  $R$ , define uma **partição** de  $X$ .

**Proposição 1.1** *Se  $R$  é uma relação de equivalência em  $X$  então:*

- (a)  $[a]$  é não vazio, para qualquer  $a \in X$ ;
- (b) Ou  $[a]$  e  $[b]$  são disjuntos ou  $[a] = [b]$ , para quaisquer  $a, b \in X$ , e
- (c)  $\bigcup_{a \in X} [a] = X$ .

O **conjunto quociente** de  $X$  pela relação de equivalência  $R$ ,  $\mathbf{X}/R$ , é o conjunto das classes de equivalência de  $X$  pela relação  $R$ .

Dada uma relação de equivalência  $R$  em  $X$ , consideramos a aplicação que associa a cada elemento de  $X$  o conjunto dos elementos que lhe são equivalentes. Desta forma obtemos a **projecção canónica** como sendo a aplicação sobrejectiva

$$\begin{aligned} p : X &\longrightarrow X/R. \\ a &\longmapsto [a] \end{aligned}$$

Relações de equivalência em  $X$  são, em primeiro lugar, relações binárias e, como tal, subconjuntos de  $X \times X$ . Isto quer dizer que, se  $R$  é uma relação de equivalência em  $X$ , então  $R \subseteq X \times X$ . Nestas condições, dada uma família não vazia de relações de equivalência em  $X$ ,  $\{R_i : i \in I\}$ ,

$$R^\cap := \bigcap_{i \in I} R_i$$

é também uma relação de equivalência em  $X$ .

De facto, para  $a \in X$ , como  $R_i$  é uma relação de equivalência em  $X$ , para qualquer  $i \in I$ , então  $aR_i a$ , isto é,  $(a, a) \in R_i$ , para todo o  $i \in I$ . Logo  $(a, a) \in R^\cap$ , ou seja,  $aR^\cap a$ . Agora, para  $a, b \in X$ , se  $aR^\cap b$  então, para qualquer  $i \in I$ ,  $aR_i b$  e, como todos os  $R_i$  são relações de equivalência em  $X$ ,  $bR_i a$ , para todo o  $i \in I$ . Assim  $(b, a) \in R_i$ , para qualquer  $i \in I$ , logo  $(b, a) \in R^\cap$ , isto é,  $bR^\cap a$ . Finalmente, para  $a, b, c \in X$ , se  $aR^\cap b$  e  $bR^\cap c$  então, para qualquer  $i \in I$ ,  $aR_i b$  e  $bR_i c$ . Mas, como todo o  $R_i$  é uma relação de equivalência em  $X$ ,  $aR_i b$  e  $bR_i c$  implica que  $aR_i c$ , para todo o  $i \in I$ . Portanto  $(a, c) \in R_i$ , qualquer que seja o  $i \in I$ , logo  $aR^\cap c$ .

Seja  $R$  uma relação em  $X$ . A família das relações de equivalência em  $X$  que contêm  $R$  é não vazia, uma vez que  $X \times X$  é uma relação de equivalência em  $X$ . Assim, a intersecção de todas as relações de equivalência em  $X$  que contêm  $R$  é também uma relação de equivalência em  $X$  que contém  $R$  e é mínima, no sentido da inclusão, uma vez que está contida nas anteriores. Esta relação de equivalência designa-se **relação de equivalência em  $X$  gerada por  $R$** . [6]

**Definição 1.2** Dada uma operação binária  $\cdot$  em  $X$ , uma relação de equivalência  $\rho$  em  $X$  diz-se uma **congruência** em  $X$  quando, para quaisquer  $a, b, c, d \in X$ , se  $a \rho b$  e  $c \rho d$  então  $a \cdot c \rho b \cdot d$ .

Um **semigrupo**  $(S, \cdot)$  é um conjunto não vazio  $S$  munido de uma operação binária  $\cdot$  **associativa**, isto é, para  $a, b, c \in S$ ,  $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ . Quando não houver ambiguidade, escrevemos simplesmente  $S$  e  $ab$  no lugar de  $(S, \cdot)$  e  $a \cdot b$ , respectivamente. Se existir em  $S$  um elemento  $1_S$  tal que  $1_S a = a 1_S = a$ , para qualquer  $a \in S$ ,  $S$  diz-se um **monóide** e  $1_S$  a **identidade** de  $S$ .

Assim, dada uma congruência  $\rho$  num semigrupo  $S$ , definimos uma operação binária  $\otimes$  no conjunto quociente  $S/\rho$  da seguinte forma:

$$[a] \otimes [b] := [ab].$$

Esta operação encontra-se bem definida uma vez que, para  $a, a', b, b' \in S$ , se  $[a] = [a']$  e  $[b] = [b']$ , então  $a \rho a'$  e  $b \rho b'$ . Como  $\rho$  é congruência em  $S$ ,  $ab \rho a'b'$ , isto é,  $[ab] = [a'b']$ , o que implica que  $[a] \otimes [b] = [a'] \otimes [b']$ .

Facilmente se verifica que a operação  $\otimes$  é associativa, uma vez que a operação no semigrupo  $S$  é associativa. Então  $(S/\rho, \otimes)$  é um semigrupo. Se  $S$  for um monóide com identidade  $1_S$ ,  $(S/\rho, \otimes)$  é também um monóide com identidade  $[1_S] \in S/\rho$ .

Verificamos agora que a intersecção de uma família não vazia de congruências num semigrupo  $S$ ,  $\{\rho_i : i \in I\}$ , é ainda uma congruência em  $S$ .

De facto, escrevendo

$$\rho^\cap := \cap \{\rho_i : i \in I\},$$

$\rho^\cap$  é uma relação de equivalência em  $S$ , porque é a intersecção das relações de equivalência  $\rho_i$  em  $S$ . Agora, dados  $a, b, a', b' \in S$  tais que  $a \rho^\cap b$  e  $a' \rho^\cap b'$  temos  $a \rho_i b$  e  $a' \rho_i b'$ , para qualquer  $i \in I$ . Uma vez que  $\rho_i$  é uma congruência em  $S$ ,  $aa' \rho_i bb'$ , para todo o  $i \in I$ . Assim  $aa' \rho^\cap bb'$  e  $\rho^\cap$  é uma congruência em  $S$ .

Seja  $R$  uma relação num semigrupo  $S$ . A família das congruências em  $S$  que contêm  $R$  é não vazia, uma vez que  $S \times S$  é uma congruência em  $S$ . Então, a intersecção de todas as congruências em  $S$  que contêm  $R$  é uma congruência em  $S$  que contém  $R$  e é mínima, no sentido da inclusão, uma vez que está contida nas anteriores. Esta congruência diz-se a **congruência em  $S$  gerada por  $R$** . [5], [6]

A proposição seguinte mostra que uma relação de equivalência em  $S$  é uma congruência em  $S$  quando a projecção canónica for um homomorfismo.

**Proposição 1.3** *Para uma relação de equivalência  $\rho$  num semigrupo  $(S, \cdot)$ , as seguintes condições são equivalentes:*

- (a)  $\rho$  é uma congruência em  $S$ .
- (b)  $p : (S, \cdot) \longrightarrow (S/\rho, \otimes)$  é um homomorfismo.  
 $a \longmapsto [a]$

**Demonstração:**

$$(a) \Rightarrow (b)$$

Sejam  $a, b \in S$ . Assim  $p(ab) = [ab] = [a] \otimes [b] = p(a) \otimes p(b)$ .

$$(b) \Rightarrow (a)$$

Sejam  $a, b, c, d \in S$  tais que  $a \rho b$  e  $c \rho d$ . Então  $[a] = [b]$  e  $[c] = [d]$ .

Assim  $[ac] = [a] \otimes [c] = [b] \otimes [d] = [bd]$ .

Logo  $ac \rho bd$ . ■

**Exemplo 1.4**

Seja  $f : (S, \cdot) \longrightarrow (T, +)$  um homomorfismo de semigrupos, isto é,  $(S, \cdot)$  e  $(T, +)$  são semigrupos e, para  $x, y \in S$ ,  $f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$ .

O núcleo de  $f$ ,

$$\mathbf{Ker}(f) := \{(x, y) \in S \times S : f(x) = f(y)\},$$

é uma congruência em  $S$ .

Prova-se facilmente que  $\mathbf{Ker}(f)$  é uma relação de equivalência em  $S$ .

Como, para  $x, x', y, y' \in S$  tais que  $x \mathbf{Ker}(f) y$  e  $x' \mathbf{Ker}(f) y'$ , temos

$$f(x) = f(y) \text{ e } f(x') = f(y'),$$

então, pelo facto de  $f$  ser um homomorfismo,

$$f(x \cdot x') = f(x) + f(x') = f(y) + f(y') = f(y \cdot y').$$

Assim  $x \cdot x' \mathbf{Ker}(f) y \cdot y'$  e  $\mathbf{Ker}(f)$  é uma congruência em  $S$ .

Definindo a projecção canónica  $p_{\mathbf{Ker}(f)} : S \longrightarrow S/\mathbf{Ker}(f)$

$$x \longmapsto [x]_{\mathbf{Ker}(f)} = \{y \in S : f(y) = f(x)\},$$

existe um homomorfismo injectivo  $\psi : S/\mathbf{Ker}(f) \longrightarrow T$  tal que o diagrama seguinte comuta.

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{p_{\mathbf{Ker}(f)}} & S/\mathbf{Ker}(f) \\ f \searrow & & \downarrow \psi \\ & & T \end{array} .$$

Para tal basta definir  $\psi : (S/\mathbf{Ker}(f), \otimes) \longrightarrow (T, +)$

$$[x]_{\mathbf{Ker}(f)} \longmapsto f(x).$$

$\psi$  está bem definido porque  $[x]_{\mathbf{Ker}(f)} = [y]_{\mathbf{Ker}(f)} \Leftrightarrow x \mathbf{Ker}(f) y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$ .

$\psi$  é um homomorfismo pois  $\psi \left( [x]_{\mathbf{Ker}(f)} \otimes [y]_{\mathbf{Ker}(f)} \right) = \psi \left( [x \cdot y]_{\mathbf{Ker}(f)} \right)$

$$= f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$$

$$= \psi \left( [x]_{\mathbf{Ker}(f)} \right) \otimes \psi \left( [y]_{\mathbf{Ker}(f)} \right).$$

$$\begin{aligned} \psi \text{ é injectivo porque } \psi \left( [x]_{Ker(f)} \right) = \psi \left( [y]_{Ker(f)} \right) &\Leftrightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow x \text{ Ker}(f) y \\ &\Leftrightarrow [x]_{Ker(f)} = [y]_{Ker(f)}. \end{aligned}$$

Verifica-se facilmente que  $Im(\psi) = Im(f)$  e o diagrama comuta pois, para  $x \in S$ ,  
 $\psi(p_{Ker(f)}(x)) = \psi([x]_{Ker(f)}) = f(x)$ .

## 1.2 Monóide livre

Um conjunto finito e não vazio  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  diz-se um **alfabeto**. Se, além disso,  $A$  é um conjunto totalmente ordenado,  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ , dizemos que  $A$  é um **alfabeto ordenado**. Aos elementos de  $A$  chamamos **letras** do alfabeto.

Uma **palavra** de **comprimento**  $m \geq 1$  é uma sequência finita  $(x_1, x_2, \dots, x_m)$  de elementos de  $A$ . Definimos o conjunto  $A^+$  de todas as sequências finitas  $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ , com  $x_1, x_2, \dots, x_m \in A$  e  $m \geq 1$ .  $A^+$  é um semigrupo com a operação

$$(x_1, x_2, \dots, x_m)(y_1, y_2, \dots, y_k) = (x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_k). \quad (1.2.1)$$

Uma vez que  $(x_1, x_2, \dots, x_m)$  é o produto finito  $(x_1)(x_2)\dots(x_m)$  de sequências de comprimento 1, todo o elemento de  $A^+$  se pode escrever de forma única como um produto finito de elementos de  $A$ . Assim, as sequências de comprimento 1 geram o semigrupo  $A^+$ .

Nestas condições, identificando cada elemento  $x \in A$  com a sequência  $(x)$  de comprimento 1, podemos escrever os elementos de  $A^+$  como  $w = x_1x_2\dots x_m$  pondo

$$w = x_1x_2\dots x_m := (x_1)(x_2)\dots(x_m) = (x_1, x_2, \dots, x_m).$$

Duas **palavras**  $x_1x_2\dots x_m$  e  $y_1y_2\dots y_k$ , num alfabeto  $A$ , são **iguais** quando  $m = k$  e  $x_i = y_i$ , para  $i = 1, \dots, m$ .

A operação definida em (1.2.1) corresponde à **justaposição**, ou **concatenação**, de palavras

$$(x_1x_2\dots x_m)(y_1y_2\dots y_k) = x_1x_2\dots x_my_1y_2\dots y_k.$$

Nestas condições, o conjunto  $A^+$  com a operação (1.2.1) chama-se **semigrupo livre no alfabeto  $A$** .

**Observação 1.5** *Uma vez que  $A \subseteq A^+$ , existe uma aplicação injectiva  $i : A \longrightarrow A^+$  dada por  $i(a) = a$ , para qualquer  $a \in A$ , chamada **função inclusão**.*

Consideremos agora a sequência vazia (a palavra sem letras) no alfabeto  $A$ . A esta palavra chamamos **palavra vazia**, que representamos por  $\Phi$ . Então, juntando a  $A^+$  a palavra vazia obtemos o monóide  $A^*$ , que se designa por **monóide livre no alfabeto  $A$** . Notemos que o alfabeto  $A$  é um conjunto finito mas  $A^*$  é um monóide infinito. [7]

Para uma palavra  $w = x_1x_2 \dots x_m, m \geq 0$ , denotamos o seu comprimento por  $|w| = m$ . A palavra vazia é a (única) palavra de comprimento nulo. Notemos que, para  $w_1, w_2 \in A^*$ ,  $|w_1w_2| = |w_1| + |w_2|$ .

Para  $w \in A^*$ , denotamos por  $|w|_{a_i}$  o número vezes que a letra  $a_i$  ocorre na palavra  $w$ , para  $i = 1, 2, \dots, n$ . Assim, definimos **valoração** ou **peso** de uma palavra  $w \in A^*$  como sendo o vector

$$\mathbf{val}(w) = (|w|_{a_1}, |w|_{a_2}, \dots, |w|_{a_n}).$$

Se  $\mathbf{val}(w) = (|w|_{a_1}, |w|_{a_2}, \dots, |w|_{a_n}) = (1, 1, \dots, 1)$ , isto é, se a palavra  $w$  contém todas as letras do alfabeto  $A$  e estas ocorrem uma e uma só vez, dizemos que  $w$  é uma **palavra standard**.

Seja  $w = x_1x_2 \dots x_m \in A^*$ . Uma **subpalavra** de  $w$  é uma subsequência das letras de  $w$ , e um **factor** de  $w$  é uma subpalavra de  $w$  onde as letras são consecutivas. Duas **subpalavras**  $u = u_{i_1}u_{i_2} \dots u_{i_p}$  e  $v = v_{j_1}v_{j_2} \dots v_{j_q}$  de  $w$  dizem-se **disjuntas** quando os conjuntos  $\{i_1, i_2, \dots, i_p\}, \{j_1, j_2, \dots, j_q\} \subseteq \{1, 2, \dots, m\}$  são disjuntos.

Para  $I \subseteq A$ , denotamos por  $w|_I$  a subpalavra de  $w$  obtida de  $w$  eliminando as letras que não estão em  $I$ .

**Exemplo 1.6**

- Consideremos o alfabeto  $A = \{1, 2\}$ .

Então  $A^+ = \{1, 2, 11, 12, 21, 22, 111, 112, 121, 122, 211, 212, 221, 222, 1111, \dots\}$ .

No caso geral, se  $\#A = n$  então existem  $n^m$  palavras de comprimento  $m$ .

$A^+$  é sempre um semigrupo infinito.

- Consideremos agora a palavra  $w = 3221532$  no alfabeto  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ .

Esta palavra tem comprimento  $|w| = 7$  e valoração  $val(w) = (1, 3, 2, 0, 1)$ .

$w' = 3221 = x_1x_2x_3x_4$ ,  $w'' = 32 = x_6x_7$  e  $w''' = 2252 = x_2x_3x_5x_7$  são exemplos de subpalavras de  $w$ , sendo  $w'$  e  $w''$  factores de  $w$ , pois as suas letras são consecutivas em  $w$ .

As subpalavras  $w'$  e  $w''$  de  $w = \underline{3221}5\underline{32}$  são disjuntas.

$w|_{\{2,3,4\}} = 32232$  é uma subpalavra de  $w$ , no alfabeto  $\{2, 3, 4\}$ , precisamente a subpalavra que se obtém de  $w$  eliminando as letras 1 e 5.

**Teorema 1.7** *Sejam  $A$  um alfabeto,  $(M, \cdot, 1_M)$  um monóide e  $\varphi : A \rightarrow M$  uma aplicação. Então existe um único homomorfismo  $\psi : A^* \rightarrow M$  tal que o seguinte diagrama comuta,*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & A^* \\ \varphi \searrow & & \downarrow \psi \\ & & M \end{array} ,$$

onde  $i : A \rightarrow A^*$ ,  $i(a) = a$ , é a aplicação inclusão.

Este teorema é ainda válido para um semigrupo  $S$ , considerando  $A^+$  em vez de  $A^*$ .

**Demonstração:**

Definimos  $\psi(\Phi) = 1_M$  e

$\psi(x_1x_2 \dots x_m) = \varphi(x_1)\varphi(x_2)\dots\varphi(x_m)$ , para  $x_1, x_2, \dots, x_m \in A$ .

A aplicação  $\psi$  é um homomorfismo porque, dadas duas palavras  $x_1x_2 \dots x_m$  e

$y_1y_2 \dots y_k \in A^*$ ,

$$\begin{aligned}
\psi((x_1x_2\dots x_m)(y_1y_2\dots y_k)) &= \psi(x_1x_2\dots x_my_1y_2\dots y_k) \\
&= \varphi(x_1)\varphi(x_2)\dots\varphi(x_m)\varphi(y_1)\varphi(y_2)\dots\varphi(y_k) \\
&= (\varphi(x_1)\varphi(x_2)\dots\varphi(x_m))(\varphi(y_1)\varphi(y_2)\dots\varphi(y_k)) \\
&= \psi(x_1x_2\dots x_m)\psi(y_1y_2\dots y_k).
\end{aligned}$$

Por outro lado, para  $a \in A$ ,  $\psi(i(a)) = \psi(a) = \varphi(a)$ , logo o diagrama comuta.

Se existisse um outro homomorfismo  $\psi'$  tal que, para  $a \in A$ ,  $\psi'(i(a)) = \varphi(a)$

então, para  $x_1x_2\dots x_m \in A^*$ ,

$$\begin{aligned}
\psi'(x_1x_2\dots x_m) &= \psi'(i(x_1)i(x_2)\dots i(x_m)) \\
&= \psi'(i(x_1))\psi'(i(x_2))\dots\psi'(i(x_m)) \\
&= \varphi(x_1)\varphi(x_2)\dots\varphi(x_m) \\
&= \psi(x_1x_2\dots x_m).
\end{aligned}$$

Logo  $\psi = \psi'$ , concluindo-se a unicidade de  $\psi$ . ■

Uma vez que  $A \subseteq A^*$ , o teorema anterior mostra que a restrição de  $\psi$  a  $A$ ,  $\psi|_A$ , é  $\varphi$ .

Dizemos então que  $\psi$  **estende**  $\varphi$  a  $A^*$ .

Uma consequência importante deste teorema é o resultado seguinte.

**Proposição 1.8** *Seja  $(M, \cdot, 1_M)$  um monóide finito. Então existe um alfabeto finito  $A$  e uma congruência  $\rho$  em  $A^*$  tal que  $A^*/\rho \cong M$ .*

Um resultado semelhante existe para semigrupos.

**Demonstração:**

Sejam  $A$  o conjunto de geradores de  $M$  e  $i_M : A \rightarrow M$ ,  $i_M(a) = a$ , o homomorfismo inclusão.

Pelo teorema anterior existe um único homomorfismo  $\psi : A^* \rightarrow M$ , que coincide com a inclusão em  $A$ .

$\psi$  é sobrejectivo porque, para qualquer  $x \in M$ ,  $x$  é o produto  $x_1x_2\dots x_m$  de elementos de  $A$ . Ora  $x_1, x_2, \dots, x_m \in A$ , logo  $\psi(x_1x_2\dots x_m) = x$ .

Considerando a congruência  $\rho = \text{Ker}(\psi)$ , pelo exemplo 1.4 concluímos que  $A^*/\rho \cong M$ . ■

Uma **linguagem** no alfabeto  $A$  é um subconjunto de  $A^*$ , isto é, um conjunto de palavras no alfabeto  $A$ .

Nos capítulos seguintes,  $A$  denotará sempre um alfabeto totalmente ordenado de  $n$  letras,  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$  e, se nada for dito em contrário, o alfabeto usado será  $A = \{1, 2, \dots, n\}$ , para algum  $n \in \mathbb{N}$ , onde  $\mathbb{N}$  denota o conjunto dos inteiros positivos.

## Capítulo 2

# Quadros de Young e algoritmo de inserção Schensted

Introduzimos agora as noções de diagrama de Young, quadro de Young, diagrama truncado, quadro truncado e palavras associadas, respectivamente, a um quadro de Young e a um quadro truncado.

Em seguida, descrevemos um algoritmo criado em 1961, por C. Schensted [20], para dar resposta ao seguinte problema, “*Dada uma palavra  $w$ , qual o comprimento máximo de uma subpalavra não decrescente de  $w$ ?*”. Este algoritmo associa a uma palavra  $w \in A^*$  um quadro de Young,  $P(w) = \mathbf{t}$ , chamado quadro de Schensted, e dá a solução a este problema sem ser necessário determinar uma subpalavra não decrescente de  $w$  de comprimento máximo. A demonstração deste resultado só será efectuada no capítulo seguinte.

Para o desenvolvimento destes temas seguimos as referências FULTON [3], LOTHAIRE [14] e SCHENSTED [20].

### 2.1 Quadros de Young

Um **diagrama de Young** é uma colecção de caixas ajustadas à esquerda que, em número, não crescem do fundo para o topo. Contando, num diagrama de Young, o

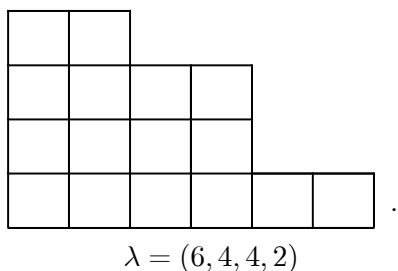
número de caixas por linha (do fundo para o topo) obtemos uma sequência não crescente de inteiros positivos  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$  que dá uma **partição** do número de caixas do diagrama  $m = |\lambda| = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k$ . A  $|\lambda|$  chamamos o **peso** da partição  $\lambda$ .

Convencionamos que um diagrama de Young sem caixas define a partição nula, denotado por 0.

Nestas condições, qualquer diagrama de Young representa uma partição e toda a partição  $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k = m \geq 0$  tal que  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k$ ,  $k \geq 0$ , pode ser representada por um diagrama de Young.

### Exemplo 2.1

À partição do número 16 em  $6 + 4 + 4 + 2$  corresponde o diagrama de Young

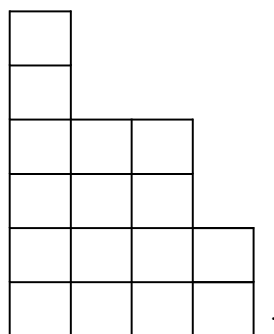


A **partição conjugada** de uma partição  $\lambda$  é obtida contando, no diagrama de Young que representa a partição  $\lambda$ , o número de caixas por coluna (da esquerda para a direita) no quadro de  $\lambda$ . Obtemos, também neste caso, uma sequência não crescente  $\lambda' = (\lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_{k'})$  de inteiros positivos.

### Exemplo 2.2

A partição conjugada de  $\lambda = (6, 4, 4, 2)$  é  $\lambda' = (4, 4, 3, 3, 1, 1)$ , que também é uma

partição do número 16.



$$\lambda' = (4, 4, 3, 3, 1, 1)$$

As linhas de um diagrama são contadas de cima para baixo e as colunas da esquerda para a direita. No exemplo anterior, a primeira linha tem uma caixa e a última quatro, a primeira coluna tem seis caixas e a última duas.

Designamos por **preencher** a acção de colocar números (naturais) nas caixas do diagrama de Young e por **numerar** quando estes números forem todos distintos.

**Definição 2.3** Um **quadro de Young**, ou simplesmente **quadro**, é um diagrama de Young preenchido de forma a que os números nele dispostos verifiquem as seguintes condições: (QY1) são crescentes por coluna (do fundo para o topo do diagrama) e (QY2) são não decrescentes por linha (da esquerda para a direita do diagrama). Quando se numera um diagrama de Young  $\lambda$ , de 1 a  $|\lambda|$ , nas condições (QY1) e (QY2) obtemos um quadro de Young designado por **quadro de Young standard**.

#### Exemplo 2.4

5	6				
4	4	6	6		
2	3	5	5		
1	2	2	3	3	5

(1) Quadro de Young

11	12				
7	8	13	14		
3	4	9	10		
1	2	5	6	15	16

(2) Quadro de Young standard

Dado um quadro de Young, podemos ler nesse quadro uma palavra  $\mathbf{t}$  da seguinte forma: justapomos da esquerda para a direita as letras de cada linha  $i$  do quadro, obtendo-se as palavras  $l_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ . Justapondo estas palavras, da primeira para a última linha do quadro, obtemos a palavra  $\mathbf{t} = l_1 l_2 \dots l_k$ . A sequência não crescente  $(|l_k|, \dots, |l_2|, |l_1|)$  é chamada a **forma** de  $\mathbf{t}$ .

No exemplo (1) anterior temos  $l_1 = 56$ ,  $l_2 = 4466$ ,  $l_3 = 2355$  e  $l_4 = 122335$ , sendo então  $\mathbf{t} = 56\ 4466\ 2355\ 122335$ .

A forma da palavra  $\mathbf{t} = 56\ 4466\ 2355\ 122335$  é  $\lambda = (6, 4, 4, 2)$ .

Notemos que  $16 = |w| = |\lambda| = 6 + 4 + 4 + 2$ .

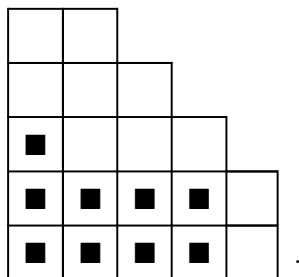
Sejam  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$  e  $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s)$  duas partições. Escrevemos  $\mu \subseteq \lambda$  quando  $s \leq r$  e  $\mu_i \leq \lambda_i$ , para qualquer  $i = 1, 2, \dots, s$ , isto é, se o diagrama de  $\mu$  está contido no diagrama de  $\lambda$ .

**Definição 2.5** *Sejam  $\mu$  e  $\lambda$  duas partições tais que  $\mu \subseteq \lambda$ . Definimos **diagrama truncado**  $\lambda / \mu$  ao diagrama obtido removendo do diagrama  $\lambda$  o diagrama  $\mu$ .*

*Se  $\mu = 0$ , o diagrama truncado  $\lambda / 0$  coincide com o diagrama de  $\lambda$ .*

### Exemplo 2.6

Consideremos as partições  $\mu = (4, 4, 1) \subseteq \lambda = (5, 5, 4, 3, 2)$ . Temos então o diagrama truncado  $(5, 5, 4, 3, 2) / (4, 4, 1)$ :



Os cantos interiores e exteriores deste diagrama truncado, representados por  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{Y}$

respectivamente, são

	Y			
		Y		
X			Y	
■	■	■	X	Y
■	■	■	■	

**Definição 2.7** Dadas as partições  $\lambda$  e  $\mu$  tais que  $\mu \subseteq \lambda$ , chamamos **quadro truncado**  $T$  da forma  $\lambda / \mu$  a um diagrama truncado  $\lambda / \mu$  preenchido de modo a que os números nele dispostos sejam estritamente crescentes por coluna (do fundo para o topo do diagrama) e não decrescentes por linha (da esquerda para a direita do diagrama).

Quando  $\mu = 0$  o quadro truncado de forma  $\lambda / 0$  é o quadro de forma  $\lambda$ .

### Exemplo 2.8

Um exemplo de um quadro truncado, de forma  $(5, 5, 4, 3, 2) / (4, 4, 1)$ , é:

5	5			
3	3	6		
	2	3	4	
				3
				2

Sejam  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$  e  $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s)$  duas partições tais que  $\mu \subseteq \lambda$ . Podemos também obter dum quadro truncado  $T$  da forma  $\lambda / \mu$  uma palavra, que representamos por  $w(T)$ , da seguinte forma. Justapomos, da esquerda para a direita, as letras de cada linha  $i$  do quadro, obtendo-se as palavras  $l_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , e justapomos estas palavras, da primeira para a última linha do quadro, de onde obtemos a palavra  $w(T) = l_1 l_2 \dots l_k$ .

No exemplo anterior temos  $l_1 = 55$ ,  $l_2 = 336$ ,  $l_3 = 234$ ,  $l_4 = 3$  e  $l_5 = 2$ , sendo então  $w(T) = 55\ 336\ 234\ 3\ 2$ .

Um quadro de Young pode também ser definido usando uma relação entre subpalavras. Consideremos então uma palavra  $w = x_1x_2 \dots x_m \in A^*$ ,  $m > 0$ .

**Definições 2.9** Dizemos que  $w$  é uma **palavra não decrescente**, ou **linha**, quando  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_m$ . Dizemos que  $w$  é uma **palavra decrescente**, ou **coluna**, quando  $x_1 > x_2 > \dots > x_m$ .

**Exemplo 2.10**

122335 é uma linha e 5421 é uma coluna no alfabeto  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ .

**Definição 2.11** Sejam  $u = x_1 \dots x_r, v = y_1 \dots y_s$  duas linhas,  $x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_s \in A$ . Dizemos que  $u$  **domina**  $v$  quando:

(d1)  $r \leq s$ ;

(d2)  $x_i > y_i$  para  $i = 1, \dots, r$ .

Quando  $u$  domina  $v$  escrevemos  $u \triangleright v$ .

Toda a palavra admite uma factorização única por linhas como o produto de um número minimal de linhas. Por exemplo, duas possíveis factorizações por linhas da palavra  $w = 4466225$  são  $w = 4466 \ 225$  e  $w = 4 \ 46 \ 6 \ 225$ . No entanto, a primeira é a factorização que tem o menor número de linhas.

Pelas definições 2.9 e 2.11 verificamos que a factorização de uma palavra  $w$  por linhas  $w = u_1u_2 \dots u_k$  tais que  $u_1 \triangleright u_2 \triangleright \dots \triangleright u_k$  é única, que é precisamente a factorização de  $w$  como o produto de um número minimal de linhas.

**Exemplo 2.12**

Para as linhas  $u_1 = 4466$ ,  $u_2 = 225$  e  $u_3 = 122335$ , no alfabeto  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , temos  $u_1 \not\triangleright u_2$ , por (d1), e  $u_2 \not\triangleright u_3$ , por (d2), mas  $u_1 \triangleright u_3$ . A palavra  $w_1 = 4466 \ 122335$  admite a factorização em duas linhas tais que  $4466 \triangleright 122335$ , enquanto a palavra  $w_2 = 4466 \ 225$  pode ser factorizada em duas linhas,  $u_1 = 4466$  e  $u_2 = 225$ , sendo este número minimal, mas  $u_1 \not\triangleright u_2$ .

Considerando agora a palavra  $w = 56\ 4466\ 2355\ 122335$ , esta pode ser factorizada em quatro subpalavras não decrescentes:  $u_1 = 56$ ,  $u_2 = 4466$ ,  $u_3 = 2355$  e  $u_4 = 122335$  tais que  $u_1 \triangleright u_2 \triangleright u_3 \triangleright u_4$ .

Nas condições da definição 2.11, também podemos definir um quadro de Young do seguinte modo.

**Definição 2.13** *Um quadro de Young é uma palavra  $\mathbf{t}$  que pode ser factorizada por linhas  $\mathbf{t} = u_1 u_2 \dots u_k \in A^*$  tais que  $u_1 \triangleright u_2 \triangleright \dots \triangleright u_k$ .*

*Nestas condições, dizemos que  $u_1 u_2 \dots u_k$  é a decomposição por linhas do quadro  $\mathbf{t}$ . Quando  $k = 0$  dizemos que o quadro  $\mathbf{t}$  é o quadro vazio,  $\Phi$ .*

Por 2.3 e 2.9, verificamos facilmente que as definições coincidem. Assim, associamos a uma palavra, nas condições da definição anterior, um quadro de Young e vice-versa.

Nem todas as palavras são quadros de Young, uma vez que a generalidade das palavras não verifica a definição anterior, por exemplo, a palavra  $w = 3221532$  admite a decomposição por linhas  $w = u_1 u_2 u_3 u_4 u_5 = 3\ 22\ 15\ 3\ 2$  mas não verifica  $u_1 \triangleright u_2 \triangleright u_3 \triangleright u_4 \triangleright u_5$ .

### Exemplo 2.14

Conforme foi possível observar, o quadro de Young (1) do exemplo 2.4 representa a palavra  $w = 56\ 4466\ 2355\ 122335$  que, pelo exemplo 2.12, verifica a definição 2.13.

## 2.2 Algoritmo de inserção de Schensted

Descrevemos agora o algoritmo de inserção de Schensted [20] que associa a uma palavra  $w \in A^*$  um quadro de Young,  $P(w) = t$ , chamado quadro de Schensted. Veremos no capítulo seguinte que este quadro é único.

A introdução deste algoritmo por C. Schensted, em 1961, tinha como objectivo, dada uma palavra  $w \in A^*$ , a obtenção do comprimento máximo de uma subpalavra não decrescente e de uma subpalavra decrescente de  $w$ .

No caso de  $w$  ser um quadro de Young a resposta é simples: o comprimento da última linha de  $w$ , respectivamente primeira coluna. No caso de  $w$  não ser um quadro a resposta não é tão imediata.

Esta resposta é dada no teorema de Schensted, página 23, pelo número de caixas da última linha de  $P(w)$  e pelo número de caixas da primeira coluna de  $P(w)$ , respectivamente. Assim, é possível conhecer os comprimentos máximos de uma subpalavra não decrescente e de uma subpalavra decrescente de  $w$  sem ser necessário determinar uma subpalavra não decrescente, respectivamente decrescente, de  $w$  de comprimento máximo.

O passo mais importante do algoritmo de inserção de Schensted consiste em inserir uma letra  $x \in A$  num quadro  $\mathbf{t}$ , operação esta que se denotará por  $P(\mathbf{t} x)$ . O resultado será um novo quadro com mais uma caixa que  $\mathbf{t}$  e as entradas serão as letras de  $\mathbf{t}$  juntamente com a letra  $x$ .

Consideremos então o quadro  $\mathbf{t} = u_1 u_2 \dots u_k$  constituído pelas linhas:

$$u_1 = a_{11} a_{12} \dots a_{1r},$$

$$u_2 = a_{21} a_{22} \dots a_{2s},$$

$$\vdots$$

$$u_k = a_{k1} a_{k2} \dots a_{kl}.$$

Para uma linha  $j$  ( $1 \leq j \leq k$ ), a inserção da letra  $x$  nessa linha,  $P(u_j x)$ , produz o seguinte resultado:

(AS1)  $P(u_j x) = u_j x$  se  $u_j x$  for uma linha.

(AS2)  $P(u_j x) = a_{jq} u'_j$  se  $u_j x$  não for uma linha, sendo  $a_{jq}$  a letra mais à esquerda de  $u_j$  estritamente maior que  $x$  e  $u'_j$  a linha obtida de  $u_j$  substituindo  $a_{jq}$  por  $x$ .

Agora, para inserir uma letra  $x$  num quadro  $\mathbf{t} = u_1 u_2 \dots u_k$  começamos por inserir  $x$  na última linha de  $\mathbf{t}$ ,  $u_k$ .

1. Se  $u_k x$  for uma linha termina o processo.
2. Se não,  $P(u_k x) = a_{kq} u'_k$  sendo  $a_{kq}$  e  $u'_k$  nas condições de (AS2) e insere-se a letra  $a_{kq}$  na linha acima  $u_{k-1}$  desta pelo mesmo raciocínio.

Este processo termina quando se atingir o topo do quadro ou quando a letra que sai do quadro é inserida na última posição de determinada linha, i.e., quando da inserção da letra que sai do quadro se obtém uma linha.

### Exemplo 2.15

Consideremos o quadro (1) do exemplo 2.4, página 13:

$$\mathbf{t} = P(w) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 5 & 6 & & & & \\ \hline 4 & 4 & 6 & 6 & & \\ \hline 2 & 3 & 5 & 5 & & \\ \hline 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 5 \\ \hline \end{array} .$$

Conforme o exemplo 2.14, este quadro representa a palavra decomposta por linhas  $\mathbf{t} = 56\ 4466\ 2355\ 122335$ .

Para inserir o número 2 neste quadro os passos são os seguintes:

$$P(122335\ \mathbf{2}) = \mathbf{3}\ 122235,$$

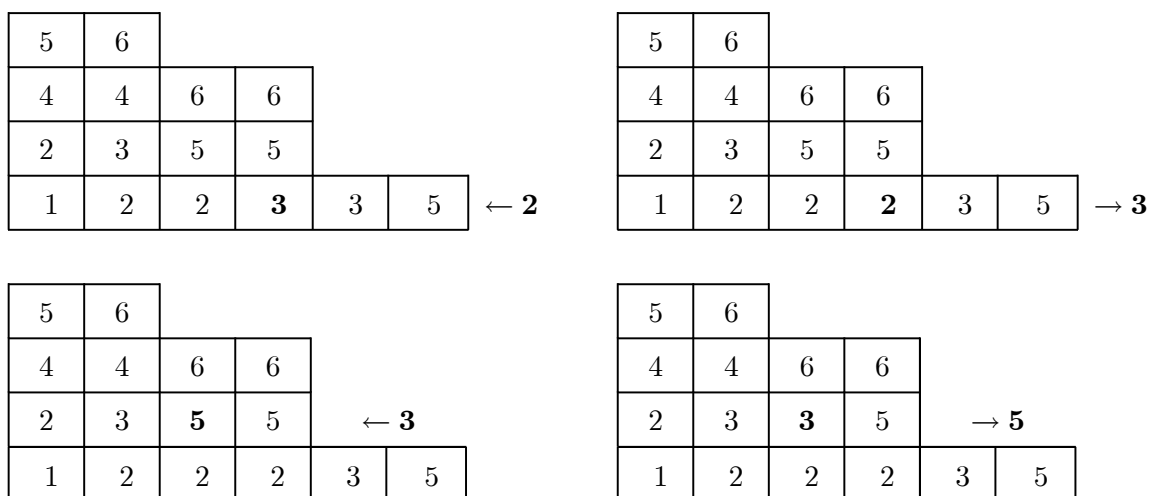
$$P(2355\ \mathbf{3}) = \mathbf{5}\ 2335,$$

$$P(4466\ \mathbf{5}) = \mathbf{6}\ 4456,$$

$$P(56\ \mathbf{6}) = \mathbf{566},$$

ficando  $P(\mathbf{t}\ 2) = 566\ 4456\ 2335\ 122235$ .

Observando o efeito deste algoritmo no quadro de Young correspondente:



5	6				
4	4	<b>6</b>	6	← 5	
2	3	3	5		
1	2	2	2	3	5

5	6				
4	4	<b>5</b>	6	→ 6	
2	3	3	5		
1	2	2	2	3	5

5	<b>6</b>	← 6			
4	4	5	6		
2	3	3	5		
1	2	2	2	3	5

5	6	<b>6</b>			
4	4	5	6		
2	3	3	5		
1	2	2	2	3	5

Este algoritmo é reversível, isto é, dado um quadro e a última letra movida no quadro, podemos obter o quadro inicial e a letra que se inseriu no quadro.

Este facto apoia-se no seguinte resultado.

**Propriedade 2.16** *Dada uma linha  $v$  e uma letra  $y$ , existe uma só linha  $u$  e uma só letra  $x$  tal que  $yv = P(ux)$ .*

**Demonstração:**

Escrevendo  $v = v_1v_2 \dots v_j$ ,  $x$  é a letra mais à direita de  $v$  menor que  $y$  e  $u$  é a linha obtida de  $v$  substituindo a letra  $x$  pela letra  $y$ .  $u = v_1v_2 \dots v_{i-1}yv_{i+1} \dots v_j$  é uma linha pois  $v_1 \leq v_2 \leq \dots \leq v_{i-1} \leq x < y \leq v_{i+1} \leq \dots \leq v_j$ . ■

Assim, dados um quadro e a última letra  $y$  movida, procuramos na linha abaixo de  $y$  a letra mais à direita que seja estritamente menor que  $y$ ,  $y'$ . Substituímos  $y'$  por  $y$  e  $y'$  sai do quadro para se inserir na linha seguinte e repete-se este processo até alcançarmos a última linha do quadro. Obtemos então o quadro inicial e a última letra que saiu é a que se tinha inserido no quadro.

**Exemplo 2.17**

Se considerarmos o quadro final do exemplo anterior,  $\mathbf{t}' = 566\ 4456\ 2335\ 122235$ , e sabendo que a última letra movida no quadro foi a letra **6** a negrito, a obtenção do quadro inicial,  $\mathbf{t}$ , percorre exactamente os passos do exemplo anterior em sentido contrário.

Consideremos o quadro inicial  $\mathbf{t} = 56\ 44\mathbf{6}\ 2355\ 122335$  do exemplo anterior e suponhamos agora que este foi obtido da inserção de uma letra cujo último passo moveu a letra  $\mathbf{6}$  que se encontra a negrito. Nestas condições temos:

$$44\mathbf{6} = P(446\ \mathbf{6})$$

$$2355 = P(2356\ 5)$$

$$122335 = P(122355\ 3).$$

Observando no quadro de Young:

5	6				
4	4	6	<b>6</b>		
2	3	5	5		
1	2	2	3	3	5

5	6				
4	4	6	→ <b>6</b>		
2	3	5	<b>5</b>		
1	2	2	3	3	5

5	6				
4	4	6			
2	3	5	6	→ <b>5</b>	
1	2	2	3	<b>3</b>	5

5	6					
4	4	6				
2	3	5	6			
1	2	2	3	<b>5</b>	<b>5</b>	→ <b>3</b> .

Assim, a letra inserida foi a letra  $\mathbf{3}$  e a palavra inicial era  $w' = 56\ 446\ 2356\ 122355$ .

Formalmente, o algoritmo de inserção de Schensted pode ser enunciado, de modo recursivo, da seguinte forma:

$$P(\mathbf{t}\ x) = \begin{cases} \mathbf{t}x & \text{se } u_k x \text{ é uma linha} \\ P(u_1 u_2 \dots u_{k-1} a_{kq}) u'_k & \text{se } P(u_k\ x) = a_{kq} u'_k, \end{cases} \quad (2.2.1)$$

para um quadro  $t$  com decomposição por linhas  $\mathbf{t} = u_1 u_2 \dots u_k$ ,  $k \geq 0$ .

Se  $k = 0$  temos  $P(\Phi\ x) = x$ .

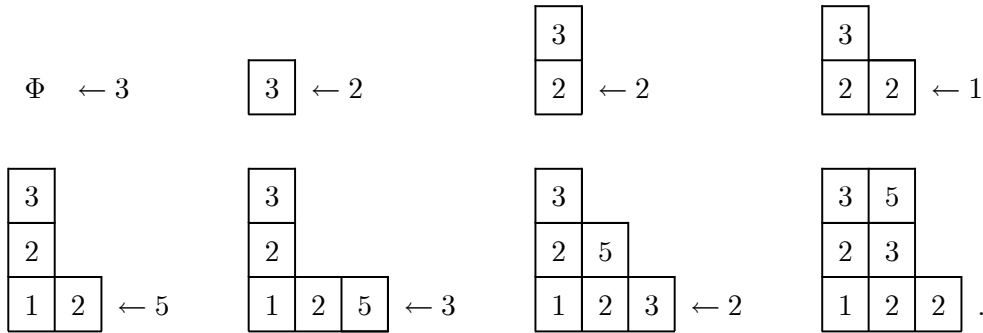
Consideremos agora uma palavra  $w = x_1 x_2 \dots x_m \in A^*$ , onde  $x_1, x_2, \dots, x_m$  são letras no alfabeto  $A$ . Para obter o quadro de Young de  $w$  pelo algoritmo de inserção de Schensted,  $P(w)$ , procedemos da seguinte forma. Se  $m = 0$ ,  $P(\Phi) = \Phi$ . Se  $m > 0$ , começamos

por inserir a letra  $x_1$  no quadro  $\Phi$ , obtendo-se o quadro  $P(\Phi x_1) = P(x_1) = \begin{bmatrix} x_1 \end{bmatrix}$ . Inseriríamos agora a letra  $x_2$  no quadro  $P(x_1)$ , obtendo-se o quadro  $P(x_1x_2) = P(P(x_1) x_2)$ . Repetimos este raciocínio às restantes letras de  $w$ , da esquerda para a direita, até obtermos o quadro  $P(x_1x_2 \dots x_m) = P(P(x_1x_2 \dots x_{m-1}) x_m)$ .

Para uma palavra  $w \in A^*$  e uma letra  $x \in A$ ,  $P(w x) = P(P(w) x)$ .

**Exemplo 2.18**

Consideremos a palavra  $w = 3221532$ . Ilustremos a construção do seu correspondente quadro de Young.



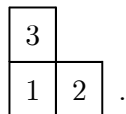
Assim  $\mathbf{t} = P(w) = 35\ 23\ 122$ .

**Nota 2.19** Se  $\mathbf{t}$  é um quadro de Young então  $P(\mathbf{t}) = \mathbf{t}$ .

**Exemplo 2.20**

Podem existir várias palavras com o mesmo quadro de Schensted.

Por exemplo, as palavras  $w_1 = 132$  e  $w_2 = 312$  têm o mesmo quadro de Schensted:



As palavras  $w = 3221532$ ,  $w' = 2352312$  e  $\mathbf{t} = 35\ 23\ 122$  têm como quadro de Schensted  $\mathbf{t}$ , isto é,  $P(w) = P(w') = P(\mathbf{t}) = \mathbf{t}$ .

Enunciemos agora o teorema que dá a resposta ao problema que motivou a criação deste algoritmo, e que irá ser provado no capítulo seguinte.

**Teorema 2.21** ([20] Schensted, 1961) *O comprimento máximo de uma subpalavra não decrescente de  $w$  é dado pelo número de caixas da última linha de  $P(w)$ . De forma análoga, o comprimento máximo de uma subpalavra decrescente de  $w$  é dado pelo número de caixas da primeira coluna de  $P(w)$ .*

**Exemplo 2.22**

A palavra  $w = 3221532$ , considerada no exemplo 2.18, apenas admite subpalavras não decrescentes e decrescentes com no máximo três letras pois a última linha e a primeira coluna do quadro  $\mathbf{t} = \begin{smallmatrix} 35 & 23 & 122 \end{smallmatrix}$  (respectivamente) têm três caixas, por exemplo 222 ou 225 e 321 ou 532, respectivamente. Notemos que estas subpalavras não correspondem necessariamente às subpalavras obtidas na última linha ou primeira coluna do quadro de Schensted  $\mathbf{t} = \begin{smallmatrix} 35 & 23 & 122 \end{smallmatrix}$ .



## Capítulo 3

# Monóide pláxico e invariantes de Greene

A relação definida pelas palavras de  $A^*$ , com o mesmo quadro de Schensted, define uma relação de equivalência em  $A^*$ . Veremos que esta relação é, de facto, uma congruência no monóide  $A^*$ . Para isso, definimos as relações de Knuth [9] que geram uma congruência  $\equiv$  em  $A^*$ , chamada congruência pláxica. O monóide  $A^*/\equiv$  é chamado monóide pláxico. Na segunda parte deste capítulo, demonstramos o teorema de Knuth [9], teorema 3.13, que mostra que a relação de equivalência definida pelas palavras com o mesmo quadro de Schensted é precisamente a congruência pláxica. Em particular, concluímos que cada classe de congruência em  $A^*$ , classe pláxica, contém um e um só quadro de Young. No desenvolvimento desta teoria têm especial relevo os invariantes pláxicos de Greene [4],  $l_k(w)$  e  $l'_k(w)$ , respectivamente, o máximo das somas dos comprimentos de  $k$  linhas disjuntas de uma palavra  $w$  e o máximo das somas dos comprimentos de  $k$  colunas disjuntas de  $w$ . O teorema de Greene, teorema 3.11, mostra que estes números são iguais, respectivamente, à soma das primeiras  $k$  linhas e colunas do quadro  $P(w)$ . O teorema de Schensted, teorema 2.21, enunciado no capítulo anterior, resulta agora como corolário imediato do teorema de Greene. No final deste capítulo descrevemos os quadros de Young num bialfabeto.

Neste capítulo consultámos as referências FULTON [3], GREENE [4], KNUTH [9], LOTHAIRE [14] e SAGAN [19].

### 3.1 As relações de Knuth e o monóide pláxico

Consideremos a relação  $\sim$  de equivalência em  $A^*$ :

$$w \sim w' \text{ se e só se } P(w) = P(w'). \quad (3.1.1)$$

No caso de as palavras serem de comprimento menor que três verificamos facilmente que  $w \sim w' \Leftrightarrow w = w'$ , uma vez que tais palavras serão apenas uma linha ou uma coluna.

A primeira relação não trivial entre palavras ocorre quando estas têm comprimento igual a três e a forma  $\lambda = (2, 1)$ , isto é, com palavras do tipo  $xzy$ ,  $zxy$ ,  $yxz$  e  $yzx$ ,  $x < y < z$ , uma vez que as palavras  $xyz$  e  $zyx$  não são da forma  $(2, 1)$  mas sim  $(3)$  e  $(1, 1, 1)$ , respectivamente. Nestas condições, verificamos facilmente que:

$$P(xzy) = \begin{array}{|c|c|} \hline z & \\ \hline x & y \\ \hline \end{array} = P(zxy), \text{ para } x \leq y < z \text{ e}$$

$$P(yxz) = \begin{array}{|c|c|} \hline y & \\ \hline x & z \\ \hline \end{array} = P(yzx), \text{ para } x < y \leq z.$$

São estas relações não triviais entre palavras de comprimento igual a três e de forma  $\lambda = (2, 1)$  que motivam a introdução das relações de Knuth.

**Definição 3.1** *Sendo  $x, y$  e  $z$  letras em  $A$ , definimos as relações de Knuth:*

(RK1)  $xzy \equiv zxy$ , para  $x \leq y < z$ ;

(RK2)  $yxz \equiv yzx$ , para  $x < y \leq z$ .

Uma **transformação (elementar) de Knuth** [9] numa palavra consiste em aplicar (RK1) ou (RK2) a três letras consecutivas dessa palavra.

Denotamos por  $\equiv$  a congruência, no monóide livre  $A^*$ , gerada pelas relações (RK1) e (RK2), que designamos por **congruência de Knuth** ou **congruência pláxica**.

Dizemos que duas palavras  $w$  e  $w'$  são **congruentes à Knuth**, ou simplesmente **congruentes**, se forem equivalentes à Knuth, isto é, se aplicando sucessivamente (RK1) ou (RK2) a três letras consecutivas de  $w$  se obtém  $w'$ . Nestas condições escrevemos  $w \equiv w'$ .

No teorema de Knuth, enunciado na página 36, iremos provar que a relação de equivalência  $\sim$  definida em (3.1.1) é a congruência pláxica no monóide livre  $A^*$ .

É agora possível definir o conjunto quociente do monóide livre  $A^*$  pela congruência pláxica  $\equiv$ ,  $A^*/\equiv$ , que tem a estrutura de um monóide cujo elemento neutro é  $[\Phi] \in A^*/\equiv$ .

**Definição 3.2** *O monóide pláxico no alfabeto  $A$  é o conjunto quociente*

$$\mathbf{PI}(A) = A^*/\equiv = \{[w] : w \in A^*\},$$

onde  $\equiv$  é a congruência pláxica.

A classe de equivalência da palavra vazia é a identidade deste monóide.

**Exemplo 3.3**

- $132 \equiv 312$ ,  $121 \equiv 211$ .
- Num caso mais geral,  $3221532 \equiv 35\ 23\ 122$  pois
  - $3221532 \equiv 3212532$ , por  $(RK2)$ ,
  - $3212532 \equiv 3215232$ , por  $(RK1)$ ,
  - $3215232 \equiv 3251232$ , por  $(RK2)$ ,
  - $3251232 \equiv 3251322$ , por  $(RK1)$ ,
  - $3251322 \equiv 3253122$ , por  $(RK1)$ ,
  - $3253122 \equiv 3523122$ , por  $(RK2)$ .

Como  $35\ 23\ 122$  está nas condições da definição 2.13,

$3221532 \equiv 35\ 23\ 122 = P(3221532)$ , isto é,

$$w = 3221532 \equiv \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 5 \\ \hline 2 & 3 \\ \hline 1 & 2 & 2 \\ \hline \end{array} = P(w).$$

Portanto, a palavra  $3221532$  é congruente com o seu quadro  $\mathbf{t} = P(w) = 35\ 23\ 122$ .

Este último exemplo ilustra o seguinte teorema, onde mostramos que toda a palavra é congruente com o seu quadro.

**Teorema 3.4** *Seja  $w \in A^*$ . Então  $w \equiv P(w)$ .*

**Demonstração:**

Provemos por indução sobre o comprimento de  $w$ .

Pela definição 3.1, a proposição é verdadeira para palavras de comprimento menor ou igual a três.

Suponhamos agora que  $P(w) \equiv w$  e  $x$  é uma letra. Provemos que  $P(wx) \equiv wx$ .

Pelo algoritmo de inserção de Schensted basta verificar o caso em que  $w$  é uma linha.

Assim, se  $w$  é uma linha então  $P(wx) = wx$ .

Caso contrário  $P(wx) = x'w'$ , sendo  $x'$  a letra mais à esquerda de  $w = ux'v$  estritamente maior que  $x$  e  $w'$  a linha que obtida de  $w$  substituindo  $x'$  por  $x$ .

Então, aplicando sucessivamente (RK2),

$$wx = ux'vx \equiv ux'xv \quad (3.1.2)$$

e, aplicando sucessivamente (RK1),

$$ux'xv \equiv x'uxv. \quad (3.1.3)$$

Assim sendo  $wx \equiv ux'xv \equiv x'uxv = x'w' = P(wx)$ . ■

Detalhemos (3.1.2) e (3.1.3). Knuth [9] descreveu o algoritmo de inserção de Schensted numa linguagem mais computacional.

Conforme foi visto no capítulo anterior, quando se insere uma letra  $x$  num quadro  $\mathbf{t} = P(w)$ , começamos por fazê-lo na primeira linha testando se  $x$  é maior que a letra na última caixa desta linha. Se for, o resultado é uma linha e termina o algoritmo. Se a letra na última caixa desta linha,  $v_q$ , for maior que  $x$ , bem como a letra à esquerda de  $v_q$ ,  $v_{q-1}$ , movemos a letra  $x$  uma posição para a esquerda (ficaria entre  $v_{q-1}$  e  $v_q$ ) e repetimos o

processo até se encontrar a última letra maior que  $x : x'$ , i.e., a letra  $x$  vai mudando de posição para a esquerda da linha. Continuamos agora movendo  $x'$  sucessivamente para a esquerda até estar na primeira posição da linha. Estes passos podem ser ilustrados da seguinte forma:

Seja  $ux'v$  uma linha de  $t$  sendo  $u = u_1u_2 \dots u_p$  e  $v = v_1v_2 \dots v_q$  (observemos que  $u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_p \leq v_1 \leq v_2 \leq \dots \leq v_q$  pela definição 2.9, página 16) e insira-se a letra  $x$  ( $x < x'$ ):

$$\begin{aligned}
ux'vx = u_1u_2 \dots u_px'v_1v_2 \dots v_qx &\equiv ux'v_1v_2 \dots v_{q-1}xv_q && \text{(por (RK2), } x < v_{q-1} \leq v_q) \\
&\equiv ux'v_1v_2 \dots v_{q-2}xv_{q-1}v_q && \text{(por (RK2), } x < v_{q-2} \leq v_{q-1}) \\
&\vdots && \vdots \\
&\equiv ux'v_1v_2xv_3 \dots v_q && \text{(por (RK2), } x < v_2 \leq v_3) \\
&\equiv ux'v_1xv_2 \dots v_q && \text{(por (RK2), } x < v_1 \leq v_2) \\
&\equiv ux'xv_1v_2 \dots v_q \\
&\equiv u_1u_2 \dots u_{p-1}x'u_p xv && \text{(por (RK1), } u_p \leq x < x') \\
&\equiv u_1u_2 \dots u_{p-2}x'u_{p-1}u_p xv && \text{(por (RK1), } u_{p-1} \leq u_p < x') \\
&\vdots && \vdots \\
&\equiv u_1u_2x'u_3 \dots u_pxv && \text{(por (RK1), } u_2 \leq u_3 < x') \\
&\equiv u_1x'u_2 \dots u_pxv && \text{(por (RK1), } u_1 \leq u_2 < x') \\
&\equiv x'u_1u_2 \dots u_pxv = x'uxv.
\end{aligned}$$

Exemplifiquemos este processo com o seguinte exemplo.

### Exemplo 3.5

Insira-se a letra 2 na linha 122335:

$$\begin{aligned}
122\mathbf{3}35 &\equiv 122\mathbf{3}325 \\
&\equiv 122\mathbf{3}235 \\
&\equiv 12\mathbf{3}2235 \\
&\equiv 1\mathbf{3}22235 \\
&\equiv \mathbf{3} 122235.
\end{aligned}$$

Dizemos que  $I \subseteq A$  é um **intervalo** quando existem duas letras  $y \leq z$  em  $A$  tais que  $I = \{x \in A : y \leq x \leq z\}$ .

**Lema 3.6** *Seja  $I$  um intervalo de  $A$  e  $w, w' \in A^*$ . Se  $w \equiv w'$  então  $w|_I \equiv w'|_I$ .*

**Demonstração:**

Sem perda de generalidade, suponhamos que  $w'$  é obtida de  $w$  por uma única transformação elementar de Knuth, por exemplo,

$$w = uxzyv \equiv uzxyv = w', \text{ para } x \leq y < z \text{ e } u, v \in A^*.$$

Seja  $I$  um intervalo de  $A$ .

Como  $w|_I = u|_I (xzy)|_I v|_I$  e  $w'|_I = u|_I (zxy)|_I v|_I$ , basta verificar se  $(xzy)|_I \equiv (zxy)|_I$ .

- Se  $x, y, z \in I : (xzy)|_I = xzy \equiv zxy = (zxy)|_I$ ;
- Se  $x, y \in I$  e  $z \notin I : (xzy)|_I = xy = (zxy)|_I$ ;
- Se  $y, z \in I$  e  $x \notin I : (xzy)|_I = zy = (zxy)|_I$ ;
- Se  $x \in I$  e  $y, z \notin I : (xzy)|_I = x = (zxy)|_I$ ;
- Se  $y \in I$  e  $x, z \notin I : (xzy)|_I = y = (zxy)|_I$ ;
- Se  $z \in I$  e  $x, y \notin I : (xzy)|_I = z = (zxy)|_I$ ;
- Se  $x \in I$  e  $y, z \notin I : (xzy)|_I = x = (zxy)|_I$ ;
- Se  $x, y, z \notin I : (xzy)|_I = \Phi = (zxy)|_I$ .

Notemos que  $x, z \in I$  e  $y \notin I$  não pode ocorrer pois  $I$  é um intervalo de  $A$ .

A prova será semelhante para  $w = uyxzv \equiv uyzxv = w'$ , com  $x < y \leq z$ . ■

## 3.2 Invariantes de Greene

No que se segue, procuramos interpretar os comprimentos das linhas e das colunas de  $P(w)$ , relacionando-os com os comprimentos das subpalavras não decrescentes e decrescentes de  $w$ . Seja então  $w \in A^*$ .

**Definição 3.7** Definimos *invariantes (plácicos) de Greene* [4],  $l_k(w)$  e  $l'_k(w)$ , como sendo o máximo das somas dos comprimentos de  $k$  subpalavras de  $w$  disjuntas e não decrescentes e o máximo das somas dos comprimentos de  $k$  subpalavras disjuntas decrescentes de  $w$ , respectivamente. Definimos  $l_0(w) = 0$  e  $l'_0(w) = 0$ .

### Exemplo 3.8

Consideremos a palavra  $w = 3221532$  dos exemplos 2.18 e 3.3.

Qualquer que seja a escolha de uma subpalavra não decrescente de  $w$ , o seu comprimento máximo não excede 3, isto é,  $l_1(w) = 3$ . Para a palavra  $w$  encontramos três exemplos de subpalavras de comprimento máximo 3: 225, 223 e 222.

No caso de escolhermos duas subpalavras não decrescentes e disjuntas de  $w$  existem várias possibilidades. Por exemplo, 35, 222; 223, 15; 33, 15 ou 3, 15, sendo a soma dos comprimentos destas subpalavras 5, 5, 4 e 3, respectivamente. O máximo das soma destes comprimentos é 5 e, quaisquer que sejam as escolhas que se façam, o máximo será sempre 5, isto é,  $l_2(w) = 5$ .

No caso de três subpalavras não decrescentes e disjuntas também temos várias possibilidades, mas nem todos os triplos dão origem ao máximo das somas dos comprimentos. Exemplos dos triplos que dão origem a este máximo são 35, 223, 12 ou 33, 222, 15, sendo que  $l_3(w) = 7$ .

Observamos que a informação dada pelas sequências descobertas num determinado passo, para obter  $l_{k-1}(w)$ , pode não ser usada na criação de sequências para a obtenção de  $l_k(w)$ .

No caso de pretendermos mais de três subpalavras nas condições dadas temos de optar sempre por usar todas as letras de  $w$ , isto é, para  $k \geq 3$  temos  $l_k(w) = |w| = 7$ .

O máximo dos comprimentos de uma subpalavra decrescente de  $w$  é  $l'_1(w) = 3$ , por exemplo, a subpalavra 532. O máximo das somas dos comprimentos de duas quaisquer subpalavras decrescentes de  $w$  é  $l'_2(w) = 6$ , sendo a única hipótese o par de subpalavras 321, 532. No caso de três subpalavras disjuntas decrescentes de  $w$ , o máximo das somas dos comprimentos é  $l'_3(w) = 7$  tendo, neste caso, que conter todas as letras de  $w$ . Assim,

para  $k \geq 3$  temos  $l'_k(w) = |w| = 7$ .

Deste exemplo observamos que pode não ser possível adicionar a uma sequência de subpalavras, obtida num determinado passo, outra sequência para criar sequências para passos seguintes.

Também concluímos que podem existir várias colecções de  $k$  subpalavras disjuntas e não decrescentes a determinar o máximo das somas dos comprimentos.

Se considerarmos agora a palavra  $w' = 122125$  temos vários pares de duas subpalavras, 122, 125; 1222, 15 ou 12225, 1, que determinam o máximo das somas dos comprimentos de duas subpalavras disjuntas e não decrescentes de  $w'$ ,  $l_2(w') = 6$ , sendo que o comprimento das subpalavras de cada um destes pares é diferente. Portanto, além de poderem existir várias colecções de  $k$  subpalavras disjuntas e não decrescentes de  $w$  a determinar o máximo da soma dos comprimentos, o número de letras destas subpalavras pode variar.

As mesmas conclusões se retiram para subpalavras disjuntas e decrescentes de  $w \in A^*$ .

Os resultados seguintes, que usamos na demonstração do teorema de Greene, mostram que os números  $l_k(w)$  e  $l'_k(w)$  não se modificam pelas relações de Knuth, daí a designação de invariantes de Greene.

**Proposição 3.9** *Se  $w \equiv w'$  então  $l_k(w) = l_k(w')$ , qualquer que seja  $k \geq 0$ .*

#### Demonstração:

Sem perda de generalidade, podemos assumir que  $w'$  é obtida de  $w$  através de uma transformação elementar de Knuth.

Suponhamos então que  $w = uxzyv \equiv uzxyv = w'$  sendo  $x \leq y < z$ . A prova é semelhante para o caso em que  $w = uyxzv \equiv uyzxv = w'$ , com  $x < y \leq z$ .

Pela forma como  $w$  e  $w'$  estão definidas, todas as subpalavras não decrescentes de  $w'$  são também subpalavras não decrescentes de  $w$ .

Então  $l_k(w') \leq l_k(w)$ .

Consideremos agora  $k$  subpalavras disjuntas não decrescentes de  $w : w_1, w_2, \dots, w_k$ .

Para  $i = 1, 2, \dots, k$ ,  $w_i$  é uma subpalavra de  $w'$  à excepção de  $w_j = w'_i x z v'$ ,

sendo  $u'$  e  $v'$  subpalavras de  $u$  e  $v$ , respectivamente.

Se  $y$  não aparece em  $w_i$ ,  $i \neq j$ , substituímos  $w_j$  por  $w'_j = u'xyv'$ , que é uma palavra não decrescente de  $w'$ .

Se  $y$  aparece em algum  $w_i$  (i.e., se existe um  $i \in \{1, 2, \dots, k\} \setminus \{j\}$  tal que  $w_i = u''yv''$ , sendo  $u''$  e  $v''$  subpalavras de  $u$  e  $v$ , respectivamente) substituímos  $w_j$  por  $w'_j = u'xyv''$  e  $w_i$  por  $w'_i = u''zv'$ , que é uma palavra não decrescente de  $w'$ .

Então  $l_k(w) \leq l_k(w')$ . ■

**Proposição 3.10** *Se  $w \equiv w'$ , então  $l'_k(w) = l'_k(w')$ , qualquer que seja  $k \geq 0$ .*

### Demonstração:

A prova é análoga à anterior.

De facto, suponhamos  $w \equiv w'$ , onde  $w'$  é obtida de  $w$  através de uma transformação elementar de Knuth.

Supondo então  $w = uxzyv \equiv uzxyv = w'$ , sendo  $x \leq y < z$ , temos que todas as subpalavras decrescentes de  $w$  são também subpalavras decrescentes de  $w'$ .

Logo  $l'_k(w) \leq l'_k(w')$ .

Sejam agora  $w'_1, w'_2, \dots, w'_k$  subpalavras disjuntas decrescentes de  $w'$ . Nestas condições, para  $i = 1, 2, \dots, k$ ,  $w'_i$  é subpalavra de  $w$ , excepto para  $w'_j = u'zxv'$ , para  $u'$  e  $v'$  subpalavras de  $u$  e  $v$ , respectivamente.

Se  $y$  não aparece em  $w'_i$ ,  $i \neq j$ , substituímos  $w'_j$  por  $w''_j = u'zyv'$ , que já é uma palavra decrescente de  $w$ .

Se existe um  $i \in \{1, 2, \dots, k\} \setminus \{j\}$  tal que  $w'_i = u''yv''$ , onde  $u''$  e  $v''$  são subpalavras de  $u$  e  $v$ , respectivamente, substituímos  $w'_j$  por  $w''_j = u''xv'$  e  $w'_i$  por  $w''_i = u''zyv'$ , que já é uma palavra decrescente de  $w$ .

Concluimos então que  $l'_k(w) = l'_k(w)$ .

A prova será semelhante para  $w = uyxzv \equiv uyzxv = w'$ , com  $x < y \leq z$ . ■

Antes de passarmos à demonstração do teorema de Schensted, enunciado na página 23, provemos um resultado mais geral, o teorema de Greene, que dá uma interpretação dos comprimentos das linhas e colunas de um quadro  $\mathbf{t} = P(w)$ . Este teorema permite obter os invariantes de Greene de  $w \in A^*$ ,  $l_k(w)$  e  $l'_k(w)$ , sem que seja necessário determinar subpalavras disjuntas não decrescentes, e decrescentes, respectivamente, usando apenas a partição  $\lambda$  do quadro  $P(w)$  e a partição conjugada  $\lambda'$ , e vice-versa, isto é, conhecendo  $l_k(w)$  e  $l'_k(w)$ , sabemos qual é a forma do quadro  $P(w)$ .

Consideremos então  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$  a forma de  $P(w)$  e  $\lambda' = (\lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_s)$  a sua partição conjugada. Reparemos que  $r$  é o número de linhas e  $s$  é o número de colunas de  $P(w)$ .

**Teorema 3.11** ([4] **Greene, 1974**) *Para  $k = 1, 2, \dots, r$  temos  $\lambda_k = l_k(w) - l_{k-1}(w)$  e para  $k = 1, 2, \dots, s$  temos  $\lambda'_k = l'_k(w) - l'_{k-1}(w)$ . Isto é,*

$$l_k(w) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \quad e \quad l'_k(w) = \sum_{j=1}^k \lambda'_j.$$

**Demonstração:**

Pelo teorema 3.4,  $w \equiv P(w) =: \mathbf{t}$ . Então, pela proposição 3.9,  $l_k(w) = l_k(\mathbf{t})$ .

Assim basta provar que, para um quadro  $\mathbf{t}$  de forma  $\lambda$ ,  $l_k(\mathbf{t}) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k$ .

Considerando  $w_1, w_2, \dots, w_k$  as  $k$  linhas de maior comprimento de  $t$ , verificamos que  $l_k(\mathbf{t}) \geq \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k$ .

Por outro lado, uma subpalavra não decrescente de  $t$  usa no máximo uma letra de cada coluna da representação planar de  $t$ . Então  $k$  subpalavras não decrescentes disjuntas usam, no máximo,  $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k$  letras de  $t$ . Logo  $l_k(\mathbf{t}) \leq \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k$ .

De forma análoga se prova a segunda parte deste teorema. ■

Estamos agora em condições de demonstrar o teorema de Schensted: o comprimento máximo de uma subpalavra não decrescente (decrescente) de  $w$  é dado pelo número de caixas da última linha (primeira coluna) de  $P(w)$ .

**Demonstração do teorema 2.21 (Teorema de Schensted):**

Sejam  $w \in A^*$ ,  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$  a forma de  $P(w)$  e  $\lambda' = (\lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_s)$  a sua partição conjugada. Um caso particular do teorema de Greene é que o comprimento máximo de uma subpalavra não decrescente de  $w$ ,  $l_1(w)$ , é dado por  $\lambda_1$ , o número de caixas da primeira linha de  $P(w)$ , e o comprimento máximo de uma qualquer subpalavra decrescente de  $w$ ,  $l'_1(w)$ , é dado por  $\lambda'_1$ , o número de caixas da primeira coluna de  $P(w)$ . ■

**Exemplo 3.12**

Recordemos o exemplo 3.8 da página 31,  $w = 3221532$ .

Já concluímos que  $w \equiv 35\ 23\ 122$  tem como representação o quadro de Young:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 5 \\ \hline 2 & 3 \\ \hline 1 & 2 & 2 \\ \hline \end{array} = 35\ 23\ 122.$$

Então  $\lambda = (3, 2, 2)$  é a forma de  $P(w)$  e  $\lambda' = (3, 3, 1)$ . Assim

$$l_1(w) = 3 = \lambda_1,$$

$$l_2(w) = 3 + 2 = 5 = \lambda_1 + \lambda_2,$$

$$l_k(w) = 3 + 2 + 2 = 7 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = |w|, \text{ para } 3 \leq k \leq 7 \text{ e}$$

$$l'_1(w) = \lambda'_1 = 3,$$

$$l'_2(w) = \lambda'_1 + \lambda'_2 = 3 + 3 = 6,$$

$$l'_k(w) = \lambda'_1 + \lambda'_2 + \lambda'_3 = 3 + 3 + 1 = 7 = |w|, \text{ para } 3 \leq k \leq 7.$$

Então, conforme vimos no exemplo 3.8, o máximo dos comprimentos de uma subpalavra não decrescente de  $w$  será  $l_1(w) = \lambda_1 = 3$ . Encontramos três exemplos de subpalavras não decrescentes de  $w$  de comprimento máximo: 225, 223 e 222.

Observamos, no entanto, que a subpalavra de  $P(w)$  obtida da última linha, 122, não é uma subpalavra de  $w$ . Isto quer dizer que o Teorema de Greene não permite descobrir quais  $k$  subpalavras não decrescentes e disjuntas de  $w$  determinam o máximo das somas dos comprimentos dessas  $k$  subpalavras mas apenas o seu valor.

O máximo das somas dos comprimentos de duas subpalavras não decrescentes e disjuntas de  $w$  é  $l_2(w) = \lambda_1 + \lambda_2 = 5$  e, para  $3 \leq k \leq 7$ , o máximo das somas dos comprimentos de  $k$  subpalavras não decrescentes e disjuntas de  $w$  é  $l_k(w) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 7$ , conforme vimos no exemplo 3.8.

No caso de subpalavras decrescentes de  $w$ , o máximo dos comprimentos de uma subpalavra decrescente de  $w$  é  $l'_1(w) = \lambda'_1 = 3$ ; o máximo da soma dos comprimentos de duas subpalavras disjuntas e decrescentes de  $w$  é  $l'_2(w) = \lambda'_1 + \lambda'_2 = 6$  e o máximo da soma dos comprimentos de  $k$  subpalavras disjuntas e decrescentes de  $w$  é  $l'_k(w) = \lambda'_1 + \lambda'_2 + \lambda'_3 = 7$ , para  $3 \leq k \leq 7$ .

Estão agora reunidas as condições para demonstrar o teorema de Knuth: duas palavras são congruentes à Knuth se e só se tiverem o mesmo quadro de Schensted.

**Teorema 3.13 ([9] Knuth, 1970)** *A relação de equivalência  $\sim$  definida em (3.1.1), página 26, é a congruência pláxica, isto é,*

$$w \equiv w' \text{ se e só se } P(w) = P(w').$$

**Demonstração:**

A parte “só se”.

Sejam  $w$  e  $w'$  tais que  $P(w) = P(w')$ , isto é,  $w \sim w'$ .

Pelo teorema 3.4,  $w \equiv P(w) = P(w') \equiv w'$ . Logo  $w \equiv w'$ .

A parte “se”.

Sejam  $w$  e  $w'$  tais que  $w \equiv w'$ . Pretendemos provar que  $P(w) = P(w')$ .

Pela proposição 3.9,  $l_k(w) = l_k(w')$ ,  $1 \leq k \leq |w| = |w'|$ .

Pelo teorema 3.4,  $w \equiv P(w)$  e  $w' \equiv P(w')$ , logo também  $l_k(w) = l_k(P(w))$  e  $l_k(w') = l_k(P(w'))$ .

Então  $l_k(P(w)) = l_k(P(w'))$ .

Assim, pelo teorema de Greene,  $P(w)$  e  $P(w')$  têm a mesma forma.

Seja  $z$  a maior letra de  $w$  e  $w'$  e escrevamos  $w = uzv$ ,  $w' = u'zv'$  onde  $z$  não ocorre em  $v$  nem em  $v'$ .

Em primeiro lugar mostramos que  $uv \equiv u'v'$ .

Podemos assumir, sem perda de generalidade, que  $w$  e  $w'$  diferem entre si apenas por uma transformação elementar de Knuth.

Se  $z$  não está envolvida nesta transformação então, ou  $u \equiv u'$  e  $v = v'$ , ou  $u = u'$  e  $v \equiv v'$ .

Caso contrário, eliminando  $z$  em  $(RK1)$  ou  $(RK2)$  (ver página 26), obtemos  $xy = xy$  ou  $yx = yx$ , respectivamente, obtendo-se que  $uv = u'v'$ .

Por indução sobre o comprimento de  $w$ , assumimos que  $P(uv) = P(u'v')$ .

Uma vez que  $z$  é a maior letra em  $w$ , pela descrição do algoritmo de inserção de Schensted verificamos que, eliminando  $z$  em  $P(uzv)$ , fica o quadro  $P(uv)$ .

De facto, se escrevermos  $v = v_1v_2 \dots v_j$ , como a letra  $z$  não ocorre em  $v$ ,  $v_i < z$ , para qualquer  $1 \leq i \leq j$ . Em particular, a letra  $z$  fica na última caixa de uma determinada linha do quadro  $P(uzv)$ . Pelo algoritmo de inserção de Schensted, a letra  $v_1$  é colocada na mesma posição em  $P(P(u) v_1)$  e  $P(P(uz) v_1)$ . O mesmo acontece com a letra  $v_2$ , isto é, a letra  $v_2$  fica na mesma posição nos quadros  $P(P(uv_1) v_2)$  e  $P(P(uzv_1) v_2)$ . Repetindo este raciocínio, a inserção da letra  $v_j$  nos quadros  $P(uv_1v_2 \dots v_{j-1})$  e  $P(uzv_1v_2 \dots v_{j-1})$  leva a que a letra  $v_j$  fique na mesma posição em ambos os quadros. Portanto, os passos do algoritmo de inserção de Schensted seguidos na inserção das letras de  $v$  em  $P(u)$  e em  $P(uz)$  são os mesmos, e as letras de  $v$  vão sendo inseridas nas mesmas posições no quadro  $P(u)$  e no quadro  $P(uz)$ .

Então  $P(w)$  é obtido de  $P(uv)$  adicionando uma caixa com a letra  $z$  no lugar imposto pela forma de  $P(w)$ .

Do mesmo modo, eliminando  $z$  no quadro  $P(u'zv')$  ficamos com o quadro  $P(u'v')$ . Então  $P(w')$  é obtido de  $P(u'v')$  adicionando uma caixa com a letra  $z$  no lugar imposto pela forma de  $P(w')$ .

Então  $P(uv) = P(u'v')$  e os quadros  $P(w)$  e  $P(w')$  são obtidos dos quadros  $P(uv) = P(u'v')$  adicionando uma caixa com a letra  $z$  no lugar imposto pela forma de  $P(w)$ , que já mostrámos ser igual à forma de  $P(w')$ .

Concluimos então que  $P(w) = P(w')$ . ■

**Exemplo 3.14**

Consideremos as palavras  $w = 35215323$  e  $w' = 35523123$  no alfabeto  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ .

A maior letra de  $w$  e  $w'$  é  $z = 5$ . Usando as notações da demonstração anterior, temos as subpalavras  $u = 3521$ ,  $v = 323$  de  $w$  e  $u' = 35$  e  $v' = 23123$  de  $w'$  tais que  $w = uzv$  e  $w' = u'5v'$ .

Obtemos facilmente  $P(w) = P(w') =$ 

3	5	
2	3	5
1	2	3

, portanto  $w \equiv w'$ .

Também verificamos facilmente que  $P(uv) = P(u'v') =$ 

3	5	
2	3	
1	2	3

.

O teorema anterior permite concluir que, para qualquer palavra  $w \in A^*$ ,

$$[w] = \{w' \in A^* : w \equiv w'\} = \{w' \in A^* : P(w) = P(w')\}.$$

Pelo teorema 3.4,  $\mathbf{t} = P(w) \equiv w$ , logo  $\mathbf{t} = P(w) \in [w]$ .

**Definição 3.15** *Seja  $\mathbf{t}$  um quadro. Chamamos **classe pláxica** de  $\mathbf{t}$  ao conjunto das palavras  $w \in A^*$  tais que  $P(w) = \mathbf{t}$ , isto é, o conjunto  $\pi^{-1}(\mathbf{t}) = \{w \in A^* : P(w) = \mathbf{t}\}$ , onde  $\pi$  é a projecção canónica*

$$\begin{aligned} \pi : A^* &\longrightarrow Pl(A) = A^*/\equiv. \\ w &\longmapsto [w] \end{aligned}$$

Suponhamos agora que existem dois quadros  $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2 \in [w]$ , logo  $P(\mathbf{t}_1) = P(w)$  e  $P(\mathbf{t}_2) = P(w)$ , ou seja,  $P(\mathbf{t}_1) = P(\mathbf{t}_2)$ .

Pela nota 2.19, página 22,  $\mathbf{t}_1 = P(\mathbf{t}_1)$  e  $\mathbf{t}_2 = P(\mathbf{t}_2)$ , portanto  $\mathbf{t}_1 = \mathbf{t}_2$ , o que demonstra o corolário seguinte.

**Corolário 3.16** *Cada classe pláxica em  $A^*$  contém exactamente um quadro de Young no alfabeto  $A$ .*

### 3.3 Caracterização das classes pláxicas num bialfabeto

Pelo corolário anterior, cada classe pláxica contém exactamente um quadro. Descrevemos agora o quadro de Young de uma classe pláxica num bialfabeto  $A = \{a_1, a_2\}$ .

**Proposição 3.17** *Seja  $w \in \{a_1, a_2\}^*$ . Então*

$$\begin{aligned}
 w &\equiv (a_2 a_1)^k a_1^r a_2^s (a_2 a_1)^l \equiv (a_2 a_1)^{k+l} a_1^r a_2^s \\
 &\equiv a_2^{k+l} a_1^{k+l+r} a_2^s \\
 &= \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline a_2 & \dots & a_2 & a_2 & \dots & a_2 & & & & & & & \\ \hline a_1 & \dots & a_1 & a_1 & \dots & a_1 & a_1 & \dots & a_1 & a_2 & \dots & a_2 \\ \hline \end{array} \\
 &\quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_k \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_l \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_r \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_s,
 \end{aligned}$$

para  $k, r, s, l \geq 0$ .

**Demonstração:**

Consideremos a palavra  $w' = (a_2 a_1)^k a_1^r a_2^s (a_2 a_1)^l$ .

Ora  $l_1(w') = k + r + s + l$ , pois a subpalavra não decrescente de maior comprimento de

$$w' \equiv \underbrace{(a_2 a_1) \dots (a_2 a_1)}_k \underbrace{a_1 \dots a_1}_r \underbrace{a_2 \dots a_2}_s \underbrace{(a_2 a_1) \dots (a_2 a_1)}_l$$

é

$$u = \underbrace{a_1 a_1 \dots a_1}_k \underbrace{a_1 a_1 \dots a_1}_r \underbrace{a_2 a_2 \dots a_2}_s \underbrace{a_2 a_2 \dots a_2}_l = a_1^{k+r} a_2^{s+l}.$$

O máximo das somas dos comprimentos de duas subpalavras disjuntas e não decrescentes de  $w'$  é igual a  $l_2(w') = 2k + r + s + 2l = |w'|$ . Escrevendo

$$w' \equiv \underbrace{(a_2 a_1) \dots (a_2 a_1)}_k \underbrace{a_1 \dots a_1}_r \underbrace{a_2 \dots a_2}_s \underbrace{(a_2 a_1) \dots (a_2 a_1)}_l,$$

o par de subpalavras disjuntas e não decrescentes de  $w'$  que determinam o máximo da soma dos comprimentos é:

$$(u_1, u_2) = \left( a_2^k a_2^s a_2^l, a_1^k a_1^r a_1^l \right).$$

Pelo teorema de Greene:

- A primeira linha do quadro  $P(w)$  tem  $l_1(w') = k + r + s + l$  caixas.
- A segunda linha tem  $l_2(w') - l_1(w') = 2k + r + s + 2l - k - r - s - l = k + l$ .

O quadro  $P(w')$  tem apenas duas linhas porque  $l_k(w') = |w'|$ , para  $k \geq 2$ .

Assim concluímos que

$$(a_2a_1)^k a_1^r a_2^s (a_2a_1)^l \equiv a_2^{k+l} a_1^{k+l+r} a_2^s = P(w')$$

$$= \begin{array}{cccccccccccc} \boxed{a_2} & \boxed{\dots} & \boxed{a_2} & \boxed{a_2} & \boxed{\dots} & \boxed{a_2} & \boxed{a_1} & \boxed{\dots} & \boxed{a_1} & \boxed{a_2} & \boxed{\dots} & \boxed{a_2} \\ \boxed{a_1} & \boxed{\dots} & \boxed{a_1} & \boxed{a_1} & \boxed{\dots} & \boxed{a_1} & \boxed{a_1} & \boxed{\dots} & \boxed{a_1} & \boxed{a_2} & \boxed{\dots} & \boxed{a_2} \end{array}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_k \quad \underbrace{\hspace{10em}}_l \quad \underbrace{\hspace{10em}}_r \quad \underbrace{\hspace{10em}}_s$

Pelo mesmo raciocínio concluímos que  $(a_1a_2)^{k+l} a_1^r a_2^s \equiv a_2^{k+l} a_1^{k+l+r} a_2^s$ .

Consideremos agora  $w = x_1 \dots x_m \in \{a_1, a_2\}^*$ .

Provemos por indução sobre  $m$  que  $w \equiv (a_2a_1)^k a_1^r a_2^s (a_2a_1)^l$ .

Se  $m = 0$  temos  $w = \Phi$  e nada há a provar ( $k = r = s = l = 0$ ).

Se  $m = 1$  então  $w = a_1$  ou  $w = a_2$  e também nada há a provar.

Suponhamos, por indução, que  $w' = x_1 \dots x_{m-1} \equiv (a_2a_1)^k a_1^r a_2^s (a_2a_1)^l$ .

Então  $w \equiv w'x_m = (a_2a_1)^k a_1^r a_2^s (a_2a_1)^l x_m$ .

Se  $x_m = a_1$ :

Aplicando sucessivamente  $(RK1)$ ,  $a_1a_2a_1 \equiv a_2a_1a_1$ ,  $l$  vezes obtemos

$$w \equiv (a_2a_1)^k a_1^r a_2^s a_1 (a_2a_1)^l.$$

Se  $s = 0$  temos  $w \equiv (a_2a_1)^k a_1^r a_1 (a_2a_1)^l = (a_2a_1)^k a_1^{r+1} (a_2a_1)^l$ .

Se  $s > 0$ , aplicamos sucessivamente  $(RK2)$ ,  $a_2a_1a_2 \equiv a_2a_2a_1$ ,  $(s-1)$  vezes

$$w \equiv (a_2a_1)^k a_1^r a_2 a_1 a_2^{s-1} (a_2a_1)^l.$$

Aplicando sucessivamente  $(RK1)$ ,  $a_1a_2a_1 \equiv a_2a_1a_1$ ,  $r$  vezes obtemos

$$w \equiv (a_2a_1)^k (a_2a_1) a_1^r a_2^{s-1} (a_2a_1)^l = (a_2a_1)^{k+1} a_1^r a_2^{s-1} (a_2a_1)^l.$$

Se  $x_m = a_2$ :

Aplicando sucessivamente  $(RK2)$ ,  $a_2a_1a_2 \equiv a_2a_2a_1$ ,  $l$  vezes obtemos

$$w \equiv (a_2a_1)^k a_1^r a_2^s a_2 (a_2a_1)^l = (a_2a_1)^k a_1^r a_2^{s+1} (a_2a_1)^l \text{ como pretendíamos.}$$

Assim,  $w \equiv (a_2 a_1)^k a_1^r a_2^s (a_2 a_1)^l \equiv a_2^{k+l} a_1^{k+l+r} a_2^s$ .

Pelo corolário 3.16, cada classe pláxica em  $\{a_1, a_2\}^*$  contém exactamente um quadro de Young no alfabeto  $\{a_1, a_2\}$ , logo

$$P(w) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline a_2 & \dots & a_2 & a_2 & \dots & a_2 \\ \hline a_1 & \dots & a_1 & a_1 & \dots & a_1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline a_1 & \dots & a_1 & a_2 & \dots & a_2 \\ \hline \end{array} \cdot \blacksquare$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_k \quad \underbrace{\hspace{10em}}_l \quad \underbrace{\hspace{10em}}_r \quad \underbrace{\hspace{10em}}_s$

**Exemplo 3.18**

Consideremos a palavra  $w = 22121111221112 \in \{1, 2\}^*$ .

$$P(w) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 2 \\ \hline \end{array} .$$

Então  $w = (2(21)(21)1)11(2(21)1)12 \equiv 2^5 1^8 2 \equiv (21)^5 1^3 2 \equiv (21)^3 1^3 2^1 (21)^2$ .



## Capítulo 4

# O monóide dos quadros de Young

Verificámos, no capítulo anterior, que cada classe pláxica em  $A^*$  contém um único quadro de Young. Sabendo isto, o conjunto  $Tab(A)$  dos quadros de Young, no alfabeto  $A$ , fica munido da estrutura de monóide. O produto de dois quadros  $P_1, P_2 \in A^*$  será o único quadro congruente com a palavra  $P_1 P_2 \in A^*$ . Calculamos o produto de dois quadros,  $P_1$  e  $P_2$ , de duas formas. Primeiro usando o algoritmo de inserção de Schensted, descrito no capítulo anterior. Depois usando um novo algoritmo, criado por Schützenberger, chamado *jeu de taquin*. Este algoritmo é um procedimento de deslizamento de uma caixa vazia do quadro truncado cuja palavra é  $P_1 P_2$ , e transforma esse quadro truncado num quadro de Young, congruente com a palavra  $P_1 P_2$ . Estes dois métodos de calcular o produto de dois quadros conduzem ao mesmo quadro, uma vez que existe um e um só quadro em cada classe pláxica.

Neste estudo seguimos as referências FULTON [3], LASCOUX & SCHÜTZENBERGER [12] e LOTHAIRE [14].

Por conveniência, neste capítulo, denotamos os quadros de Young por letras maiúsculas.

## 4.1 Produto de quadros pelo algoritmo de Schensted

Dados dois quadros  $P_1$  e  $P_2$  no alfabeto  $A$ , o produto  $P_1 \odot P_2$  pelo algoritmo de inserção de Schensted resume-se simplesmente à inserção, por este algoritmo, da palavra do quadro  $P_2$  no quadro  $P_1$ . Ou seja,  $P_1 \odot P_2$  é o único quadro congruente com a palavra  $P_1 P_2$ .

O número de caixas deste novo quadro,  $P_1 \odot P_2$ , será a soma do número de caixas de  $P_1$  com o número de caixas de  $P_2$  e será preenchido com os elementos que constam em ambos os quadros.

Quando descrevemos o algoritmo de inserção de Schensted observámos que, a uma palavra  $w$  está associada uma outra  $\mathbf{t} = P(w)$  nas condições da definição 2.13, página 17, que resulta de  $w$  por aplicações sucessivas do algoritmo de inserção de Schensted. Assim, para uma letra  $x$ ,

$$P(wx) \equiv wx \equiv P(w)x \equiv P(w) \odot x.$$

Uma vez que esta construção de produto de dois quadros não é mais que uma sucessiva inserção de letras de um quadro no outro, concluímos que, dadas duas palavras  $w_1$  e  $w_2$ ,

$$P(w_1 w_2) = P(w_1) \odot P(w_2).$$

Podemos então escrever

$$P_1 \odot P_2 = P(P_1 P_2).$$

No caso trivial em que  $P_2 = \Phi$ ,  $P_1 \odot P_2 = P(P_1 \Phi) = P(P_1) = P_1$ , pela nota 2.19.

Por outras palavras, se escrevermos as entradas do quadro  $P_2$  da esquerda para a direita e do topo para baixo do quadro, temos  $P_2 = x_1 x_2 \dots x_m$ , onde  $m$  é o número de caixas de  $P_2$ , o produto  $P_1 \odot P_2$  pode ser descrito por:

$$\begin{aligned} P_1 \odot P_2 &= P(P_1 P_2) = P(P_1 x_1 \dots x_m) \\ &= P(P_1 x_1) \odot P(x_2 \dots x_m) \\ &= P(P(P_1 x_1) x_2) \odot P(x_3 \dots x_m) = P(P_1 x_1 x_2) \odot P(x_3 \dots x_m) \\ &\vdots \\ &= P(P_1 x_1 x_2 \dots x_{m-1}) \odot x_m. \end{aligned}$$

**Exemplo 4.1**

Consideremos os quadros de Young  $P_1 = \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 5 \\ \hline 2 & 3 \\ \hline 1 & 2 & 2 \\ \hline \end{array}$  e  $P_2 = \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 5 \\ \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline \end{array}$ .

Nestas condições,  $P_1 \odot P_2 = P(P_1 \ 45 \ 124)$ ,

$$\begin{aligned}
 P_1 \odot P_2 &= \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 5 \\ \hline 2 & 3 \\ \hline 1 & 2 & 2 \\ \hline \end{array} \odot \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 5 \\ \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 5 \\ \hline 2 & 3 \\ \hline 1 & 2 & 2 & 4 \\ \hline \end{array} \odot \begin{array}{|c|} \hline 5 \\ \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline \end{array} \\
 &= \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 5 \\ \hline 2 & 3 \\ \hline 1 & 2 & 2 & 4 & 5 \\ \hline \end{array} \odot \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline 5 \\ \hline 3 & 3 \\ \hline 2 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ \hline \end{array} \odot \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 4 \\ \hline \end{array} \\
 &= \begin{array}{|c|} \hline 5 \\ \hline 3 & 3 \\ \hline 2 & 2 & 4 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 2 & 5 \\ \hline \end{array} \odot \begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline 5 \\ \hline 3 & 3 \\ \hline 2 & 2 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 2 & 4 \\ \hline \end{array} .
 \end{aligned}$$

Pelo mesmo processo calculamos

$$P_2 \odot P_1 = \begin{array}{|c|} \hline 5 \\ \hline 4 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline 2 & 3 & 5 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ \hline \end{array} ,$$

verificando-se então que este produto não é comutativo, tal como seria de esperar uma vez que a justaposição de palavras não é comutativa.

Isto é, em geral,  $P(w_1w_2) \neq P(w_2w_1)$ , para  $w_1, w_2 \in A^*$ .

O teorema seguinte mostra que a operação  $\odot$  define a estrutura de monóide no conjunto dos quadros no alfabeto  $A$ .

**Teorema 4.2** *O conjunto dos quadros de Young no alfabeto  $A$  com o produto  $\odot$ , definido pelo algoritmo de inserção de Schensted, tem a estrutura de monóide.*

**Demonstração:**

O quadro vazio  $\Phi$  é a unidade deste monóide pois, para qualquer quadro de Young  $T$ ,  $\Phi \odot T = T \odot \Phi = T$ .

Dados os quadros de Young  $T$ ,  $U$  e  $V$ , temos que

$$(T \odot U) \odot V = P((T \odot U) \ V) = P(P(T \ U) \ V).$$

Mas  $P(T \ U) \equiv T \ U$ , pela nota 2.19, página 22, logo  $P(T \ U) \ V \equiv (T \ U) \ V$ .

Assim,  $(T \odot U) \odot V = P((T \ U) \ V)$ .

Por outro lado,

$$T \odot (U \odot V) = P(T \ (U \odot V)) = P(T \ P(U \ V)).$$

Como  $P(U \ V) \equiv U \ V$ , pela nota 2.19, logo  $T \ P(U \ V) \equiv T \ (U \ V)$ .

Então,  $T \odot (U \odot V) = P(T \ (U \ V))$ .

Uma vez que a justaposição é associativa,  $(T \ U) \ V = T \ (U \ V)$ , portanto  $P((T \ U) \ V) = P(T \ (U \ V))$  e  $\odot$  é associativa. ■

## 4.2 Produto de quadros pelo *jeu de taquin*

A outra forma de definir este produto é conhecida por deslizamento de Schützenberger ou *jeu de taquin* que usa a noção de quadro truncado  $T$  da forma  $\lambda / \mu$ , onde  $\lambda$  e  $\mu$  são duas partições tais que  $\mu \subseteq \lambda$  (definição 2.7, página 15). O algoritmo é o seguinte.

Seja  $T$  um quadro truncado da forma  $\lambda / \mu$  do qual escolhemos um canto interior. Este canto interior de  $T$  “desliza” para a direita se o número da caixa à direita for estritamente menor que o da caixa acima deste canto. Caso contrário, “deslizamos” este canto para a caixa de cima. Entendemos por “deslizar” trocar o número da caixa que se escolheu pela caixa vazia que se pretende mover. O canto transforma-se assim numa cavidade dentro do quadro truncado. O processo repete-se a partir desta cavidade para as caixas acima

e à direita dela até que esta caixa vazia se transforme num canto exterior sendo, nessa situação, removida do quadro.

A configuração de um quadro truncado, após uma operação de deslizamento, pode não ser um quadro truncado, mas sim um quadro com um “buraco”. Neste caso, a palavra deste quadro define-se como num quadro truncado, lendo as letras da esquerda para a direita e de cima para baixo.

Verificamos agora que o resultado deste algoritmo, quando aplicado a um quadro truncado, é um quadro truncado. Para tal basta apenas verificar que em cada passo do algoritmo, seja o deslizamento vertical ou horizontal, os números dispostos no quadro sejam estritamente crescentes por coluna e não decrescentes por linha. As caixas importantes num determinado passo são

$$\begin{array}{|c|c|} \hline d & y \\ \hline c & \mathbf{X} & x \\ \hline & a & b \\ \hline \end{array},$$

sendo  $a \leq b$ ,  $c \leq x$ ,  $d \leq y$ ,  $b < x$  e  $c < d$ .

Se  $x < y$ , o que se obtém destas caixas será

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline d & y & \\ \hline c & x & \mathbf{X} \\ \hline & a & b \\ \hline \end{array}.$$

Caso contrário, isto é, se  $x \geq y$  obtemos

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline d & \mathbf{X} & \\ \hline c & y & x \\ \hline & a & b \\ \hline \end{array}.$$

No primeiro caso, devemos verificar que  $a < x < y$ . Ora, já se sabia que  $a \leq b$  e  $b < x$ , logo  $a < x$ . Por hipótese  $x < y$ , então  $a < x < y$ .

No outro caso, pretendemos que  $c \leq y \leq x$ . Mas  $c < d$  e  $d \leq y$ , logo  $c \leq y$ . Como  $x \geq y$  temos  $c \leq y \leq x$ .

**Exemplo 4.3**

Consideremos o quadro truncado do exemplo 2.8, página 15, e o canto interior assinalado com **X**,

5	5			
<b>3</b>	3	6		
<b>X</b>	<b>2</b>	3	4	
				3
				2

Deslizando o canto assinalado com **X** segundo as condições do algoritmo de Schützenberger, os passos serão os seguintes:

5	5			
<b>3</b>	3	6		
<b>X</b>	<b>2</b>	3	4	
				3
				2

 $\rightsquigarrow$ 

5	5			
3	<b>3</b>	6		
2	<b>X</b>	<b>3</b>	4	
				3
				2

 $\rightsquigarrow$ 

5	<b>5</b>			
3	<b>X</b>	<b>6</b>		
2	3	3	4	
				3
				2

 $\rightsquigarrow$ 

5	<b>X</b>			
3	5	6		
2	3	3	4	
				3
				2

 $\rightsquigarrow$ 

5				
3	5	6		
2	3	3	4	
				3
				2

Se optarmos pelo outro canto interior deste quadro truncado temos:

5	5			
3	3	6		
	2	3	4	
			<b>X</b>	<b>3</b>
				2

 $\rightsquigarrow$ 

5	5			
3	3	6		
	2	3	4	
			3	<b>X</b>
				2

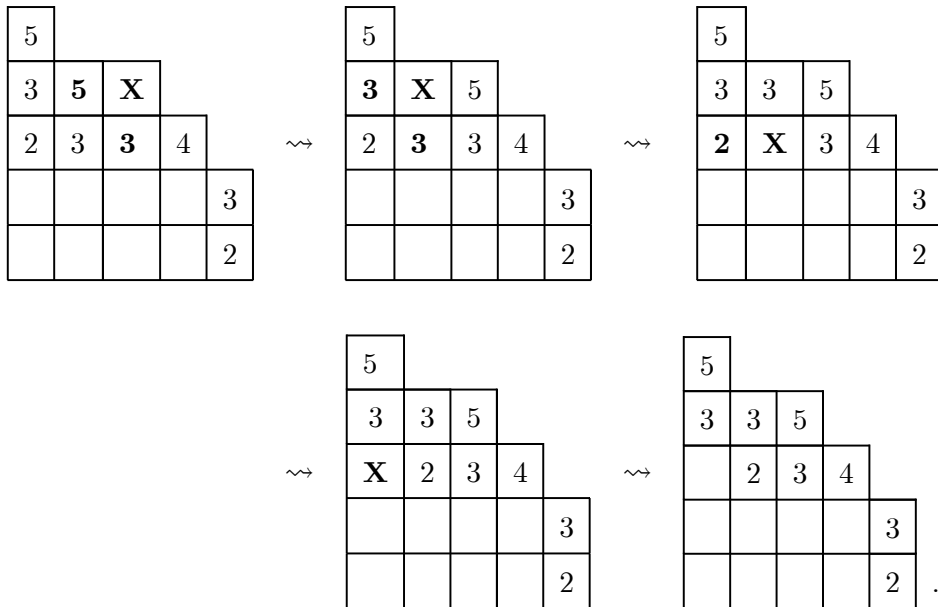
 $\rightsquigarrow$ 

5	5			
3	3	6		
	2	3	4	
			3	
				2

Tal como o algoritmo de inserção de Schensted, facilmente se verifica que o *jeu de taquin* é reversível, isto é, dado um quadro truncado que tenha resultado da aplicação deste algoritmo e a caixa que foi removida (o canto exterior final), conseguimos inverter o processo e chegar ao quadro truncado inicial com o canto interior escolhido.

#### Exemplo 4.4

Sabendo que, no quadro truncado seguinte, a caixa marcada com **X** foi a caixa removida pelo *jeu de taquin*, pretendemos obter o quadro truncado inicial e saber qual o canto interior escolhido.



Este algoritmo, que consiste num deslizamento de uma caixa vazia, de um quadro truncado  $T$ , pode ser desenvolvido a partir de qualquer canto interior. No quadro resultante, podemos repetir o processo a partir de outro canto interior, até que não haja mais cantos interiores, isto é, até conseguirmos remover todas as caixas vazias de  $T$ . Então, o resultado da aplicação deste algoritmo a todas as caixas vazias de  $T$  é um quadro de Young,  $Rect(T)$ , que designamos por **rectificação** de  $T$ . O mais interessante é que, seguindo as regras atrás definidas, não interessa a ordem pela qual as caixas vazias são removidas. Tal facto será provado na proposição 4.6. Antes, mostramos que a palavra do quadro truncado

resultante da aplicação deste algoritmo ao quadro truncado  $T$  é congruente com a palavra do quadro truncado  $T$ .

**Proposição 4.5** *Se um quadro truncado  $T_2$  pode ser obtido do quadro truncado  $T_1$ , por uma sequência de deslizamentos, então as palavras de  $T_1$  e de  $T_2$  são congruentes, isto é,  $w(T_1) \equiv w(T_2)$ .*

**Demonstração:**

Começemos por estudar o caso de o quadro truncado  $T_2$  ser obtido do quadro truncado  $T_1$  por um único deslizamento.

Se este deslizamento é horizontal, a palavra não é alterada e  $w(T_1) = w(T_2)$ .

Analisemos então o caso do deslizamento ser vertical.

Começemos por admitir que este deslizamento é

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline b & x & d \\ \hline a & \mathbf{X} & c \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline b & \mathbf{X} & d \\ \hline a & x & c \\ \hline \end{array},$$

onde  $a, b, c$  e  $d$  são letras de  $A$ .

Para que o deslizamento seja vertical, devemos ter  $a < b \leq x \leq c < d$ .

Nestas condições, a subpalavra  $u = bxdac$  de  $w(T_1)$  é transformada na subpalavra  $u' = bdaxc$  de  $w(T_2)$ , e

$$P(u) = P(u') = \begin{array}{|c|c|} \hline b & d \\ \hline a & x & c \\ \hline \end{array}.$$

Pelo teorema de Knuth, página 36,  $u \equiv u'$ , logo  $w(T_1) \equiv w(T_2)$ .

Consideremos agora o caso em que  $a, b, c$  e  $d$  são linhas de  $A^*$ :

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline b_1 & \dots & b_p & x & d_1 & \dots & d_q \\ \hline a_1 & \dots & a_p & \mathbf{X} & c_1 & \dots & c_q \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline b_1 & \dots & b_p & \mathbf{X} & d_1 & \dots & d_q \\ \hline a_1 & \dots & a_p & x & c_1 & \dots & c_q \\ \hline \end{array},$$

onde  $p, q \geq 0$ .

A subpalavra  $u = bxdac = b_1 \dots b_p x d_1 \dots d_q a_1 \dots a_p c_1 \dots c_q$  de  $w(T_1)$  é trans-

formada na subpalavra  $u' = bdaxc = b_1 \dots b_p d_1 \dots d_q a_1 \dots a_p x c_1 \dots c_q$  de  $w(T_2)$ .

Nestas condições

$$\begin{aligned}
a_i &\leq a_{i+1} \text{ e } b_i \leq b_{i+1}, \text{ para } 1 \leq i \leq p-1, \\
a_i &< b_i, \text{ para } 1 \leq i \leq p, \\
c_i &\leq c_{i+1} \text{ e } d_i \leq d_{i+1}, \text{ para } 1 \leq i \leq q-1, \\
c_i &< d_i, \text{ para } 1 \leq i \leq q.
\end{aligned} \tag{4.2.1}$$

E, para que o deslizamento seja vertical,

$$a_p < b_p \leq x \leq c_1 < d_1. \tag{4.2.2}$$

Se  $p = 0$ , por (4.2.1) e (4.2.2),

$$P(u) = P(u') = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline d_1 & d_2 & \dots & d_q \\ \hline x & c_1 & \dots & c_{q-1} & c_q \\ \hline \end{array} .$$

Então, pelo teorema de Knuth,  $u = xdc \equiv dxc = u'$ .

Se  $q = 0$  então  $u = bax = u'$  e

$$P(u) = P(u') = \begin{array}{|c|c|c|} \hline b_1 & \dots & b_p \\ \hline a_1 & \dots & a_p & x \\ \hline \end{array} .$$

No caso geral, por (4.2.1) e (4.2.2), temos

$$P(u) = P(u') = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline b_1 & \dots & b_p & d_1 & \dots & d_q \\ \hline a_1 & \dots & a_p & x & c_1 & \dots & c_q \\ \hline \end{array}$$

e, pelo teorema de Knuth,  $u \equiv u'$ , portanto  $w(T_1) \equiv w(T_2)$

O caso geral de um deslizamento vertical é consequência do caso anterior.

Agora, se  $T_2$  é obtido de  $T_1$  por uma sequência de deslizamentos, basta aplicar o raciocínio anterior para os sucessivos deslizamentos. ■

O seguinte resultado justifica a unicidade da rectificação,  $Rect(T)$ , de um quadro truncado  $T$ .

**Proposição 4.6** *Dado um quadro truncado  $T$ , qualquer escolha de cantos interiores leva  $T$  ao mesmo quadro rectificado.*

**Demonstração:**

Suponhamos que duas escolhas diferentes de cantos interiores levam a dois quadros rectificadados  $T_1$  e  $T_2$ .

Pela proposição 4.5,  $w(T) \equiv w(T_1)$  e  $w(T) \equiv w(T_2)$ , logo  $w(T_1) \equiv w(T_2)$ .

Como em cada classe pláxica existe um e um só quadro,  $T_1 = T_2$ . ■

Já vimos que qualquer palavra é congruente com um único quadro. Então, pelo resultado anterior, a rectificação de um quadro truncado  $T$ ,  $Rect(T)$ , é o único quadro congruente com a palavra de  $T$ . Mais geralmente, dados dois quadros truncados  $T$  e  $U$ ,

$$Rect(T) = Rect(U) \text{ se e só se } P(w(T)) = P(w(U)),$$

sendo  $P(w(T))$  e  $P(w(U))$  o resultado da aplicação do algoritmo de inserção de Schensted às palavras representadas nos quadros truncados  $T$  e  $U$ , respectivamente.

Estamos agora em condições de definir o produto entre dois quadros, usando o *jeu de taquin*. Dados os quadros de Young  $P_1$  e  $P_2$ , começamos por construir o quadro truncado  $P_1 * P_2$  da seguinte forma. Consideremos um rectângulo com tantas colunas como  $P_1$  e tantas linhas como  $P_2$ . Colocamos então o quadro  $P_1$  sobre este rectângulo e o quadro  $P_2$  à direita deste. Notemos que a palavra de  $P_1 * P_2$  é  $P_1P_2$ .

**Exemplo 4.7**

Dados  $P_1 = 35 \ 23 \ 122 =$ 

3	5	
2	3	
1	2	2

 e  $P_2 = 45 \ 124 =$ 

4	5	
1	2	4

 temos

$$P_1 * P_2 =$$

3	5				
2	3				
1	2	2			
			4	5	
			1	2	4

A palavra de  $P_1 * P_2$  é  $P_1P_2 = 35 \ 23 \ 122 \ 45 \ 124$ .

Enunciamos agora o teorema que mostra a igualdade das operações,  $\odot$  e  $Rect(\_ * \_)$ , no conjunto dos quadros no alfabeto  $A$ .

**Teorema 4.8** *Nas condições atrás descritas,  $Rect(P_1 * P_2) = P_1 \odot P_2 = P(P_1 P_2)$ .*

**Demonstração:**

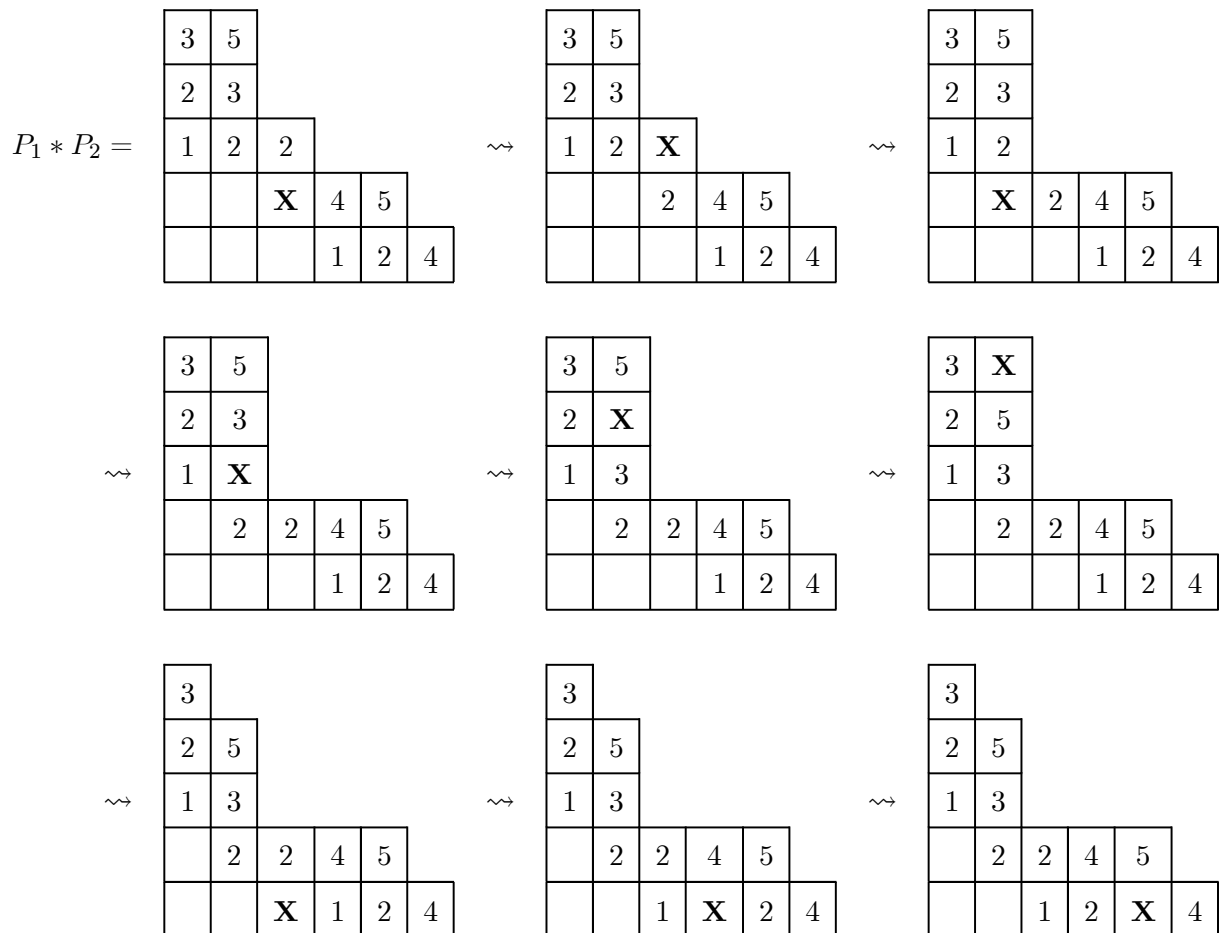
Por um lado,  $P_1 P_2$  é a palavra de  $P_1 * P_2$ . Portanto, pela proposição 4.5,  $P_1 P_2 \equiv Rect(P_1 * P_2)$ .

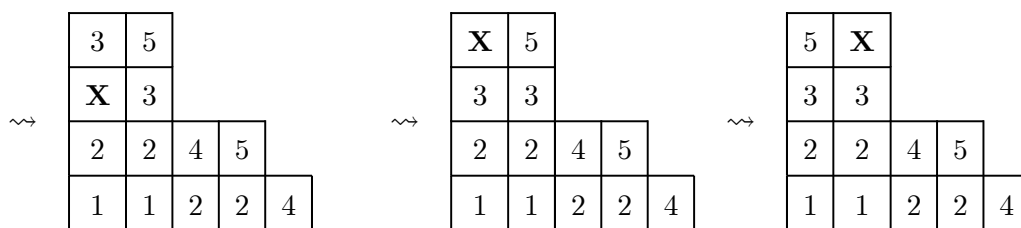
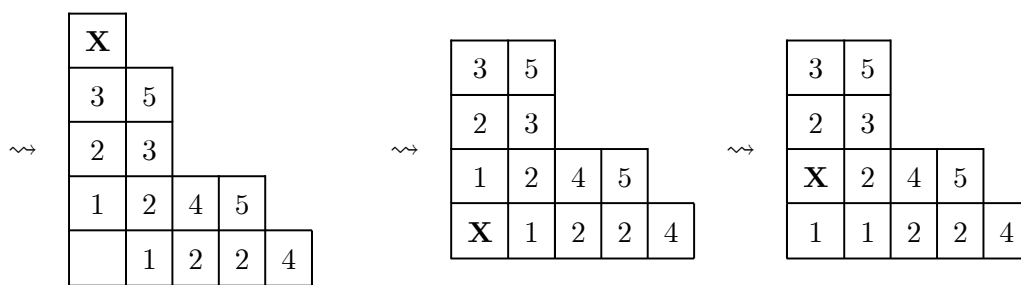
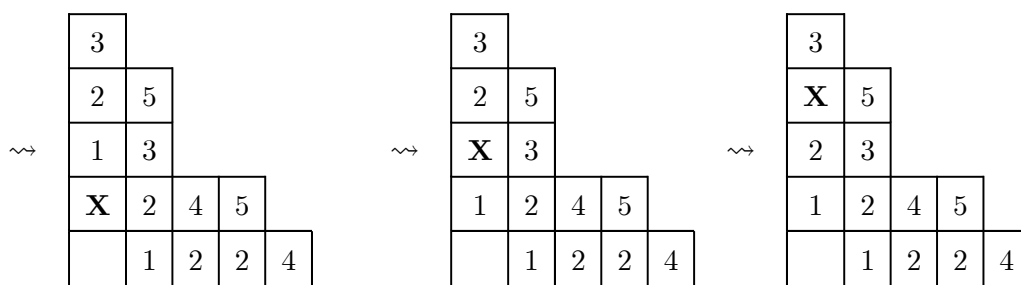
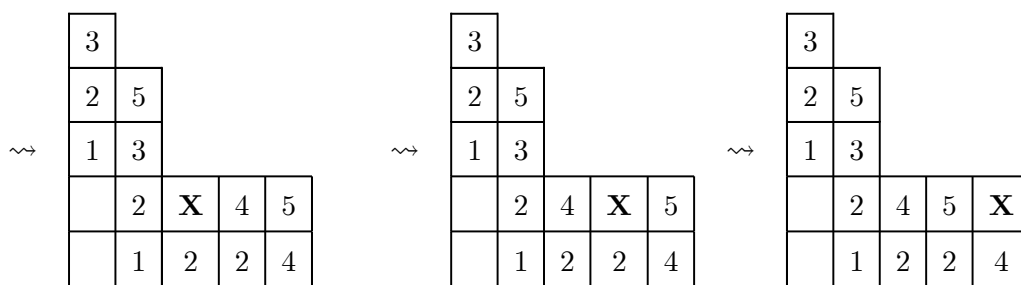
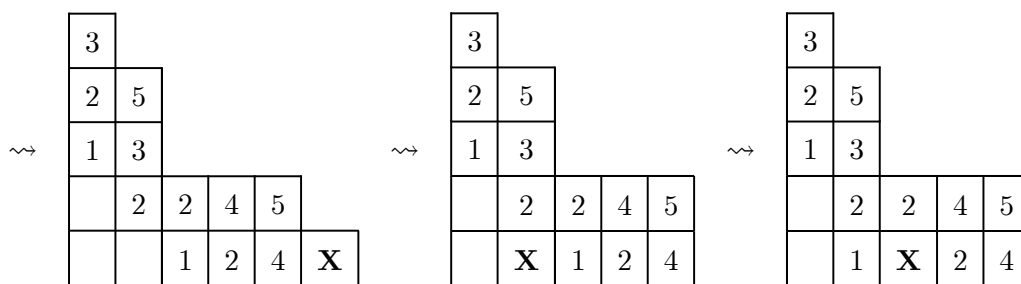
Por outro lado,  $P_1 \odot P_2 = P(P_1 P_2)$ , logo  $P_1 \odot P_2 \equiv P_1 P_2$ .

Como numa classe pláxica existe um único quadro, concluímos o pretendido, isto é,  $P(P_1 P_2) = P_1 \odot P_2 = Rect(P_1 * P_2)$ . ■

**Exemplo 4.9**

Uma forma de calcular o produto dos quadros  $P_1$  e  $P_2$  do exemplo 4.7 usando o *jeu de taquin* é a seguinte:





$$\rightsquigarrow \begin{array}{|c|} \hline 5 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 3 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 & 2 & 4 & 5 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 2 & 4 \\ \hline \end{array} = \text{Rect}(P_1 * P_2).$$

Portanto, conforme o exemplo 4.1, página 45,  $\text{Rect}(P_1, P_2)$  e  $P_1 \odot P_2$  dão o mesmo resultado, conforme o teorema 4.8.

Pelo teorema 4.8,  $\text{Rect}(P_1 * P_2) = P_1 \odot P_2$ . Pelo teorema 4.2, o conjunto dos quadros de Young com a operação  $\odot$  tem a estrutura de monóide. Então, o conjunto dos quadros de Young no alfabeto  $A$ , com o produto entre quadros  $\text{Rect}(\_ * \_)$ , é um monóide. Contudo, apresentamos uma demonstração deste resultado usando apenas o *jeu de taquin*.

**Teorema 4.10** *O conjunto dos quadros de Young no alfabeto  $A$ , com o produto entre quadros  $\text{Rect}(\_ * \_)$ , é um monóide.*

**Demonstração:**

Em relação à associatividade, consideremos o quadro truncado

$$T * U * W = \begin{array}{|c|} \hline T \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline & U \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & W \\ \hline \end{array} .$$

Se começarmos por deslizar as caixas do rectângulo à esquerda de  $U$  e por baixo de  $T$ , obtemos

$$\begin{array}{|c|} \hline \text{Rect}(T * U) \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline W \\ \hline \end{array} = \text{Rect}(\text{Rect}(T * U) * W).$$

Por outro lado, se o deslizamento começar pelas as caixas do rectângulo à esquerda de  $W$  e por baixo de  $U$ , temos

$$\begin{array}{|c|} \hline T \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \text{Rect}(U * W) \\ \hline \end{array} = \text{Rect}(T * \text{Rect}(U * W)).$$

Pela proposição 4.6, qualquer que seja a escolha inicial dos cantos interiores, o *jeu de taquin* conduz sempre ao mesmo quadro rectificado, portanto

$$\text{Rect}(\text{Rect}(T * U) * W) = \text{Rect}(T * U * W) = \text{Rect}(T * \text{Rect}(U * W)).$$

O elemento neutro deste semigrupo é o quadro vazio,  $\Phi$ :

$$\text{Rect}(\Phi * P) = \text{Rect}(P * \Phi) = P. \quad \blacksquare$$

## Capítulo 5

# Correspondência de Robinson-Schensted

Já concluímos que em cada classe pláxica, no alfabeto  $A$ , existe um e um só elemento do conjunto dos quadros no alfabeto  $A$ . Verificamos agora que as palavras  $w$  numa classe pláxica, contendo o quadro  $\mathbf{t}$ , são parametrizadas por um quadro standard  $Q(w)$  com a forma de  $\mathbf{t}$ , quadro de inserção, que regista a ordem pela qual as letras de  $w$  vão sendo inseridas na construção de  $P(w) = \mathbf{t}$ , pelo algoritmo de Schensted. Obtemos assim a correspondência de Robinson-Schensted, que estabelece uma bijecção entre palavras no alfabeto  $A$  e pares de quadros  $(P, Q)$ , onde  $P$  é um quadro no alfabeto  $A$  e  $Q$  um quadro standard com a forma de  $P$ . Nestas condições, as palavras da classe pláxica de um quadro  $\mathbf{t}$ , de forma  $\lambda$ , estão em bijecção com os quadros standard de forma  $\lambda$ . Em seguida investigamos quais as relações de simetria entre estes quadros,  $P(w)$  e  $Q(w)$ . Quando temos uma palavra  $w$  standard, que pode ser identificada com uma permutação  $\sigma$ , o quadro de inserção  $Q$  de  $\sigma$  é igual ao quadro de Schensted da palavra  $\sigma^{-1}$ , ou seja,  $Q(\sigma) = P(\sigma^{-1})$ . No caso geral de uma palavra qualquer  $w \in A^*$ , para obter a simetria anterior precisamos definir a palavra standard  $std(w)$ , standardização de  $w$ . Concluímos então que o quadro de inserção  $Q$  de  $w$  é igual ao quadro de Schensted da palavra standard  $std(w)^{-1}$ , ou seja,  $Q(w) = P(std(w)^{-1})$ .

Para o desenvolvimento destes assuntos seguimos FULTON [3], GREENE [4], KNUTH [9], LOTHAIRE [14], SAGAN [19] e SCHENSTED [20].

## 5.1 Quadro de inserção

Denotemos por  $\mathbf{Tab}(A)$  o conjunto de todos os quadros no alfabeto  $A$  e por  $\mathbf{STab}$  o conjunto dos quadros standard (página 13). Dada uma partição  $\lambda$ , escrevemos, respectivamente,  $\mathbf{Tab}(\lambda, A)$  e  $\mathbf{STab}(\lambda)$  para representar o conjunto dos quadros em  $A$  com forma  $\lambda$  e o conjunto dos quadros standard com forma  $\lambda$ .

Seja  $t$  um quadro de forma  $\lambda$ . Recordemos que a classe pláxica de  $t$  é o conjunto  $\pi^{-1}(\mathbf{t}) = \{w \in A^* : P(w) = \mathbf{t}\}$ , onde  $\pi$  é a projecção canónica

$$\begin{aligned} \pi : A^* &\longrightarrow Pl(A) = A^*/\equiv. \\ w &\longmapsto [w] \end{aligned}$$

Todas as palavras  $w'$  na classe pláxica  $\pi^{-1}(\mathbf{t})$  têm o mesmo quadro  $P(w') = \mathbf{t}$ , mas a ordem pela qual as caixas vão sendo inseridas na construção de  $P(w)$  distingue as palavras de uma classe pláxica.

Seja  $w = x_1x_2 \dots x_m \in A^*$ . Na construção de  $P(w)$ , pelo algoritmo de inserção de Schensted, obtemos uma sequência de quadros

$$P_1 = \boxed{x_1}, P_2 = P(x_1x_2), \dots, P_m = P(x_1x_2 \dots x_m) = P(w),$$

associados a uma sequência de partições

$$(1) = \lambda^{(1)} \subseteq \lambda^{(2)} \subseteq \dots \subseteq \lambda^{(m)},$$

onde  $\lambda^{(i)}$  é a forma do quadro  $P_i$ ,  $1 \leq i \leq m$ . O diagrama da partição  $\lambda^{(i)}$  é obtido do diagrama relativo à partição  $\lambda^{(i-1)}$ ,  $2 \leq i \leq m$ , adicionando-lhe uma caixa.

Esta sucessão de partições define um quadro standard, **quadro de inserção**  $Q(w)$ , com a mesma forma de  $P(w)$ , que permite conhecer a ordem pela qual as caixas foram sendo inseridas na construção de  $P(w)$ , pelo algoritmo de inserção de Schensted.

Este quadro tem a mesma forma que  $P(w)$  e é construído de seguinte forma.

- Colocamos o inteiro 1 na caixa do diagrama de  $P_1$ ;
- Colocamos o inteiro  $k$ ,  $2 \leq k \leq m$ , na caixa que faz parte do quadro de  $P_k$  mas não de  $P_{k-1}$ . Uma vez que esta nova caixa é um canto exterior em  $P_k$ , a nova entrada  $k$  será maior que as entradas abaixo e à sua esquerda. Assim, se  $Q_k$  é o quadro construído desta forma no  $k$ -ésimo passo deste algoritmo, então  $Q_k$  é um quadro de Young standard.

Obtemos assim a aplicação  $Q : A^* \longrightarrow STab$ .

$$w \longmapsto Q(w)$$

Para cada  $w \in A^*$ , o quadro  $Q(w)$  tem a mesma forma de  $P(w)$  e tem entradas numeradas de 1 a  $|w|$ . O número  $k$ ,  $1 \leq k \leq |w|$ , no quadro  $Q(w)$  numera a caixa que foi adicionada no  $k$ -ésimo passo da construção de  $P(w)$ .

### Exemplo 5.1

Consideremos  $w = 3221532$ .

Partição	Construção de $P(w)$	Construção de $Q(w)$										
$\lambda^{(1)} = (1)$	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>3</td></tr></table>	3	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>1</td></tr></table>	1								
3												
1												
$\lambda^{(2)} = (1, 1)$	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>3</td></tr><tr><td>2</td></tr></table>	3	2	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>2</td></tr><tr><td>1</td></tr></table>	2	1						
3												
2												
2												
1												
$\lambda^{(3)} = (2, 1)$	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>3</td></tr><tr><td>2</td><td>2</td></tr></table>	3	2	2	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>2</td></tr><tr><td>1</td><td>3</td></tr></table>	2	1	3				
3												
2	2											
2												
1	3											
$\lambda^{(4)} = (2, 1, 1)$	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>3</td></tr><tr><td>2</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td></tr></table>	3	2	1	2	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>4</td></tr><tr><td>2</td></tr><tr><td>1</td><td>3</td></tr></table>	4	2	1	3		
3												
2												
1	2											
4												
2												
1	3											
$\lambda^{(5)} = (3, 1, 1)$	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>3</td></tr><tr><td>2</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>5</td></tr></table>	3	2	1	2	5	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>4</td></tr><tr><td>2</td></tr><tr><td>1</td><td>3</td><td>5</td></tr></table>	4	2	1	3	5
3												
2												
1	2	5										
4												
2												
1	3	5										

Partição	Construção de $P(w)$	Construção de $Q(w)$																		
$\lambda^{(6)} = (3, 2, 1)$	<table border="1"> <tr><td>3</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>2</td><td>5</td><td></td></tr> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr> </table>	3			2	5		1	2	3	<table border="1"> <tr><td>4</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>2</td><td>6</td><td></td></tr> <tr><td>1</td><td>3</td><td>5</td></tr> </table>	4			2	6		1	3	5
3																				
2	5																			
1	2	3																		
4																				
2	6																			
1	3	5																		
$\lambda^{(7)} = (3, 2, 2)$	<table border="1"> <tr><td>3</td><td>5</td><td></td></tr> <tr><td>2</td><td>3</td><td></td></tr> <tr><td>1</td><td>2</td><td>2</td></tr> </table>	3	5		2	3		1	2	2	<table border="1"> <tr><td>4</td><td>7</td><td></td></tr> <tr><td>2</td><td>6</td><td></td></tr> <tr><td>1</td><td>3</td><td>5</td></tr> </table>	4	7		2	6		1	3	5
3	5																			
2	3																			
1	2	2																		
4	7																			
2	6																			
1	3	5																		

Logo  $Q(w) = 47\ 26\ 135$ .

Definimos agora a correspondência de Robinson-Schensted, que estabelece uma bijecção entre as palavras  $w$  de  $A^*$  e o par constituído pelo quadro  $P(w)$  e pelo quadro de inserção  $Q(w)$ .

**Definição 5.2** Dado um alfabeto  $A$ , a **correspondência de Robinson-Schensted** é a aplicação

$$\begin{aligned} \rho : A^* &\longrightarrow \bigcup_{\lambda} \text{Tab}(\lambda, A) \times \text{STab}(\lambda) \\ w &\longmapsto (P(w), Q(w)). \end{aligned}$$

Nas condições do exemplo 5.1, temos  $\rho(3221532) = (3523122, 4726135)$ .

Mostremos agora que a correspondência de Robinson-Schensted é uma bijecção entre  $A^*$  e  $\bigcup_{\lambda} \text{Tab}(\lambda, A) \times \text{STab}(\lambda)$ .

**Teorema 5.3** A correspondência de Robinson-Schensted é bijectiva.

**Demonstração:**

Na página 20 observámos que o algoritmo de inserção de Schensted é reversível, se for conhecida a última caixa inserida no quadro.

Assim, dado  $(\mathbf{t}, \mathbf{q}) \in \text{Tab}(\lambda, A) \times \text{STab}(\lambda)$ , para uma partição  $\lambda$ , é possível obter  $w = \rho^{-1}(\mathbf{t}, \mathbf{q})$  eliminando sucessivamente em  $\mathbf{t}$  as caixas numeradas em  $Q$  de forma decrescente,  $|\lambda|, \dots, 2, 1$ . ■

Assim, é agora possível recuperar a palavra  $w$  a partir de  $(P(w), Q(w))$ . Isto porque a última caixa inserida no quadro  $P(w)$  é a caixa de maior número em  $Q(w)$ . Para, de  $(P_k, Q_k)$ , obter  $(P_{k-1}, Q_{k-1})$  consideramos a caixa com o maior inteiro em  $Q_k$  (que será  $k$ ) e aplicamos o reverso do algoritmo de inserção de Schensted à letra de  $P_k$  que está na mesma posição que  $k$  em  $Q_k$ . O resultado é um quadro  $P_{k-1}$  e a letra  $x_k$  que ocorre em  $P_k$  e não em  $P_{k-1}$  será a  $k$ -ésima letra de  $w$ . Para obter  $Q_{k-1}$  basta eliminar em  $Q_k$  a caixa com a letra  $k$ .

Obtemos assim uma cadeia de pares de quadros

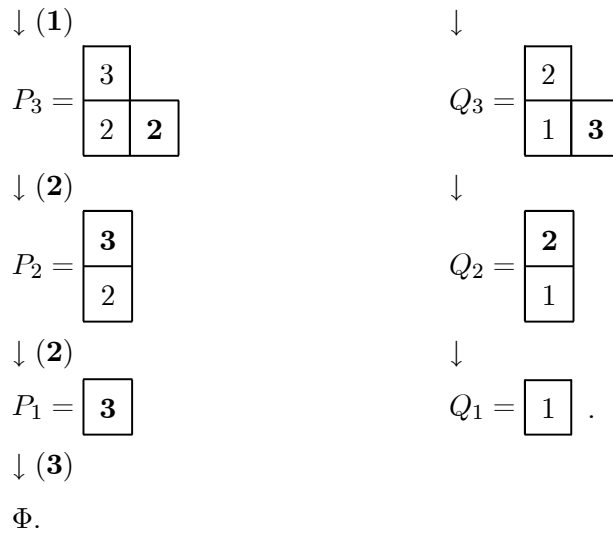
$$(P, Q) = (P_{|w|}, Q_{|w|}), (P_{|w|-1}, Q_{|w|-1}), \dots, (P_1, Q_1),$$

onde  $(P(w), Q(w)) = (P, Q)$ ,  $Q_i$  são quadros standard e os quadros  $P_i$  e  $Q_i$  são da mesma forma.

#### Exemplo 5.4

Se for dado  $\rho(w) = (3523122, 4726135)$  é possível obter  $w$  da seguinte forma.

$$\begin{array}{ccc}
 P(w) = P_7 = \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 5 \\ \hline 2 & 3 \\ \hline 1 & 2 & 2 \\ \hline \end{array} & & Q(w) = Q_7 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 7 & \\ \hline 2 & 6 & \\ \hline 1 & 3 & 5 \\ \hline \end{array} \\
 \downarrow (2) & & \downarrow \\
 P_6 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & & \\ \hline 2 & 5 & \\ \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array} & & Q_6 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & & \\ \hline 2 & 6 & \\ \hline 1 & 3 & 5 \\ \hline \end{array} \\
 \downarrow (3) & & \downarrow \\
 P_5 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & & \\ \hline 2 & & \\ \hline 1 & 2 & 5 \\ \hline \end{array} & & Q_5 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & & \\ \hline 2 & & \\ \hline 1 & 3 & 5 \\ \hline \end{array} \\
 \downarrow (5) & & \downarrow \\
 P_4 = \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & \\ \hline 2 & \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} & & Q_4 = \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & \\ \hline 2 & \\ \hline 1 & 3 \\ \hline \end{array}
 \end{array}$$



Logo, lendo as letras entre parêntesis da coluna da esquerda, de baixo para cima, isto é, seguindo as setas em sentido contrário, temos a aplicação do algoritmo de inserção de Schensted à palavra  $w = 3221532$ .

**Corolário 5.5** A aplicação  $Q : A^* \longrightarrow STab$  induz uma bijecção entre a classe pláxica

$$w \longmapsto Q(w)$$

de  $t$ ,  $\pi^{-1}(t)$ , e  $STab(\lambda)$ , sendo  $\lambda$  a forma do quadro  $t$ .

Assim, as palavras numa classe pláxica contendo o quadro  $t$  estão em bijecção com os quadros standard com a forma de  $t$ . Portanto, as palavras numa classe pláxica têm quadros de inserção distintos. Em particular, o número de elementos da classe pláxica de  $t$  é igual ao número de quadros em  $STab(\lambda)$ , isto é,

$$\#\pi^{-1}(t) = \#STab(\lambda).$$

Se considerarmos o alfabeto  $A = \{1, 2, \dots, n\}$ , o conjunto das palavras neste alfabeto cujas letras ocorrem uma e uma só vez, palavras standard, pode ser identificado com o conjunto das permutações de  $S_n$ . Nestas condições,  $P(w)$  e  $Q(w)$  são ambos quadros standards e temos a original **correspondência de Robinson** [17]:

$$\begin{array}{lcl}
S_n & \longleftrightarrow & \bigcup_{\lambda} STab(\lambda) \times STab(\lambda), \\
\sigma & \longmapsto & (P(\sigma), Q(\sigma))
\end{array}$$

que estabelece uma bijecção entre permutações e pares de quadros standard, bastando restringir  $\rho$  ao conjunto das palavras standard no alfabeto  $A$ .

Vejamos agora qual a configuração do quadro de inserção de um quadro de Young  $\mathbf{t}$  de forma  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ .

Podemos decompor o quadro  $\mathbf{t}$  por linhas  $l_1, l_2, \dots, l_k$  tais que  $l_1 \triangleright l_2 \triangleright \dots \triangleright l_k$ , isto é,

$$\mathbf{t} = l_1 l_2 \dots l_k = \begin{array}{c} \boxed{l_1} \\ \boxed{l_2} \\ \dots \\ \boxed{l_k} \end{array},$$

onde  $|l_1| = \lambda_k, |l_2| = \lambda_{k-1}, \dots, |l_k| = \lambda_1$ .

Na construção de  $P(\mathbf{t})$  começamos por inserir as letras da primeira linha de  $\mathbf{t}$ ,  $l_1$ , portanto

$$Q(l_1) = \boxed{1 \quad \dots \quad \lambda_k}.$$

Prosseguimos com a inserção das letras de  $l_2$  em  $P(l_1)$ , ficando

$$Q(l_1 l_2) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \lambda_k + 1 & \dots & \lambda_k + \lambda_k & & & \\ \hline 1 & \dots & \lambda_k & \lambda_k + \lambda_k + 1 & \dots & \lambda_k + \lambda_{k-1} \\ \hline \end{array}.$$

Observemos que  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{k-1} \geq \lambda_k$ . Se tivéssemos, por exemplo,  $\lambda_{k-1} = \lambda_k$ , o quadro de inserção teria a seguinte configuração.

$$Q(l_1 l_2) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \lambda_k + 1 & \dots & \lambda_k + \lambda_{k-1} \\ \hline 1 & \dots & \lambda_k \\ \hline \end{array}.$$

Repetimos este processo até que, no passo  $k - 1$  temos o quadro de inserção de  $l_1 l_2 \dots l_{k-1}$ :

$$Q(l_1 \dots l_{k-1}) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline \sum_{i=3}^k \lambda_i & \dots & \sum_{i=3}^k \lambda_i + \lambda_k & & & & & & & \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \sum_{i=3}^k \lambda_i + \lambda_k + 1 & \dots & \sum_{i=3}^k \lambda_i + \lambda_{k-1} & & & & \\ \hline \lambda_k + 1 & \dots & \lambda_k + \lambda_k & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & & \\ \hline 1 & \dots & \lambda_k & \lambda_k + \lambda_k + 1 & \dots & \sum_{i=k-1}^k \lambda_i & \dots & \sum_{i=3}^k \lambda_i + \lambda_3 + 1 & \dots & \sum_{i=2}^k \lambda_i \\ \hline \end{array}.$$

A inserção da última linha de  $\mathbf{t}$  em  $P(l_1 l_2 \dots l_{k-1})$  leva ao quadro de inserção de  $Q(\mathbf{t})$ :

$\sum_{i=2}^k \lambda_i + 1$	...	$\sum_{i=2}^k \lambda_i + \lambda_k$										
$\sum_{i=3}^k \lambda_i + 1$	...	$\sum_{i=3}^k \lambda_i + \lambda_k$	$\sum_{i=2}^k \lambda_i + \lambda_k + 1$	...	$\sum_{i=2}^k \lambda_i + \lambda_{k-1}$							(*)
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\sum_{i=3}^k \lambda_i + \lambda_k + 1$	...	$\sum_{i=3}^k \lambda_i + \lambda_{k-1}$	$\dots$						
$\lambda_k + 1$	...	$\lambda_k + \lambda_k$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\sum_{i=2}^k \lambda_i + \lambda_3 + 1$	...	$\sum_{i=2}^k \lambda_i + \lambda_2$			
1	...	$\lambda_k$	$\lambda_k + \lambda_k + 1$	...	$\sum_{i=k-1}^k \lambda_i$	$\dots$	$\sum_{i=3}^k \lambda_i + \lambda_3$	...	$\sum_{i=2}^k \lambda_i$	$\sum_{i=2}^k \lambda_i + \lambda_2 + 1$	...	$\sum_{i=1}^k \lambda_i$

Obtemos assim o seguinte resultado.

**Proposição 5.6**  $\mathbf{t}$  é um quadro de Young de forma  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$  se e só se  $Q(\mathbf{t})$  é o quadro, de forma  $\lambda$ , definido em (\*).

**Exemplo 5.7**

Se considerarmos o quadro  $\mathbf{t} = 35 \ 23 \ 122$  de forma  $\lambda = (3, 2, 2)$  temos:

$$Q(\mathbf{t}) = \begin{array}{|c|c|} \hline 5 & 6 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline 1 & 2 & 7 \\ \hline \end{array} .$$

**5.2 Simetria entre os quadros  $P(w)$  e  $Q(w)$**

No que se segue, investigamos qual a relação entre os quadros  $P(w)$  e  $Q(w)$ . Para tal necessitamos de alguns conceitos relativos a bialfabetos.

Sejam  $A = \{a_1 < a_2 < \dots < a_n\}$  e  $B = \{b_1 < b_2 < \dots < b_m\}$  dois alfabetos ordenados.

Uma **biletra** em  $A \times B$  é um par ordenado  $(a_i, b_j)$ , que também representamos por  $\begin{bmatrix} a_i \\ b_j \end{bmatrix}$ .

Definimos duas ordens lexicográficas em  $A \times B$  que nos levam a dois alfabetos ordenados.

Dando prioridade à primeira linha temos o alfabeto ordenado

$$A \otimes B = \left\{ \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} < \dots < \begin{bmatrix} a_1 \\ b_m \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} a_2 \\ b_1 \end{bmatrix} < \dots < \begin{bmatrix} a_2 \\ b_m \end{bmatrix} < \dots < \begin{bmatrix} a_n \\ b_1 \end{bmatrix} < \dots < \begin{bmatrix} a_n \\ b_m \end{bmatrix} \right\}$$

e, dando prioridade à última linha, o alfabeto ordenado

$$B \otimes A = \left\{ \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} < \dots < \begin{bmatrix} a_n \\ b_1 \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} a_1 \\ b_2 \end{bmatrix} < \dots < \begin{bmatrix} a_n \\ b_2 \end{bmatrix} < \dots < \begin{bmatrix} a_1 \\ b_m \end{bmatrix} < \dots < \begin{bmatrix} a_n \\ b_m \end{bmatrix} \right\}.$$

Assim, no alfabeto  $A \otimes B$  temos

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix} \Leftrightarrow a < a' \text{ ou } a = a' \text{ e } b < b'$$

e no alfabeto  $B \otimes A$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix} \Leftrightarrow b < b' \text{ ou } b = b' \text{ e } a < a'.$$

### Exemplo 5.8

Sejam  $A = \{1, 2, 3\}$  e  $B = \{1, 2\}$  dois alfabetos.

$$A \otimes B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}.$$

$$B \otimes A = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}.$$

Uma **bipalavra** é uma palavra nestas biletas, que representamos por

$$\Sigma = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_p \\ y_1 & y_2 & \dots & y_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix},$$

onde  $u = x_1 x_2 \dots x_p \in A^*$  e  $v = y_1 y_2 \dots y_p \in B^*$ .

Quando ordenamos, por ordem não decrescente, as biletras da bipalavra  $\Sigma = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ , com prioridade à primeira linha, escrevemos

$$\Sigma' = \begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix}, \quad (5.2.1)$$

e quando ordenamos, por ordem não decrescente, as biletras da bipalavra  $\Sigma = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ , com prioridade à última linha, escrevemos

$$\Sigma'' = \begin{bmatrix} u'' \\ v'' \end{bmatrix}. \quad (5.2.2)$$

Nestas condições,  $u'$  e  $v''$  são palavras não decrescentes em  $A^*$ .

### Exemplo 5.9

Consideremos os alfabetos  $A = B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  e a bipalavra  $\Sigma = \begin{bmatrix} 4325123 \\ 3221532 \end{bmatrix}$ .

Ordenando lexicograficamente as biletras de  $\Sigma$  com prioridade à primeira linha temos:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Se a ordenação for com prioridade à última linha, obtemos:

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Portanto temos as bipalavras

$$\Sigma' = \begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1223345 \\ 5232231 \end{bmatrix} \text{ e } \Sigma'' = \begin{bmatrix} u'' \\ v'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5233241 \\ 1222335 \end{bmatrix}.$$

No caso de termos  $\sigma \in S_n$ , podemos representar  $\sigma$  por uma bipalavra  $\Sigma_\sigma = \begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{bmatrix}$ , onde  $j_k = \sigma(i_k)$ , para  $1 \leq k \leq n$ . De todas as bipalavras que representam  $\sigma$  salientamos duas,

$$\Sigma'_\sigma = \begin{bmatrix} id \\ \sigma \end{bmatrix} \text{ e } \Sigma''_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma^{-1} \\ id \end{bmatrix}. \quad (5.2.3)$$

**Exemplo 5.10**

Consideremos  $\sigma = 4237165 \in S_7$ .

Podemos representar  $\sigma$  pelas bialavras

$$\Sigma'_\sigma = \begin{bmatrix} id \\ \sigma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1234567 \\ 4237165 \end{bmatrix} \text{ e } \Sigma''_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma^{-1} \\ id \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5231764 \\ 1234567 \end{bmatrix}.$$

O seguinte resultado é essencial para o que se segue.

**Lema 5.11** *Para uma bialavra  $\Sigma = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ ,  $P(v')$  e  $P(u'')$  têm a mesma forma.*

**Demonstração:**

$$\text{Seja } \Sigma = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 u_2 \dots u_n \\ v_1 v_2 \dots v_n \end{bmatrix}.$$

Consideremos as bialavras  $\Sigma' = \begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix}$ ,  $\Sigma'' = \begin{bmatrix} u'' \\ v'' \end{bmatrix}$  como em (5.2.1) e (5.2.2), onde  $u'$  e  $v''$  são linhas em  $A^*$ .

Seja  $\beta = v'_{i_1} v'_{i_2} \dots v'_{i_r}$  uma subpalavra não decrescente de  $v'$  de comprimento  $r$ .

Ora,  $\alpha = u'_{i_1} u'_{i_2} \dots u'_{i_r}$  é uma subpalavra não decrescente de  $u'$ , pois  $u'$  é uma palavra não decrescente.

Temos, para as duas ordens lexicográficas,  $\begin{bmatrix} u'_{i_1} \\ v'_{i_1} \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} u'_{i_2} \\ v'_{i_2} \end{bmatrix} < \dots < \begin{bmatrix} u'_{i_r} \\ v'_{i_r} \end{bmatrix}$ .

Como  $\beta$  é uma subpalavra não decrescente de  $v''$  então  $\alpha$  é também uma subpalavra não decrescente de  $u''$ .

Então, para qualquer palavra não decrescente de comprimento  $r$  de  $v'$ , obtemos uma palavra não decrescente de comprimento  $r$  de  $u''$ .

Portanto, existe uma bijecção entre os  $k$ -uplos de subpalavras disjuntas e não decrescentes de  $v'$  e  $u''$ . Logo, os invariantes de Greene de  $v'$  e  $u''$  são iguais.

Pelo teorema de Greene, página 34, concluímos o pretendido. ■

**Exemplo 5.12**

$$\text{Seja } \Sigma = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4325123 \\ 3221532 \end{bmatrix}.$$

Temos portanto,

$$\Sigma' = \begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{1223345} \\ \underline{5232231} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \Sigma'' = \begin{bmatrix} u'' \\ v'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{5233241} \\ \underline{1222335} \end{bmatrix}.$$

Usando as notações da demonstração anterior podemos escolher, por exemplo, a subpalavra não decrescente  $\beta = 2223$  de  $v'$  (a sublinhado na última linha de  $\Sigma'$ ). Nestas condições, obtemos a subpalavra  $\alpha$  de  $u'$ ,  $\alpha = 2334$  (a sublinhado na primeira linha de  $\Sigma'$ ).

Estas subpalavras não decrescentes  $\alpha$  e  $\beta$  são também subpalavras de  $u''$  e  $v''$ , respectivamente.

Facilmente verificamos que

$$P(v') = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 5 \\ \hline 3 \\ \hline 2 \\ \hline 1 & 2 & 2 & 3 \\ \hline \end{array} \quad \text{e} \quad P(u'') = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 5 \\ \hline 3 \\ \hline 2 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \end{array} .$$

Para a demonstração do teorema seguinte necessitamos de introduzir a seguinte notação. Dada uma palavra  $w \in A^*$ ,  $(w) \uparrow$  representa a palavra obtida de  $w$  ordenando as suas letras de forma não decrescente.

**Exemplo 5.13**

Para o alfabeto  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , consideremos  $w = 3221532 \in A^*$ .

Então  $(w) \uparrow = 1222335$ .

Concluimos agora a relação entre os quadros  $P(w)$  e  $Q(w)$ , no caso de  $w$  ser uma palavra standard. O quadro de inserção  $Q$  de  $\sigma$  é igual ao quadro de Schensted da palavra  $\sigma^{-1}$ .

**Teorema 5.14** Para  $\sigma \in S_n$ ,  $Q(\sigma) = P(\sigma^{-1})$ .

**Demonstração:**

Sejam  $\sigma \in S_n$  e  $u', v', u'', v'' \in A^*$  de forma que

$$\begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} id \\ \sigma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & k & \dots & n \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \dots & \sigma_k & \dots & \sigma_n \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} u'' \\ v'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma^{-1} \\ id \end{bmatrix}.$$

Consideremos as bipalavras

$$\begin{bmatrix} u(k)' \\ v(k)' \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & k \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \dots & \sigma_k \end{bmatrix}, \text{ para } 1 \leq k \leq n,$$

onde  $v(1)', \dots, v(n)'$  representam os factores à esquerda de  $\sigma$ .

$$\text{Nestas condições temos } \begin{bmatrix} u(k)'' \\ v(k)'' \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \sigma^{-1}|_{\{1, \dots, k\}} \\ (\sigma_1 \dots \sigma_k) \uparrow \end{bmatrix}.$$

Pelo lema 5.11,  $P(v(k)') = P(\sigma_1 \dots \sigma_k)$  e  $P(u(k)') = P(\sigma^{-1}|_{\{1, \dots, k\}})$  têm a mesma forma em cada passo  $k$  do algoritmo de inserção.

Então  $P(\sigma^{-1}|_{\{1\}}) = \boxed{1}$  e  $P(\sigma^{-1}|_{\{1, \dots, k\}})$  é um quadro standard numerado de 1 até  $k$  com a mesma forma de  $P(\sigma_1 \dots \sigma_k)$ ,  $k = 1, \dots, n$ .

Assim, as caixas vão sendo inseridas pela mesma ordem em  $P(\sigma_1 \dots \sigma_k)$  e em  $P(\sigma^{-1}|_{\{1, \dots, k\}})$ , pelo que  $P(\sigma^{-1}) = Q(\sigma)$ . ■

**Exemplo 5.15**

Consideremos  $\sigma = 5231764 \in S_7$ , de onde temos  $\sigma^{-1} = 4237165$ .

- $\omega_1 := \sigma_1 = 5$ ,

$$P(\omega_1) = \boxed{5} \text{ e } Q(\omega_1) = \boxed{1} = P(\sigma^{-1}|_{\{1\}}) = P(1).$$

- $\omega_2 := \sigma_1 \sigma_2 = 52$ ,

$$P(\omega_2) = \begin{bmatrix} \boxed{5} \\ \boxed{2} \end{bmatrix} \text{ e } Q(\omega_2) = \begin{bmatrix} \boxed{2} \\ \boxed{1} \end{bmatrix} = P(\sigma^{-1}|_{\{1,2\}}) = P(21).$$

- $\omega_3 := \sigma_1\sigma_2\sigma_3 = 523$ ,

$$P(\omega_3) = \begin{array}{|c|c|} \hline 5 & \\ \hline 2 & 3 \\ \hline \end{array} \quad \text{e} \quad Q(\omega_3) = \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & \\ \hline 1 & 3 \\ \hline \end{array} = P(\sigma^{-1}|_{\{1,2,3\}}) = P(231).$$

- $\omega_4 := \sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4 = 5231$ ,

$$P(\omega_4) = \begin{array}{|c|} \hline 5 \\ \hline 2 \\ \hline 1 & 3 \\ \hline \end{array} \quad \text{e} \quad Q(\omega_4) = \begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline 2 \\ \hline 1 & 3 \\ \hline \end{array} = P(\sigma^{-1}|_{\{1,\dots,4\}}) = P(4231).$$

- $\omega_5 := \sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4\sigma_5 = 52317$ ,

$$P(\omega_5) = \begin{array}{|c|} \hline 5 \\ \hline 2 \\ \hline 1 & 3 & 7 \\ \hline \end{array} \quad \text{e} \quad Q(\omega_5) = \begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline 2 \\ \hline 1 & 3 & 5 \\ \hline \end{array} \quad P(\sigma^{-1}|_{\{1,\dots,5\}}) = P(42315).$$

- $\omega_6 := \sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4\sigma_5\sigma_6 = 523176$ ,

$$P(\omega_6) = \begin{array}{|c|c|} \hline 5 & \\ \hline 2 & 7 \\ \hline 1 & 3 & 6 \\ \hline \end{array} \quad \text{e} \quad Q(\omega_6) = \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & \\ \hline 2 & 6 \\ \hline 1 & 3 & 5 \\ \hline \end{array} = P(\sigma^{-1}|_{\{1,\dots,6\}}) = P(423165).$$

- $\sigma = \sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4\sigma_5\sigma_6\sigma_7 = 5231764$ ,

$$P(\sigma) = \begin{array}{|c|c|} \hline 5 & 7 \\ \hline 2 & 6 \\ \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline \end{array} \quad \text{e} \quad Q(\sigma) = \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 7 \\ \hline 2 & 6 \\ \hline 1 & 3 & 5 \\ \hline \end{array} \quad P(\sigma^{-1}|_{\{1,\dots,7\}}) = P(\sigma^{-1}).$$

Com o objectivo de generalizar o teorema 5.14, para o caso de uma palavra qualquer  $w \in A^*$ , necessitamos da noção de standardização de uma palavra.

Dado o alfabeto  $A = \{a_1 < a_2 < \dots < a_n\}$  e  $w \in A^*$ , escrevemos

$$|w|_{a_1} = m_1, |w|_{a_2} = m_2, \dots, |w|_{a_n} = m_n.$$

A **standardização** de  $w$ ,  $\text{std}(w)$ , é a palavra standard obtida de  $w$  da seguinte forma.

Numeramos de 1 a  $m_1$  (da esquerda para a direita) as ocorrências de  $a_1$ , de  $m_1+1$  a  $m_1+m_2$



**Demonstração:**

Consideremos o quadro  $\mathbf{t} = u_1 u_2 \dots u_k$  constituído pelas linhas:

$$\begin{aligned} u_1 &= a_{11} a_{12} \dots a_{1r}, \\ u_2 &= a_{21} a_{22} \dots a_{2s}, \\ &\vdots \\ u_k &= a_{k1} a_{k2} \dots a_{kl}. \end{aligned}$$

Então  $u_1 \triangleright u_2 \triangleright \dots \triangleright u_k$ , o que significa, pela definição de  $\triangleright$ ,

$$|u_1| \leq |u_2| \leq \dots \leq |u_k| \text{ e } a_{ij} > a_{(i+1)j},$$

para  $i \in \{1, \dots, k-1\}$  e  $j \in \{1, \dots, |u_i|\}$ .

Podemos escrever  $std(\mathbf{t}) = v_1 v_2 \dots v_k$ , onde

$$\begin{aligned} v_1 &= b_{11} b_{12} \dots b_{1r}, \\ v_2 &= b_{21} b_{22} \dots b_{2s}, \\ &\vdots \\ v_k &= b_{k1} b_{k2} \dots b_{kl}. \end{aligned}$$

Nestas condições,  $|v_i| = |u_i| \leq |u_{i+1}| = |v_{i+1}|$ , para qualquer  $i = 1, \dots, k-1$ .

Como  $a_{ij} > a_{(i+1)j}$ , para  $i \in \{1, \dots, k-1\}$  e  $j \in \{1, \dots, |u_i|\}$ , e pela forma como se definiu a standardização, podemos concluir também que  $b_{ij} > b_{(i+1)j}$ .

Logo  $v_1 \triangleright v_2 \triangleright \dots \triangleright v_k$  e  $std(\mathbf{t})$  é um quadro. ■

**Exemplo 5.19**

Se considerarmos o quadro  $\mathbf{t} = 35 \ 23 \ 122$  temos

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{t} : & 3 & 5 & & 2 & 3 & & 1 & 2 & 2 & & 3 & 5 & & 2 & 3 & & 1 & 2 & 2 \\ std(\mathbf{t}) : & . & . & & . & . & & 1 & . & . & \rightsquigarrow & . & . & & 2 & . & & 1 & 3 & 4 \\ & \\ & \rightsquigarrow & 3 & 5 & & 2 & 3 & & 1 & 2 & 2 & \rightsquigarrow & 3 & 5 & & 2 & 3 & & 1 & 2 & 2 \\ & & 5 & . & & 2 & 6 & & 1 & 3 & 4 & \rightsquigarrow & 5 & 7 & & 2 & 6 & & 1 & 3 & 4 & . \end{array}$$

Então  $std(35 \ 23 \ 122) = 57 \ 26 \ 134$ , que está nas condições da definição 2.13.

Pelo facto de em cada classe de congruência existir um e um só quadro, concluímos que a standardização comuta com a inserção de Schensted.

**Corolário 5.20** *Seja  $w \in A^*$ .  $P(std(w)) = std(P(w))$ .*

**Demonstração:**

Pela proposição 5.17, como  $w \equiv P(w)$ , então  $std(w) \equiv std(P(w))$ .

Por outro lado, do teorema 3.4, página 28 concluímos que  $std(w) \equiv P(std(w))$ .

Então  $std(P(w))$  é congruente com o quadro  $P(std(w))$ .

Mas, pela proposição 5.18,  $std(P(w))$  é um quadro.

Logo  $std(P(w)) = P(std(w))$ . ■

**Exemplo 5.21**

Para a palavra  $w = 3221532$  temos, pelo exemplo anterior,  $std(w) = 5231764$  e, de acordo com o exemplo 3.3, página 27:

$$\begin{aligned} w &= 3221532 \equiv 3212532 \equiv 3215232 \equiv 3251232 \equiv \\ &\equiv 3251322 \equiv 3253122 \equiv 3523122 = P(w) =: \mathbf{t}. \end{aligned}$$

Aplicando as relações de Knuth a  $std(w)$  da mesma forma que foram aplicadas de  $w$  até  $w'$ :

$$\begin{aligned} std(w) &= 5231764 \equiv 5213764 \equiv 5217364 \equiv 5271364 \equiv \\ &\equiv 5271634 \equiv 5276134 \equiv 5726134 = P(std(w)) = std(\mathbf{t}). \end{aligned}$$

Logo  $std(P(w)) = 5726134 = P(std(w))$ .

**Proposição 5.22** *Seja  $w \in A^*$ .  $Q(w) = Q(std(w))$ .*

**Demonstração:**

Consideremos  $w = u x$ , onde  $u$  é uma linha e  $x$  uma letra.

Então  $std(u x) = u' x'$ , onde  $u'$  é uma linha sem letras repetidas e  $x'$  é uma letra, distinta de qualquer letra de  $u'$ .

Concluimos imediatamente que

$$\begin{aligned} P(u) &= \boxed{u_1 \mid \dots \mid u_k} = u \text{ e} \\ P(u') &= \boxed{u'_1 \mid \dots \mid u'_k} = u', \end{aligned}$$

onde  $u_1 \leq \dots \leq u_k$  e  $u'_1 < \dots < u'_k$ .

Vejamos que a inserção de  $x$  em  $P(u)$  produz um quadro com a mesma forma que a inserção de  $x'$  em  $P(u')$ . Pela descrição do algoritmo de inserção de Schensted, página 21, temos duas situações possíveis:

Se  $u x$  é uma linha, o que implica que  $u_k \leq x$ , temos

$$P(ux) = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline u_1 & \dots & u_k & x \\ \hline \end{array} = ux.$$

Pela forma como definimos a standardização, temos  $u'_k < x'$ , logo

$$P(u'x') = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline u'_1 & \dots & u'_k & x' \\ \hline \end{array} = u'x'.$$

Se  $u x = u_i x$ , onde  $u_i$  é a letra mais à esquerda de  $u$  tal que  $u_i > x$  temos

$$P(ux) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline u_i & & & & & & \\ \hline u_1 & \dots & u_{i-1} & x & u_{i-1} & \dots & u_k \\ \hline \end{array} .$$

Pela forma como definimos a standardização, a letra  $u'_i$  é a letra mais à esquerda de  $u'$  estritamente maior que  $x'$ , logo

$$P(u'x') = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline u'_i & & & & & & \\ \hline u'_1 & \dots & u'_{i-1} & x' & u'_{i-1} & \dots & u'_k \\ \hline \end{array} .$$

Assim sendo,  $Q(w) = Q(ux) = Q(u'x') = Q(std(w))$ .

Então os passos do algoritmo de inserção de Schensted aplicados na construção de  $P(w)$  são os mesmos que se aplicam na construção de  $P(std(w))$ .

Assim, as sucessivas formas dos dois quadros são iguais, o que significa que  $Q(w) = Q(std(w))$ . ■

O seguinte resultado permite generalizar o teorema 5.14.

**Corolário 5.23** *Seja  $w \in A^*$ .  $Q(w) = P(std(w)^{-1})$ .*

**Demonstração:**

Aplicando o teorema 5.14 a  $\sigma = std(w)$  temos  $P(std(w)^{-1}) = Q(std(w))$ .

Mas, pela proposição anterior,  $Q(std(w)) = Q(w)$ , pelo que

$$Q(w) = Q(std(w)) = P(std(w)^{-1}). \quad \blacksquare$$

## Capítulo 6

# Operações coplásticas

Neste capítulo mostramos que as classes coplásticas no alfabeto  $A$ , conjunto das palavras no alfabeto  $A$  com o mesmo quadro de inserção, podem ser representadas por grafos coloridos. De entre esses grafos coloridos basta conhecer os grafos das classes coplásticas dos quadros de Yamanouchi. Para tal, começamos por definir e estudar as propriedades dos operadores lineares  $e_i$ ,  $f_i$  e  $\sigma_i$ ,  $i = 1, \dots, n - 1$ , na álgebra livre associativa  $\mathbb{Z}\langle A \rangle$ , que identificamos com a álgebra dos polinómios de variáveis não-comutativas  $a_1, \dots, a_n$  com base  $A^*$ . Posteriormente, definimos palavras de Yamanouchi e verificamos que, se uma classe plástica contém uma palavra de Yamanouchi, então contém apenas palavras de Yamanouchi. As classes coplásticas, num alfabeto  $A$ , são as componentes conexas de um digrafo colorido  $\Gamma$ , cujos vértices são as palavras de  $A^*$  e as arestas são definidas por  $f_i$  e  $e_i$ . Classes coplásticas indexadas por quadros de inserção com a mesma forma são isomorfas, como subgrafos de  $\Gamma$ . Portanto, para conhecer a classe coplástica indexada por um quadro standard de forma  $\lambda$ , basta considerar a componente conexa de  $\Gamma$  que contém o único quadro de Yamanouchi da forma  $\lambda$ . O grafo colorido da classe coplástica, no alfabeto  $\{1, 2, \dots, |\lambda|\}$ , do (único) quadro de Yamanouchi da forma  $\lambda$  é chamado o grafo de cristal da partição  $\lambda$ . Os vértices deste grafo são todos os quadros no alfabeto  $\{1, 2, \dots, |\lambda|\}$  e da forma  $\lambda$ .

Neste capítulo consultámos as referências LOTHAIRE [14] e LECLERC & THIBON [13]. Consultámos ainda KOSTRIKIN & SHAFAREVICH [10] e REUTENAUER [16] no estudo da álgebra livre  $\mathbb{Z}\langle A \rangle$ , e PEREIRA [15] e WILSON [22] no estudo de grafos.

## 6.1 Classes copláticas

**Definição 6.1** *Seja  $\mathbf{q}$  um quadro standard. Definimos classe coplática indexada por  $\mathbf{q}$ , no alfabeto  $A$ , como sendo o conjunto de todas as palavras  $w \in A^*$  que têm o mesmo quadro de inserção  $Q(w) = \mathbf{q}$ . Ou seja, o conjunto  $Q^{-1}(\mathbf{q})$ .*

Se  $Q(w) = \mathbf{q}$  dizemos que  $Q^{-1}(\mathbf{q})$  é a **classe coplática de  $w$** .

Pelo corolário 5.5, página 62, duas palavras da mesma classe coplática estão em classes pláticas distintas, isto é, para  $w_1, w_2 \in A^*$ ,

$$Q(w_1) = Q(w_2) \Rightarrow P(w_1) \neq P(w_2).$$

Então, dado um quadro standard  $\mathbf{q}$  de forma  $\lambda$ , a classe coplática indexada por  $\mathbf{q}$ , no alfabeto  $A$ , contém exactamente uma palavra de cada classe plática de um quadro no alfabeto  $A$  e forma  $\lambda$ . Mas cada classe plática contém exactamente um quadro. Então, o número de elementos desta classe coplática é igual ao número de quadros de forma  $\lambda$  no alfabeto  $A$ , logo

$$\#Q^{-1}(\mathbf{q}) = \#Tab(A, \lambda). \quad (6.1.1)$$

Se dois quadros de inserção  $\mathbf{q}$  e  $\mathbf{q}'$  têm a mesma forma  $\lambda$ ,

$$\#Q^{-1}(\mathbf{q}) = \#Q^{-1}(\mathbf{q}') = \#Tab(A, \lambda).$$

Pela descrição da construção do quadro de inserção de um quadro de Young, proposição 5.6, página 64, concluímos a seguinte proposição.

**Proposição 6.2** *Se o quadro standard  $\mathbf{q}$  é da forma  $(*)$ , definida na proposição 5.6, então*

$$Q^{-1}(\mathbf{q}) = \text{Tab}(A, \lambda).$$

*Ou seja, a classe coplática de um quadro de Young da forma  $\lambda$  é  $\text{Tab}(A, \lambda)$ .*

**Exemplo 6.3**

- Dada a palavra  $w = 3221532$  no alfabeto  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , as palavras  $w_1 = 3241531$

e  $w_2 = 3121321$  têm quadro de inserção  $Q(w) =$

4	7	
2	6	
1	3	5

e  $P(w)$ ,  $P(w_1)$  e  $P(w_2)$  são quadros da mesma forma  $(3, 2, 2)$  mas distintos,

$$P(w) = \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 5 \\ \hline 2 & 3 \\ \hline 1 & 2 & 2 \\ \hline \end{array}, P(w_1) = \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 4 \\ \hline 2 & 3 \\ \hline 1 & 1 & 5 \\ \hline \end{array}, P(w_2) = \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 3 \\ \hline 2 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}.$$

Portanto, as palavras  $w$ ,  $w_1$  e  $w_2$  estão na mesma classe coplática e em diferentes classes pláticas.

- A classe coplática, no alfabeto  $A = \{1, 2, 3\}$ , indexada por  $\mathbf{q} =$
- |   |   |
|---|---|
| 2 |   |
| 1 | 3 |

$$\text{Tab}(A, (2, 1)) = \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & \\ \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & \\ \hline 1 & 3 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & \\ \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & \\ \hline 1 & 3 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & \\ \hline 2 & 2 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & \\ \hline 2 & 3 \\ \hline \end{array} \right\}$$

## 6.2 Operadores lineares na álgebra livre $\mathbb{Z}\langle A \rangle$

Um polinómio não comutativo em  $A$  sobre  $\mathbb{Z}$  é uma combinação linear formal, sobre  $\mathbb{Z}$ , de palavras em  $A^*$ , isto é, é uma expressão da forma

$$\sum_{w \in A^*} k_w w,$$

onde  $k_w \in \mathbb{Z}$  e  $k_w$  é diferente de zero apenas para um número finito de palavras  $w \in A^*$ .

O conjunto de todos os polinómios não comutativos em  $A$  sobre  $\mathbb{Z}$  é denotado por

$$\mathbb{Z}\langle A \rangle = \mathbb{Z}\langle a_1, \dots, a_n \rangle.$$

Este conjunto tem a estrutura de álgebra livre associativa, sobre  $\mathbb{Z}$ , com as operações adição, multiplicação por um escalar e multiplicação definidas, respectivamente, por:

- $\sum_{w \in A^*} k_w w \oplus \sum_{w \in A^*} k'_w w = \sum_{w \in A^*} (k_w + k'_w) w;$
- $\alpha \odot \sum_{w \in A^*} k_w w = \sum_{w \in A^*} (\alpha \cdot k_w) w,$  para  $\alpha \in \mathbb{Z};$
- $\sum_{w \in A^*} k_w w \otimes \sum_{w' \in A^*} k_{w'} w' = \sum_{w, w' \in A^*} (k_w \cdot k_{w'}) (ww');$

onde  $+$  e  $\cdot$  representam, respectivamente, as operações usuais de soma e multiplicação em  $\mathbb{Z}$ , e a operação entre palavras é a concatenação.

Observamos que a multiplicação por um escalar  $\odot$  é um caso particular da multiplicação  $\otimes$ , basta fazer

$$\alpha \Phi \otimes \sum_{w \in A^*} k_w w = \sum_{w \in A^*} (\alpha \cdot k_w) (w \Phi) = \sum_{w, w' \in A^*} (\alpha \cdot k_w) w,$$

Notemos que  $A^* \subseteq \mathbb{Z}\langle A \rangle$ .  $\mathbb{Z}\langle A \rangle$  é uma álgebra livre associativa, sobre  $\mathbb{Z}$ , com base  $A^*$ . Podemos então identificar a álgebra livre  $\mathbb{Z}\langle A \rangle$  com a álgebra dos polinómios de variáveis não-comutativas  $a_1, \dots, a_n$ . A sua base é formada pelos monómios nestas variáveis, ou seja, pelas palavras no alfabeto  $A$ .

Para definir operadores lineares em  $\mathbb{Z}\langle A \rangle$  basta defini-los para os elementos da base.

Definimos então os **operadores lineares** na álgebra livre  $\mathbb{Z}\langle A \rangle$ ,  $e_i$ ,  $f_i$  e  $\sigma_i$ , para  $i = 1, \dots, n-1$ , da seguinte forma. Em primeiro lugar consideramos o caso do subalfabeto  $A_i = \{a_i, a_{i+1}\} \subseteq A$  e  $w = x_1 \dots x_m \in A_i^*$ . Colocamos parêntesis nos factores de  $w$  da forma  $a_i a_{i+1}$ . De seguida, eliminamos estes factores em  $w$ , obtendo-se assim uma subpalavra  $w_1$  de  $w$ . Na palavra  $w_1$  voltamos a colocar parêntesis nos seus factores da forma  $a_i a_{i+1}$  e, eliminando, novamente, estes factores em  $w_1$ , obtemos a subpalavra  $w_2$  de  $w_1$ . Repetimos este raciocínio até que não restem factores  $a_i a_{i+1}$ , obtendo-se então uma subpalavra de  $w$

$$w_k = x_{j_1} \dots x_{j_{r+s}} = a_i^r a_{i+1}^s, \quad r, s \geq 0. \quad (6.2.1)$$

Obtemos assim um **procedimento de colocação de parêntesis** em  $w$  no alfabeto  $A_i$ .

#### Exemplo 6.4

Para a palavra  $w = 22121111221112$  no bi-alfabeto  $A_1 = \{1, 2\}$  temos:

$$w = 2(21)(21)1112(21)112;$$

$$w_1 = (21)11(21)12;$$

$$w_2 = 1112 = 1^3 2^1.$$

Nestas condições definimos os operadores lineares  $e_i$ ,  $f_i$  e  $\sigma_i$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ , em

$$w_k = x_{j_1} \dots x_{j_{r+s}} = a_i^r a_{i+1}^s, \quad r, s \geq 0,$$

da seguinte forma:

$$e_i(w_k) = e_i(a_i^r a_{i+1}^s) = \begin{cases} a_i^{r+1} a_{i+1}^{s-1} & \text{se } s \geq 1 \\ 0 & \text{se } s = 0 \end{cases},$$

$$f_i(w_k) = f_i(a_i^r a_{i+1}^s) = \begin{cases} a_i^{r-1} a_{i+1}^{s+1} & \text{se } r \geq 1 \\ 0 & \text{se } r = 0 \end{cases} \text{ e}$$

$$\sigma_i(w_k) = \sigma_i(a_i^r a_{i+1}^s) = a_i^s a_{i+1}^r.$$

Em particular,  $e_i(\Phi) = f_i(\Phi) = 0$  e  $\sigma_i(\Phi) = \Phi$ , para  $i = 1, \dots, n$ .

Seja  $h$  um destes operadores lineares e denotemos por  $w'_k = x'_{j_1} \dots x'_{j_{r+s}}$  a imagem de  $w_k$  por  $h$ . Então, definimos a imagem da palavra inicial  $w$  por

$$h(w) = y_1 \dots y_m \text{ onde } \begin{cases} y_i = x'_i & \text{se } i \in \{j_1, \dots, j_{r+s}\} \\ y_i = x_i & \text{se } i \notin \{j_1, \dots, j_{r+s}\}. \end{cases}$$

Notemos que  $h(w)|_{A_i} = h(w|_{A_i})$ .

Da forma como definimos os operadores lineares  $e_i$ ,  $f_i$  e  $\sigma_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , podemos concluir a seguinte igualdade,

$$\sigma_i(w) = \begin{cases} f_i^{r-s}(w) & \text{se } r > s \\ w & \text{se } r = s \\ e_i^{s-r}(w) & \text{se } r < s, \end{cases} \text{ para } i = 1, \dots, n.$$

### Exemplo 6.5

- Para  $w = 22121111221112$  temos, pelo exemplo anterior,  $w_2 = 1112 = 1^3 2^1$ ,  $e_1(w_2) = 1^4 2^0 = 1111$ ,  $f_1(w_2) = 1^2 2^2 = 1122$  e  $\sigma_1(w_2) = 1^1 2^3 = 1222$ .

Então  $e_1(w) = \underline{22121111221111}$ ,

$f_1(w) = \underline{22121111221122}$  e

$\sigma_1(w) = \underline{22121112221122}$ ,

onde as letras que se encontram a sublinhado são as que não se alteram em  $w$  e as restantes são as imagens de  $w_2$  pelos operadores lineares  $e_1$ ,  $f_1$  e  $\sigma_1$ , respectivamente.

Notemos que  $f_1^2(w) = f_1(\underline{22121111221122}) = \underline{22121112221122} = \sigma_1(w)$ .

- Consideremos agora a palavra  $w = 222 = 2^3 = w_k$ . Nestas condições,  $e_1(w) = 1^1 2^2 = 122$ ,  $f_1(w) = 0$  e  $\sigma_1(w) = 1^3 = 111$ .
- No caso de  $w = 2121 = (21)(21)$  temos  $w_1 = \Phi$ . Então  $e_1(w) = f_1(w) = 0$  e  $\sigma_1(w) = 2121 = w$ .

Agora, no caso geral do alfabeto  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ , os operadores lineares  $e_i$ ,  $f_i$  e  $\sigma_i$ , para  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ , aplicam-se à subpalavra  $w|_{A_i}$  de  $w$ , e as restantes letras de  $w$  não se alteram, excepto no caso em que  $h(w|_{A_i}) = 0$ , onde temos que  $h(w) = 0$  sendo,  $h$  um destes operadores lineares.

### Exemplo 6.6

Consideremos a palavra  $w = 321122444$  do alfabeto  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ .

$i = 1$  :  $w|_{A_1} = (21)122$  e  $e_1(w|_{A_1}) = (21)112$ ,  $f_1(w|_{A_1}) = (21)222$  e  $\sigma_1(w|_{A_1}) = (21)112 = e_1(w|_{A_1})$ .

Então  $e_1(w) = \underline{321112444}$ ,  
 $f_1(w) = \underline{321222444}$  e  
 $\sigma_1(w) = \underline{321112444} = e_1(w)$ .

$i = 2$  :  $w|_{A_2} = (32)22$  e  $e_2(w|_{A_2}) = 0$ ,  $f_2(w|_{A_2}) = (32)23$  e  $\sigma_2(w|_{A_2}) = (32)33 = f_2^2(w|_{A_2})$ .

Então  $e_2(w) = 0$ ,  
 $f_2(w) = \underline{321123444}$  e  
 $\sigma_2(w) = \underline{321133444} = f_2^2(w)$ .

$i = 3$  :  $w|_{A_3} = 3444$  e  $e_3(w|_{A_3}) = 3344$ ,  $f_3(w|_{A_3}) = 4444$  e  $\sigma_3(w|_{A_3}) = 3334 = e_3^2(w|_{A_3})$ .

Então  $e_3(w) = \underline{321122344}$ ,  
 $f_3(w) = \underline{421122444}$  e  
 $\sigma_3(w) = \underline{321122334} = e_3^2(w)$ .

O próximo teorema mostra que os operadores lineares  $e_i$ ,  $f_i$  e  $\sigma_i$  não alteram o quadro de inserção, ou seja, se  $h(w) \neq 0$ , onde  $h$  é um dos operadores lineares  $e_i$ ,  $f_i$  ou  $\sigma_i$ , então  $w$  e  $h(w)$  pertencem à mesma classe coplácica. Para tal, precisamos do seguinte lema.

**Lema 6.7** *Seja  $w \in \{a_1, a_2\}^*$ .*

(a) *Se  $f_1(w) \neq 0$ , então podemos escrever  $w = ua_1v$ , onde  $u \equiv (a_2a_1)^k a_1^{r-1}$  e  $v \equiv a_2^s (a_2a_1)^l$ , para  $k, s, l \geq 0$  e  $r \geq 1$ .*

(b) *Se  $e_1(w) \neq 0$ , então podemos escrever  $w = ua_2v$ , onde  $u \equiv (a_2a_1)^k a_1^r$  e  $v \equiv a_2^{s-1} (a_2a_1)^l$ , para  $k, r, l \geq 0$  e  $s \geq 1$ .*

**Demonstração:**

Se  $f_1(w) \neq 0$  então, pela definição de  $f_1$ , após o procedimento de colocação de parêntesis em  $w$  fica  $a_1^r a_2^s$ ,  $r \geq 1$  e  $s \geq 0$ , isto é, a letra  $a_1$  aparece pelo menos uma vez em  $w$  no final deste procedimento.

Podemos então escrever  $w = u \underline{a_1} v$ , onde esta letra  $\underline{a_1}$  é a letra  $a_1$  mais à direita da subpalavra  $a_1^r a_2^s$  de  $w$ , que fica após o procedimento de colocação de parêntesis em  $w$ .

Isto implica que, à esquerda desta letra  $\underline{a_1}$ , todas as letras  $a_2$  existentes são colocadas entre parêntesis com letras  $a_1$ , isto é, se existem  $k$  letras  $a_2$  à esquerda de  $\underline{a_1}$ ,  $k \geq 0$ , cada uma delas tem, à sua direita, uma letra  $a_1$  que são colocadas entre parêntesis no procedimento de colocação de parêntesis em  $w$ , estando estas letras  $a_1$ 's à esquerda de  $\underline{a_1}$ .

Como, após este procedimento fica  $a_1^r a_2^s = a_1^{r-1} \underline{a_1} a_2^s$ , temos  $k + (r - 1)$  letras  $a_1$  à esquerda desta letra. Então

$$P(u) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline a_2 & \dots & a_2 & & & \\ \hline a_1 & \dots & a_1 & a_1 & \dots & a_1 \\ \hline \end{array} \cdot$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_k$ 
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{r-1}$

Assim,  $u \equiv (a_2 a_1)^k a_1^{r-1}$ ,  $k \geq 0$  e  $r \geq 1$ .

Por outro lado, à direita desta letra  $\underline{a_1}$ , cada uma das  $l$  letras  $a_2$ ,  $l \geq 0$ , tem à sua direita uma letra  $a_1$ , que são colocadas entre parêntesis no procedimento de colocação de parêntesis em  $w$ . Como, após este procedimento em  $w$ , ficamos com a subpalavra  $a_1^r a_2^s$  de  $w$ , temos  $s + l$  letras  $a_2$  à direita de  $\underline{a_1}$ . Então

$$P(v) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline a_2 & \dots & a_2 & & & \\ \hline a_1 & \dots & a_1 & a_2 & \dots & a_2 \\ \hline \end{array} \cdot$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_l$ 
 $\underbrace{\hspace{10em}}_s$

Assim,  $v \equiv a_2^s (a_2 a_1)^l$ ,  $s, l \geq 0$ .

No caso em que  $e_1(w) \neq 0$ , pela definição de  $e_1$ , após o procedimento de colocação de parêntesis em  $w$  obtemos  $a_1^r a_2^s$ ,  $r \geq 0$  e  $s \geq 1$ . Logo a letra  $a_2$  aparece, pelo menos uma vez, em  $w$  no final deste procedimento.

Podemos então escrever  $w = u \underline{a_2} v$ , onde escolhemos esta letra  $\underline{a_2}$  como a letra  $a_2$  mais à esquerda da subpalavra  $a_1^r a_2^s$  de  $w$ , que fica após o procedimento de colocação de parêntesis em  $w$ .

Por um raciocínio análogo ao anterior concluímos que  $u \equiv (a_2 a_1)^k a_1^r$ ,  $k, r \geq 0$  e  $v \equiv a_2^{s-1} (a_2 a_1)^l$ ,  $s \geq 1$  e  $l \geq 0$ . ■

**Teorema 6.8** *Seja  $h$  um dos operadores lineares  $e_i$ ,  $f_i$  ou  $\sigma_i$  e  $w \in A^*$ . Se  $h(w) \neq 0$  então  $Q(h(w)) = Q(w)$ .*

**Demonstração:**

Seja  $w \in A^*$ .

1ª parte: Começemos para o caso particular de  $A = \{a_1, a_2\}$ .

• Se  $h = f_1$ , pelo lema anterior  $w = u a_1 v$  onde  $u \equiv (a_2 a_1)^k a_1^{r-1}$  e  $v \equiv a_2^s (a_2 a_1)^l$ , para  $k, s, l \geq 0$  e  $r \geq 1$ .

Portanto  $f_1(w) = u a_2 v \equiv (a_2 a_1)^k a_1^{r-1} a_2 a_2^s (a_2 a_1)^l = (a_2 a_1)^k a_1^{r-1} a_2^{s+1} (a_2 a_1)^l$ .

Como  $u \equiv (a_2 a_1)^k a_1^{r-1}$ , então

$$P(u) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline a_2 & \dots & a_2 & & & \\ \hline a_1 & \dots & a_1 & a_1 & \dots & a_1 \\ \hline \end{array} \cdot$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_k \qquad \underbrace{\hspace{5em}}_{r-1}$

A inserção da letra  $a_1$  no quadro  $P(u)$  produz o mesmo efeito no quadro de inserção que a inserção da letra  $a_2$  em  $P(u)$ , isto é,  $Q(ua_1) = Q(ua_2)$ .

Provemos, por indução sobre  $|v|$ , que a inserção de  $v$  em  $P(ua_1)$  leva à mesma sequência de diagramas que em  $P(ua_2)$ .

Escrevemos  $v = v_1 \dots v_j \equiv a_2^s (a_2 a_1)^l$ , ( $j = s + 2l$ ).

Se  $v$  é a palavra vazia nada há a fazer.

Se  $j = 1$  então  $l = 0$  e  $s = 1$ , o que implica que  $v = v_1 = a_2$ .

Então  $P(u a_1 v)$  e  $P(u a_2 v)$  têm a mesma forma pois a letra  $v = a_2$  é inserida, em ambos os quadros, na última linha.

Suponhamos que  $P(u a_1 v_1 \dots v_{i-1})$  e  $P(u a_2 v_1 \dots v_{i-1})$  têm a mesma forma.

Se  $v_i = a_2$  então a letra  $v_i$  é inserida na última linha dos quadros  $P(u a_1 v_1 \dots v_{i-1})$  e  $P(u a_2 v_1 \dots v_{i-1})$ , portanto  $P(u a_1 v)$  e  $P(u a_2 v)$  têm a mesma forma.

Se  $v_i = a_1$ , como  $v \equiv a_2^s (a_2 a_1)^l$ , então  $l \geq 1$  e  $v_1 \dots v_{i-1} \equiv a_2^s (a_2 a_1)^{l-1} a_2$ .

Nestas condições

$$P(u a_1 v_1 \dots v_{i-1}) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline a_2 & \dots & a_2 & a_2 & \dots & a_2 & & & & & & & & & \\ \hline a_1 & \dots & a_1 & a_1 & \dots & a_1 & a_1 & \dots & a_1 & a_1 & a_2 & \dots & a_2 & a_2 \\ \hline \end{array}$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_k \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{l-1} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{r-1} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_s$

Portanto  $P(u a_1 v_1 \dots v_{i-1})$  tem pelo menos uma letra  $a_2$  na sua última linha.

O quadro  $P(u a_2 v_1 \dots v_{i-1})$  também tem pelo menos uma letra  $a_2$  na sua última linha.

$$P(u a_2 v_1 \dots v_{i-1}) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline a_2 & \dots & a_2 & a_2 & \dots & a_2 & & & & & & & & & \\ \hline a_1 & \dots & a_1 & a_1 & \dots & a_1 & a_1 & \dots & a_1 & a_2 & a_2 & \dots & a_2 & a_2 \\ \hline \end{array}$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_k \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{l-1} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{r-1} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_s$

Assim, a letra  $v_i = a_1$  será inserida, em cada um dos quadros, na caixa da última linha que contém a letra  $a_2$  mais à esquerda, sendo que esta letra se desloca para a primeira linha acrescentando-lhe uma caixa à direita.

Portanto o resultado da inserção da letra  $v_i = a_1$  nos quadros  $P(u a_1 v_1 \dots v_{i-1})$  e  $P(u a_2 v_1 \dots v_{i-1})$  conduz a dois quadros com a mesma forma.

Então a inserção de  $v$  em  $P(u a_1)$  leva à mesma sequência de diagramas que em  $P(u a_2)$ , isto é,  $Q(w) = Q(u a_1 v) = Q(u a_2 v) = Q(f_1(w))$ .

- Se  $h = e_1$  a prova é semelhante.

Pelo lema anterior  $w = ua_2v$  onde  $u \equiv (a_2a_1)^k a_1^r$  e  $v \equiv a_2^{s-1} (a_2a_1)^l$ , para  $k, r, l \geq 0$  e  $s \geq 1$ .

Então  $e_1(w) = ua_1v \equiv (a_2a_1)^k a_1^r a_1 a_2^{s-1} (a_2a_1)^l = (a_2a_1)^k a_1^{r+1} a_2^{s-1} (a_2a_1)^l$ .

Como  $u \equiv (a_2a_1)^k a_1^r$ , temos

$$P(u) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline a_2 & \dots & a_2 & & & \\ \hline a_1 & \dots & a_1 & a_1 & \dots & a_1 \\ \hline \end{array},$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_k \qquad \underbrace{\hspace{10em}}_r$

A inserção da letra  $a_1$  no quadro  $P(u)$  produz o mesmo efeito no quadro de inserção que a inserção da letra  $a_2$  em  $P(u)$ , isto é,  $Q(ua_1) = Q(ua_2)$ .

Provemos, por indução sobre  $|v|$ , que a inserção de  $v$  em  $P(ua_1)$  leva à mesma sequência de formas que em  $P(ua_2)$ .

Escrevemos  $v = v_1 \dots v_j \equiv a_2^s (a_2a_1)^l$ , ( $j = s + 2l$ ).

Se  $v$  é a palavra vazia nada há a fazer.

Se  $j = 1$  então  $l = 0$  e  $s = 1$ , o que implica que  $v = v_1 = a_2$ .

Então  $P(ua_1v)$  e  $P(ua_2v)$  têm a mesma forma pois a letra  $v = a_2$  é inserida, em ambos os quadros, na última linha.

Suponhamos que  $P(ua_1v_1 \dots v_{i-1})$  e  $P(ua_2v_1 \dots v_{i-1})$  têm a mesma forma.

Se  $v_i = a_2$  então a letra  $v_i$  é inserida na última linha dos quadros  $P(ua_1v_1 \dots v_{i-1})$  e  $P(ua_2v_1 \dots v_{i-1})$ , portanto  $P(ua_1v)$  e  $P(ua_2v)$  têm a mesma forma.

Se  $v_i = a_1$ , como  $v \equiv a_2^{s-1} (a_2a_1)^l$ , então  $l \geq 1$  e  $v_1 \dots v_{i-1} \equiv a_2^{s-1} (a_2a_1)^{l-1} a_2$ .

Nestas condições

$$P(ua_1v_1 \dots v_{i-1}) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline a_2 & \dots & a_2 & a_2 & \dots & a_2 & & & & & & & & \\ \hline a_1 & \dots & a_1 & a_1 & \dots & a_1 & a_1 & \dots & a_1 & a_1 & a_2 & \dots & a_2 & a_2 \\ \hline \end{array}.$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_k \qquad \underbrace{\hspace{10em}}_{l-1} \qquad \underbrace{\hspace{10em}}_{r-1} \qquad \underbrace{\hspace{10em}}_{s-1}$

Portanto  $P(ua_1v_1 \dots v_{i-1})$  tem pelo menos uma letra  $a_2$  na sua última linha.

Também  $P(ua_2v_1 \dots v_{i-1})$  tem pelo menos uma letra  $a_2$  na sua última linha.

$$P(ua_2v_1 \dots v_{i-1}) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline a_2 & \dots & a_2 & a_2 & \dots & a_2 & & & & & & & & & \\ \hline a_1 & \dots & a_1 & a_1 & \dots & a_1 & a_1 & \dots & a_1 & a_2 & a_2 & \dots & a_2 & a_2 \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} \underbrace{\hspace{1.5cm}}_k \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{l-1} \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{r-1} \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{s-1} \end{array}$$

Assim, a letra  $v_i = a_1$  será inserida, em cada um dos quadros, na caixa da última linha que contém a letra  $a_2$  mais à esquerda, sendo que esta letra se desloca para a primeira linha acrescentando-lhe uma caixa à direita. Portanto o resultado da inserção da letra  $v_i = a_1$  nos quadros  $P(ua_1v_1 \dots v_{i-1})$  e  $P(ua_2v_1 \dots v_{i-1})$  conduz a dois quadros com a mesma forma.

Então a inserção de  $v$  em  $P(ua_1)$  leva à mesma sequência de formas que em  $P(ua_2)$ , isto é,  $Q(w) = Q(ua_1v) = Q(ua_2v) = Q(e_1(w))$ .

• Seja agora  $h = \sigma_1$ . Já verificámos que

$$\sigma_1(w) = \begin{cases} f_1^{r-s}(w) & \text{se } r > s \\ w & \text{se } r = s \\ e_1^{s-r}(w) & \text{se } r < s \end{cases}$$

Portanto basta aplicar o raciocínio anterior  $|r - s|$  vezes aos operadores  $f_1$  ou  $e_1$ , conforme  $r > s$  ou  $r < s$ , respectivamente.

2ª parte: Mostremos agora o resultado para o caso geral de  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ .

Seja  $h$  um qualquer dos operadores lineares  $f_i$ ,  $e_i$  ou  $\sigma_i$ , com  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  fixo e tal que  $h(w) \neq 0$ .

Pelo corolário 5.23, página 74,  $Q(w) = P(std(w)^{-1})$ .

Em particular,  $Q(h(w)) = P(std(h(w))^{-1})$ .

Assim, devemos provar que  $P(std(h(w))^{-1}) = P(std(w)^{-1})$ .

Em (5.2.3), página 66, vimos que a palavra  $std(w)^{-1}$  pode ser obtida da bi-palavra  $\Sigma = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} id \\ w \end{bmatrix}$  passando a  $\Sigma'' = \begin{bmatrix} u'' \\ v'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} std(w)^{-1} \\ w \uparrow \end{bmatrix}$ .

Para a palavra  $w_h = h(w)$  e a bipalavra  $\sum_h = \begin{bmatrix} u_h \\ v_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} id \\ w_h \end{bmatrix}$  temos

também que  $\sum_h'' = \begin{bmatrix} u_h'' \\ v_h'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} std(w_h)^{-1} \\ w_h \uparrow \end{bmatrix}$ .

Nestas condições, provar que  $P\left(std(w_h)^{-1}\right) = P\left(std(w)^{-1}\right)$  é equivalente a provar que  $std(w_h)^{-1} \equiv std(w)^{-1}$ , isto é,  $u'' \equiv u_h''$ .

Podemos escrever  $v'' = w \uparrow = \alpha a_i^r a_{i+1}^s \beta$  de modo a que  $a_i$  e  $a_{i+1}$  não ocorram nos factores  $\alpha$  e  $\beta$  de  $w$ .

Uma vez que  $h(a_i^r a_{i+1}^s) = a_i^{r'} a_{i+1}^{s'}$ , onde  $r + s = r' + s'$ , também podemos escrever  $v_h'' = w_h \uparrow = \alpha a_i^{r'} a_{i+1}^{s'} \beta$ , uma vez que  $h(w)$  apenas altera as letras de  $A_i = \{a_i, a_{i+1}\}$ .

Assim, temos ainda que  $u'' = std(w)^{-1} = \gamma \theta \mu$  e  $u_h'' = std(w_h)^{-1} = \gamma \theta_h \mu$ , onde  $|\gamma| = |\alpha|$ ,  $|\mu| = |\beta|$  e  $|\theta| = |\theta_h| = r + s$ .

Pela 1ª parte da demonstração podemos concluir que, para  $x = a_i^r a_{i+1}^s$  e  $x_h = h(x) = a_i^{r'} a_{i+1}^{s'}$ ,  $Q(x) = Q(h(x)) = Q(x_h)$ .

Mas, pelo corolário 5.23,  $Q(x) = P\left(std(x)^{-1}\right)$  e  $Q(x_h) = P\left(std(x_h)^{-1}\right)$ .

Como  $std(x)^{-1} = \theta$  e  $std(x_h)^{-1} = \theta_h$  temos que

$P(\theta) = P\left(std(x)^{-1}\right) = Q(x) = Q(x_h) = P\left(std(x_h)^{-1}\right) = P(\theta_h)$ , o que quer dizer que  $\theta \equiv \theta_h$ . Logo  $u'' \equiv u_h''$ . ■

**Corolário 6.9** *Seja  $h$  um dos operadores lineares  $e_i$ ,  $f_i$  ou  $\sigma_i$  e  $\mathbf{t}$  um quadro de Young.*

*Se  $h(\mathbf{t}) \neq 0$  então  $h(\mathbf{t})$  também é um quadro de Young.*

### Demonstração:

Seja  $\mathbf{t}$  um quadro de Young com forma  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ .

Pelo resultado anterior,  $Q(h(\mathbf{t})) = Q(\mathbf{t})$ .

Pela proposição 5.6, página 64,  $h(\mathbf{t})$  é um quadro de Young. ■

O teorema seguinte mostra que os operadores lineares  $e_i$ ,  $f_i$  e  $\sigma_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , são compatíveis com a congruência plácica.

**Teorema 6.10** *Seja  $h$  um dos operadores lineares  $e_i$ ,  $f_i$  ou  $\sigma_i$  e  $w, w' \in A^*$ . Se  $w \equiv w'$  então  $h(w) \equiv h(w')$ .*

**Demonstração:**

Sejam  $w, w' \in A^*$  tais que  $w \equiv w'$ . Suponhamos que  $w$  e  $w'$  diferem por uma transformação elementar de Knuth.

Em primeiro lugar (RK1),  $w = uxzyv \equiv uzxyv = w'$ , com  $x \leq y < z$ .

Se  $h = f_i$  seja  $a$  a letra  $a_i$  de  $w$  que passa a  $a_{i+1}$  quando se aplica  $f_i$  a  $w$  e  $a'$  a letra  $a_i$  de  $w'$  que passa a  $a_{i+1}$  em  $f_i(w')$ .

Como a transformação  $xzy \rightsquigarrow zxy$  não altera a posição relativa das letras de  $a_i$  e  $a_{i+1}$ , então, se  $a$  é uma letra de  $u$  ou de  $v$ ,  $a'$  ocupa em  $w'$  a mesma posição que  $a$  em  $w$ , logo  $f_i(w) \equiv f_i(w')$ .

Se  $a$  não está em  $u$  nem em  $v$  então  $a = x$  ou  $a = y$  ou  $a = z$  e  $a'$  será a mesma letra em  $w'$ .

No caso em que  $x < y$ :

Se  $a = x$  temos  $w = ua_i z y v \equiv uza_i y v = w'$  e  $f_i(w) = ua_{i+1} z y v \equiv uza_{i+1} y v = f_i(w')$ .

Se  $a = y$  temos  $w = uxza_i v \equiv uzxa_i v = w'$  e  $f_i(w) = uxza_{i+1} v \equiv uzxa_{i+1} v = f_i(w')$ . Neste caso  $z \geq a_{i+2}$  pois, se  $z = a_{i+1}$  teríamos  $w = ux(a_{i+1}a_i)v \equiv ua_{i+1}xa_i v = w'$  e a letra  $y$  não seria alterada.

Se  $a = z$  temos  $w = uxa_i y v \equiv ua_i x y v = w'$  e  $f_i(w) = uxa_{i+1} y v \equiv ua_{i+1} x y v = f_i(w')$ .

Quando  $x = y$ ,  $w = uxzxv \equiv uzxxv = w'$  apenas está por analisar o caso em que  $x = a_i$  e  $z = a_{i+1}$  e  $a$  não pertence a  $u$  nem a  $v$ . Nestas condições,

$f_i(w) = f_i(ua_i(a_{i+1}a_i)v) = ua_{i+1}a_{i+1}a_i v \equiv ua_{i+1}a_i a_{i+1} v = f_i(u(a_{i+1}a_i)a_i v) = f_i(w')$ .

Quando temos (RK2),  $w = uyxzv \equiv uyzxv = w'$ , com  $x < y \leq z$ , o raciocínio é

análogo à exceção do caso em que  $x < y = z$ , isto é,  $w = uzxzv \equiv uzxv = w'$ , e quando  $x = a_i$  e  $z = a_{i+1}$  e  $a$  não pertence a  $u$  nem a  $v$ . Nesta situação,  $f_i(w) = f_i(u(a_{i+1}a_i)a_{i+1}v)$  e  $f_i(w') = f_i(ua_{i+1}(a_{i+1}a_i)v)$  o que nos indica que a letra  $a$  terá de estar em  $u$  ou em  $v$ , portanto este caso não ocorre.

Para  $h = e_i$  a demonstração é semelhante.

Se  $h = \sigma_i$  basta recordar que

$$\sigma_i(w) = \begin{cases} f_i^{r-s}(w) & \text{se } r > s \\ w & \text{se } r = s \\ e_i^{s-r}(w) & \text{se } r < s \end{cases}$$

e aplicar o raciocínio anterior  $|r - s|$  vezes a um dos operadores  $f_i$  ou  $e_i$ . ■

O resultado seguinte mostra que os operadores lineares, definidos no início deste capítulo, comutam com a inserção de Schensted.

**Corolário 6.11** Para  $w \in A^*$  e  $h$  um qualquer dos operadores  $e_i$ ,  $f_i$  ou  $\sigma_i$ , temos  $P(h(w)) = h(P(w))$ .

**Demonstração:**

Como  $w \equiv P(w)$ , pelo teorema anterior,  $h(P(w)) \equiv h(w) \equiv P(h(w))$ .

Pelo corolário 6.9  $h(P(w))$  é um quadro de Young.

Mas cada classe de congruência contém exactamente um quadro, então  $P(h(w)) = h(P(w))$ . ■

**Exemplo 6.12**

Consideremos a palavra  $w = 3221532$  e o operador linear  $\sigma_1$ .

Já calculámos  $P(w) = 35 \ 23 \ 122$ , portanto,  $\sigma_1(P(w)) = 35 \ 23 \ 111$ .

Ora,  $\sigma_1(w) = 3123531$  e  $P(\sigma_1(w)) =$ 

3	5	
2	3	
1	1	1

 $= 35 \ 23 \ 111$ .

### 6.3 Palavras de Yamanouchi

Consideremos agora o alfabeto  $A = \{1, 2, \dots, n\}$  e  $w \in A^*$ .

**Definição 6.13** Dizemos que  $w$  é uma **palavra de Yamanouchi** quando todo o factor  $v$  à direita de  $w$  verificar

$$|v|_1 \geq |v|_2 \geq \dots \geq |v|_n. \quad (6.3.1)$$

Em particular,  $|w|_1 \geq |w|_2 \geq \dots \geq |w|_n$ .

**Proposição 6.14** Seja  $w \in A^*$  com valoração  $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_n)$ . As afirmações seguintes são equivalentes.

- (a)  $w$  é uma palavra de Yamanouchi;
- (b)  $w|_{\{i, i+1\}}$  é uma palavra de Yamanouchi, para qualquer  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ ;
- (c)  $e_i(w) = 0$ , para qualquer  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ ;
- (d)  $w|_{\{i, i+1\}} \equiv (i+1)^{\psi_{i+1}} i^{\psi_i}$ ,  $\psi_i \geq \psi_{i+1}$ , para qualquer  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ .

**Demonstração:**

(a)  $\Rightarrow$  (b)

Suponhamos que  $w$  é uma palavra de Yamanouchi.

Seja  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  e consideremos  $v$  um factor à direita de  $w|_{\{i, i+1\}}$ .

Se escrevermos  $w|_{\{i, i+1\}} = y_1 y_2 \dots y_p$  temos que  $v = y_k y_{k+1} \dots y_p$  e podemos escrever  $w = x_1 x_2 \dots x_{j-1} y_1 x_{j+1} \dots x_m$ .

Consideremos então o factor à direita de  $w$ ,  $v' = y_1 x_{j+1} \dots x_m$ .

Como  $w$  é uma palavra de Yamanouchi,  $|v'|_i \geq |v'|_{i+1}$ .

Mas  $|v'|_i = |v|_i$  e  $|v'|_{i+1} = |v|_{i+1}$ , portanto  $|v|_i \geq |v|_{i+1}$  e  $w|_{\{i, i+1\}}$  é uma palavra de Yamanouchi.

(b)  $\Rightarrow$  (c)

Suponhamos que  $w|_{\{i, i+1\}}$  é uma palavra de Yamanouchi, para  $i = 1, \dots, n-1$ .

No final do procedimento de colocação de parêntesis em  $w|_{\{i, i+1\}}$  obtemos a subpalavra  $w' = i^r (i+1)^s$  de  $w|_{\{i, i+1\}}$ .

Se  $s \neq 0$ , consideremos a letra  $\underline{i+1}$  mais à direita da subpalavra  $w'$ .

Podemos então escrever  $w|_{\{i,i+1\}} = y_1 \dots y_{j-1} \underline{i+1} y_{j+1} \dots y_p$ .

Pela forma como se definiu o procedimento de colocação de parêntesis numa palavra, o número de letras  $i+1$  no factor  $v = y_{j+1} \dots y_p$  de  $w|_{\{i,i+1\}}$  é igual ao número de letras  $i$  em  $v$ , isto é, todas as letras  $i$  de  $v$  estão entre parêntesis com uma letra  $i+1$ , à sua esquerda.

Assim, no factor à direita de  $w|_{\{i,i+1\}}$ ,  $v' = \underline{i+1} y_{j+1} \dots y_p$ , o número de letras  $i+1$  é igual ao número de letras  $i$  em  $v$  mais uma.

Isto contradiz a hipótese de  $w|_{\{i,i+1\}}$  ser uma palavra de Yamanouchi.

Então  $s = 0$  e  $e_i(y) = 0$ .

(c)  $\Rightarrow$  (d)

Suponhamos que  $e_i(w) = 0$ , para  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ .

Escolhendo a letra  $\underline{i}$  mais à direita da palavra  $w$  que fica fora de parêntesis, no procedimento de colocação de parêntesis em  $w$ , podemos escrever

$$w|_{\{i,i+1\}} = y_1 \dots y_{j-1} \underline{i} y_{j+1} \dots y_p = uv,$$

com  $u = y_1 \dots y_{j-1} \underline{i} \equiv ((i+1) i)^k i^r$  e  $v = y_{j+1} \dots y_p \equiv ((i+1) i)^l$ .

Assim,  $w|_{\{i,i+1\}} \equiv (i+1)^{k+l} i^{k+l+r}$  e  $\psi_i = k+l+r \geq k+l = \psi_{i+1}$ .

(d)  $\Rightarrow$  (a)

Suponhamos que  $w|_{\{i,i+1\}} \equiv (i+1)^{\psi_{i+1}} i^{\psi_i}$ ,  $\psi_i \geq \psi_{i+1}$ , qualquer que seja  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ .

Então  $w|_{\{i,i+1\}} \equiv (i+1)^{\psi_{i+1}} i^{\psi_i}$ , ou seja,

$$P(w|_{\{i,i+1\}}) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline i+1 & \dots & i+1 & & & \\ \hline i & \dots & i & i & \dots & i \\ \hline \end{array} \quad (6.3.2)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\psi_{i+1}} \quad \underbrace{\hspace{4em}}_{\psi_i - \psi_{i+1}}$

Sejam  $v$  um factor à direita de  $w$  e  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  arbitrários.

Pretendemos provar que  $|v|_i \geq |v|_{i+1}$ .

Mas  $v|_{\{i,i+1\}}$  é um factor à direita de  $w|_{\{i,i+1\}}$ .

Assim, podemos escrever  $w|_{\{i,i+1\}} = u(v|_{\{i,i+1\}})$ , para  $u \in \{i, i+1\}^*$ .

Pela proposição 3.17, página 39,  $v|_{\{i,i+1\}} \equiv (i+1)^{k+l} i^{k+l+r} (i+1)^s$ , para  $k, r, s, l \geq 0$ .

Mas  $P(w|_{\{i,i+1\}}) = P(P(u) P(v|_{\{i,i+1\}})) = P(P(u) (i+1)^{k+l} i^{k+l+r} (i+1)^s)$ .

Por (6.3.2) concluímos que  $s = 0$ . Se assim não fosse, pelo algoritmo de inserção de Schensted, apareceriam  $s$  caixas com letras  $(i+1)$ 's na última linha de  $P(w|_{\{i,i+1\}})$ .

Então  $|v|_i = |v|_{\{i,i+1\}}|_i = k+l+r \geq k+l = |v|_{\{i,i+1\}}|_{i+1} = |v|_{i+1}$ . ■

### Exemplo 6.15

$w = 3121321$  é uma palavra de Yamanouchi pois todo factor à direita  $v$  de  $w$  verifica (6.3.1). Em particular  $|w|_1 = 3 \geq |w|_2 = 2 \geq |w|_3 = 2$ .

$w|_{\{1,2\}} = 12121$  é uma palavra de Yamanouchi e  $w|_{\{1,2\}} \equiv 22111$ .

$w|_{\{2,3\}} = 3232$  é uma palavra de Yamanouchi e  $w|_{\{2,3\}} \equiv 3322$ .

**Corolário 6.16** *Sejam  $w, w' \in A^*$  tais que  $w \equiv w'$ . Se  $w$  é uma palavra de Yamanouchi então  $w'$  é também de Yamanouchi.*

### Demonstração:

Sejam  $w, w' \in A^*$  tais que  $w$  é de Yamanouchi de valoração  $\psi = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)$ .

Então, para qualquer  $i = 1, \dots, n-1$ ,  $w'|_{\{i,i+1\}} \equiv w|_{\{i,i+1\}}$ , pelo lema 3.6, página 30.

Pela proposição 6.14, como  $w$  é uma palavra de Yamanouchi, então  $w|_{\{i,i+1\}} \equiv (i+1)^{\psi_{i+1}} i^{\psi_i}$ ,  $\psi_i \geq \psi_{i+1}$ .

Assim  $w'|_{\{i,i+1\}} \equiv (i+1)^{\psi_{i+1}} i^{\psi_i}$ ,  $\psi_i \geq \psi_{i+1}$  e, pela proposição 6.14,  $w'$  é uma palavra de Yamanouchi. ■

Pelo corolário anterior concluímos que, se uma palavra de Yamanouchi pertence a uma classe plácica, então ela contém apenas palavras de Yamanouchi. O corolário seguinte apresenta o quadro de Yamanouchi que representa essa classe plácica.

**Corolário 6.17** *As palavras de Yamanouchi com valoração  $\psi = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)$  formam uma classe plácica e são congruentes com o **quadro de Yamanouchi***

$$\mathbf{t}_Y = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline n & \dots & n & \leftarrow \psi_n \text{ caixas} & & & & & \\ \hline \vdots & & \vdots & \ddots & & & & & \\ \hline 2 & \dots & 2 & \dots & 2 & \dots & 2 & \leftarrow \psi_2 \text{ caixas} & \\ \hline 1 & \dots & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \leftarrow \psi_1 \text{ caixas,} \\ \hline \end{array}$$

isto é, o único quadro com forma e valoração  $\psi$ .

**Demonstração:**

Seja  $w \in A^*$  tal que  $w$  é de Yamanouchi e tem valoração  $\psi = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)$ .

Pela proposição 6.16, uma classe plácica que contenha uma palavra de Yamanouchi, contém apenas palavras de Yamanouchi.

Mas, cada classe plácica contém exactamente um quadro, que neste caso é também uma palavra de Yamanouchi com valoração  $\psi$ ,  $\mathbf{t}_Y$ .

Logo a última linha de  $\mathbf{t}_Y$  tem exactamente  $\psi_1$  caixas com a letra  $a_1$ , a penúltima linha de  $\mathbf{t}_Y$  tem  $\psi_2$  caixas com a letra  $a_2, \dots$ , e a primeira linha de  $\mathbf{t}_Y$  tem  $\psi_n$  caixas com a letra  $a_n$ .

Notemos que  $\psi_1 \geq \psi_2 \geq \dots \geq \psi_n$  pois  $w$  é de Yamanouchi. ■

**Proposição 6.18** *Qualquer classe coplácica contém uma única palavra de Yamanouchi.*

**Demonstração:**

Seja  $q$  um quadro standard de forma  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$  e consideremos o quadro  $t_Y$  de Yamanouchi com forma e valoração  $\lambda$ .

Calculando a imagem inversa de  $(\mathbf{t}_Y, \mathbf{q})$  pela correspondência de Robinson-Schensted, obtemos uma palavra  $y$  tal que  $(P(y), Q(y)) = (\mathbf{t}_Y, \mathbf{q})$ .

Pelo corolário 6.16, como  $y \equiv P(y) = \mathbf{t}_Y$ , concluímos que  $y$  é uma palavra de Yamanouchi.

Esta palavra de Yamanouchi é única porque, pelo corolário 5.5, página 62,  $Q$  induz uma bijecção entre a classe plácica de  $\mathbf{t}_Y$  e  $STab(\lambda)$ , e  $\mathbf{t}_Y$  é o único quadro de Yamanouchi com forma e valoração  $\lambda$ . ■

### Exemplo 6.19

Consideremos o alfabeto  $A = \{1, 2, 3\}$  e o quadro standard  $\mathbf{q} =$

4	7	
2	6	
1	3	5

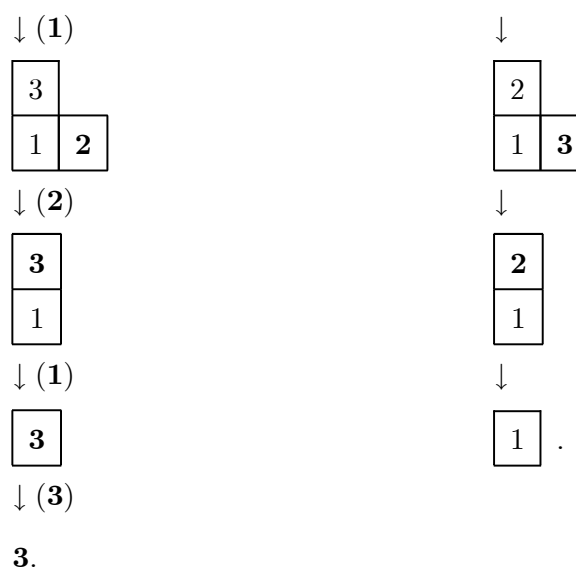
.

O único quadro com forma e valoração  $(3, 2, 2)$  é o quadro de Yamanouchi

$$t_Y = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 3 & \\ \hline 2 & 2 & \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} .$$

Calculando a imagem inversa de  $(\mathbf{t}_Y, \mathbf{q})$  pela correspondência de Robinson-Schensted,

$P(w) =$ <table border="1" style="margin: 0 auto;"> <tr><td>3</td><td><b>3</b></td></tr> <tr><td>2</td><td>2</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> </table>	3	<b>3</b>	2	2	1	1	1	$Q(w) =$ <table border="1" style="margin: 0 auto;"> <tr><td>4</td><td><b>7</b></td></tr> <tr><td>2</td><td>6</td></tr> <tr><td>1</td><td>3</td><td>5</td></tr> </table>	4	<b>7</b>	2	6	1	3	5
3	<b>3</b>														
2	2														
1	1	1													
4	<b>7</b>														
2	6														
1	3	5													
↓ (1)	↓														
<table border="1" style="margin: 0 auto;"> <tr><td>3</td></tr> <tr><td>2</td><td><b>3</b></td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>2</td></tr> </table>	3	2	<b>3</b>	1	1	2	<table border="1" style="margin: 0 auto;"> <tr><td>4</td></tr> <tr><td>2</td><td><b>6</b></td></tr> <tr><td>1</td><td>3</td><td>5</td></tr> </table>	4	2	<b>6</b>	1	3	5		
3															
2	<b>3</b>														
1	1	2													
4															
2	<b>6</b>														
1	3	5													
↓ (2)	↓														
<table border="1" style="margin: 0 auto;"> <tr><td>3</td></tr> <tr><td>2</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td><b>3</b></td></tr> </table>	3	2	1	1	<b>3</b>	<table border="1" style="margin: 0 auto;"> <tr><td>4</td></tr> <tr><td>2</td></tr> <tr><td>1</td><td>3</td><td><b>5</b></td></tr> </table>	4	2	1	3	<b>5</b>				
3															
2															
1	1	<b>3</b>													
4															
2															
1	3	<b>5</b>													
↓ (3)	↓														
<table border="1" style="margin: 0 auto;"> <tr><td><b>3</b></td></tr> <tr><td>2</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td></tr> </table>	<b>3</b>	2	1	1	<table border="1" style="margin: 0 auto;"> <tr><td><b>4</b></td></tr> <tr><td>2</td></tr> <tr><td>1</td><td>3</td></tr> </table>	<b>4</b>	2	1	3						
<b>3</b>															
2															
1	1														
<b>4</b>															
2															
1	3														



obtemos a palavra de Yamanouchi  $y = \rho^{-1}(\mathbf{t}_Y, \mathbf{q}) = 3121321$ .

## 6.4 Grafos de cristal

Iniciamos esta secção com algumas generalidades sobre grafos.

Um **grafo** é um par  $G = (V, E)$  onde  $V$  é um conjunto não vazio de vértices e  $E$  um conjunto de arestas, que são pares não ordenados de  $V$ . Dizemos que o grafo  $G' = (V', E')$  é um **subgrafo** de  $G = (V, E)$  quando  $V' \subseteq V$  e  $E' \subseteq E$ .

Um **digrafo**, ou **grafo orientado**, é um grafo onde as arestas são pares ordenados. Neste caso, as arestas dizem-se **setas** e, dada uma seta  $(i, j) \in E$ ,  $i$  diz-se o **vértice inicial** ou **origem** e  $j$  o **vértice terminal** ou **destino**. Dois **vértices** dizem-se **adjacentes** quando existe uma aresta do grafo que os une.

Se considerarmos um digrafo  $G$ , os vértices  $i, j \in V$  são adjacentes se e só se  $(i, j) \in E$  ou  $(j, i) \in E$ . No caso de  $G$  ser um grafo não orientado,  $i, j \in V$  são adjacentes se e só se  $\{i, j\} \in E$ .

Dado um grafo  $G = (V, E)$  e  $i, j \in V$ , um **passeio** do vértice  $i$  para o vértice  $j$  é um conjunto de arestas de  $G$ ,

$$\{\{i, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \dots, \{v_k, j\}\}.$$

No caso de  $G$  ser um digrafo, definimos **caminho** de origem  $i$  e destino  $j$  como sendo um conjunto de arestas distintas de  $G$ ,

$$\{(i, v_1), (v_1, v_2), \dots, (v_k, j)\}$$

e definimos **corda** de origem  $v_1$  e destino  $v_k$  como um conjunto de arestas de  $G$ ,

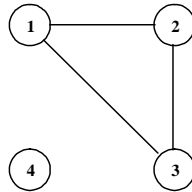
$$C = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3) \dots, (v_{k-1}, v_k)\},$$

com  $v_i \neq v_j$  para  $i \neq j$ ,  $1 \leq i \leq k$ . O seu comprimento é  $\#C$ .

Grafos e digrafos podem ser representados por diagramas, conforme o exemplo seguinte.

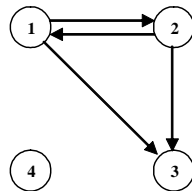
### Exemplo 6.20

Consideremos  $V = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$ ,



Por exemplo,  $\{\{1, 2\}\}$  e  $\{\{1, 3\}, \{3, 2\}\}$  são dois passeios entre os vértices 1 e 2.

Se  $V = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $E = \{(1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 3)\}$ ,



Neste caso,  $\{(1, 3)\}$ ,  $\{(1, 2), (2, 3)\}$  e  $\{(1, 2), (2, 1), (1, 3)\}$  são três caminhos com origem 1 e destino 3 e  $\{(1, 2), (2, 1)\}$  é um caminho com origem e destino 1.

Observamos que, por exemplo, não existe qualquer caminho com origem no vértice 3.

Os conjuntos de arestas  $\{(1, 3)\}$  e  $\{(1, 2), (2, 3)\}$  são cordas deste digrafo, ambas com origem 1 e destino 3, de comprimento 1 e 2, respectivamente.

**Definição 6.21** *Seja  $G = (V, E)$  um grafo.*

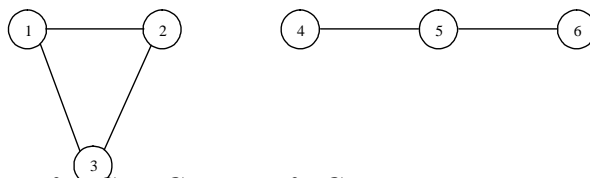
$G$  diz-se um **grafo conexo** quando, para quaisquer vértices  $i, j \in V$ , existe um passeio de  $i$  para  $j$ . Quando existem, pelo menos, dois vértices  $i, j \in V$  tais que não existem passeios de  $i$  para  $j$ , o grafo  $G$  diz-se um **grafo desconexo**.

Uma **componente conexa** de  $G$  é um subgrafo conexo e maximal com esta propriedade, ou seja, é um subgrafo conexo  $G'$ , com vértices em  $V'$  e arestas em  $E'$ , tal que, para qualquer subgrafo  $G'' = (V'', E'')$  conexo de  $G$ , se  $V' \subseteq V''$  então  $V'' = V'$  e  $E'' \subseteq E'$ .

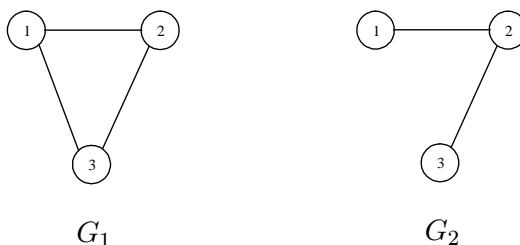
Se num digrafo não considerarmos a orientação das arestas obtemos um grafo. Nestas condições, um **digrafo** diz-se **conexo** quando, não considerando a orientação das arestas, o grafo é conexo. No caso contrário diz-se um **digrafo desconexo**. Desta forma, uma **componente conexa** de um digrafo é também um subgrafo conexo e maximal com esta propriedade, não considerando a orientação das arestas.

### Exemplo 6.22

O grafo  $G$ :



é desconexo. Dos subgrafos  $G_1$  e  $G_2$  do grafo  $G$ :



apenas  $G_1$  é componente conexa de  $G$ .  $G_2$  não é uma componente conexa de  $G$  pois, embora seja um grafo conexo, o subgrafo conexo  $G_1$  de  $G$  contém  $G_2$ .

Definimos agora o digrafo  $\Gamma$  no alfabeto  $A = \{1, \dots, n\}$  da seguinte forma. Os vértices são todas as palavras não vazias  $w \in A^*$  e colocamos uma seta numerada por  $i$ ,  $1 \leq i < n$ , **seta de cor  $i$** , do vértice  $w$  para o vértice  $w'$  quando  $f_i(w) = w'$ , isto é,

$$(w \xrightarrow{i} w') \text{ se e só se } (f_i(w) = w').$$

Observamos que  $w \neq w'$ , pois  $f_i(w) \neq w'$ , para qualquer  $w \in A^*$ .

Pela forma como definimos os operadores lineares  $f_i$  e  $e_i$  temos que, para duas palavras não vazias  $w, w' \in A^*$ ,

$$f_i(w) = w' \Leftrightarrow e_i(w') = w, 1 \leq i < n.$$

Então cada vértice  $w \in A^*$  tem no máximo uma seta de cor  $i$  com origem  $w$  e uma seta de cor  $i$  com destino  $w'$ .

Se de uma palavra  $w$  não sai uma seta de cor  $i$ , então  $f_i(w) = 0$ . Se não entra em  $w$  uma seta de cor  $i$  então  $e_i(w) = 0$ . Se isto acontecer para todas as cores, isto é, não entrar em  $w$  uma seta de cor  $i$  para  $1 \leq i < n$ , pela proposição 6.14,  $w$  é uma palavra de Yamanouchi. Assim, as palavras onde não chegam setas de quaisquer cor são precisamente as palavras de Yamanouchi.

O subgrafo  $\Gamma_i$  de  $\Gamma$ , que se obtém de  $\Gamma$  eliminando as setas de cor  $j \neq i$ ,  $1 \leq i < n$ , é representado por uma colecção de cordas de cor  $i$  disjuntas,

$$w_1 \xrightarrow{i} w_2 \xrightarrow{i} \dots \xrightarrow{i} w_{k_i},$$

de vários comprimentos  $k \geq 0$ .

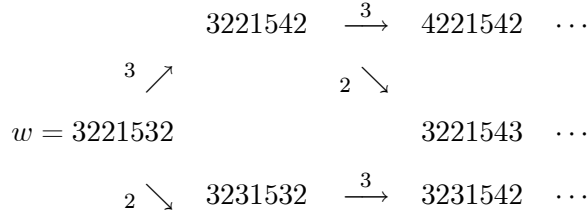
$k \geq 1$  significa que  $k_i > 1$  e  $f_i^{k_i-1}(w_1) \neq 0$  e  $f_i^{k_i}(w_1) = 0$ .

$k = 1$  significa que  $k_i = 0$  e da palavra  $w_1$ , não sai nem entra nenhuma aresta de cor  $i$ .

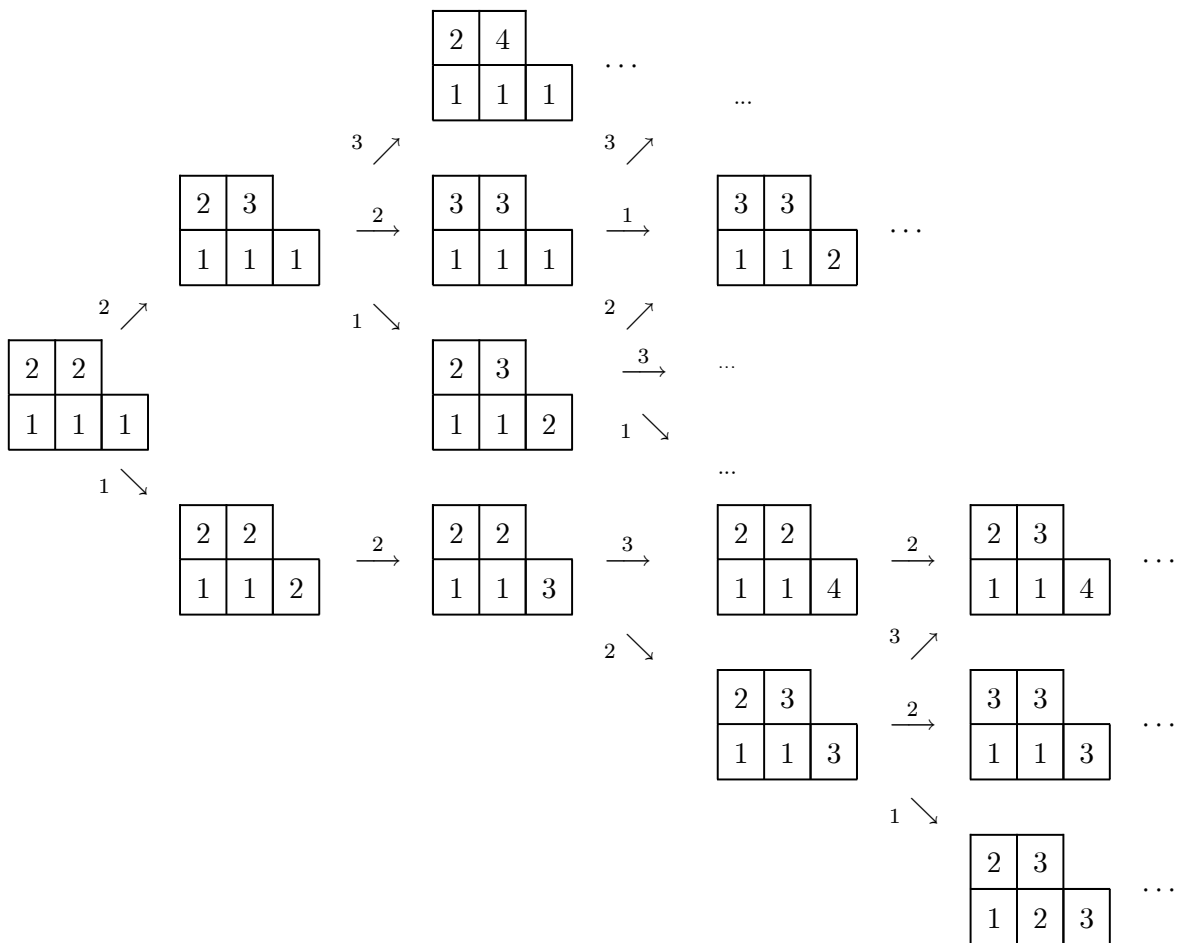
### Exemplo 6.23

- Para  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  e  $w = 3221532$  :  $f_1(w) = 0$ ,  $f_2(w) = w'_2 = 3231532$ ,  
 $f_3(w) = 3221542$  e  $f_4(w) = 0$ . Então  $w = 3221532 \xrightarrow{3} w'_3 = 3221542$   
 $\searrow_2 w'_2 = 3231532$

Como  $f_2(w'_2) = 0$  não parte de  $w'_2$  mais nenhuma seta de cor 2. De facto, ao prolongar o digrafo em mais um passo temos:



- Para  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  e  $\mathbf{t} = 22111$  temos:



$\mathbf{t} = \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{2} \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{2} \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 3 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$  é uma corda de comprimento 2 de  $\Gamma_2$ .

$\mathbf{t} = \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{1} \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 2 \\ \hline \end{array}$  é uma corda de comprimento 1 de  $\Gamma_1$ .

$\mathbf{t} = \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 2 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array}$  é uma corda de comprimento 0 de  $\Gamma_3$ .

Seja  $\Gamma$  um digrafo no alfabeto  $A = \{1, \dots, n\}$ . Definam-se as **componentes conexas** de  $\Gamma$  como sendo as componentes conexas do grafo  $\Gamma'$  onde  $\Gamma'$  se obtém de  $\Gamma$  eliminando as etiquetas e a orientação das setas de  $\Gamma$ , isto é, considerando-as apenas como arestas não orientadas que liguem os vértices de  $\Gamma$ .

**Teorema 6.24** *As componentes conexas de  $\Gamma$  são as classes copláticas no alfabeto  $A$ .*

**Demonstração:**

Seja  $\Gamma_c$  uma componente conexa de  $\Gamma$ .

Pelo teorema 6.8, os operadores  $f_i$  e  $e_i$  não alteram o quadro de inserção, logo os vértices de  $\Gamma_c$  são elementos da mesma classe coplática.

Seja agora  $w$  uma palavra de uma determinada classe coplática.

Se  $w$  não é uma palavra de Yamanouchi, pela proposição 6.14, existe  $i$  tal que  $w' = e_i(w) \neq 0$ .

Se  $w'$  não é ainda uma palavra de Yamanouchi, então existe um  $j$  tal que  $w'' = e_j(w') \neq 0$ .

Conforme vimos em (6.1.1), página 76, o número de elementos da classe coplática de  $\mathbf{q} = Q(w)$  é igual ao número de quadros de forma  $\lambda$  no alfabeto  $A$ , logo é finito. Então, repetimos este raciocínio até obtermos, pela proposição 6.18, a única palavra de Yamanouchi nesta classe plática.

Desta forma, obtemos uma cadeia de setas que ligam a única palavra de Yamanouchi nesta classe coplática à palavra  $w$ .

Então, quaisquer duas palavras desta classe coplática estão ligadas por uma sequência de setas vindas desta palavra de Yamanouchi.

Portanto, as classes copláticas formam subgrafos conexos. ■

**Exemplo 6.25**

- Consideremos a palavra  $w = 3221532$ , cujo quadro de inserção é, conforme já vimos,  $\mathbf{q} = Q(w) = 47 \ 26 \ 135$ .

Uma forma de retrocedermos até à (única) palavra de Yamanouchi,  $w_Y$ , desta classe coplaxica é a seguinte.

$$w = 3221532 \xleftarrow{1} 3121532 \xleftarrow{1} 3121531 \xleftarrow{2} 3121521 \xleftarrow{4} 3121421 \xleftarrow{3} 3121321 = w_Y.$$

Observemos que podíamos encontrar outras formas de chegar até à palavra de Yamanouchi  $w_Y$ , de facto

$$w = 3221532 \xleftarrow{1} 3121532 \xleftarrow{1} 3121531 \xleftarrow{2} 3121521 \xleftarrow{4} 3121421 \xleftarrow{3} 3121321 = w_Y.$$

$\begin{array}{ccc} & 4 \swarrow & 2 \searrow \\ & & 3121431 \end{array}$

A palavra  $w' = 3231421$  tem também quadro de inserção  $\mathbf{q} = 47 \ 26 \ 135$ , isto é,  $w'$  pertence à mesma classe coplaxica que  $w$ , e temos

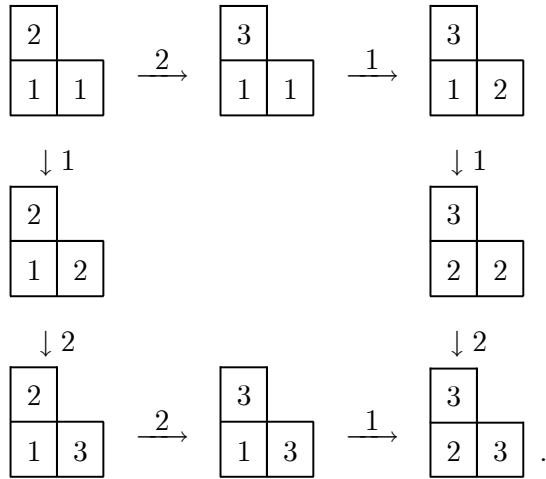
$$w' = 3231421 \xleftarrow{3} 3231321 \xleftarrow{2} 3221321 \xleftarrow{1} 3121321 = w_Y.$$

Portanto, as palavras  $w$  e  $w'$  estão ligadas por um passeio que passa pelo vértice  $w_Y$ .

- Considerando o alfabeto  $A = \{1, 2, 3\}$ , a classe coplaxica indexada pelo quadro

standard  $\mathbf{q} = \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & \\ \hline 1 & 3 \\ \hline \end{array}$ , cujos elementos são todos os quadros de forma  $(2, 1)$ , exemplo

6.3, é representada pela seguinte componente conexa,



Sejam  $\Gamma = (V, E)$  e  $\Gamma' = (V', E')$  dois grafos coloridos.  $\Gamma$  e  $\Gamma'$  dizem-se **grafos isomorfos** quando existem bijecções de  $V$  para  $V'$  e de  $E$  para  $E'$  que preservam origens, destinos e as cores das setas.

A proposição seguinte mostra que as classes copláticas de palavras congruentes são isomorfas, como subgrafos de  $\Gamma$ . Recordemos que, se duas palavras são congruentes, as classes copláticas dessas palavras são disjuntas mas os quadros standard que as indexam têm a mesma forma. Para a demonstração da proposição necessitamos do lema seguinte.

**Lema 6.26** *Se  $y$  é uma palavra de Yamanouchi com valoração  $\psi = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)$  então  $\psi_i - \psi_{i+1} = \max \{p : f_i^p(y) \neq 0\}$ .*

**Demonstração:**

Sejam  $y$  uma palavra de Yamanouchi com valoração  $\psi = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)$  e  $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ .

Pela proposição 6.14,  $e_i(y) = 0$  e, após o procedimento de colocação de parêntesis em  $y$ , obtemos a subpalavra  $i^{\psi_i - \psi_{i+1}}$ . Então,

$$f_i^p(i^{\psi_i - \psi_{i+1}}) \neq 0, \text{ para } p = 1, \dots, \psi_i - \psi_{i+1} \text{ e}$$

$$f_i^p(i^{\psi_i - \psi_{i+1}}) = 0, \text{ para } p > \psi_i - \psi_{i+1}.$$

Portanto  $\psi_i - \psi_{i+1} = \max \{p : f_i^p(y) \neq 0\}$ . ■

**Proposição 6.27** *Duas classes copláticas são isomorfas como subgrafos de  $\Gamma$  se e só se estão indexadas por dois quadros standard da mesma forma.*

**Demonstração:**

Parte “se”:

Sejam  $C$  e  $C'$  duas classes copláticas com, respectivamente, vértices em  $V$  e  $V'$  e arestas em  $E$  e  $E'$ , correspondentes a dois quadros standard  $\mathbf{q}$  e  $\mathbf{q}'$ , ambos com forma  $\lambda$ .

Cada classe coplática, no alfabeto  $A$ , indexada por um quadro standard de forma  $\lambda$  contém exactamente uma palavra de cada classe plática de um quadro no alfabeto  $A$  e forma  $\lambda$ . Portanto,  $\#Q^{-1}(\mathbf{q}) = \#Q^{-1}(\mathbf{q}') = \#Tab(A, \lambda)$ .

Então definimos a bijecção  $\varphi : V \longrightarrow V'$ , que a cada vértice  $w \in V = Q^{-1}(\mathbf{q})$  associa a única palavra  $w' \in V' = Q^{-1}(\mathbf{q}')$  tal que  $w \equiv w'$ .

Consideremos uma aresta colorida  $w \xrightarrow{i} w_1$  de  $E$ , logo  $f_i(w) = w_1$ . Então, temos em  $E'$ , a aresta  $w' \xrightarrow{i} w'_1$ , onde  $w \equiv w'$ .

Esta aresta é de cor  $i$  porque, pelo teorema 6.10,  $w_1 = f_i(w) \equiv f_i(w') = w'_1$ .

Portanto  $C$  e  $C'$  são isomorfos.

Parte “só se”: por contra-recíproca.

Sejam  $C$  e  $C'$  duas classes copláticas indexadas por dois quadros standard  $\mathbf{q}$  e  $\mathbf{q}'$  de formas  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \neq \lambda' = (\lambda'_1, \dots, \lambda'_k)$ , respectivamente.

Pela proposição 6.18, cada uma destas classes copláticas tem uma única palavra de Yamanouchi  $y$  e  $y'$  que terão, respectivamente, valorações  $\lambda \neq \lambda'$ .

Nestas condições existe pelo menos um índice  $i$  tal que  $\lambda_i - \lambda_{i+1} \neq \lambda'_i - \lambda'_{i+1}$  e, pelo lema 6.26,  $\max\{p : f_i^p(y) \neq 0\} \neq \max\{p : f_i^p(y') \neq 0\}$ . Assim os únicos vértices de  $C$  e  $C'$  onde não chegam setas são as palavras de Yamanouchi, e destas palavras saem setas de cor  $i$  de comprimentos diferentes. ■

**Exemplo 6.28**

Consideremos o alfabeto  $A = \{1, 2, 3\}$  e os quadros standard seguintes.

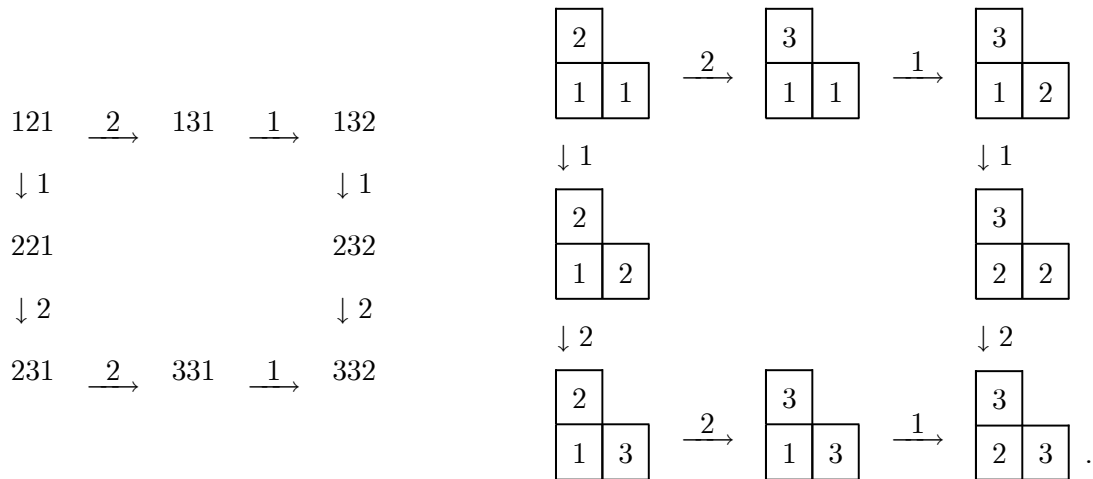
$$\mathbf{q}_1 = \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} \text{ e } \mathbf{q}_2 = \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & \\ \hline 1 & 3 \\ \hline \end{array} .$$

O quadro de Yamanouchi com forma e valoração  $\lambda = (2, 1)$  é  $\mathbf{t}_Y = \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & \\ \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array}$ , cujo quadro de inserção é  $\mathbf{q}_2$ .

Já vimos que o conjunto dos vértices do grafo da classe coplática indexada por  $\mathbf{t}_Y$  é  $Tab(A, (2, 1))$ .

Calculamos facilmente a palavra de Yamanouchi  $w_1$  da classe coplática  $Q^{-1}(\mathbf{q}_1)$ , pela correspondência de Robinson-Schensted,  $w_1 = \rho^{-1}(\mathbf{t}_Y, \mathbf{q}_1) = 121$ .

Temos assim as classes copláticas de  $w_1$  e  $\mathbf{t}_Y$ , respectivamente,



Estes grafos são isomorfos.

Seja  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$  uma partição. Escolhemos o (único) quadro de Yamanouchi de forma  $\lambda$ ,  $\mathbf{t}_Y$ , e o quadro standard de forma  $\lambda$ ,  $\mathbf{q}_Y = Q(\mathbf{t}_Y)$ .

Pelo corolário 6.17, a classe plática de  $\mathbf{t}_Y$  contém todas as palavras de Yamanouchi de valoração  $\lambda$ . Então, pela proposição 6.27, as classes copláticas das palavras de Yamanouchi de valoração  $\lambda$  são isomorfas, como subgrafos de  $\Gamma$ . Assim, as classes copláticas que, pelo teorema 6.24, são componentes conexas de  $\Gamma$ , podem ser determinadas à custa da representação das classes copláticas indexadas por  $\mathbf{q}_Y = (*)$ , página 5.6.

O **grafo de cristal** da partição  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$  é a representação, como subgrafo de  $\Gamma$ , da classe coplácica do (único) quadro de Yamanouchi de forma  $\lambda$ , no alfabeto  $A = \{1, 2, \dots, |\lambda|\}$ .

Neste grafo os vértices são os quadros de  $Tab(\{1, 2, \dots, |\lambda|\}, \lambda)$ .

### Exemplo 6.29

No segundo caso analisado no exemplo 6.23 construímos parte do grafo de cristal da partição  $\lambda = (3, 2)$ .

Dois exemplos triviais de grafos de cristal são os de  $\lambda = (1)$ ,  $\lambda = (2)$  e  $\lambda = (1, 1)$ :

$$\lambda = (1) \text{ e } A = \{1\} : \boxed{1}$$

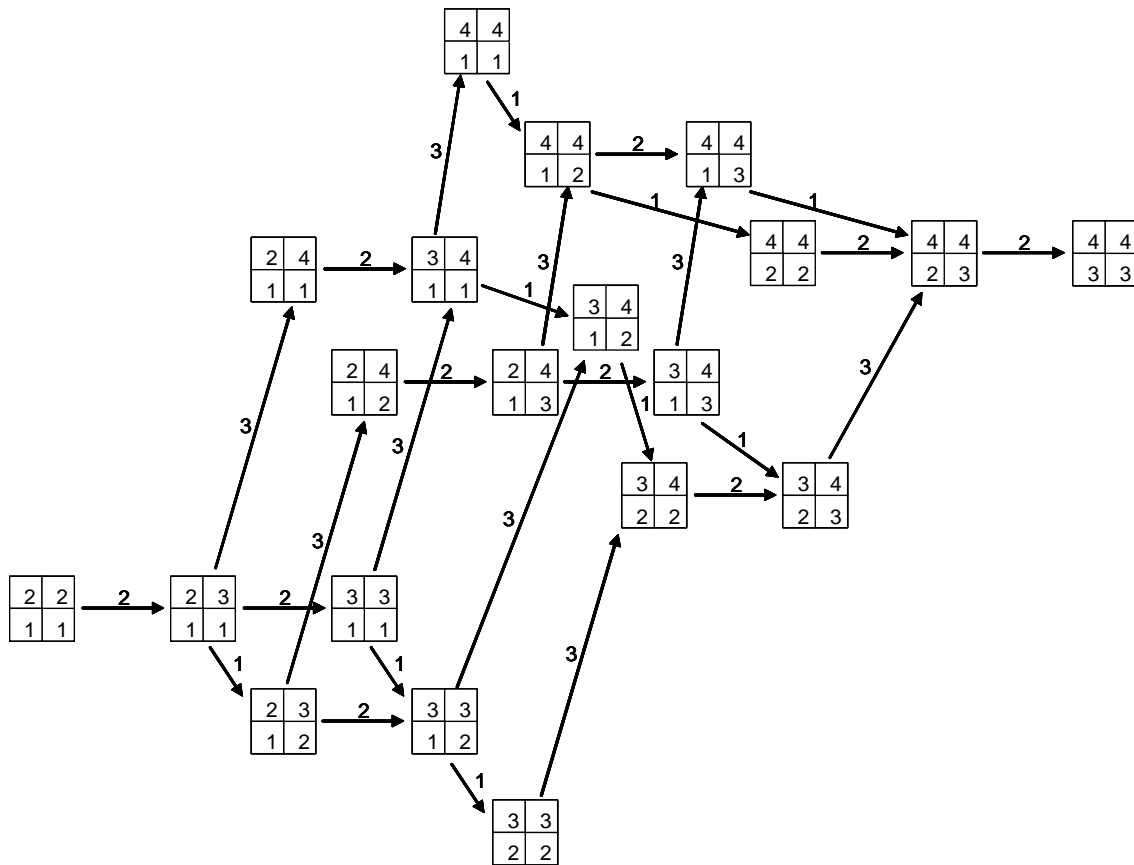
$$\lambda = (2) \text{ e } A = \{1, 2\} : \boxed{1 \mid 1} \xrightarrow{-1} \boxed{1 \mid 2} \xrightarrow{-1} \boxed{2 \mid 2}$$

$$\lambda = (1, 1) \text{ e } A = \{1, 2\} : \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} .$$

Consideremos agora  $\lambda = (2, 1)$  e  $A = \{1, 2, 3\}$ . O seu grafo de cristal é:

$$\begin{array}{ccccc} \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 1 \mid 1 \\ \hline \end{array} & \xrightarrow{2} & \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline 1 \mid 1 \\ \hline \end{array} & \xrightarrow{1} & \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline 1 \mid 2 \\ \hline \end{array} \\ \downarrow 1 & & & & \downarrow 1 \\ \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 1 \mid 2 \\ \hline \end{array} & & & & \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline 2 \mid 2 \\ \hline \end{array} \\ \downarrow 2 & & & & \downarrow 2 \\ \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 1 \mid 3 \\ \hline \end{array} & \xrightarrow{2} & \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline 1 \mid 3 \\ \hline \end{array} & \xrightarrow{1} & \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline 2 \mid 3 \\ \hline \end{array} . \end{array}$$

O grafo de cristal de  $\lambda = (2, 2)$  e  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ , onde temos todos os quadros, no alfabeto  $\{1, 2, 3, 4\}$ , de forma  $\lambda$ , é um pouco mais elaborado.



## Capítulo 7

# Uma acção do grupo simétrico na álgebra livre $\mathbb{Z}\langle A \rangle$

Neste capítulo verificamos que os operadores lineares  $\sigma_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n - 1$ , definidos no capítulo anterior, satisfazem as relações de Moore-Coxeter e, portanto, definem uma acção do grupo simétrico  $S_n$  em  $\mathbb{Z}\langle A \rangle$ . Encontramos assim uma representação linear de  $S_n$  em  $\mathbb{Z}\langle A \rangle$ .

Para o estudo destes assuntos seguimos LOTHAIRE [14], apoiando-nos também em BJÖRNER & BRENTI [1] e HUMPHREYS [8] para o estudo de matriz, grafo e grupos de Coxeter.

Consideremos a bijecção em  $A^*$

$$\zeta(w) = \zeta(x_1 x_2 \dots x_p) = x_2 \dots x_p x_1, \text{ para } w \in A^*.$$

Dizemos que uma **letra**  $x_q$  de  $w = x_1 x_2 \dots x_p$  é **livre** quando, no final do procedimento de colocação de parêntesis, descrito na página 79, a letra  $x_k$  estiver fora destes parêntesis.

Mostremos que a bijecção  $\zeta$  em  $A^*$  comuta com o operador linear  $\sigma_i$ .

**Proposição 7.1** *Para qualquer  $w \in A^*$ ,  $\zeta(\sigma_i(w)) = \sigma_i(\zeta(w))$ .*

**Demonstração:**

Seja  $w = x_1 x_2 \dots x_p \in A^*$  e  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  um índice arbitrariamente fixo.

Se  $x_1 \notin A_i = \{a_i, a_{i+1}\}$  então o operador linear  $\sigma_i$  não altera esta letra, logo  $\zeta(\sigma_i(w)) = \zeta(w) = \sigma_i(\zeta(w))$ . Suponhamos então  $x_1 \in A_i$ .

Pela forma como definimos o operador linear  $\sigma_i$ , é suficiente verificar que  $\sigma_i(\zeta(w_k)) = \zeta(\sigma_i(w_k))$ , onde  $w_k$  é a subpalavra  $w_k = a_i^r a_{i+1}^s$  de  $w$  que se obtém após o procedimento de colocação de parêntesis em  $w$ .

1º caso:  $x_1 \in A_i$  é uma letra livre.

Dentro deste caso distinguimos três situações possíveis.

- Se  $x_1 = a_i$  e nenhuma letra  $a_{i+1}$  é livre.

Como não existem letras  $a_{i+1}$  livres então  $s = 0$  e  $w_k = a_i^r = x_1 a_i^{r-1}$ .

Ora,  $\zeta(\sigma_i(w_k)) = \zeta(\sigma_i(a_i^r)) = \zeta(a_{i+1}^r) = a_{i+1}^{r-1} a_{i+1} = a_{i+1}^r$ .

Por outro lado,  $\sigma_i(\zeta(w_k)) = \sigma_i(\zeta(a_i^r)) = \sigma_i(a_i^{r-1} a_i) = \sigma_i(a_i^r) = a_{i+1}^r$ .

- Se  $x_1 = a_i$  e existem  $s$  letras  $a_{i+1}$  livres.

Neste caso  $w_k = a_i^r a_{i+1}^s = x_1 a_i^{r-1} a_{i+1}^s$ , para  $r, s \geq 1$ .

Então  $\zeta(\sigma_i(w_k)) = \zeta(\sigma_i(a_i^r a_{i+1}^s)) = \zeta(a_i^s a_{i+1}^r) = a_i^{s-1} a_{i+1}^r a_i$ .

E também  $\sigma_i(\zeta(w_k)) = \sigma_i(\zeta(a_i^r a_{i+1}^s)) = \sigma_i(a_i^{r-1} a_{i+1}^s a_i) =$

$$\sigma_i(a_i^{r-1} a_{i+1}^{s-1} (a_{i+1} a_i)) = a_i^{s-1} a_{i+1}^{r-1} (a_{i+1} a_i) = a_i^{s-1} a_{i+1}^r a_i.$$

- Se  $x_1 = a_{i+1}$  é livre. Neste caso não existem letras livres  $a_i$ .

De facto, se existisse uma letra  $a_i$  livre teríamos que colocar parêntesis entre  $x_1$  e esta letra sendo que ambas deixavam de ser letras livres.

Nestas condições  $w_k = a_{i+1}^s = x_1 a_{i+1}^{s-1}$ .

Temos então  $\zeta(\sigma_i(w_k)) = \zeta(\sigma_i(a_{i+1}^s)) = \zeta(a_i^s) = a_i^{s-1} a_i = a_i^s$ .

$\sigma_i(\zeta(w_k)) = \sigma_i(\zeta(a_{i+1}^s)) = \sigma_i(a_{i+1}^{s-1} a_{i+1}) = \sigma_i(a_{i+1}^s) = a_i^s$ .

2º Caso:  $x_1 \in A_i$  não é uma letra livre; o que implica que  $x_1 = \underline{a_{i+1}}$ .

Podemos escrever  $w = \underline{a_{i+1}} u_1 \underline{a_i} u_2$ , onde  $u_1$  e  $u_2$  são subpalavras de  $w$ , escolhidas de forma que, no procedimento de colocação de parêntesis, as letras sublinhadas apareçam entre parêntesis:  $w = (\underline{a_{i+1}} u_1 \underline{a_i}) u_2$ .

Assim,  $w_k$  é uma subpalavra de  $u_2$  e temos  $\sigma_i(w) = \underline{a_{i+1}} u_1 \underline{a_i} \sigma_i(u_2)$ .

Neste caso, interessa analisar a subpalavra  $w' = \underline{a_{i+1}} \underline{a_i} w_k = x_1 a_i w_k$  de  $w$ .

$$\text{Por um lado, } \zeta(\sigma_i(w')) = \zeta\left(\sigma_i\left(\left(\underline{a_{i+1}} \underline{a_i}\right) a_i^r a_{i+1}^s\right)\right) =$$

$$\zeta\left(\left(\underline{a_{i+1}} \underline{a_i}\right) a_i^s a_{i+1}^r\right) = \underline{a_i} a_i^s a_{i+1}^r \underline{a_{i+1}}.$$

$$\text{Por outro lado, } \sigma_i(\zeta(w')) = \sigma_i\left(\zeta\left(\left(\underline{a_{i+1}} \underline{a_i}\right) a_i^r a_{i+1}^s\right)\right) =$$

$$\sigma_i\left(\zeta\left(\underline{a_i} a_i^r a_{i+1}^s \underline{a_{i+1}}\right)\right) = \underline{a_i} a_i^s a_{i+1}^r \underline{a_{i+1}}. \quad \blacksquare$$

### Exemplo 7.2

Com o objectivo de ilustrar os diferentes casos da demonstração anterior, apresentamos um exemplo dessa propriedade para cada situação descrita.

1º Caso:

- $w = 1 (2 (21) (21) 1) 1111 (2 (21) 1) 11$   
 $\zeta(w) = (2 (21) (21) 1) 1111 (2 (21) 1) 111$   
 $\sigma_1(\zeta(w)) = (2 (21) (21) 1) 2222 (2 (21) 1) 222$   
 $\sigma_1(w) = 2 (2 (21) (21) 1) 2222 (2 (21) 1) 22$   
 $\zeta(\sigma_1(w)) = (2 (21) (21) 1) 2222 (2 (21) 1) 222.$
- $w = 1 (2 (21) (21) 1) 1122 (2 (21) 1) 22$   
 $\zeta(w) = (2 (21) (21) 1) 1122 (2 (21) 1) 2 (21)$   
 $\sigma_1(\zeta(w)) = (2 (21) (21) 1) 1112 (2 (21) 1) 2 (21)$   
 $\sigma_1(w) = 1 (2 (21) (21) 1) 1111 (2 (21) 1) 22$   
 $\zeta(\sigma_1(w)) = (2 (21) (21) 1) 1111 (2 (21) 1) 221.$
- $w = 2 (2 (21) (21) 1) 2222 (2 (21) 1) 22$   
 $\zeta(w) = (2 (21) (21) 1) 2222 (2 (21) 1) 222$   
 $\sigma_1(\zeta(w)) = (2 (21) (21) 1) 1111 (2 (21) 1) 111$   
 $\sigma_1(w) = 1 (2 (21) (21) 1) 1111 (2 (21) 1) 11$   
 $\zeta(\sigma_1(w)) = (2 (21) (21) 1) 1111 (2 (21) 1) 111.$

2º Caso:

- $w = (2 (2 (21) (21) 1) 1) 122 (2 (21) 1) 22$   
 $\zeta(w) = (2 (21) (21) 1) 1122 (2 (21) 1) 222$   
 $\sigma_1(\zeta(w)) = (2 (21) (21) 1) 1111 (2 (21) 1) 122$   
 $\sigma_1(w) = (2 (2 (21) (21) 1) 1) 111 (2 (21) 1) 12$   
 $\zeta(\sigma_1(w)) = (2 (21) (21) 1) 1111 (2 (21) 1) 122.$

A proposição anterior pode ser generalizada a um produto  $\sigma$  de operadores  $\sigma_i$  e a repetidas aplicações de  $\zeta$ , obtendo-se assim a seguinte proposição.

**Proposição 7.3** *Sejam  $w \in A^*$ ,  $\sigma$  um qualquer produto de  $\sigma_i$  e  $p \in \mathbb{N}$ .*

*Então  $\zeta^p(\sigma(w)) = \sigma(\zeta^p(w))$ .*

#### Exemplo 7.4

Consideremos a palavra  $w = 321122444$ ,  $p = 3$  e  $\sigma = \sigma_2\sigma_1$ .

- $w = 321122444$

$$\zeta^3(w) = 1224443(21)$$

$$\sigma_1(\zeta^3(w)) = 112444(32)1$$

$$\sigma(\zeta^3(w)) = 113444321.$$

$$\sigma_1(w) = 321112444$$

$$\sigma(w) = 321113444$$

$$\zeta^3(\sigma(w)) = 113444321.$$

Do resultado anterior concluímos facilmente o seguinte lema.

**Lema 7.5** *Sejam  $\mathbf{t} \in A^*$  um quadro e  $\sigma$  um qualquer produto de  $\sigma_i$ . Para todo o  $p \in \mathbb{N}$ , as seguintes condições são equivalentes.*

(a)  $\sigma(\mathbf{t}) = \mathbf{t}$ ;

(b)  $\sigma(P(\zeta^p(\mathbf{t}))) = P(\zeta^p(\mathbf{t}))$ .

#### Demonstração:

Sejam  $\mathbf{t} \in A^*$  um quadro,  $\sigma$  um qualquer produto de  $\sigma_i$  e  $p \in \mathbb{N}$ .

(a)  $\Rightarrow$  (b)

Suponhamos que  $\sigma(\mathbf{t}) = \mathbf{t}$ .

$$\sigma(P(\zeta^p(\mathbf{t}))) = P(\sigma(\zeta^p(\mathbf{t}))), \text{ pelo corolário 6.11, página 89,}$$

$$= P(\zeta^p(\sigma(\mathbf{t}))), \text{ pela proposição 7.3,}$$

$$= P(\zeta^p(\mathbf{t})), \text{ por hipótese.}$$

(b)  $\Rightarrow$  (a)

Suponhamos que  $\sigma(P(\zeta^p(\mathbf{t}))) = P(\zeta^p(\mathbf{t}))$ .

Pelo corolário 6.11, página 89, isto equivale a  $P(\sigma(\zeta^p(\mathbf{t}))) = P(\zeta^p(\mathbf{t}))$ .

Pelo teorema 6.8, página 83, fazendo  $w = \zeta^p(\mathbf{t})$ ,  $Q(\sigma(\zeta^p(\mathbf{t}))) = Q(\zeta^p(\mathbf{t}))$ .

Pelo teorema 5.3, página 60,  $w \overset{P}{\leftrightarrow} (P(w), Q(w))$  é uma bijecção, concluímos que  $\sigma(\zeta^p(\mathbf{t})) = \zeta^p(\mathbf{t})$ .

Pela proposição 7.3,  $\sigma(\zeta^p(\mathbf{t})) = \zeta^p(\mathbf{t}) \Leftrightarrow \zeta^p(\sigma(\mathbf{t})) = \zeta^p(\mathbf{t})$ .

Como  $\zeta$  é uma bijecção,  $\zeta^p(\sigma(\mathbf{t})) = \zeta^p(\mathbf{t}) \Leftrightarrow \sigma(\mathbf{t}) = \mathbf{t}$ . ■

Seja  $S$  um conjunto. Uma **matriz**  $M : S \times S \rightarrow \{1, 2, \dots, \infty\}$  é dita **de Coxeter** quando

- $m(s, s') = 1$  se  $s = s'$  e
- $m(s, s') = m(s', s) \geq 1$ .

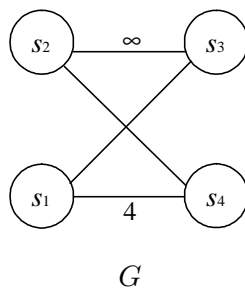
Associado a uma matriz de Coxeter está um grafo (não dirigido), **grafo de Coxeter**, onde os vértices são os elementos de  $S$  e é colocada uma aresta no par não ordenado  $\{s, s'\}$  quando  $m(s, s') \geq 3$ . Esta aresta é indexada por  $m(s, s')$  apenas se  $m(s, s') \geq 4$ .

### Exemplo 7.6

Seja  $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$ . À matriz de Coxeter

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & \infty & 3 \\ 3 & \infty & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

temos associado o grafo de Coxeter  $G$ :



O grupo de Coxeter  $G$  associado a uma matriz de Coxeter é o grupo com geradores  $S$  e sujeito às relações

$$(ss')^{m(s,s')} = e, \text{ sempre que } m(s, s') \neq \infty.$$

onde  $e$  denota o elemento identidade do grupo  $G$ .

Uma vez que  $(ss)^{m(s,s)} = e$  e  $(ss')^{m(s,s')} = e = (s's)^{m(s',s)}$ , as relações anteriores são equivalentes a:

(C1)  $s^2 = e$ ;

(C2)  $(ss')^{m(s,s')} = (s's)^{m(s,s')} \Leftrightarrow \underbrace{ss' ss' s \dots}_{m(s,s')} = \underbrace{s's s's s' \dots}_{m(s,s')}$

Pelo facto de, num grupo de Coxeter,  $s^2 = e$ , para todo o  $s \in S$ , concluímos que:

- $m(s, s') = 2 \Leftrightarrow (ss')^2 = e \Leftrightarrow ss' ss' = e \Leftrightarrow ss' ss' s's = s's \Leftrightarrow ss' = s's$  e
- $m(s, s') = 3 \Leftrightarrow (ss')^3 = e \Leftrightarrow ss' ss' ss' = e \Leftrightarrow ss' ss' ss' s'ss' = s'ss' \Leftrightarrow ss's = s'ss'$ .

Ou seja, para  $s, s' \in S$ ,

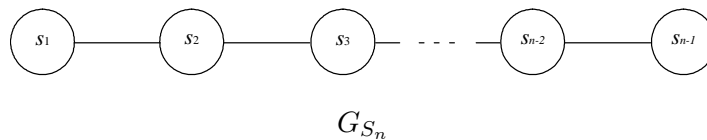
$$\begin{aligned} m(s, s') = 2 &\Leftrightarrow ss' = s's \text{ e} \\ m(s, s') = 3 &\Leftrightarrow ss's = s'ss'. \end{aligned} \tag{7.0.1}$$

**Exemplo 7.7**

O grupo de Coxeter associado a uma matriz de Coxeter  $M$  do exemplo 7.6 é gerado por  $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$  sujeito às seguintes relações.

- $s_i^2 = e$ , para  $1 \leq i \leq 4$ ;
- $s_1s_2 = s_2s_1$ ;
- $s_3s_4 = s_4s_3$ ;
- $s_1s_3s_1 = s_3s_1s_3$ ;
- $s_2s_4s_2 = s_4s_2s_4$ ;
- $(s_1s_4)^4 = e \Leftrightarrow s_1s_4s_1s_4 = s_4s_1s_4s_1$ .

O grafo de Coxeter



determina o grupo gerado por  $S = \{s_1, s_2, \dots, s_{n-1}\}$  sujeito às relações (7.0.1).

O grupo simétrico  $S_n$  é um grupo de Coxeter gerado por  $\{s_i = (i, i+1) : i = 1, 2, \dots, n-1\}$  sujeito às relações (7.0.1), isto é,

$$(MC1) \quad s_i^2 = e, \text{ para } i = 1, \dots, n-1;$$

$$(MC2) \quad s_i s_j = s_j s_i, \text{ para } |i - j| \geq 2;$$

$$(MC3) \quad s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}, \text{ para } i = 1, \dots, n-1.$$

As relações (MC1), (MC2) e (MC3) são chamadas de **Moore-Coxeter**.

**Teorema 7.8** *Os operadores lineares  $\sigma_i, i = 1, \dots, n-1$ , satisfazem as relações de Moore-Coxeter, isto é,*

- $\sigma_i^2 = id_{\mathbb{Z}\langle A \rangle}$ ;
- $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$ , para  $|i - j| \geq 2$ ;
- $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$ .

**Demonstração:**

Seja  $S = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}\}$ .

É imediato da definição de  $\sigma_i$  que  $\sigma_i^2 = \sigma_i \sigma_i = id_{\mathbb{Z}\langle A \rangle}$ .

Se  $|i - j| \geq 2$  os alfabetos  $A_i = \{a_i, a_{i+1}\}$  e  $A_j = \{a_j, a_{j+1}\}$  não se intersectam.

Então, da definição de  $\sigma_i$ , vem imediatamente que  $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$ .

Provemos agora que  $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$ , que é equivalente a provar que

$$(\sigma_i \sigma_{i+1})^3 = id_{\mathbb{Z}\langle A \rangle}.$$

Seja  $w \in A^*$  uma palavra com valoração  $val(w) = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ .

Provemos então que  $(\sigma_i \sigma_{i+1})^3(w) = w$ .

Uma vez que a correspondência de Robinson-Schensted,  $w \xleftrightarrow{P, Q} (P(w), Q(w))$ ,

é bijetiva podemos concluir que, escrevendo  $\sigma = (\sigma_i \sigma_{i+1})^3$ ,

$$\sigma(w) = w \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} P(\sigma(w)) = P(w) \\ Q(\sigma(w)) = Q(w). \end{cases}$$

Pelo teorema 6.8, página 83,  $Q(\sigma(w)) = Q(w)$ .

Por outro lado, pelo corolário 6.11,  $P(\sigma(w)) = P(w) \Leftrightarrow \sigma(P(w)) = P(w)$ .

Basta então mostrar que  $\sigma(\mathbf{t}) = \mathbf{t}$ , para um quadro  $\mathbf{t}$ , ou seja,  $(\sigma_i \sigma_{i+1})^3(\mathbf{t}) = \mathbf{t}$ .

Escreva-se  $\mathbf{t} = uv$ , sendo  $v$  a última linha de  $\mathbf{t}$ .

Fazendo  $p = |u| = |\mathbf{t}| - |v|$  no lema anterior obtemos

$$\begin{aligned}
(\sigma_i \sigma_{i+1})^3(\mathbf{t}) = \mathbf{t} &\Leftrightarrow (\sigma_i \sigma_{i+1})^3(P(\zeta^p(uv))) = P(\zeta^p(uv)) \\
&\Leftrightarrow (\sigma_i \sigma_{i+1})^3\left(P\left(\zeta^{|u|}(uv)\right)\right) = P\left(\zeta^{|u|}(uv)\right) \\
&\Leftrightarrow (\sigma_i \sigma_{i+1})^3(P(vu)) = P(vu).
\end{aligned}$$

Pela definição de quadro de Young, (QY1) os números dispostos são estritamente crescentes por coluna (do fundo para o topo do diagrama), definição 2.3, página 13, todas as letras  $a_1$  do quadro  $\mathbf{t} = uv$  estão na última linha de  $\mathbf{t}$ ,  $v$ , e as letras  $a_2$  de  $\mathbf{t}$  estão em  $v$  ou na penúltima linha de  $\mathbf{t}$ .

Assim, todas as letras  $a_1$  e  $a_2$  de  $\mathbf{t}$  estão na última linha do quadro  $\mathbf{t}' = P(vu)$ . Podemos então escrever  $\mathbf{t}' = u'v'$ , onde  $v'$  é a última linha de  $\mathbf{t}'$ .

Repetindo este raciocínio obtemos uma sequência de quadros  $\mathbf{t}^{(k)}$  onde todas as letras  $a_1, a_2, \dots, a_{k+1}$  estão na última linha de  $\mathbf{t}^{(k)}$  e, em cada passo deste algoritmo, temos

$$(\sigma_i \sigma_{i+1})^3(\mathbf{t}) = \mathbf{t} \Leftrightarrow (\sigma_i \sigma_{i+1})^3\left(\mathbf{t}^{(k)}\right) = \mathbf{t}^{(k)},$$

em particular no passo  $n-1$ , onde  $n$  é o número de letras do alfabeto  $A$ . Assim basta mostrar que

$$(\sigma_i \sigma_{i+1})^3\left(\mathbf{t}^{(n-1)}\right) = \mathbf{t}^{(n-1)}.$$

Temos que  $\mathbf{t}^{(n-1)} = x_1 x_2 \dots x_m$  é uma linha, ou seja,  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_m$ , e  $val(\mathbf{t}^{(n-1)}) = val(\mathbf{t}) = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ .

$(\sigma_i \sigma_{i+1})^3\left(\mathbf{t}^{(n-1)}\right)$  também será uma linha pois, na aplicação de  $(\sigma_i \sigma_{i+1})^3$  à linha  $\mathbf{t}^{(n-1)}$ , as letras permanecem sempre ordenadas.

As linhas  $\mathbf{t}^{(n-1)}$  e  $(\sigma_i \sigma_{i+1})^3\left(\mathbf{t}^{(n-1)}\right)$  têm a mesma valoração porque:

$$\begin{aligned}
val\left(\mathbf{t}^{(n-1)}\right) &= (c_1, \dots, c_i, c_{i+1}, c_{i+2}, \dots, c_n), \\
val\left(\sigma_{i+1}\left(\mathbf{t}^{(n-1)}\right)\right) &= (c_1, \dots, c_i, c_{i+2}, c_{i+1}, \dots, c_n), \\
val\left(\sigma_i \sigma_{i+1}\left(\mathbf{t}^{(n-1)}\right)\right) &= (c_1, \dots, c_{i+2}, c_i, c_{i+1}, \dots, c_n), \\
val\left(\sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}\left(\mathbf{t}^{(n-1)}\right)\right) &= (c_1, \dots, c_{i+2}, c_{i+1}, c_i, \dots, c_n), \\
val\left(\left(\sigma_i \sigma_{i+1}\right)^2\left(\mathbf{t}^{(n-1)}\right)\right) &= (c_1, \dots, c_{i+1}, c_{i+2}, c_i, \dots, c_n), \\
val\left(\sigma_{i+1}\left(\sigma_i \sigma_{i+1}\right)^2\left(\mathbf{t}^{(n-1)}\right)\right) &= (c_1, \dots, c_{i+1}, c_i, c_{i+2}, \dots, c_n), \\
val\left(\left(\sigma_i \sigma_{i+1}\right)^3\left(\mathbf{t}^{(n-1)}\right)\right) &= (c_1, \dots, c_i, c_{i+1}, c_{i+2}, \dots, c_n).
\end{aligned}$$

Então  $(\sigma_i \sigma_{i+1})^3\left(\mathbf{t}^{(n-1)}\right) = \mathbf{t}^{(n-1)}$ . ■

**Exemplo 7.9**

- Consideremos  $\mathbf{t} = \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 5 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline 1 & 3 & 6 \\ \hline \end{array} = 35\ 24\ 136 = \underbrace{3524}_u \underbrace{136}_v$  no alfabeto  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .

Nas condições da demonstração anterior temos:

$$\mathbf{t}' = P(vu) = P(136\ 3524) = \begin{array}{|c|c|} \hline 6 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 5 \\ \hline \end{array} = 634\ 1235 = u^{(1)}v^{(1)};$$

$$\mathbf{t}'' = P(v'u') = P(1235\ 634) = \begin{array}{|c|} \hline 5 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 3 & 4 & 6 \\ \hline \end{array} = 5\ 123346 = u^{(2)}v^{(2)};$$

$$\mathbf{t}^{(3)} = P(v''u'') = P(123346\ 5) = \begin{array}{|c|} \hline 6 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 3 & 4 & 5 \\ \hline \end{array} = 6\ 123345 = u^{(3)}v^{(3)};$$

$$\mathbf{t}^{(4)} = P(v^{(3)}u^{(3)}) = P(123346\ 5) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline \end{array} = 1233456 = \mathbf{t}^{(5)},$$

que já é uma linha.

Para  $i = 2$ , por exemplo,

$$\begin{aligned} (\sigma_2\sigma_3)^3(\mathbf{t}^{(5)}) &= (\sigma_2\sigma_3)^3(1233456) = (\sigma_2\sigma_3)^2\sigma_2(1234456) = (\sigma_2\sigma_3)^2(1234456) \\ &= \sigma_2\sigma_3\sigma_2(1233456) = \sigma_2\sigma_3(1223456) = \sigma_2(1223456) = 1233456 = \mathbf{t}^{(5)}. \end{aligned}$$

- Se  $w = 521415121453$ ,  $val(w) = (4, 2, 1, 2, 3)$ .

$$\sigma_4(w) = 521415121443, \quad val(\sigma_4(w)) = (4, 2, 1, 3, 2).$$

$$\sigma_3(\sigma_4(w)) = 521315121343, \quad val(\sigma_3(\sigma_4(w))) = (4, 2, 3, 1, 2).$$

Nestas condições, temos uma representação linear do grupo simétrico  $S_n$  em  $\mathbb{Z}\langle A \rangle$ ,

$$\begin{aligned} \rho : S_n &\longrightarrow GL(\mathbb{Z}\langle A \rangle) \\ s_i = (i, i+1) &\rightsquigarrow \rho(i, i+1) = \sigma_i : \mathbb{Z}\langle A \rangle \longrightarrow \mathbb{Z}\langle A \rangle \\ & \qquad \qquad \qquad x \rightsquigarrow \sigma_i(x), \end{aligned}$$

onde  $GL(\mathbb{Z}\langle A \rangle)$  representa o grupo dos automorfismos na álgebra livre  $\mathbb{Z}\langle A \rangle$ .

É uma representação linear porque é um homomorfismo de grupos,  $\rho(s_i s_j) = \rho(s_i) \rho(s_j)$ .



# Bibliografia

- [1] Björner, A., Brenti, F., *Combinatorics of Coxeter Groups*, Graduate Texts in Mathematics **231**, Springer, New York (2005).
- [2] Casselman, B., <http://www.math.ubc.ca/~cass/coxeter/crm.html>, Department of Mathematics, University of British Columbia, Vancouver (2002).
- [3] Fulton, W., *Young Tableaux with Applications to Representation Theory and Geometry*, London Mathematical Society Students Texts **35**, Cambridge University Press, New York (1997).
- [4] Greene, C., An extension of Schensted's theorem, *Advances in Mathematics* **14**, 254-265, (1974).
- [5] Grillet, P. A., *Semigroups, An Introduction to Structure Theory*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, **193**, Marcel Dekker, New York (1995).
- [6] Howie, J. M., *An Introduction to Semigroup Theory*, L.M.S. Monographs **7**, Academic Press Inc., London (1976).
- [7] Howie, J. M., *Automata and Languages*, Oxford University Press, New York (1991).
- [8] Humphreys, J. E., *Reflection Groups and Coxeter Groups*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **29**, Part II, Cambridge University Press, Cambridge (1992).
- [9] Knuth, D. E., Permutations, matrices, and generalized Young tableaux, *Pacific Journal of Mathematics*, Vol. **34**, No. **3**, 709-727, (1970).

- [10] Kostrikin, A. I., Shafarevich, I. R. (editors); Ufnarovskij, V. A. (author), *Algebra VI: I - Combinatorial and Asymptotic Methods in Algebra*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Vol. **57**, Springer, Berlin (1995).
- [11] Lascoux, A., Schützenberger, M. P., Le monoïde plaxique, *Non-commutative Structures in Algebra and Geometric Combinatorics*, (Naples, 1978), Quaderni de "La Ricerca Scientifica", vol. **109**, CNR, Rome (1981).
- [12] Lascoux, A., Schützenberger, M. P., The plactic ring, *U.E.R. Maths Paris VII*, (1981).
- [13] Leclerc, B., Thibon, J. Y., The Robinson-Schensted Correspondence, Cristal Bases, and the Quantum Straightening at  $q = 0$ , *The Electronic Journal of Combinatorics*, Volume **3 (2)**, <http://www.combinatorics.org> (1996).
- [14] Lothaire, M., *Algebraic Combinatorics on Words*, **Cap. 5**, autores: Lascoux, A., Leclerc, B., Thibon, J. Y., Encyclopedia of Mathematics and its applications **90**, Cambridge University Press, Cambridge (2002).
- [15] Pereira, Simões, *Apontamentos das aulas de Matemática Finita*, Departamento de Matemática, Universidade de Coimbra, 1995/1996.
- [16] Reutenauer, C., *Free Lie Algebras*, London Mathematical Society Monographs, New Series **7**, Oxford University Press, New York (1993).
- [17] Robinson, G., On the representations of the symmetric group, *Amer. J. Math.*, **60**, 745-760, (1938).
- [18] Roby, T., Goggin, D., <http://seki.mcs.csu Hayward.edu/~troby/Goggin/BumpingAlg.html>, Department of Math & CS, California State University, Hayward.
- [19] Sagan, B. E., *The Symmetric Group: Representations, Combinatorial Algorithms and Symmetric Functions - 2nd ed.*, **Cap. 3**, Graduate Texts in Mathematics, Springer, (2000).

- [20] Schensted, C., Longest increasing and decreasing subsequences, *Canadian Journal of Mathematics*, **13** (1961).
- [21] Sobral, M., *Álgebra*, Universidade Aberta, Lisboa (1996).
- [22] Wilson, R. J., *Introduction to Graph Theory - 2nd ed.*, Longman Group Limited, New York (1979).