



Modelação e Simulação Eletrotérmica de Circuitos e Sistemas Eletrónicos

Mestrado em Engenharia Eletrotécnica

Nuno Filipe Mota Silva

Leiria, junho de 2023



Modelação e Simulação Eletrotérmica de Circuitos e Sistemas Eletrónicos

Mestrado em Engenharia Eletrotécnica

Nuno Filipe Mota Silva

Dissertação realizada sob a orientação do Professor Doutor Jorge dos Santos Freitas de
Oliveira e do Professor Doutor Luís Miguel Moreira Mendes

Leiria, junho de 2023

Originalidade e Direitos de Autor

A presente dissertação é original, elaborada unicamente para este fim, tendo sido devidamente citados todos os autores cujos estudos e publicações contribuíram para a elaborar.

Reproduções parciais deste documento serão autorizadas na condição de que seja mencionado o Autor e feita referência ao ciclo de estudos no âmbito do qual o mesmo foi realizado, a saber, Curso de Mestrado em Engenharia Eletrotécnica, no ano letivo 2022/2023, da Escola Superior de Tecnologia e Gestão do Instituto Politécnico de Leiria, Portugal, e, bem assim, à data das provas públicas que visaram a avaliação destes trabalhos.

Agradecimentos

A presente dissertação foi desenvolvida no âmbito da obtenção do grau de Mestre em Engenharia Eletrotécnica. Durante esta etapa da minha vida intervieram diversas pessoas e entidades às quais desejo expressar os meus sinceros agradecimentos.

Em primeiro lugar gostaria de agradecer ao Professor Doutor Jorge dos Santos Freitas de Oliveira e Professor Doutor Luís Miguel Moreira Mendes na qualidade de orientadores desta dissertação. Todo o apoio prestado, disponibilidade e elevado grau de exigência foram fulcrais para a conclusão deste trabalho com sucesso.

Gostaria também de agradecer à Escola Superior de Tecnologia e Gestão de Leiria, pela oportunidade de obter este grau, bem como aos colegas de mestrado por todo o companheirismo e elementos do corpo docente por todo o conhecimento fornecido. Gostaria de agradecer ao Instituto de Telecomunicações (IT) pelo apoio fornecido.

Gostaria de agradecer à minha família e amigos por toda a amizade, apoio e incentivo. Por fim gostaria de agradecer à minha futura mulher por toda a ajuda, encorajamento, inspiração e especialmente compreensão por não conseguir estar tão disponível quanto gostaria.

Resumo

Esta dissertação insere-se na área da modelação e simulação eletrotérmica de circuitos eletrónicos que contêm MOSFETs de potência. Visa essencialmente o estudo da aplicabilidade de ferramentas computacionais inovadoras que consigam simular, de forma eficiente, circuitos que operem em múltiplas escalas temporais, como é o caso da simulação elétrica e térmica conjunta.

A simulação eletrotérmica de um componente eletrónico cujo funcionamento depende fortemente da temperatura necessita que, durante o seu período de operação, se conheça com rigor o valor da temperatura em vários pontos do seu interior, de modo a se poder estimar o seu comportamento. O modelo do MOSFET utilizado, baseado em modelos SPICE, é um modelo eletrotérmico contínuo, que permite que a temperatura de funcionamento seja atualizada dinamicamente durante o processo de simulação. Em conjunto com o modelo do MOSFET são também adotados nesta dissertação modelos de propagação térmica baseados em linhas de transmissão de calor.

Para se poder tirar o proveito dos diferentes ritmos de evolução temporal existentes entre as variáveis de estado elétricas e térmicas, são utilizadas algumas técnicas numéricas avançadas baseadas em esquemas Runge-Kutta multi-ritmo. Nesta dissertação é dada especial atenção ao método de ordem 2(3). O desempenho deste método numérico é avaliado em dois exemplos de aplicação ilustrativos, com resultados bastante interessantes. Através da análise comparativa entre os resultados obtidos com os métodos numéricos convencionais presentes nos simuladores SPICE e o método proposto, é possível constatar ganhos significativos em termos de poupança de esforço computacional.

Palavras-chave: Simulação eletrotérmica, Comportamento multi-ritmo, MOSFETs de potência, Modelação de propagação de calor

Abstract

This dissertation is focused on electrothermal modelling and simulation of electronic circuits containing power MOSFETs. Its main goal is to explore the use of innovative computational tools that can efficiently simulate circuits operating at multiple time scales, specifically in the case of combined electrical and thermal simulation.

The electrothermal simulation of an electronic component whose operation strongly depends on temperature requires that, during its period of operation, the temperature value is accurately known at various points of its interior, so that its behaviour can be estimated. The MOSFET model used, based on SPICE models, is a continuous electrothermal model, which allows the operating temperature to be dynamically updated during the simulation process. In addition to the MOSFET model, thermal propagation models based on heat transmission lines are also adopted in this dissertation.

To take advantage of the different rates of time evolution between electrical and thermal state variables, some advanced numerical techniques based on multi-rate Runge-Kutta schemes are used. In this dissertation special attention is given to the method of order 2(3). The performance of this numerical method was tested in two illustrative application examples, with very interesting results. From the comparative analysis between the results obtained with the conventional numerical methods present in the SPICE simulators and the proposed method, it is possible to verify significant gains in terms of computational effort savings.

Keywords: Electrothermal Simulation, Multi-rate Behaviour, Power MOSFETs, Heat Propagation Modelling

Índice

Originalidade e Direitos de Autor	iii
Agradecimentos	v
Resumo	vii
Abstract	ix
Lista de figuras	xiii
Lista de tabelas	xv
Lista de siglas e acrónimos	xvii
1. Introdução	1
1.1. Motivação	1
1.2. Objetivos	2
1.3. Sumário	3
2. Modelação eletrotérmica	7
2.1. Introdução	7
2.2. Modelo eletrotérmico genérico	11
2.3. Modelação de MOSFETs	14
2.3.1. Efeitos térmicos e a sua modelação	14
2.3.2. Modelo por partes (função definida por ramos)	19
2.3.3. Modelo contínuo	22
2.4. Modelos de propagação térmica	23
3. Modelo matemático genérico de um circuito eletrónico	29
3.1. Exemplo de um problema de valor inicial	29
3.2. Problema descrito no formato DAE	31
3.3. Problema descrito no formato ODE	32
4. Resolução numérica de problemas de valor inicial	35
4.1. Introdução	35
4.2. Ordem e estabilidade	35
4.2.1. Ordem	35
4.2.2. Estabilidade	36
4.2.3. Problemas <i>STIFF</i>	37
4.3. Métodos de passo único	38
4.3.1. Método de Euler explícito	38
4.3.2. Método de Euler implícito	38
4.3.3. Métodos de Runge-Kutta	39

4.3.4.	Métodos de Runge-Kutta embutidos e controlo de passo.....	42
4.4.	Métodos de passo múltiplo.....	44
4.4.1.	Método Trapezoidal.....	44
4.4.2.	Método Gear-2.....	44
4.4.3.	Métodos BDF.....	45
4.5.	Resolução numérica de sistemas de equações não lineares.....	46
4.5.1.	Método do Ponto Fixo.....	46
4.5.2.	Método de Newton.....	47
5.	Métodos multi-ritmo.....	51
5.1.	Introdução.....	51
5.2.	Métodos de Runge-Kutta Multi-Ritmo (MRK).....	54
5.3.	Método MRK23.....	57
6.	Casos de estudo.....	59
6.1.	Introdução.....	59
6.2.	Amplificador de áudio de potência.....	59
6.2.1.	Expressões de análise no formato DAE.....	61
6.2.2.	Expressões de análise no formato ODE.....	62
6.2.3.	Modelo do transistor.....	64
6.2.4.	Modelos de propagação térmica.....	65
6.2.4.1.	Expressões de análise no formato DAE.....	69
6.2.4.2.	Expressões de análise no formato ODE.....	72
6.2.5.	Resultados numéricos de simulação.....	74
6.2.6.	Comparação entre métodos.....	79
6.3.	Regulador de tensão linear.....	80
6.3.1.	Expressões de análise no formato DAE.....	82
6.3.2.	Expressões de análise no formato ODE.....	83
6.3.3.	Modelo do transistor.....	84
6.3.4.	Modelos de propagação térmica.....	85
6.3.4.1.	Expressões de análise no formato DAE.....	86
6.3.4.2.	Expressões de análise no formato ODE.....	88
6.3.5.	Resultados numéricos de simulação.....	88
6.3.6.	Comparação entre métodos.....	93
7.	Conclusões.....	95
7.1.	Conclusões.....	95
7.2.	Trabalho futuro.....	96
	Referências.....	99

Lista de figuras

Figura 2.1 - Relação i_{DS} versus v_{GS} para as temperaturas -55°C , 25°C e 175°C [15].	8
Figura 2.2 - Fluxograma de uma simulação SPICE.	9
Figura 2.3 - Tipos de modelos de transístores.	11
Figura 2.4 - Blocos simulação eletrotérmica.	12
Figura 2.5 - Modelo eletrotérmico (esquerda) e modelo de propagação térmica (direita) [2].	13
Figura 2.6 - Simulação e funcionamento real de um MOSFET de potência em curto-circuito [2].	14
Figura 2.7 - Modelo MOSFET modificado [22].	16
Figura 2.8 - (a) Subcircuito de modificação da tensão na <i>gate</i> e (b), (c) e (d) princípios de operação.	17
Figura 2.9 - Modelo simplificado de um MOSFET.	19
Figura 2.10 - Circuito equivalente de um MOSFET [23].	20
Figura 2.11 - Modelo de linhas de transmissão (esquerda) e modelo de propagação térmica (direita).	24
Figura 2.12 - Modelo de propagação térmica equivalente.	24
Figura 2.13 - Distribuição da estrutura física multimaterial de um componente [2].	25
Figura 2.14 - Rede térmica com configuração em filtro (Cauer) [5].	26
Figura 2.15 - Rede térmica com configuração em tanque (Foster) [5].	27
Figura 2.16 - Divisão da estrutura física em três dimensões [8].	27
Figura 3.1 - Exemplo básico de um circuito não linear.	30
Figura 5.1 - Passo na integração com um método numérico convencional.	53
Figura 5.2 - Macro passo e micro passo na integração com um método multi-ritmo.	53
Figura 6.1 - Circuito amplificador de áudio.	60
Figura 6.2 - Relação i_{DS} vs. v_{DS}	65
Figura 6.3 - Relação i_{DS} vs. v_{GS}	65
Figura 6.4 - Rede térmica <i>junction-case</i> .	66
Figura 6.5 - Rede térmica <i>case-ambient</i> .	67
Figura 6.6 - Tensão de saída do amplificador (v_s)	75
Figura 6.7 - Corrente no indutor (i_{Ll})	75

Figura 6.8 - Temperatura da junção do MOSFET de canal N ($T_{J,N}$)	76
Figura 6.9 - Potência dissipada no MOSFET de canal N ($p_{diss,N}$) e P ($p_{diss,P}$)	76
Figura 6.10 - MRK23 vs. LTspice – Tensão de saída (v_s)	77
Figura 6.11 - MRK23 vs. LTspice – Corrente no indutor (i_{LI})	77
Figura 6.12 - Temperatura da junção ($T_{J,N}$) e encapsulamento ($T_{C,N}$) do NMOS.	78
Figura 6.13 - Temperatura da junção ($T_{J,P}$) e encapsulamento ($T_{C,P}$) do PMOS.	78
Figura 6.14 - Circuito regulador de tensão linear.	81
Figura 6.15 - Relação i_{DS} vs. v_{DS}	84
Figura 6.16 - Relação i_{DS} vs. v_{GS}	84
Figura 6.17 - Tensão de saída do regulador (v_2)	89
Figura 6.18 - Tensão de saída do amplificador operacional do circuito regulador de tensão (v_1)	90
Figura 6.19 - Potência dissipada no MOSFET (p_{diss})	91
Figura 6.20 - Temperatura da junção do MOSFET (T_J)	91
Figura 6.21 - MRK23 vs. LTspice – Tensão de saída (v_2)	92
Figura 6.22 - Corrente <i>drain-source</i> do MOSFET (i_{DS})	92
Figura 6.23 - Temperatura da junção (T_J) e encapsulamento (T_C) do MOSFET.	93

Lista de tabelas

Tabela 2.1 - Equivalências entre variáveis térmicas e elétricas.....	12
Tabela 6.1 - Parâmetros do modelo dos transístores.....	64
Tabela 6.2 - Componentes da rede junction-case.....	66
Tabela 6.3 - Componentes da rede case-ambient.....	67
Tabela 6.4 - Resultados da simulação do circuito representado na Figura 6.1 (Amplificador de áudio). Ganhos de eficiência (m = 10).	79
Tabela 6.5 - Resultados da simulação do circuito representado na Figura 6.1 (Amplificador de áudio). Valores do erro quadrático médio normalizado (m = 10).	80
Tabela 6.6 - Parâmetros do modelo do transístor.....	84
Tabela 6.7 - Componentes da rede junction-case.....	85
Tabela 6.8 - Componentes da rede case-ambient.....	85
Tabela 6.9 - Resultados da simulação do circuito representado na Figura 6.14 (Regulador de tensão). Ganhos de eficiência (m = 10).	93
Tabela 6.10 - Resultados da simulação do circuito representado na Figura 6.14 (Regulador de tensão). Valores do erro quadrático médio normalizado (m = 10).	94

Lista de siglas e acrónimos

AM	Amplitude Modulation
BDF	Backward Differentiation Formula
BSIM	Berkeley Short-channel IGFET Model
CPU	Central Processing Unit
DAE	Differential Algebraic Equations
DC	Direct Current
ERK	Explicit Runge-Kutta
FEA	Finite Element Analysis
FET	Field Effect Transistor
GAN	Gallium Nitride
GARK	General Additive Runge-Kutta
IGFET	Insulated Gate Field Effect Transistor
IRK	Implicit Runge-Kutta
LDMOS	Laterally Diffused Metal Oxide Semiconductor
MOS	Metal Oxide Semiconductor
MOSFET	Metal Oxide Semiconductor Field Effect Transistor
MRK	Multi-rate Runge-Kutta
NMOS	N-channel Metal-Oxide Semiconductor
NMSE	Normalized Mean Squared Error
ODE	Ordinary Differential Equations
PCB	Printed Circuit Board
PMOS	P-channel Metal-Oxide Semiconductor
PSPICE	Personal Simulation Program with Integrated Circuit Emphasis
RC	Resistor Capacitor
RF	Radio Frequency
SO	Small Outline
SPICE	Simulation Program with Integrated Circuit Emphasis

1. Introdução

1.1. Motivação

À medida que a tecnologia evolui, existe uma maior demanda para componentes eletrónicos com menor dimensão e maior potência. Esta combinação leva a que os componentes tenham uma maior tendência para atingir temperaturas elevadas no seu período de funcionamento. Alguns destes componentes, ao aquecerem, alteram o seu comportamento, podendo alterar o desempenho e funcionamento do circuito onde estão inseridos. Para além de alterar o desempenho de um componente, o excesso de temperatura reduz a sua vida útil e, em certos casos, pode mesmo levar a situações extremas, como a quebra de ligação de solda do componente à placa de circuito impresso (PCB) [1]. Um componente que é altamente dependente da temperatura é o transístor de efeito de campo metal-óxido-semicondutor (MOSFET) de potência, onde a sua corrente e a tensão de limiar variam significativamente com o aumento da temperatura. Para estes componentes é necessário tomar a temperatura em consideração no estágio de desenvolvimento do circuito, de forma a se poder prever estes acontecimentos e remediá-los ou reduzi-los ao máximo. Tal pode ser feito através da simulação eletrotérmica do componente e do circuito onde este está inserido.

A simulação eletrotérmica combina a simulação elétrica e térmica. Para simular os efeitos térmicos de um componente é necessário conhecer a temperatura em vários pontos do mesmo em todo o seu período de funcionamento. Geralmente não é possível conhecer com exatidão esta temperatura. Uma solução frequentemente adotada é a estimação da temperatura através de um modelo de propagação térmica [1-4]. Este modelo pode ser desenvolvido através de uma rede térmica que é composta por um circuito com resistências e condensadores cujo objetivo é modelar a propagação de calor, quer no interior do componente quer no dissipador externo [2], [5-8]. O modelo elétrico do componente comunica com o modelo de propagação térmica, para este posteriormente devolver a estimação da temperatura na junção do componente. O ritmo de evolução temporal das variáveis térmicas costuma ser distinto do ritmo de evolução das variáveis elétricas do circuito. Normalmente, a maior parte das variáveis térmicas têm um ritmo de evolução bastante inferior ao das variáveis elétricas.

Os simuladores disponíveis para uso, quer se tratem de simuladores comerciais ou de acesso livre (gratuitos), utilizam métodos numéricos convencionais baseados na abordagem do *Simulation Program with Integrated Circuit Emphasis* (SPICE) nas suas simulações, como é o exemplo do método Trapezoidal ou do método Gear-2 [9], [10]. Estes métodos utilizam a mesma medida de passo para calcular todas as variáveis físicas do circuito. Assim, os métodos numéricos convencionais não são eficientes para a simulação eletrotérmica, uma vez que ao utilizarem uma única medida de passo, esta medida terá de respeitar as variáveis com ritmo de evolução superior. Consequentemente, é desperdiçado esforço computacional na computação das variáveis mais lentas e o tempo de simulação é prolongado desnecessariamente. Quanto mais complexo for o modelo de propagação térmica, maior será o esforço computacional desperdiçado. Conclui-se assim que a simulação eletrotérmica utilizando métodos numéricos convencionais é ineficiente. De forma a tentar reduzir o esforço computacional desperdiçado foram considerados os métodos multi-ritmo. Estes métodos foram originalmente concebidos e testados para simular circuitos complexos [11-13]. Os métodos multi-ritmo utilizam duas medidas de passo distintas, onde uma medida de passo (curta) está associada às variáveis mais rápidas e outra (longa) às variáveis mais lentas. A complexidade destes métodos é superior em comparação com os métodos convencionais, mas como as variáveis rápidas e lentas são tratadas de forma diferente, o esforço computacional desperdiçado é minimizado, tornando assim a simulação eletrotérmica mais eficiente.

1.2. Objetivos

Na secção anterior foi indicada a motivação para o trabalho descrito nesta dissertação. Foi referido que a simulação eletrotérmica é necessária para circuitos que contenham componentes que aqueçam significativamente durante o seu período de funcionamento, e cujo comportamento se altera com a variação da temperatura. Nesta simulação as variáveis elétricas e térmicas do circuito têm um ritmo de evolução diferente, pelo que a simulação através dos métodos convencionais é ineficiente, uma vez que estes utilizam apenas uma medida de passo para todas as variáveis. Para tentar reduzir esta ineficiência foram testados métodos multi-ritmo que utilizam duas medidas de passo distintas para calcular as variáveis físicas do circuito. O trabalho desenvolvido nesta dissertação é composto por dois principais objetivos que passam por: (i) obter um modelo de MOSFETs de baixa complexidade, mas com precisão suficiente, e que tome em consideração a temperatura dinâmica do

componente; (ii) testar uma técnica de simulação numérica eficiente para circuitos com ritmos de evolução dispares. Para atingir estes objetivos é necessário passar pelas seguintes etapas:

- Obter uma visão geral dos diversos modelos eletrotérmicos propostos na literatura para dispositivos semicondutores de potência, nomeadamente para os MOSFETs de potência;
- Analisar o funcionamento de circuitos que contenham componentes cujo desempenho dependa fortemente da temperatura, de forma a identificar e caracterizar o seu comportamento multi-ritmo, tendo em consideração as disparidades existentes entre os ritmos de evolução temporal das suas variáveis de estado elétricas e térmicas;
- Obter uma visão geral das ferramentas de simulação existentes, a fim de examinar as principais características dos métodos de simulação em que estas se baseiam;
- Implementar métodos numéricos multi-ritmo capazes de simular de forma eficiente circuitos que contenham variáveis de estado com diferentes ritmos de evolução;
- Testar a eficiência dos métodos numéricos multi-ritmo, aplicando-os a exemplos ilustrativos de aplicação e comparando os respetivos resultados com os obtidos através do uso de ferramentas de simulação disponíveis em simuladores comerciais e de acesso livre (gratuitos).

1.3. Sumário

Após este breve capítulo introdutório, o Capítulo 2 apresenta resumidamente a modelação eletrotérmica de componentes, nomeadamente de MOSFETs e a metodologia utilizada para modelar a propagação de calor em materiais homogéneos e heterogéneos. O capítulo começa por explicar a necessidade da modelação eletrotérmica de componentes e por indicar algumas implicações que a temperatura tem no funcionamento destes. Em seguida, é feita uma introdução aos simuladores SPICE. São abordados os modelos simples de MOSFET para simulação eletrotérmica disponíveis na literatura, sendo também apresentado o modelo do MOSFET utilizado nesta dissertação. Por fim, são descritos os modelos de propagação térmica em materiais, disponíveis na literatura.

O Capítulo 3 apresenta o modelo matemático de um circuito eletrónico genérico. São descritos os passos necessários para descrever o problema numericamente no formato *Differential Algebraic Equations* (DAE) e no formato *Ordinary Differential Equations*

(ODE). Quer um, quer outro, podem ser vistos matematicamente como problemas de valor inicial.

O Capítulo 4 é dedicado à resolução numérica de problemas de valor inicial. O capítulo fornece uma visão geral sobre as características dos métodos. É explicado o conceito de ordem e estabilidade dos métodos numéricos e são descritas as implicações que estas características têm no desempenho dos métodos. É também explicado o que são problemas *STIFF* e como estes estão relacionados com a medida de passo do método. De seguida, são apresentados alguns métodos de passo único de várias ordens e número de etapas. São também apresentados alguns métodos de passo múltiplo, nomeadamente os utilizados em simuladores SPICE. Estes são vistos como os métodos padrão para a resolução numérica de problemas de valor inicial. No final são descritos dois métodos para a resolução numérica de sistemas de equações não lineares.

O Capítulo 5 apresenta os métodos multi-ritmo. De início é referida a aplicação e utilidade que estes métodos podem ter em certos circuitos com mais de que um ritmo de evolução, como é o caso dos circuitos que contém blocos analógicos, digitais, RF, entre outros. Depois é referida a simulação eletrotérmica, como caso de potencial aplicação destes métodos, uma vez que a temperatura em certos pontos tende a variar mais lentamente que as variáveis elétricas do circuito. É assim realçada a diferença entre circuitos com apenas um ritmo de evolução e circuitos com vários ritmos de evolução e, conseqüentemente, a necessidade de haver um método que consiga calcular de forma eficiente a solução numérica desse tipo de circuitos. São, desta forma, descritos os esquemas multi-ritmo que separam as variáveis de estado de um circuito em variáveis lentas e variáveis rápidas. Por fim, são descritos os métodos de Runge-Kutta multi-ritmo.

O Capítulo 6 apresenta os resultados de simulação de dois circuitos que contêm MOSFETs de potência. Os resultados de cada circuito estão separados em diferentes secções. Em cada secção é inicialmente apresentado o modelo elétrico do circuito nos formatos DAE e ODE, de forma a se obterem as respetivas variáveis de estado e de excitação. De seguida, é descrito o modelo térmico do circuito, também nos formatos DAE e ODE. Aqui são descritas as redes térmicas do modelo, a sua configuração e valores dos componentes utilizados nas mesmas. Fica assim possível identificar as variáveis latentes (lentas) e ativas (rápidas) do circuito. De seguida são apresentados os resultados numéricos das simulações feitas com os métodos SPICE convencionais e com o método multi-ritmo, onde são ilustrados os sinais mais

importantes. Por fim, é feita a comparação entre os resultados obtidos com os métodos convencionais e com o método multi-ritmo MRK23. Os aspetos a ter em consideração nesta comparação foram o tempo de simulação (esforço computacional) e a precisão dos resultados.

Por fim, o Capítulo 7 conclui esta dissertação resumindo as suas realizações mais relevantes e apontando algumas direções de trabalho futuro como continuação desta pesquisa.

2. Modelação eletrotérmica

2.1. Introdução

Os componentes eletrónicos são geralmente descritos com uma temperatura de operação máxima, que, quando excedida, pode comprometer o desempenho e funcionamento do componente e do circuito onde este esteja inserido. Quando esta temperatura é excedida, o componente deixa de se comportar de acordo com o funcionamento esperado e descrito pelo fabricante, tal acontecendo por diversas razões. Uma delas reside no facto das propriedades dos materiais constituintes do componente sofrerem alterações quando submetidos a temperaturas elevadas. Este excesso de temperatura leva a stress mecânico no componente, o que pode afetar as suas ligações internas e as do componente à placa de circuito impresso, nomeadamente as ligações de solda [1]. Para além disso, o efeito da temperatura elevada provoca também alterações nas difusões semicondutoras, podendo alterar de forma permanente o comportamento dos componentes eletrónicos baseados em semicondutores [14]. Assim, a temperatura tem um impacto na vida útil do componente, verificando-se que quantos mais forem os ciclos de temperatura máxima excedida menor será a sua vida útil. Por exemplo, o funcionamento do MOSFET é altamente dependente da temperatura. No caso do aumento drástico da temperatura, as perdas de condução de um MOSFET podem duplicar. Quando a tensão *gate-source*, v_{GS} , é elevada, o aumento drástico de temperatura faz com que a resistência *drain-source*, RDS_{on} , aumente bastante, podendo duplicar, ou mais, o seu valor [2]. Quando o MOSFET se encontra a funcionar em regime de comutação e com temperaturas elevadas, a dissipação de calor na região do canal é elevada, levando assim a perdas de condução maiores. O aumento da temperatura num MOSFET pode também causar a comutação inesperada do transístor para o estado ON, tal acontecendo devido ao facto da tensão de limiar diminuir à medida que a temperatura aumenta [2], tal como ilustrado na Figura 2.1.

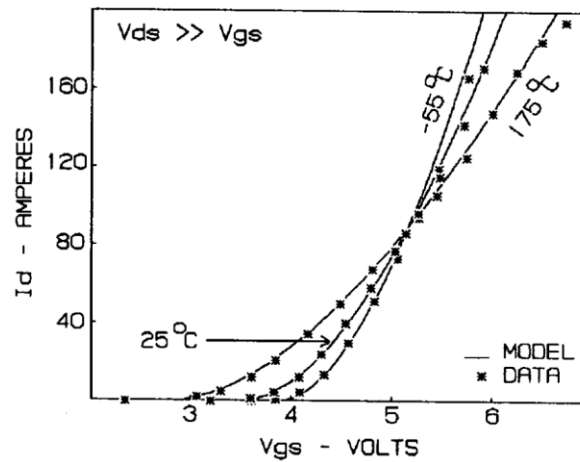


Figura 2.1 - Relação i_{DS} versus v_{GS} para as temperaturas -55°C , 25°C e 175°C [15].

Cada tipo de componente reage de forma diferente a temperaturas elevadas. Existem componentes desenvolvidos com capacidade de suportar potências de operação elevadas, enquanto outros toleram menos o aumento da temperatura de operação quando estes operam com níveis de potência inadequados ao componente, pois são geralmente destinados para aplicações de baixa potência e, por conseguinte, de menor geração de calor.

Os componentes de potência normalmente geram muito calor dentro do seu encapsulamento. À medida que a tecnologia evolui existe uma maior procura por componentes de menor dimensão e que consigam operar com maiores potências, o que resulta na geração de maior quantidade de calor dentro do encapsulamento. Este calor afeta o funcionamento dos componentes e, conseqüentemente, o circuito eletrónico pode ter um desempenho diferente do projetado caso o efeito térmico não seja considerado.

Atualmente, praticamente todos os circuitos eletrónicos são desenvolvidos com a ajuda de simuladores, pois estes permitem estimar o comportamento de componentes e circuitos com bastante precisão. Cada componente num simulador é descrito através de um modelo, podendo este ser desenvolvido tendo em consideração dois compromissos: nível de precisão dos resultados e complexidade do modelo. Estes compromissos são realizados tendo em consideração a aplicação e a precisão requerida do componente.

O SPICE é um programa de simulação de circuitos eletrónicos *open-source*, tendo sido apresentado pela primeira vez em 1973 [16]. Este programa tornou-se rapidamente popular porque incluía os modelos e a análise necessária para projetar circuitos eletrónicos e era robusto e rápido o suficiente para a tecnologia da sua época. O simulador SPICE serviu de base e inspiração para a criação de vários simuladores comerciais. As versões comerciais

mais proeminentes incluem o HSPICE e o *Personal Simulation Program with Integrated Circuit Emphasis* (PSPICE). O PSPICE foi a origem de muitos dos simuladores desenvolvidos posteriormente [17], [18].

O programa SPICE prevê as características elétricas de um circuito eletrónico. Para isto, este tem de efetuar diversos passos e etapas, conforme ilustrado na Figura 2.2. A cada iteração temporal (passo temporal), as grandezas elétricas do circuito são aproximadas com métodos de integração numérica. De seguida são realizadas uma série de iterações de Newton para determinar a solução no instante temporal atual. É feita uma verificação da convergência nesse instante de tempo e de seguida é guardada a solução. O programa continua neste ciclo até todas as grandezas elétricas em todos os instantes temporais serem obtidas [19].

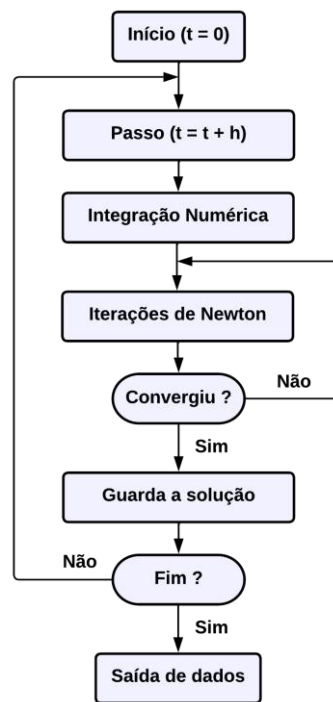


Figura 2.2 - Fluxograma de uma simulação SPICE.

Os modelos de cada componente são responsáveis por descrever eletricamente o seu comportamento em função dos potenciais dos seus terminais. Uma vez que a temperatura é um fator que altera o comportamento dos componentes, esta tem de ser tida em consideração no modelo. A temperatura é geralmente um parâmetro dos modelos e pode ser considerada de duas formas diferentes, resultando em dois tipos de modelos distintos. Os modelos isotérmicos consideram a temperatura como sendo constante, sendo esta definida antes do início da simulação, já os modelos eletrotérmicos consideram a temperatura como um

parâmetro dinâmico do modelo, ou seja, esta varia de acordo com o funcionamento simulado e, portanto, pode variar de instante temporal em instante temporal. A simulação eletrotérmica é especialmente importante em circuitos de potência ou que dissipem potências elevadas, uma vez que a potência é dissipada em forma de calor no circuito e componentes.

Para que o modelo eletrotérmico possa considerar a temperatura de funcionamento a que o componente se encontra num dado instante temporal da simulação, é necessário um modelo de propagação térmica que estime a temperatura de junção do componente. Estes dois modelos trabalham em conjunto para descrever da melhor forma o comportamento do componente.

A simulação utilizando um modelo eletrotérmico será sempre mais precisa do que utilizando um modelo isotérmico, especialmente quando a temperatura do componente varia significativamente ao longo da simulação. Um modelo eletrotérmico pode utilizar uma variedade de métodos para modelação térmica, por exemplo, utilizar métodos numéricos ou métodos mais rápidos e de menor complexidade, como a rede térmica (circuito elétrico) baseada em redes com configuração em filtro (Cauer) ou configuração em tanque (Foster) [2].

A rede térmica é utilizada para modelar os fluxos de energia térmica provenientes da estrutura física do componente, sendo utilizadas secções resistência-condensador (RC) para caracterizar cada camada física da estrutura. A tensão em cada nó representa a temperatura na face do material correspondente e a corrente representa a potência térmica, tal como será visto na secção seguinte. A rede térmica é única para cada componente, uma vez que as camadas físicas (materiais) de cada componente têm diferentes dimensões, formas e podem ser formadas por diferentes materiais.

Os MOSFETs são bastante utilizados em muitas aplicações eletrónicas, por exemplo, inversores de potência utilizados em sistemas solares, fontes de alimentação comutadas utilizadas em muitas fontes de alimentação de portáteis e telemóveis, controladores eletrónicos de velocidade utilizados em modelismo, etc.

A modelação eletrotérmica é necessária para os MOSFETs que estejam a funcionar em regime de potência, pois a modelação isotérmica deste componente pode levar a projetos deficientes. Os modelos do MOSFET atuais oferecem boa correlação entre o comportamento do circuito simulado e o seu comportamento real, mas estes costumam ser de complexidade

elevada. Desta forma, e no âmbito deste trabalho, é necessário formular um modelo mais simples, que consiga emular o comportamento do componente com relativa precisão e repetibilidade em regimes de temperatura elevada.

2.2. Modelo eletrotérmico genérico

O modelo de um transístor para além de ser caracterizado pela sua complexidade e precisão de resultados, pode também ser caracterizado pela forma como toma em consideração a temperatura. Do ponto de vista térmico, um modelo de um transístor pode ser caracterizado como sendo isotérmico ou eletrotérmico, tal como referido anteriormente. Num modelo isotérmico a temperatura é estática, ou seja, após ser definida antes da simulação, esta não varia ao longo do tempo de simulação. Já um modelo eletrotérmico toma em consideração a temperatura do transístor dinamicamente, alterando assim o funcionamento e desempenho do transístor caso a sua temperatura se altere durante o tempo de simulação (operação). A distinção entre estes modelos não é feita ao nível das suas equações. Se as equações forem mais complexas, apenas indica que o nível do modelo e a precisão dos resultados é superior. A Figura 2.3 ilustra a diferença entre os dois tipos de modelos aplicados a MOSFETs. Como se pode ver na figura, o modelo eletrotérmico possui mais dois terminais, um para a indicação da potência dissipada instantânea e outro para a temperatura da junção, que é utilizada nas expressões do modelo.

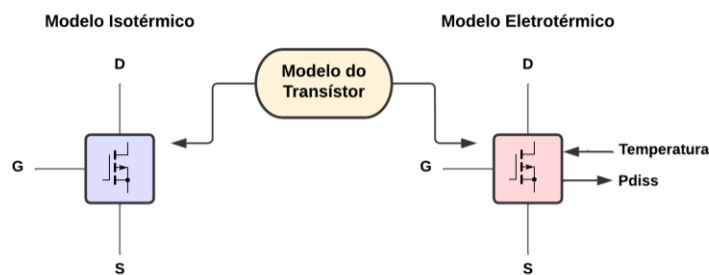


Figura 2.3 - Tipos de modelos de transístores.

A temperatura dinâmica do transístor não é conhecida à partida e, portanto, é necessário estimar a temperatura em cada instante para a introduzir no modelo elétrico do componente. Esta estimação de temperatura pode ser feita através de um modelo de propagação térmica, que é normalmente composto por uma rede térmica, tal como referido anteriormente. A rede térmica utiliza a potência dissipada no transístor e devolve a estimativa da sua temperatura de junção. A Figura 2.4 demonstra um diagrama deste processo.

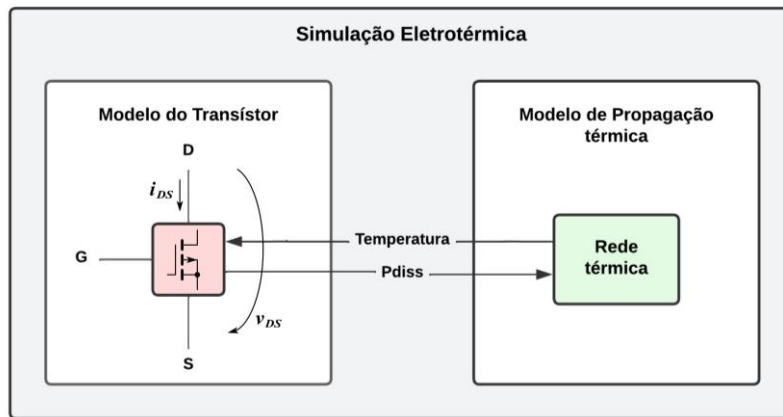

Figura 2.4 - Blocos simulação eletrotérmica.

TABELA 2.1

EQUIVALÊNCIAS ENTRE VARIÁVEIS TÉRMICAS E ELÉTRICAS.

Variáveis térmicas		Variáveis elétricas	
Temperatura	$T_j [^{\circ}C]$	Tensão	$U [V]$
Potência elétrica	$P(t) [W]$	Corrente	$I [A]$
Resistência térmica	$R_{TH} [K/W]$	Resistência	$R [V/A]$
Capacidade térmica	$C_{TH} [Ws/K]$	Capacidade	$C [As/V]$

A modelação de propagação térmica correlaciona as variáveis físicas do transistor com variáveis elétricas no modelo, esta equivalência entre variáveis pode ser observada na Tabela 2.1.

A potência dissipada num modelo eletrotérmico de um MOSFET pode ser calculada através da corrente i_{DS} e da tensão v_{DS} do transistor da seguinte forma

$$P_{diss}(t) = i_{DS}(t) \cdot v_{DS}(t). \quad (2.1)$$

Componentes de potência tendem a aquecer bastante, mesmo em funcionamento normal, sendo o seu desempenho (características) bastante afetado com o aumento da temperatura. No caso dos MOSFETs, a mobilidade e tensão de limiar são os parâmetros com o impacto mais significativo no desempenho do transistor, apesar de existirem outros com alguma relevância (por exemplo, resistência do *drain* e várias capacidades internas) [20]. Para se poder utilizar a temperatura dinamicamente em simuladores é necessário acoplar o modelo eletrotérmico com o modelo de propagação térmica. Na Figura 2.5 é possível observar-se um exemplo deste acoplamento, onde o circuito à esquerda representa o modelo elétrico de

um MOSFET e o circuito à direita o modelo de propagação térmica do dissipador de calor interno e externo (acoplado ao encapsulamento).

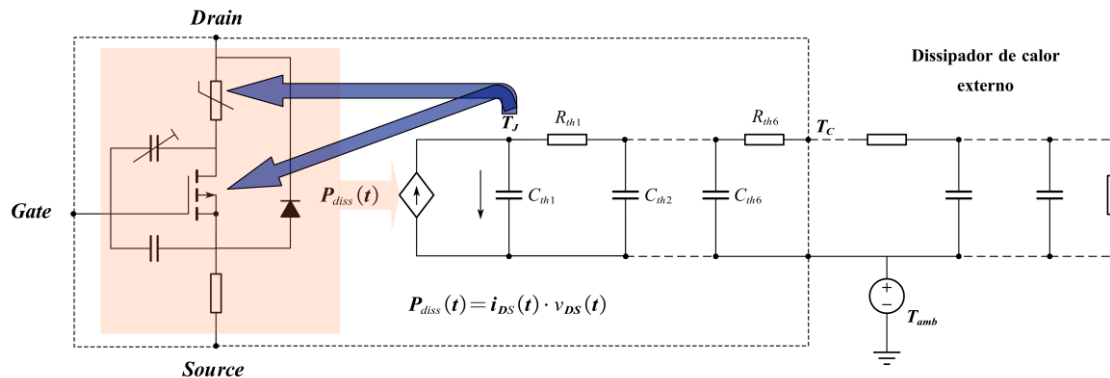


Figura 2.5 - Modelo eletrotérmico (esquerda) e modelo de propagação térmica (direita) [2].

Para interligar ambos os modelos, a potência instantânea do MOSFET tem de ser considerada no modelo de propagação térmica. O componente equivalente desta potência é dado por uma fonte de corrente. A potência é calculada tendo em consideração a corrente e tensão aos terminais do MOSFET, tal como definido em (2.1). A temperatura de junção do MOSFET é estimada no modelo de propagação térmica e é posteriormente inserida nas expressões dos parâmetros do modelo elétrico do MOSFET. A temperatura ambiente é definida pela fonte de tensão T_{amb} e a temperatura do encapsulamento do MOSFET é também estimada através do modelo de propagação térmica, sendo esta definida por T_c .

No artigo [2] é ilustrada a diferença entre a utilização de um modelo isotérmico e eletrotérmico de um MOSFET. Para provar a diferença nos resultados foi realizado um teste com um MOSFET em curto-circuito por um período de 17 μs , onde os resultados para o modelo isotérmico mostram que a corrente i_{DS} é constante ao longo do tempo de curto-circuito, enquanto que os resultados com o modelo eletrotérmico mostram que a corrente i_{DS} diminui durante o curto-circuito, acompanhando o resultado experimental. A Figura 2.6 ilustra estes resultados. Os resultados do modelo eletrotérmico são consistentes com os resultados medidos, enquanto que os obtidos com o modelo isotérmico mostram que a diferença nas correntes simulada e medida ultrapassa os 200 A no final de tempo do curto-circuito. Esta discrepância pode levar a erros graves na conceção de circuitos de potência uma vez que os resultados obtidos no simulador utilizando apenas modelos isotérmicos podem ser bastante diferentes dos resultados reais.

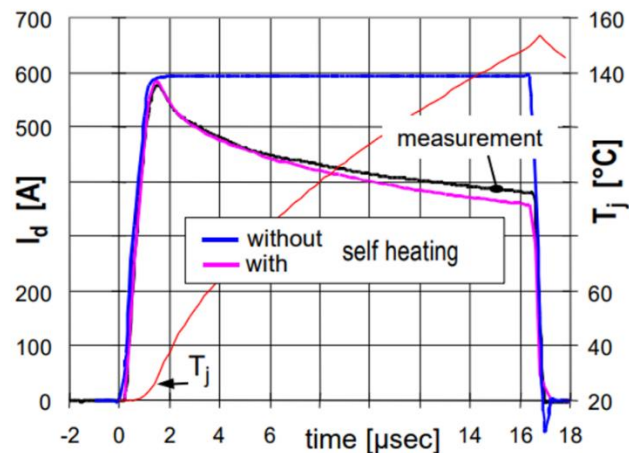


Figura 2.6 - Simulação e funcionamento real de um MOSFET de potência em curto-circuito [2].

2.3. Modelação de MOSFETs

De forma a se poder estimar o impacto dos efeitos térmicos dos MOSFETs no funcionamento dos circuitos é necessário utilizar na simulação um modelo eletrotérmico dos transístores. O modelo da parte elétrica do transístor tem de comunicar com o modelo da parte térmica do MOSFET para que o comportamento do componente seja estimado com precisão.

2.3.1. Efeitos térmicos e a sua modelação

Os modelos SPICE dos transístores MOS podem ser divididos em três gerações (primeira, segunda e terceira geração). A primeira geração abrange os modelos de MOSFETs de nível 1, 2 e 3, sendo os modelos das restantes gerações mais complexos e com bastantes mais parâmetros [17]. Por exemplo, o modelo de nível 39 *Berkeley Short-channel IGFET Model* (BSIM2) possui 47 parâmetros e faz parte da segunda geração e o modelo de nível 47 BSIM3 possui 69 parâmetros e faz parte da terceira geração, enquanto que o modelo de nível 1 possui apenas 20 parâmetros [21].

O modelo elétrico de um MOSFET é capaz de caracterizar as dependências térmicas do mesmo, mas para tal a temperatura da junção deste componente tem de ser estimada e inserida neste modelo. Para simulações mais básicas é apenas inserida a temperatura inicial, aquela a que o MOSFET se encontra no início da simulação, fazendo com que o modelo seja isotérmico, pois a temperatura é sempre a mesma durante todos os instantes temporais de simulação. Para simulações onde se exige uma maior precisão, a temperatura de junção do MOSFET tem de ser inserida no modelo elétrico em todos os instantes de tempo de simulação. É utilizado um modelo de propagação térmica que estima a temperatura da junção

em cada instante, sendo esta depois inserida no modelo elétrico, tornando-o num modelo eletrotérmico.

Do ponto de vista elétrico, os MOSFETs apresentam três zonas de funcionamento distintas, nomeadamente, zona de corte, zona de saturação e zona ativa. Em cada uma destas zonas o transístor tem um comportamento específico, apesar dos parâmetros do modelo serem fixos, a equação da corrente i_{DS} pode diferir para cada zona de funcionamento. O modelo do MOSFET pode ser definido por múltiplas equações ou de forma contínua através de uma única equação. O modelo por partes (função definida por ramos) utiliza uma equação específica para definir a corrente em função das tensões aplicadas em cada zona de funcionamento, enquanto que o modelo contínuo utiliza uma única equação para definir a corrente em todas as zonas de funcionamento. Em ambas as abordagens de simulação, os parâmetros utilizados nas várias equações podem ser dependentes da temperatura.

Uma vez que o funcionamento dos transístores é altamente dependente da temperatura, a sua simulação em SPICE torna-se complexa e requer a combinação de simulação elétrica com simulação de propagação térmica quando se pretende estimar o funcionamento com precisão. Tal abordagem resulta num procedimento complexo de medição das características e extração de parâmetros para o modelo do transístor.

Para fins de uma simulação SPICE mais precisa, os MOSFETs são representados como macro modelos, o que inclui o modelo elétrico do MOSFET e elementos adicionais que descrevem os efeitos térmicos e de potência elevada [15]. Estes modelos estimam a redução da corrente de *drain* com a temperatura, quando a tensão *gate-source*, v_{GS} , é elevada, devido à redução da mobilidade com o aquecimento no transístor. No entanto, quando a tensão v_{GS} é reduzida existe uma zona de funcionamento onde a corrente i_{DS} aumenta com a temperatura do transístor. Esta é uma zona onde a extração de parâmetros para o modelo é complexa. Em alguns casos esta pode ser a zona de funcionamento do transístor no circuito, e caso os efeitos térmicos aqui falados não sejam considerados durante a simulação do circuito, o comportamento real do MOSFET no circuito vai ser diferente do simulado. Isto pode causar problemas graves no circuito. No artigo [22] é proposto um modelo que consegue simular este comportamento.

Os resultados experimentais apresentados no artigo [22] mostram diferenças entre os resultados simulados com o modelo isotérmico e os reais. Para acomodar este resultado foi

adicionada uma fonte de corrente em paralelo com o MOSFET, tal como é mostrado na Figura 2.7.

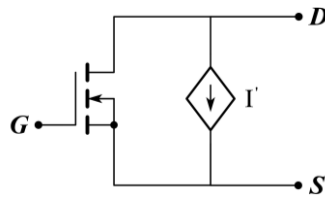


Figura 2.7 - Modelo MOSFET modificado [22].

Para ter em consideração o aumento da corrente de *drain* com a temperatura de junção do transístor, a corrente do MOSFET foi alterada através da equação

$$i_{DS} = i_{DS}(T_0) \left(\frac{T}{T_0} \right)^B, \quad (2.2)$$

onde B é um coeficiente utilizado para *fitting* da equação, T é a temperatura a que o transístor se encontra e T_0 é a temperatura de referência (23°C). A temperatura T é calculada através de uma rede térmica como a apresentada na Figura 2.5, mas apenas com uma secção RC, ou seja apenas uma componente R_{th} e C_{th} . A abordagem apresentada em [22] é de fácil execução, mas a precisão do modelo modificado é baixa, pois os resultados obtidos utilizando este modelo têm um erro na ordem de 15% para a gama de temperaturas entre 20°C e 150°C.

Não só em MOSFETs, mas também em transístores de efeito de campo (FET) do tipo Nitreto de Gálio (GaN), a temperatura de junção tem impactos significativos no desempenho elétrico destes componentes. O modelo apresentado em [4], apesar de ser relativamente simples, incorpora os impactos da temperatura de junção através de um subcircuito que modifica a tensão na *gate* do FET. A rede térmica utiliza a potência dissipada do FET e fornece o valor da temperatura da junção para o modelo elétrico. Apesar da temperatura da junção ser um parâmetro de entrada em modelos eletrotérmicos, onde as equações do modelo dependem desta temperatura, neste, a temperatura dinâmica do transístor não é considerada como uma entrada e, em vez disso, é utilizado um subcircuito que modifica a tensão na *gate* de acordo com a temperatura da junção.

O subcircuito de modificação de tensão da *gate* é composto por díodos, interruptores e fontes de tensão. A Figura 2.8 ilustra os subcircuitos e os vários estados do circuito consoante o

estado de funcionamento do transistor. A tensão da *gate* efetiva do FET pode ser definida pela subtração da tensão proveniente do subcircuito de modificação da tensão da *gate* com a tensão fornecida pelo *driver* da *gate*. No subcircuito de modificação da tensão da *gate* são utilizados 3 díodos para assegurar que a corrente flua no sentido esperado. Os interruptores *S1* e *S2* são ideais e comutados em certos momentos durante o período de condução do FET, incluindo nos instantes de comutação. A comutação “ON/OFF” dos interruptores é controlada pela tensão *drain-source*, v_{DS} , do FET. De forma a minimizar os impactos no desempenho do componente durante a simulação SPICE, foram utilizados díodos também ideais, ou seja, com tensão de arranque nula.

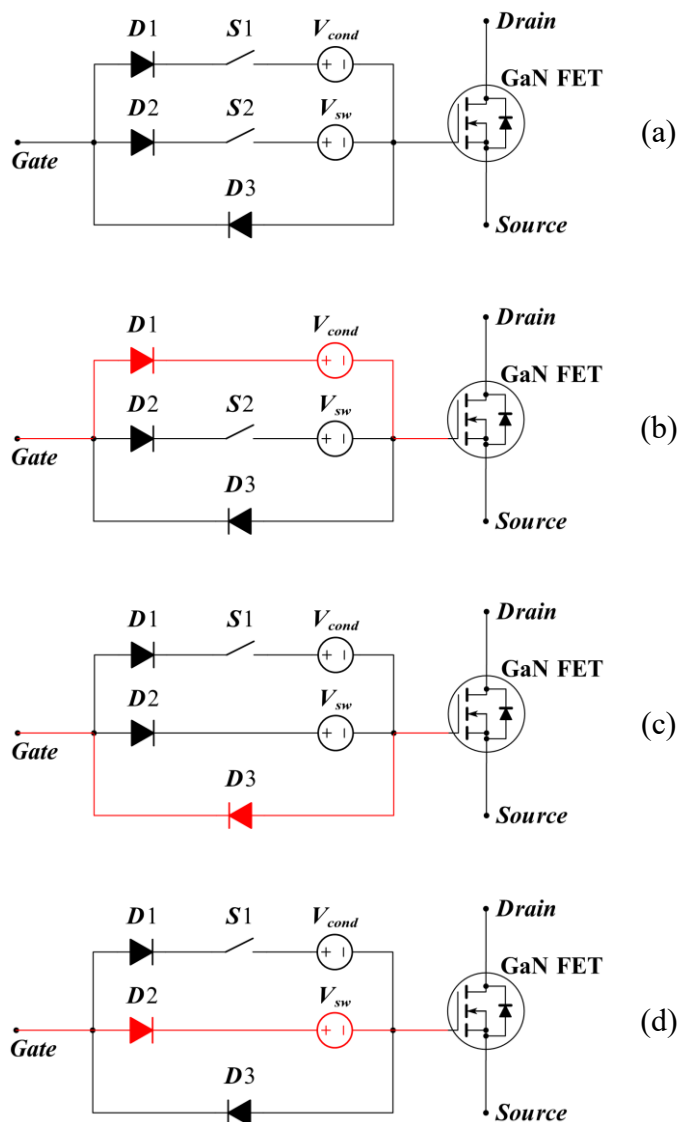


Figura 2.8 - (a) Subcircuito de modificação da tensão na *gate* e (b), (c) e (d) princípios de operação.

O funcionamento deste modelo, ou seja, o estado dos interruptores do subcircuitos de modificação da tensão na gate, é baseado na resistência de *drain-source* quando o MOSFET está a conduzir, RDS_{on} . A resistência RDS_{on} tem uma relação quase linear com a temperatura da junção, ou seja, quanto maior for a temperatura, maior é esta resistência. Para além desta relação, RDS_{on} também é uma função da tensão da *gate-source*, v_{GS} , mesmo quando a temperatura de simulação é fixa. Assim sendo, é possível inserir os impactos da temperatura através da tensão na *gate*. Para isso é utilizada uma fonte de tensão adicional, denominada V_{cond} , controlada pela temperatura da junção durante o período de condução do FET. O valor de V_{cond} é determinado por uma tabela que reflete a relação entre RDS_{on} e v_{GS} .

Quando o transístor se encontra em comutação, o transiente de comutação para o estado OFF é quase independente da temperatura de junção. Por outro lado, a derivada $\partial v_{DS}/\partial t$ durante a comutação para ON tem uma relação quase linear com a temperatura da junção. Desta forma, quando o FET passa para o estado OFF, a *gate* do MOSFET é ligada diretamente ao *driver* da *gate* através do díodo $D3$. Durante a transição para ON a derivada de v_{DS} é determinada por

$$\frac{\partial v_{DS}}{\partial t} = -\frac{v_{GS,ON} - V_{plateau}}{R_G C_{GD}}, \quad (2.3)$$

onde v_{DS} é a tensão entre o *drain* e a *source*, $v_{GS,ON}$ é a tensão v_{GS} necessária para comutar o FET para ON, $V_{plateau}$ é a tensão de *Miller Plateau*, R_G é a resistência da *gate* e C_{GD} é a capacidade entre a *gate* e o *drain* do componente. A tensão de *Miller Plateau* indica a tensão na *gate* do MOSFET para quando a carga Q_{GD} está a carregar ou descarregar por meio da capacidade C_{GD} dependendo se o MOSFET está a ligar ou desligar. Esta tensão é constante durante o período de carga ou descarga de Q_{GD} [20]. Consequentemente, para a comutação de OFF para ON é utilizada a fonte adicional V_{sw} no subcircuito de modificação da tensão da *gate*. Esta fonte apenas está em funcionamento durante os transientes de comutação para ON, o que modifica o v_{GS} efetivo e altera $\partial v_{DS}/\partial t$. O valor de V_{sw} é determinado por uma tabela que reflete a relação entre V_{sw} com a temperatura.

O modelo apresentado em [4] é mais uma abordagem na modelação eletrotérmica. Neste, é apenas considerada a resistência RDS_{on} como parâmetro dependente da temperatura e, portanto, útil em aplicações de comutação, não sendo por isso possível usar noutros tipos de

utilização, nomeadamente em aplicações analógicas. Em todo o caso, é fácil de desenvolver e de ser implementado.

O modelo do MOSFET utilizado neste documento é semelhante ao modelo de MOSFET de nível 1 [17], [23], mas desprezando as capacidades, resistências e díodos presentes neste modelo de forma a simplificar o modelo. As equações utilizadas no modelo foram baseadas no modelo apresentado pela Motorola para transístores LDMOS RF de alta potência [24]. O modelo simplificado é composto apenas por uma fonte de corrente tal como é possível observar-se na Figura 2.9.

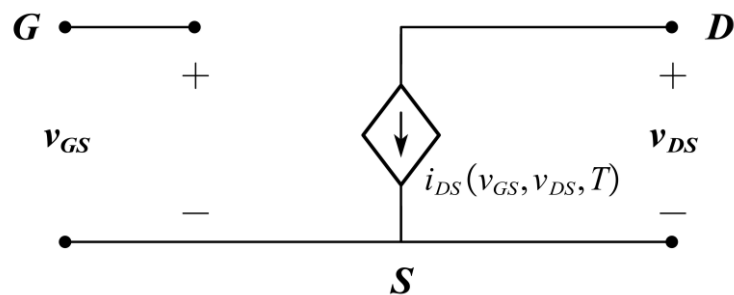


Figura 2.9 - Modelo simplificado de um MOSFET.

2.3.2. Modelo por partes (função definida por ramos)

Para o âmbito deste trabalho, a precisão dos resultados não é o aspeto mais importante. Para provar o conceito dos algoritmos multi-ritmo, o modelo de MOSFET de nível 1 é simples e apresenta precisão suficiente, tendo como consequência um impacto positivo no tempo de simulação. Por exemplo, o tempo de simulação de circuitos de comutação digital quando o modelo de nível 1 do MOSFET é utilizado pode ser cerca de metade do que o verificado quando se utiliza o modelo de nível 2 [21]. O modelo utilizado neste trabalho é baseado no modelo de nível 1, tendo este sido o escolhido pois para o objetivo da dissertação este apresenta resultados com precisão suficiente e é de reduzida complexidade, o que garante tempos de simulação adequados, principalmente em implementações não compiladas (por exemplo, em Matlab).

Na Figura 2.10 está ilustrado o circuito equivalente genérico de um MOSFET. Como se pode observar nesta figura, o circuito inclui uma fonte de corrente dependente das tensões nos nós e da temperatura para a modelação da condução no canal, capacidades não-lineares dependentes da tensão nos nós, resistências associadas aos terminais e à condução do canal e díodos de junção do *body* à região de *drain* e *source*. Todos os elementos dependem das tensões terminais do componente, sendo alguns destes componentes dependentes da

temperatura. As expressões que definem cada um dos componentes do circuito equivalente, e que se apresentam de seguida, são relativas ao modelo de nível 1 do MOSFET [23].

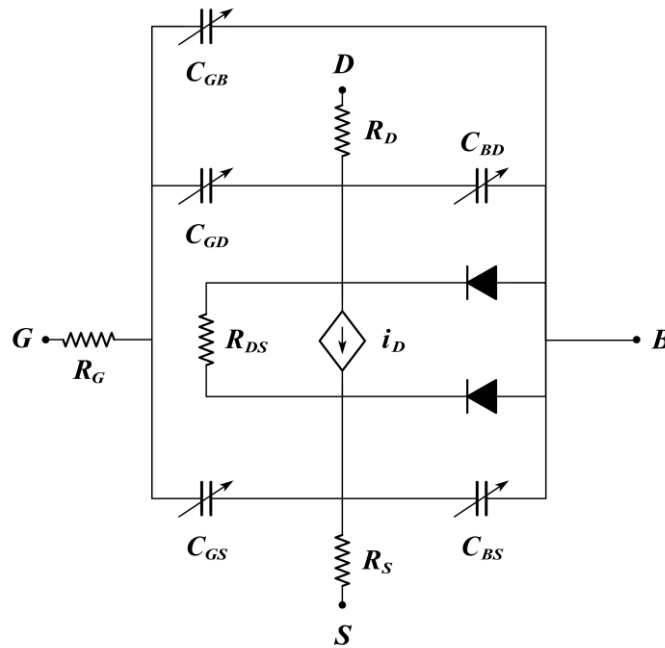


Figura 2.10 - Circuito equivalente de um MOSFET [23].

A corrente *drain-source*, i_{DS} , de um transístor NMOS pode ser expressa por

$$i_{DS} = \begin{cases} 0 & , v_{GS} \leq v_{TH} \\ KP \frac{W_{eff}}{L_{eff}} (1 + LAMBDA \cdot v_{DS}) \left(v_{GS} - v_{TH} - \frac{v_{DS}}{2} \right) v_{DS} & , v_{DS} < v_{GS} - v_{TH} \wedge v_{GS} > v_{TH} \\ \frac{KP}{2} \frac{W_{eff}}{L_{eff}} (1 + LAMBDA \cdot v_{DS}) (v_{GS} - v_{TH})^2 & , v_{DS} \geq v_{GS} - v_{TH} \wedge v_{GS} > v_{TH} \end{cases} \quad (2.4)$$

onde a região de corte é definida pela zona $v_{GS} \leq v_{TH}$, a região linear pela zona $v_{DS} < v_{GS} - v_{TH} \wedge v_{GS} > v_{TH}$ e a região de saturação pela zona $v_{DS} \geq v_{GS} - v_{TH} \wedge v_{GS} > v_{TH}$. O parâmetro KP corresponde à transcondutância do processo, W_{eff} à largura efetiva do canal, L_{eff} ao comprimento efetivo do canal, $LAMBDA$ é o parâmetro de modulação do comprimento do canal, v_{GS} corresponde à tensão *gate-source* e v_{DS} à tensão *drain-source*. A tensão de limiar v_{TH} é dada por

$$v_{TH} = v_{T0} + GAMMA \left(\sqrt{2PHI - v_{BS}} - \sqrt{2PHI} \right), \quad (2.5)$$

onde o parâmetro v_{BS} corresponde à tensão entre o *body* do transístor e a *source* e PHI é o potencial superficial. A transcondutância do processo KP é dada por

$$KP^{T_j} = KP \left(\frac{T_j}{T_{nom}} \right)^{\frac{3}{2}}, \quad (2.6)$$

e o potencial superficial PHI é expresso por

$$PHI^{T_j} = \frac{T_j}{T_{nom}} PHI + \frac{2K \cdot T_j}{q} \ln \left(\frac{\eta_i^{T_{nom}}}{\eta_i^{T_j}} \right). \quad (2.7)$$

A temperatura nominal T_{nom} corresponde à temperatura de extração dos parâmetros indicados acima. Como se pode verificar pelas expressões apresentadas, todas as grandezas variam com a temperatura T_j (temperatura de funcionamento) considerada na simulação do circuito que utiliza o MOSFET [23]. O parâmetro K corresponde à constante de Boltzmann, q à carga elétrica e η_i à concentração intrínseca de portadores do semiconductor. Como i_{DS} e v_{TH} dependem de KP e de PHI , estas grandezas vão também depender da temperatura de funcionamento, ou seja, i_{DS} e v_{TH} variam com a temperatura T_j .

A capacidade de depleção C_{BD} , dada por

$$C_{BD}^{T_j} = C_{BD} \left[\frac{1 + Mj \left[4 \cdot 10^{-4} (T_j - T_{REF}) - \gamma^{T_j} \right]}{1 + Mj \left[4 \cdot 10^{-4} (T_{nom} - T_{REF}) - \gamma^{T_j} \right]} \right], \quad (2.8)$$

e C_{BS} , dada por

$$C_{BS}^{T_j} = C_{BS} \left[\frac{1 + Mj \left[4 \cdot 10^{-4} (T_j - T_{REF}) - \gamma^{T_j} \right]}{1 + Mj \left[4 \cdot 10^{-4} (T_{nom} - T_{REF}) - \gamma^{T_j} \right]} \right], \quad (2.9)$$

variam também com a temperatura T_j . A capacidade C_{BD} descreve a capacidade entre o *body* do transístor e o *drain*, a capacidade C_{BS} descreve a capacidade entre o *body* do transístor e a *source* do mesmo [23]. Os parâmetros Mj e T_{REF} são utilizados para *fitting* e γ corresponde à função do potencial de junção.

O comprimento de canal é um parâmetro físico do MOSFET. Sempre que o comprimento do canal for menor que os 4 mm, os valores reais da corrente i_{DS} serão inferiores aos valores simulados quando utilizadas as equações em (2.4) [17]. O modelo apresentado acima e descrito pela equação (2.4) é caracterizado como sendo por partes, uma vez que existe uma equação diferente para a corrente i_{DS} em cada zona de funcionamento do transístor.

Nas últimas décadas, os modelos de nível 1 foram utilizados em simulações eletrotérmicas [6], [7], [15], [22], [25], onde a temperatura da junção é um parâmetro dinâmico do modelo do MOSFET.

2.3.3. Modelo contínuo

O objetivo do trabalho é mostrar a validade e eficiência dos métodos multi-ritmo para estimar o comportamento dos circuitos quando o efeito da temperatura é considerado durante a simulação (temperatura dinâmica) e, por isso, os modelos utilizados para os transístores não necessitam de ser extremamente avançados (complexos).

A fonte de corrente apresentada na Figura 2.9 define a corrente de *drain-source*, i_{DS} , sendo dada pela expressão [26]

$$i_{DS} = \frac{\beta}{2} \left[v_C + \ln(e^{v_C} + e^{-v_C}) \right] \tanh(\alpha v_{DS}), \quad (2.10)$$

onde β à temperatura nominal T_{nom} é dado por

$$\beta(T = T_{nom}) = \beta_0 = KP \frac{W_{eff}}{L_{eff}}, \quad (2.11)$$

α é um coeficiente utilizado para *fitting* (por exemplo, modulação de canal) da equação i_{DS} e v_{DS} corresponde à tensão *drain-source* do MOSFET. O parâmetro v_C é dado pela seguinte expressão

$$v_C = K_T (v_{GS} - v_T), \quad (2.12)$$

onde K_T é outro coeficiente utilizado para *fitting*, v_{GS} corresponde à tensão *gate-source* e v_T é a tensão de limiar do MOSFET à temperatura T_J , ou seja, $v_T = v_{TH}(T = T_J)$. O parâmetro β e v_T são os parâmetros que dependem da temperatura da junção. O parâmetro β é dado pela expressão

$$\beta = \beta_0 \left(\frac{T_{nom}}{T_J} \right)^{\beta_f}, \quad (2.13)$$

onde β_0 é dado por (2.11), β_f é coeficiente utilizado para *fitting* da equação β , T_{nom} corresponde à temperatura nominal e T_J à temperatura da junção do MOSFET. A tensão de limiar v_T é dada pela expressão

$$v_T = v_{TH} - m_{TH} (T_J - T_{nom}), \quad (2.14)$$

onde m_{TH} representa o coeficiente de primeira ordem da expansão em série da tensão de limiar com a temperatura.

2.4. Modelos de propagação térmica

De forma a estimar a temperatura de junção do componente ao longo do período de simulação é necessário descrever as propriedades térmicas do mesmo através de um modelo de propagação térmica. A combinação do modelo de propagação térmica com o modelo elétrico do componente permite estimar as várias temperaturas estruturais de um MOSFET. O modelo de propagação térmica é geralmente descrito por uma rede térmica.

A propagação de calor num sistema pode ocorrer de três maneiras distintas, nomeadamente, por convecção, radiação térmica ou condução térmica [2]. Os componentes eletrónicos geralmente apenas apresentam condução térmica, podendo esta ser descrita para um material isotrópico homogéneo pela equação

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{c \cdot \rho}{\lambda_{th}} \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (2.15)$$

onde λ_{th} representa a condutividade térmica, c a capacidade térmica, ρ a densidade do material e T a temperatura. A coordenada na direção da propagação do calor é definida por x .

Os processos de condução de calor podem ser modelados por um circuito equivalente semelhante ao de linhas de transmissão, o que permite descrever os mecanismos de propagação típicos das ondas. Considerando a condução de calor em meios sólidos, não existe comparação direta para o termo da indutância elétrica L , nem para as perdas no dielétrico, modeladas pela condutância G . Isto pode ser descrito fazendo $L = 0$ e $G = 0$ no circuito de linhas de transmissão, resultando no circuito equivalente representado na Figura 2.11.

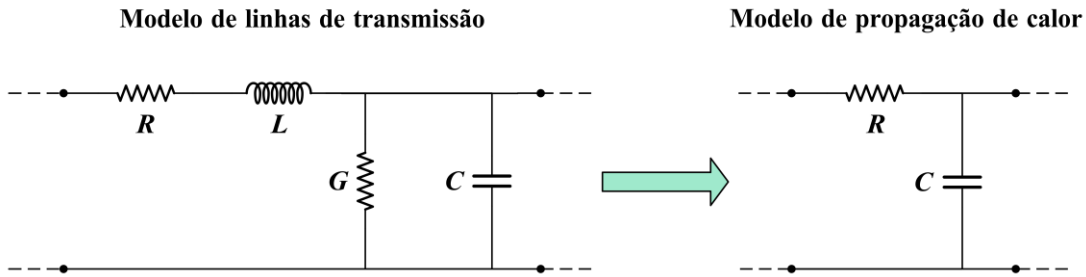


Figura 2.11 - Modelo de linhas de transmissão (esquerda) e modelo de propagação térmica (direita).

O circuito térmico equivalente da Figura 2.11 é obtido a partir da equação (2.15). Este consiste na interligação de elementos resistivos (resistências) e capacitivos (condensadores). Para a caracterização exata das propriedades de um componente, a resistência térmica e capacidade térmica por unidade de comprimento necessitam de ser consideradas, mas para a simplicidade do modelo é possível combinar elementos de volume único em conjuntos de elementos agrupados, tal como representado na Figura 2.12. Estes elementos correspondem apenas a um tipo de material, para vários materiais são necessárias várias secções RC equivalentes.

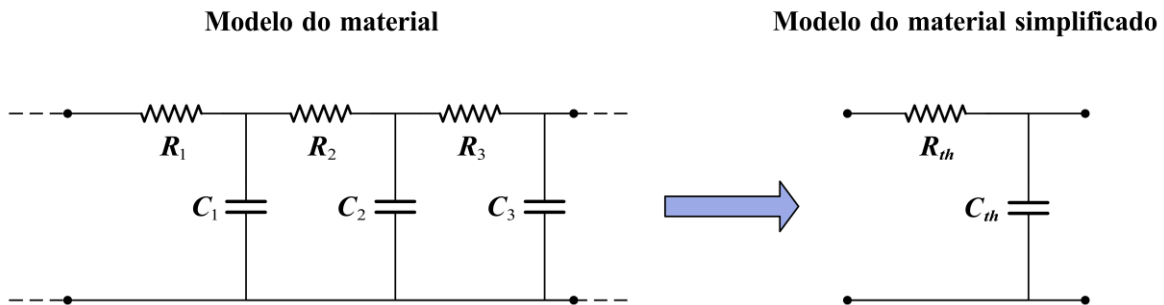


Figura 2.12 - Modelo de propagação térmica equivalente.

Os parâmetros para o circuito equivalente podem ser derivados diretamente da estrutura do elemento quando este exhibe fluxos de calor unidimensional. Na Figura 2.13 é possível observar a estrutura de um componente onde cada camada física é representada por um conjunto de resistências e capacidades térmicas. Dissipadores de calor acoplados a este componente também podem ser modulados da mesma forma. Foi demonstrado que a segmentação da estrutura em volumes parciais é possível cumprindo os pontos apresentados em [5].

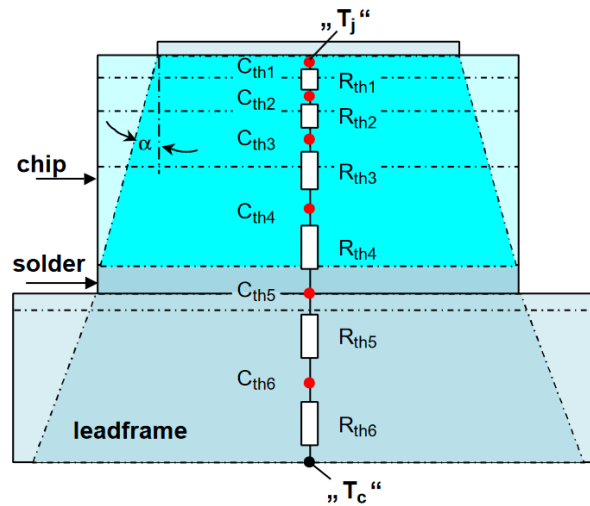


Figura 2.13 - Distribuição da estrutura física multimaterial de um componente [2].

A Figura 2.13 representa a estrutura física multimaterial de um componente, onde para cada material existe um conjunto de elementos térmicos (R_{th} e C_{th}). Os materiais da parte semicondutora (*chip*), da solda (*solder*) e estrutura do *chip* (*leadframe*) são alguns exemplos de materiais que tem características de condução de calor diferentes, sendo, por isso, modulados por elementos térmicos com valores distintos.

As componentes de resistência e capacidade térmica são definidas pelas equações [2]

$$R_{th} = \frac{d}{\lambda_{th} \cdot A} \quad (2.16)$$

e

$$C_{th} = c \cdot \rho \cdot d \cdot A, \quad (2.17)$$

respetivamente. Em (2.16) e (2.17), d representa a espessura do volume parcial e A a secção transversal do material na direção de condução de calor.

Para certos encapsulamentos, como encapsulamentos *small outline* (SO), os caminhos de propagação de calor podem ser múltiplos e complexos e, conseqüentemente, a estimação dos valores dos componentes térmicos pode ter de ser realizada de outra forma [2]. Uma alternativa passa por calcular o fluxo de calor através do método dos elementos finitos (FEA) [2]. Esta solução tende a ser muito complexa e morosa, uma vez que é necessário dividir toda a estrutura em elementos únicos tridimensionais, o que em certos casos pode abranger dezenas ou centenas de milhares de elementos.

Um procedimento mais simples para obter os valores térmicos é através da parametrização (ajuste) destes elementos com base em medições do componente físico. O procedimento prático é feito através do aquecimento do componente com uma potência dissipada definida até este atingir uma temperatura estável e constante. A resposta térmica pode ser determinada após se reduzir a potência de dissipação para zero. Desta forma consegue-se obter a curva de arrefecimento $T_j(t)$ que permite extrair os valores de R_{th} e C_{th} do modelo térmico [2].

Para se poder utilizar os resultados da medição térmica num simulador, é necessário desenvolver um modelo térmico. Esse modelo pode ser baseado numa rede térmica RC equivalente.

Existem várias topologias para redes térmicas, mas de entre estas, existem 2 que se destacam: a rede com configuração em filtro, que também pode ser designada de Cauer, e em tanque, que também é conhecida por Foster.

A rede com configuração em filtro descreve corretamente a distribuição de temperatura interna do componente e permite uma boa correlação entre os elementos equivalente e os elementos da estrutura física [2]. Uma representação possível desta rede pode ser a observada na Figura 2.14.

Uma representação da rede com configuração em tanque é a observada na Figura 2.15. A vantagem da rede em tanque em relação à rede em filtro é o facto da resposta temporal ser matematicamente mais simples e especificada para os diversos elementos térmicos.

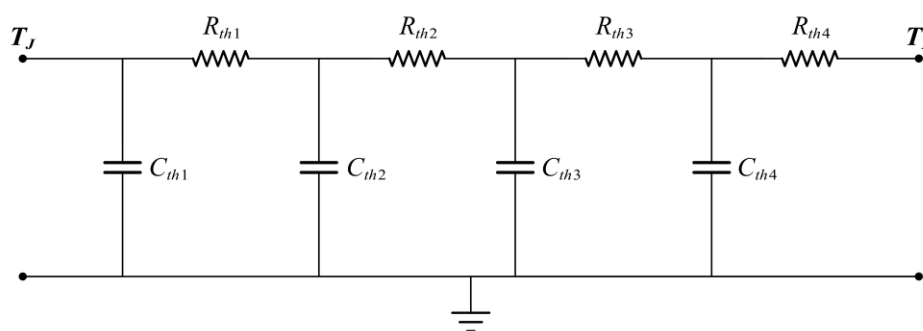


Figura 2.14 - Rede térmica com configuração em filtro (Cauer) [5].

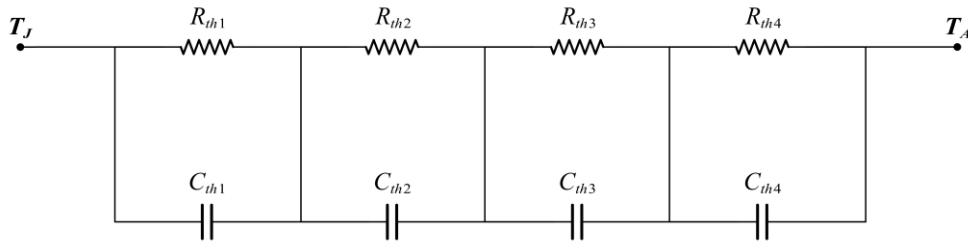


Figura 2.15 - Rede térmica com configuração em tanque (Foster) [5].

Para componentes de grande dimensão e de potência elevada, a modelação do fluxo de calor unidimensional pode ser insuficiente. Uma distribuição de temperatura não homogénea causada pelo fluxo de calor tridimensional desde a junção até ao encapsulamento pode causar uma distribuição não homogénea das propriedades elétricas ao longo de todo o componente. Nestes casos é necessário dividir a estrutura do componente em vários volumes parciais em três dimensões, como o modelo apresentado em [8].

MOSFETs de grande dimensão são geralmente fabricados com transístores em paralelo e para este caso, a condução de calor tridimensional é importante ser considerada. Para isso é utilizada uma rede térmica que permite a descrição do fluxo de calor tridimensional. Esta rede é desenvolvida através da subdivisão da estrutura do componente em pequenas células tridimensionais, conforme apresentado na Figura 2.16. Esta divisão é feita tendo em consideração as propriedades térmicas dos materiais, geometrias e dimensões que compõem o componente.

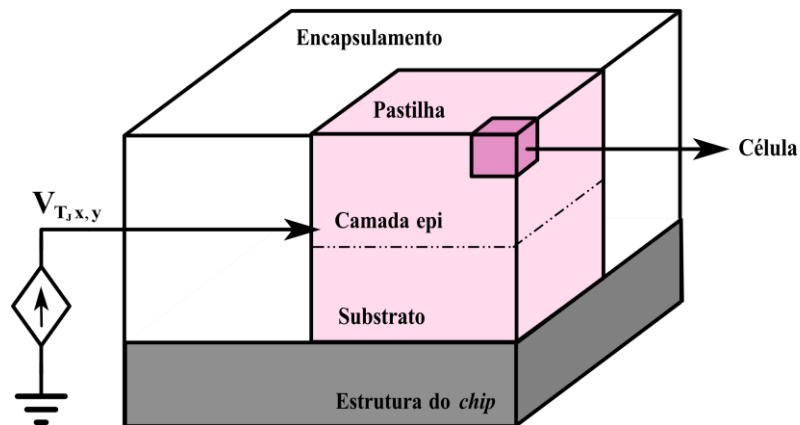


Figura 2.16 - Divisão da estrutura física em três dimensões [8].

3. Modelo matemático genérico de um circuito eletrónico

3.1. Exemplo de um problema de valor inicial

Um circuito eletrónico pode ser descrito como um sistema com sinais de entrada (excitação) e de saída (resposta). As variáveis de entrada estão normalmente associadas a fontes excitadoras independentes e as variáveis de saída estão associadas às tensões nos nós e correntes nos ramos do circuito. Para qualquer que seja o circuito este pode ser definido por

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{S}[\mathbf{x}(t)], \quad (3.1)$$

onde $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), \dots, x_N(t)]^T$ e $\mathbf{y}(t) = [y_1(t), \dots, y_N(t)]^T$ são os sinais de excitação e respostas, respetivamente. O operador \mathbf{S} pode ser visto como um conjunto de operações necessárias ao sistema para que este consiga representar as saídas a partir das entradas.

Um sistema pode ser caracterizado por ser linear, no caso de conter apenas dispositivos lineares, ou não linear, no caso de conter pelo menos um dispositivo não linear. Um sistema linear pode ser resolvido analiticamente de forma a determinar a solução exata do problema, o mesmo não acontece num sistema não linear. Num sistema não linear a solução tem, regra geral, de ser obtida numericamente não sendo possível obter a solução exata, apenas a solução aproximada.

Para além da linearidade, um sistema pode ainda ser descrito pela sua capacidade de memória. Um sistema diz-se sem memória se a sua saída em qualquer instante t_1 for apenas função da entrada nesse mesmo instante, ou seja, se $\mathbf{y}(t_1)$ depender apenas de $\mathbf{x}(t_1)$. Se $\mathbf{y}(t_1)$ depender de valores de entrada não só no instante t_1 , mas também em instantes anteriores (t_0, \dots), então o sistema diz-se com memória.

A capacidade de memória de um sistema é traduzida por um conjunto de variáveis denominadas de variáveis de estado pois estas armazenam o resultado da integração de instantes passados. Num circuito, esta capacidade de memória está associada ao armazenamento de carga elétrica (condensadores) e de fluxo magnético (indutores). Consequentemente, qualquer que seja o condensador ou indutor num circuito eletrónico vai dar origem a uma variável de estado.

O comportamento de um circuito eletrónico pode ser definido por um conjunto de equações diferenciais com um único argumento t (tempo), do qual dependem um conjunto de tensões, correntes, cargas elétricas e fluxos magnéticos [10].

Este sistema de equações resulta da aplicação das leis de Kirchhoff ao circuito, onde normalmente se utiliza a análise nodal (lei de correntes em cada nó). Na Figura 3.1 está representado um exemplo básico de um circuito não linear.

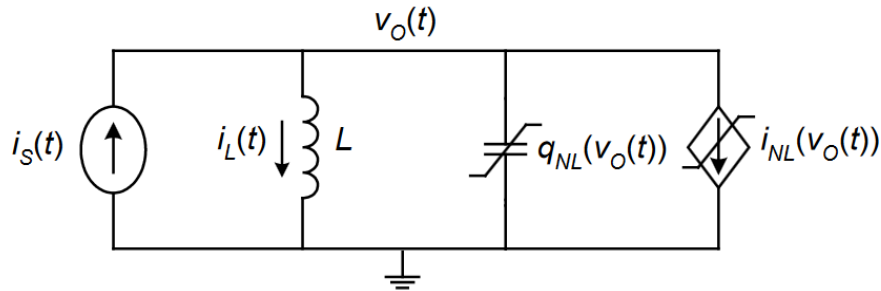


Figura 3.1 - Exemplo básico de um circuito não linear.

Este circuito contém dois componentes não lineares

$$i_{NL}(v_o(t)) = I_0 \tanh(\alpha v_o(t)) \quad (3.2)$$

$$q_{NL}(v_o(t)) = \tau_F i_{NL}(v_o(t)), \quad (3.3)$$

cujos modelos representam aproximações para o comportamento de certos dispositivos semicondutores.

Aplicando a análise nodal ao circuito, assim como a relação tensão-corrente no ramo da indutância, é possível escrever as equações que descrevem o comportamento do mesmo

$$\begin{cases} i_s(t) = i_L(t) + \frac{d}{dt} q_{NL}(v_o(t)) + i_{NL}(v_o(t)) \\ v_o(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} \end{cases} \quad (3.4)$$

O sistema de equações que descreve o circuito pode, em geral, ser expresso em duas formas clássicas distintas. Pode ser expresso através de um sistema de equações algébrico diferenciais (DAE) ou através de um sistema de equações diferenciais ordinário (ODE).

3.2. Problema descrito no formato DAE

Neste formato o sistema de equações algébrico diferenciais assume a forma

$$\mathbf{p}(\mathbf{y}(t)) + \frac{d}{dt} \mathbf{q}(\mathbf{y}(t)) = \mathbf{x}(t), \quad (3.5)$$

onde $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^N$ é o vetor com as variáveis de excitação, $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^N$ é o vetor com as variáveis de estado, $\mathbf{p}(\mathbf{y}(t))$ é a componente algébrica e $\mathbf{q}(\mathbf{y}(t))$ a componente dinâmica. A componente algébrica modela os elementos sem memória, lineares e/ou não lineares, como por exemplo resistências, fontes controladas, etc. A componente dinâmica modela os elementos com memória, lineares e/ou não lineares, como é o caso dos condensadores e indutores.

Tendo em consideração o circuito exemplo apresentado na Secção 3.1 é necessário identificar as variáveis de excitação do circuito para cada equação. Caso não exista uma para uma certa equação, $\mathbf{x}(t)$ toma o valor de '0'. Neste caso temos

$$\begin{cases} i_{NL}(v_o(t)) + i_L(t) + \frac{d}{dt} q_{NL}(v_o(t)) = i_s(t) \\ v_o(t) + \frac{d}{dt} (-L \cdot i_L(t)) = 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

Com as equações neste formato fica possível identificar as variáveis de estado e excitação do circuito, ou seja,

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_o(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix}, \quad (3.7)$$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_s(t) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$

O formato DAE separa os elementos na componente algébrica $\mathbf{p}(\mathbf{y})$ e na componente dinâmica $\mathbf{q}(\mathbf{y})$

$$\mathbf{p}(\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} i_{NL}(v_o(t)) + i_L(t) \\ v_o(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_{NL}(y_1) + y_2 \\ y_1 \end{bmatrix}, \quad (3.9)$$

$$\mathbf{q}(\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} q_{NL}(v_o(t)) \\ -L \cdot i_L(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{NL}(y_1) \\ -L \cdot y_2 \end{bmatrix}. \quad (3.10)$$

3.3. Problema descrito no formato ODE

O sistema DAE (3.5) pode ser descrito de outras formas. Se for aplicada a regra de diferenciação em cadeia ao termo dinâmico na parte esquerda da equação é possível obter

$$\frac{d\mathbf{q}(y)}{dy} \frac{d\mathbf{y}(t)}{dt} = \mathbf{x}(t) - \mathbf{p}(\mathbf{y}(t)) \quad (3.11)$$

que também pode ser escrito na forma

$$\mathbf{M}(\mathbf{y}(t)) \frac{d\mathbf{y}(t)}{dt} = \mathbf{x}(t) - \mathbf{p}(\mathbf{y}(t)), \quad (3.12)$$

onde $\mathbf{M}(\mathbf{y}(t))$ é normalmente denominada como *mass matrix*. Se esta matriz for invertível, o sistema DAE (3.12) pode então ser convertido num sistema de equações diferenciais ordinárias, ou seja, num sistema ODE com o formato

$$\frac{d\mathbf{y}(t)}{dt} = \mathbf{M}(\mathbf{y}(t))^{-1} (\mathbf{x}(t) - \mathbf{p}(\mathbf{y}(t))), \quad (3.13)$$

que também pode ser descrito através da sua forma clássica

$$\frac{d\mathbf{y}(t)}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)). \quad (3.14)$$

Quando $\mathbf{M}(\mathbf{y}(t))$ é singular, o sistema DAE não pode ser convertido no sistema ODE, mas na maior parte das vezes pode ser descrito por um conjunto de equações algébricas combinadas com um conjunto de equações diferenciais com o formato (3.14).

Sendo assim é possível concluir que alguns circuitos eletrónicos podem ser descritos tanto no formato ODE como no formato DAE. O circuito da Figura 3.1 pode ser descrito no formato ODE. Considerando o sistema (3.4), este pode ser reescrito como

$$\begin{cases} \frac{dq_{NL}(v_o)}{dv_o} \frac{dv_o(t)}{dt} = i_s(t) - i_{NL}(v_o(t)) - i_L(t) \\ L \frac{di_L(t)}{dt} = v_o(t) \end{cases} \quad (3.15)$$

ou então no formato de matriz matricial

$$\begin{bmatrix} \frac{dq_{NL}(v_o)}{dv_o} & 0 \\ 0 & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dv_o(t)}{dt} \\ \frac{di_L(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_s(t) - i_{NL}(v_o(t)) - i_L(t) \\ v_o(t) \end{bmatrix}. \quad (3.16)$$

Caso $dq_{NL}(v_o)/dv_o \neq 0$ então a matriz é não singular e o sistema pode ser descrito no formato ODE clássico (3.14), que neste caso resulta em

$$\begin{cases} \frac{dv_o(t)}{dt} = \left[\frac{dq_{NL}(v_o)}{dv_o} \right]^{-1} [i_s(t) - i_{NL}(v_o(t)) - i_L(t)] \\ \frac{di_L(t)}{dt} = \frac{1}{L} v_o(t) \end{cases}, \quad (3.17)$$

o qual pode ser reescrito na forma

$$\begin{cases} y_1' = \left[\frac{dq_{NL}(y_1)}{dv_o} \right]^{-1} [i_s(t) - i_{NL}(y_1(t)) - y_2(t)] \\ y_2' = \frac{1}{L} y_1(t) \end{cases}, \quad (3.18)$$

onde

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_o(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad (3.19)$$

é o vetor das variáveis de estado do circuito. Neste exemplo básico a função \mathbf{f} seria definida por

$$\mathbf{f}(y_1, y_2) = \left(\left[\frac{dq_{NL}(y_1)}{dv_o} \right]^{-1} [i_s(t) - i_{NL}(y_1) - y_2], \frac{1}{L} y_1 \right). \quad (3.20)$$

4. Resolução numérica de problemas de valor inicial

4.1. Introdução

A simulação de um circuito eletrónico pode ser realizada integrando passo-a-passo no tempo o sistema de equações que descreve o seu comportamento. Este método é genericamente aplicado por programas de simulação de circuitos baseados na filosofia do SPICE.

Para integrar o sistema de equações podem-se utilizar diversos métodos numéricos com características e aplicações diferentes. Estes determinam uma solução aproximada para o problema num conjunto de pontos (instantes), definidos pela sequência de passos temporais.

A medida de passo é um fator relevante no que toca ao erro (diferença entre a solução exata e a solução numérica). Quanto menor for a medida de passo menor é o erro, mas maior é o tempo de integração. Consequentemente, quanto maior foi a medida de passo maior é o erro e menor é o tempo de integração.

Existem duas classes de métodos numéricos de integração: os métodos de passo único e os métodos de passo múltiplo.

4.2. Ordem e estabilidade

A escolha do método numérico a ser utilizado para resolver um certo problema de valor inicial pode estar influenciada por duas características importantes, os quais afetam o desempenho e precisão do método. A ordem e estabilidade do método devem ser adequadas ao problema de valor inicial de forma a que este consiga convergir para a solução.

4.2.1. Ordem

A ordem de um método numérico traduz o grau de precisão dos resultados obtidos com este mesmo método. Esta precisão está relacionada com o erro, definido por

$$\text{erro} = \text{solução numérica} - \text{solução exata} , \quad (4.1)$$

onde para a mesma medida de passo h quanto maior for a ordem do método utilizado, menor é o erro obtido e logo mais preciso é o método.

A ordem de um método é definida com base no conceito de erro local [27-29] definido por

$$\text{erro local} \simeq C h^{p+1} = O(h^{p+1}), C \in \mathbb{R}, \quad (4.2)$$

onde p é a ordem do método, h é a medida do passo e C é uma constante.

A importância da ordem num método numérico é refletida no facto de serem necessários menos passos para resolver um problema de valor inicial com uma tolerância de erro predefinida, se se utilizar um método de ordem elevada. Com menos passos de simulação, a medida do passo poderá ser superior e o tempo de simulação poderá ser menor.

Ao escolher o método é necessário fazer um compromisso entre a precisão dos resultados e o esforço computacional. Isto porque quanto maior for a ordem do método mais complexo e pesado é o método do ponto de vista computacional.

4.2.2. Estabilidade

A precisão de um método numérico não está apenas relacionada com a ordem do método, pois mesmo com um método de ordem p elevada a solução numérica do método pode apresentar um erro elevado para alguns passos da simulação. Os erros acumulados em cada iteração podem levar a que os resultados disparem. Quanto mais intensificada for esta situação menos estável é o método.

A estabilidade de um método é quantificada através de uma região no plano complexo [27-29]. A estabilidade pode ser definida aplicando o método ao problema modelo definido por

$$\mathbf{y}' = \lambda \mathbf{y}, \quad \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad \text{Re}(\lambda) < 0, \quad (4.3)$$

onde é exigido que a sequência resultante \mathbf{y}_n convirja para 0 quando $n \rightarrow \infty$ e com a condição de $h\lambda$ ser mantido fixo. O conjunto de todos os valores de $h\lambda$ no plano complexo quando o método é absolutamente estável define a região de estabilidade do método [27-29].

A estabilidade do método reflete-se na medida de passo do método. Quando o método é pouco estável, a região de estabilidade é também reduzida e, conseqüentemente, a medida de passo tem de ser reduzida para o método convergir para uma solução com erro aceitável. Quando o método é muito estável, esta medida de passo pode apresentar valores superiores.

O facto de o método apresentar estabilidade elevada pode ser visto como uma vantagem. Para problemas que necessitem que o intervalo de integração seja elevado, é pretendido que o passo de integração do método seja elevado de forma a que o tempo de simulação não seja demasiado longo. Ao se utilizar um método pouco estável em conjunto com um passo elevado pode-se vir a obter uma solução com erro elevado.

A estabilidade não é apenas dependente do método e da medida de passo utilizada. Mesmo quando o erro obtido através de um método está muito abaixo de uma tolerância pré-definida, por vezes não é possível aumentar mais a medida de passo pois para certos problemas de valor inicial o método pode sair da estabilidade. Estes problemas são denominados de *STIFF* [27-29].

4.2.3. Problemas *STIFF*

Considerando um problema de valor inicial genérico com o formato

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)), \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0, \quad \mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^N, \quad t > t_0. \quad (4.4)$$

O problema é considerado *STIFF* [27-29] se existir uma grande discrepância entre o maior e o menor módulo dos valores próprios da matriz Jacobiana

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}}. \quad (4.5)$$

Os valores próprios são determinados através da expressão com o formato

$$\det(\mathbf{J} - \lambda \mathbf{I}) = 0, \quad (4.6)$$

onde λ representa o conjunto dos valores próprios de \mathbf{J} e \mathbf{I} é a matriz identidade.

Um limiar usual para considerar um problema como sendo *STIFF* é definido pela seguinte relação dos valores próprios de \mathbf{J}

$$\frac{\text{maior}|\lambda|}{\text{menor}|\lambda|} > 100. \quad (4.7)$$

4.3. Métodos de passo único

Os métodos de passo único calculam o valor da solução do passo seguinte utilizando apenas valores de solução do passo anterior.

4.3.1. Método de Euler explícito

Os métodos de Euler [27-29] são métodos numéricos muito simples e de complexidade reduzida e desta forma a precisão da solução obtida é reduzida.

O método de Euler explícito (progressivo) calcula a solução do problema de valor inicial do passo seguinte t_{n+1} através da solução do passo anterior t_n , da seguinte forma

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + h\mathbf{f}_n \quad (4.8)$$

em que

$$\mathbf{y}_{n+1} \approx \mathbf{y}(t_{n+1}), \quad \mathbf{y}_n \approx \mathbf{y}(t_n), \quad \mathbf{f}_n = \mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}_n), \quad (4.9)$$

onde \mathbf{y}_{n+1} é a solução do problema e h é a medida do passo.

É necessário saber a condição inicial $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$ para se obter a solução referente ao primeiro passo

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{y}_0 + h\mathbf{f}(t_0, \mathbf{y}_0). \quad (4.10)$$

A solução em cada um dos restantes passos depende diretamente da solução obtida no passo anterior.

4.3.2. Método de Euler implícito

O método Euler implícito (regressivo) calcula o valor da solução do problema de valor inicial do passo seguinte t_{n+1} , da seguinte forma

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + h\mathbf{f}_{n+1} \quad (4.11)$$

em que

$$\mathbf{y}_{n+1} \approx \mathbf{y}(t_{n+1}), \quad \mathbf{y}_n \approx \mathbf{y}(t_n), \quad \mathbf{f}_{n+1} = \mathbf{f}(t_{n+1}, \mathbf{y}_{n+1}). \quad (4.12)$$

Neste caso, como a solução depende de ela própria é necessário, em cada passo, resolver uma equação ou sistema de equações, em geral não lineares. Existem vários métodos para resolver equações ou sistemas de equações não lineares. Na Secção 4.5 são referidos o método do ponto fixo e o método de Newton.

Tal como no método de Euler explícito é necessário saber a condição inicial $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$ para se obter a solução referente ao primeiro passo

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{y}_0 + h\mathbf{f}(t_1, \mathbf{y}_1). \quad (4.13)$$

Este método requer mais esforço computacional que o método Euler explícito. No entanto, este é um método mais estável.

4.3.3. Métodos de Runge-Kutta

Os métodos mais simples para integrar problemas de valor inicial são os métodos de Euler (explícito e implícito). Existem, porém, outros métodos de passo único com características amplamente superiores aos métodos de Euler. Estes são denominados de métodos de Runge-Kutta.

Os métodos de Runge-Kutta [27-31] calculam a solução no instante seguinte tendo em consideração a derivada avaliada ao longo de todo o passo por várias etapas. Cada uma destas etapas vai ter um peso no cálculo da solução do problema para cada passo.

Considere-se o problema de valor inicial genérico

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)), \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0, \quad \mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^N, \quad t > t_0. \quad (4.14)$$

Os métodos de Runge-Kutta são definidos por

$$\begin{cases} \mathbf{k}_i = \mathbf{f}\left(t_n + c_i h, \mathbf{y}_n + h \sum_{j=1}^s a_{ij} \mathbf{k}_j\right), & i = 1, \dots, s \\ \mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + h \sum_{i=1}^s b_i \mathbf{k}_i \end{cases}, \quad (4.15)$$

onde s indica o número de etapas do método, c_i , a_{ij} e b_i são os coeficiente do método e \mathbf{k}_i representa os sucessivos declives de Runge-Kutta.

Para cada tipo de método de Runge-Kutta os parâmetros do método (c_i, a_{ij}, b_i) variam. O quadro de Butcher (b, A, c) permite representar e identificar os parâmetros do método. Este tem o formato

$$\begin{array}{c|ccc} c_1 & a_{11} & \cdots & a_{1s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_s & a_{s1} & \cdots & a_{ss} \\ \hline & b_1 & \cdots & b_s \end{array} \quad (4.16)$$

A quantidade de etapas s define a quantidade de sucessivos declives de Runge-Kutta, k_i . A seguir apresentam-se alguns exemplos de métodos de Runge-Kutta [27-31].

- **Euler Explícito**

Método de Runge-Kutta explícito de 1 etapa e ordem 1.

$$\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline & 1 \end{array} \quad (4.17)$$

$$\begin{cases} k_1 = \mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}_n) \\ \mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + h k_1 \end{cases} \quad (4.18)$$

- **Euler Implícito**

Método de Runge-Kutta implícito de 1 etapa e ordem 1.

$$\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline & 1 \end{array} \quad (4.19)$$

$$\begin{cases} k_1 = \mathbf{f}(t_{n+1}, \mathbf{y}_{n+1}) \\ \mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + h k_1 \end{cases} \quad (4.20)$$

- **Ponto Médio Implícito**

Método de Runge-Kutta implícito de 1 etapa e ordem 2.

$$\begin{array}{c|c} 1/2 & 1/2 \\ \hline & 1 \end{array} \quad (4.21)$$

$$\begin{cases} \mathbf{k}_1 = \mathbf{f}\left(t_n + \frac{1}{2}h, \mathbf{y}_n + \frac{1}{2}h\mathbf{k}_1\right) \\ \mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + h\mathbf{k}_1 \end{cases} \quad (4.22)$$

- **ERK2**

Método de Runge-Kutta explícito de 2 etapas e ordem 2.

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array} \quad (4.23)$$

$$\begin{cases} \mathbf{k}_1 = \mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}_n) \\ \mathbf{k}_2 = \mathbf{f}(t_n + h, \mathbf{y}_n + h\mathbf{k}_1) \\ \mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + h\left(\frac{1}{2}\mathbf{k}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{k}_2\right) \end{cases} \quad (4.24)$$

- **ERK3**

Método de Runge-Kutta explícito de 3 etapas e de ordem 3.

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 2/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ \hline & 1/4 & 0 & 3/4 \end{array} \quad (4.25)$$

$$\begin{cases} \mathbf{k}_1 = \mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}_n) \\ \mathbf{k}_2 = \mathbf{f}\left(t_n + \frac{1}{3}h, \mathbf{y}_n + \frac{1}{3}h\mathbf{k}_1\right) \\ \mathbf{k}_3 = \mathbf{f}\left(t_n + \frac{2}{3}h, \mathbf{y}_n + \frac{2}{3}h\mathbf{k}_2\right) \\ \mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + h\left(\frac{1}{4}\mathbf{k}_1 + \frac{3}{4}\mathbf{k}_3\right) \end{cases} \quad (4.26)$$

- **Radau IRK2**

Método de Runge-Kutta implícito de 2 etapas e ordem 3.

$$\begin{array}{c|cc}
 0 & 1/4 & 1/4 \\
 2/3 & 1/4 & 5/12 \\
 \hline
 & 1/4 & 3/4
 \end{array} \quad (4.27)$$

$$\begin{cases}
 \mathbf{k}_1 = \mathbf{f} \left(t_n, \mathbf{y}_n + \frac{1}{4}h\mathbf{k}_1 + \frac{1}{4}h\mathbf{k}_2 \right) \\
 \mathbf{k}_2 = \mathbf{f} \left(t_n + \frac{2}{3}h, \mathbf{y}_n + \frac{1}{4}h\mathbf{k}_1 + \frac{5}{12}h\mathbf{k}_2 \right) \\
 \mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + h \left(\frac{1}{4}\mathbf{k}_1 + \frac{3}{4}\mathbf{k}_2 \right)
 \end{cases} \quad (4.28)$$

4.3.4. Métodos de Runge-Kutta embutidos e controlo de passo

A medida de passo a utilizar nos métodos numéricos tem bastante impacto no desempenho dos mesmos. Quanto menor o passo melhor é a precisão, mas maior é o tempo de integração e vice-versa. No entanto, deve-se ter em atenção que um passo demasiado longo pode fazer com que o método perca a sua estabilidade. Para métodos de ordem superior é possível utilizar um passo maior.

Diante todas estas características existem métodos de Runge-Kutta com controlo de passo [10], [27-29], [32] ao longo da integração com o intuito de melhorar a eficiência e diminuir os custos computacionais do simulador. É adotada uma estratégia de controlo da medida de passo, de forma a alterar o seu tamanho em função do erro que se vai obtendo ao longo do intervalo de integração.

Poderão ser utilizados métodos de Runge-Kutta embutidos, onde se utiliza um segundo quadro de Butcher que contém coeficientes para calcular a estimativa do erro local. Este tem o formato

$$\begin{array}{c|ccc}
 c_1 & a_{11} & \cdots & a_{1s} \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 c_s & a_{s1} & \cdots & a_{ss} \\
 \hline
 & b_1 & \cdots & b_s \\
 \hline
 & \hat{b}_1 & \cdots & \hat{b}_s
 \end{array}, \quad (4.29)$$

onde substituindo os valores a_{ij} , b_i e c_i (do quadro de Butcher (4.29)) no sistema (4.15) obtém-se o modelo do método.

Os coeficientes \hat{b}_i são utilizados para calcular uma estimativa do erro local em cada passo. Este erro é calculado tendo em consideração os coeficientes de Runge-Kutta e a medida de passo h

$$erro = h \sum_{i=1}^s (b_i - \hat{b}_i) k_i. \quad (4.30)$$

Com o erro calculado é possível obter uma nova medida de passo. Para tal é necessário definir a tolerância admitida para o erro e o valor do fator de segurança. O cálculo da nova medida de passo tem o formato

$$h_{new} = fac \left(\frac{Tol}{\|erro\|} \right)^{\frac{1}{p+1}} h_{old}, \quad (4.31)$$

onde h_{new} representa a nova medida de passo, fac representa o fator de segurança, Tol representa a tolerância e h_{old} representa a medida de passo anterior. O fator de segurança tem normalmente um valor de 0.7 ou 0.8.

Um exemplo de um método Runge-Kutta embutido é o método RK2(3) de 3 etapas e ordem 2.

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & & \\ 1 & 1 & 0 & \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 & 0 \\ \hline & 1/2 & 1/2 & 0 \\ \hline & 1/6 & 1/6 & 4/6 \end{array} \quad (4.32)$$

$$\begin{cases} \mathbf{k}_1 = \mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}_n) \\ \mathbf{k}_2 = \mathbf{f}(t_n + h_{new}, \mathbf{y}_n + h_{new} \mathbf{k}_1) \\ \mathbf{k}_3 = \mathbf{f}\left(t_n + \frac{1}{2} h_{new}, \mathbf{y}_n + h_{new} \left(\frac{1}{4} \mathbf{k}_1 + \frac{1}{4} \mathbf{k}_2\right)\right) \\ \mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + h_{new} \left(\frac{1}{2} \mathbf{k}_1 + \frac{1}{2} \mathbf{k}_2\right) \end{cases} \quad (4.33)$$

Em que a estimativa para o erro é dada por

$$erro = h \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \right) k_1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \right) k_2 + \left(0 - \frac{4}{6} \right) k_3 \right]. \quad (4.34)$$

4.4. Métodos de passo múltiplo

Os métodos de passo único permitem calcular o valor da solução do passo seguinte utilizando valores de solução do passo anterior. Os métodos de Runge-Kutta utilizam etapas intermédias dentro do passo para calcular a solução do passo seguinte de forma a obter um método de ordem alta. Os métodos de passo múltiplo calculam o valor da solução do passo seguinte utilizando a solução de vários passos anteriores.

Considerando o problema de valor inicial genérico (4.14) os métodos de passo múltiplo são definidos por

$$\sum_{j=0}^K a_j \mathbf{y}_{n+j} = h \sum_{j=0}^K \beta_j \mathbf{f}_{n+j}, \quad (4.35)$$

$$a_0 \mathbf{y}_n + a_1 \mathbf{y}_{n+1} + \dots + a_K \mathbf{y}_{n+K} = h (\beta_0 \mathbf{f}_n + \beta_1 \mathbf{f}_{n+1} + \dots + \beta_K \mathbf{f}_{n+K})$$

onde a_j e β_j são os coeficientes do método e K corresponde ao número de passos do método.

4.4.1. Método Trapezoidal

O método Trapezoidal [29], [33] calcula a solução do passo seguinte utilizando informação do passo futuro e presente através da expressão

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + h \frac{\mathbf{f}_{n+1} + \mathbf{f}_n}{2}, \quad (4.36)$$

onde K toma o valor de 1. Estamos assim diante de um método de um passo.

A equação do passo seguinte é dada por

$$\mathbf{y}_{n+2} = \mathbf{y}_{n+1} + h \frac{\mathbf{f}_{n+2} + \mathbf{f}_{n+1}}{2}. \quad (4.37)$$

4.4.2. Método Gear-2

O método Gear-2 [29] calcula a solução do passo seguinte utilizando informação do passo futuro, presente e passado através da expressão

$$\mathbf{y}_{n+1} = \frac{4}{3}\mathbf{y}_n - \frac{1}{3}\mathbf{y}_{n-1} + \frac{2}{3}h\mathbf{f}_{n+1}, \quad (4.38)$$

onde K toma o valor de 2, estando assim diante de um método de 2 passos.

A equação do passo seguinte é dada por

$$\mathbf{y}_{n+2} = \frac{4}{3}\mathbf{y}_{n+1} - \frac{1}{3}\mathbf{y}_n + \frac{2}{3}h\mathbf{f}_{n+2}. \quad (4.39)$$

Os métodos Trapezoidal e Gear-2 são bastante utilizados pelos simuladores de circuitos eletrónicos, quer se tratem de simuladores comerciais ou de acesso livre. A maior parte dos simuladores utilizam apenas estes dois métodos, ou derivados dos mesmos, como por exemplo o simulador LTspice, o qual disponibiliza ao utilizador as opções “Trapezoidal”, “Trapezoidal modificado” e “Gear-2”.

4.4.3. Métodos BDF

Os métodos *Backward Differentiation Formula* (BDF) [27-29], [34] pertencem à família de métodos de passo múltiplo. Estes são bastante utilizados para resolver problemas de valor inicial, especialmente para problemas *STIFF*, expressos no formato ODE (3.14).

Os métodos BDF têm a particularidade de ter ordem p igual ao número de passos K . Estes são definidos por

$$\sum_{j=0}^K \alpha_j \mathbf{y}_{n+j} = h\beta_K \mathbf{f}(t_{n+K}, \mathbf{y}_{n+K}), \quad (4.40)$$

onde α_K e β_K são coeficientes escolhidos para o método alcançar a ordem K .

Estes métodos são implícitos e conseqüentemente, necessitam da resolução de um sistema de equações não lineares em cada passo. Na Secção 4.5 são descritas algumas formas para a resolução de sistemas de equações não lineares.

A seguir apresentam-se alguns exemplos de métodos BDF.

- **BDF1**

Método *Backward Euler* de ordem $p = 1$.

$$\mathbf{y}_{n+1} - \mathbf{y}_n = h\mathbf{f}_{n+1} \quad (4.41)$$

- **BDF2**

Método Gear-2 de ordem $p = 2$.

$$\mathbf{y}_{n+2} - \frac{4}{3}\mathbf{y}_{n+1} + \frac{1}{3}\mathbf{y}_n = \frac{2}{3}h\mathbf{f}_{n+2} \quad (4.42)$$

- **BDF3**

Método de ordem $p = 3$.

$$\mathbf{y}_{n+3} - \frac{18}{11}\mathbf{y}_{n+2} + \frac{9}{11}\mathbf{y}_{n+1} - \frac{2}{11}\mathbf{y}_n = \frac{6}{11}h\mathbf{f}_{n+3} \quad (4.43)$$

- **BDF4**

Método de ordem $p = 4$.

$$\mathbf{y}_{n+4} - \frac{48}{25}\mathbf{y}_{n+3} + \frac{36}{25}\mathbf{y}_{n+2} - \frac{16}{25}\mathbf{y}_{n+1} + \frac{3}{25}\mathbf{y}_n = \frac{12}{25}h\mathbf{f}_{n+4} \quad (4.44)$$

- **BDF5**

Método de ordem $p = 5$.

$$\mathbf{y}_{n+5} - \frac{300}{137}\mathbf{y}_{n+4} + \frac{300}{137}\mathbf{y}_{n+3} - \frac{200}{137}\mathbf{y}_{n+2} + \frac{75}{137}\mathbf{y}_{n+1} - \frac{12}{137}\mathbf{y}_n = \frac{60}{137}h\mathbf{f}_{n+5} \quad (4.45)$$

4.5. Resolução numérica de sistemas de equações não lineares

Para resolver equações ou sistemas de equações não lineares podem ser utilizados vários métodos iterativos. Nesta secção são abordados o método do ponto fixo e o método de Newton.

4.5.1. Método do Ponto Fixo

O método do ponto fixo permite obter a solução numérica de equações e sistemas de equações não lineares expressas no formato

$$x = g(x) \quad (4.46)$$

através do seguinte esquema iterativo

$$x^{[k+1]} = g(x^{[k]}), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.47)$$

Assumindo que g é uma função de valores reais, definida e contínua num intervalo fechado $I \subset [a, b]$ tal que $g(I) \subset I$ então a solução $x = g(x)$ possui uma única solução nesse intervalo I , e a sucessão $x^{[k+1]} = g(x^{[k]})$, $k = 0, 1, 2, \dots$, converge para a solução para qualquer que seja a estimativa inicial $x_0 \in I$ [35]. Para este método convergir a função g tem de ser contrativa e têm de ser cumpridas as condições do teorema de convergência.

Teorema 4.1. Convergência do método de ponto fixo

Uma função g diz-se contrativa em $I \subset [a, b]$ se for contínua e se existir uma constante M com $0 \leq M \leq 1$ onde se satisfaz a condição

$$|g(x_1) - g(x_2)| \leq M |x_1 - x_2|, \quad \forall x_1, x_2 \in [a, b]. \quad (4.48)$$

Tendo em consideração um sistema de equações, onde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ é o vetor com N componentes, $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_N]$, a solução do sistema $\mathbf{x} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$ pode ser obtida iterativamente através de

$$\mathbf{x}^{[k+1]} = \mathbf{g}(\mathbf{x}^{[k]}) \quad (4.49)$$

se $\mathbf{g}: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ for contrativa num domínio $D \subset \mathbb{R}^N$, ou seja, se

$$\|\mathbf{g}(\bar{\mathbf{x}}) - \mathbf{g}(\mathbf{x})\| \leq M \|\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\|, \quad 0 \leq M \leq 1, \quad \forall \bar{\mathbf{x}}, \mathbf{x} \in D. \quad (4.50)$$

4.5.2. Método de Newton

O método de Newton permite obter a solução numérica de equações e sistemas de equações não lineares expressas no formato

$$f(x) = 0 \quad (4.51)$$

usando o esquema iterativo

$$x^{[k+1]} = x^{[k]} - \frac{f(x^{[k]})}{f'(x^{[k]})}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.52)$$

Este método também é conhecido como método de Newton-Raphson [36] e, tal como o método da Subsecção 4.5.1, nem sempre converge para a solução. O teorema seguinte apresenta as condições necessárias para garantir a convergência do método.

Teorema 4.2. Convergência do método de Newton

Se numa vizinhança (a,b) do zero z suficientemente pequena se verificar $f \in C^2[a,b]$ e que para todo o ξ nessa vizinhança se verifique

$$0 \leq m_1 \leq |f'(\xi)| < M_1 \text{ e } |f''(\xi)| < M_2 \quad (4.53)$$

então o método de Newton converge. Neste método o erro satisfaz a relação

$$|e^{[k+1]}| \leq M |e^{[k]}|^2 \text{ com } M = \frac{M_2}{2m_1}. \quad (4.54)$$

A estimativa inicial a ser utilizada com este método tem de ser bem escolhida, senão o método poderá não convergir.

Tendo em consideração um sistema de equações, onde $\mathbf{f} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ é uma função vetorial, a derivada dá lugar à Jacobiana e o esquema iterativo toma uma nova forma

$$\mathbf{x}^{[k+1]} = \mathbf{x}^{[k]} - \mathbf{J}(\mathbf{x}^{[k]})^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{x}^{[k]}), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.55)$$

onde a Jacobiana tem o formato

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \mathbf{x}_1} & \dots & \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \mathbf{x}_N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \mathbf{f}_N}{\partial \mathbf{x}_1} & \dots & \frac{\partial \mathbf{f}_N}{\partial \mathbf{x}_N} \end{bmatrix}. \quad (4.56)$$

No cálculo do esquema iterativo é calculada a matriz inversa da Jacobiana. Este cálculo pode conduzir a uma ampliação dos erros de computação numérica. Tal acontece quando se tem as matrizes com um determinante quase nulo.

Para que não aconteça este problema pode se utilizar um esquema iterativo alternativo. Este passa pela resolução do sistema linear de N equações

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}^{[k]})\Delta = -\mathbf{f}(\mathbf{x}^{[k]}), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.57)$$

onde o vetor Δ é um vetor $N \times 1$ que representa o incremento a realizar na próxima iteração

$$\mathbf{x}^{[k+1]} = \mathbf{x}^{[k]} + \Delta. \quad (4.58)$$

5. Métodos multi-ritmo

5.1. Introdução

Circuitos eletrónicos são utilizados para várias aplicações e ambientes distintos. Estes podem apresentar vários níveis de complexidade e desta forma é comum separar um circuito em subcircuitos de menor dimensão. Em algumas aplicações é comum encontrar circuitos que apresentam regimes de funcionamento com escalas temporais muito distintas, ou seja, regimes em que as variáveis de estado evoluem a ritmos díspares. A área das telecomunicações (RF e microondas) é um exemplo típico onde é bastante comum encontrar este comportamento. Tal deve-se ao facto da utilização de sinais modulados, onde a portadora é um sinal de frequência alta e o sinal modulante é normalmente um sinal de frequência baixa. Um circuito RF é normalmente composto por vários blocos, onde cada um destes blocos tem a sua função específica. Estes blocos podem alterar o espectro de frequência do sinal de entrada, como por exemplo o caso dos filtros (passa baixo, passa alto, etc.), ou dos multiplexers que podem escolher sinais de entrada de diferentes frequências. Por exemplo um mixer combina dois ou mais sinais que podem ter frequências diferentes num sinal que conjuga estas frequências. Os sinais multi-ton, que são sinais constituídos por sinusoides de diferentes frequências não relacionadas harmonicamente, também apresentam vários ritmos de evolução. Este fenómeno, o de algumas variáveis de estado variarem lentamente, enquanto outras variam rapidamente durante o mesmo intervalo de tempo, é normalmente referido como latência no domínio do tempo.

Existem outros exemplos, tais como circuitos compostos por sistemas analógicos e blocos digitais. Os sistemas digitais tendem a ter uma frequência mais elevada que os sistemas analógicos uma vez que estes funcionam em regime de comutação. Em circuitos puramente digitais também é possível encontrar-se esta latência no domínio do tempo. Em aplicações de grandes dimensões, um sistema pode ser dividido em vários subsistemas que são responsáveis por uma certa tarefa. Normalmente apenas um subsistema é ativo em um determinado instante de tempo, enquanto o resto dos subsistemas é latente ou até constante. Neste caso os ritmos de evolução das variáveis em todo o sistema são bastantes diferentes. Existem também circuitos onde algumas das variáveis têm um valor praticamente constante durante determinados intervalos de tempo e depois variam de forma repentina.

O comportamento eletrotérmico de sistemas eletrónicos de potência é um outro exemplo prático onde podemos encontrar variáveis físicas com ritmos de evolução muito distintos.

A simulação eletrotérmica de circuitos ou componentes eletrónicos é feita através da simulação das grandezas físicas envolvidas, que neste caso podem ser divididas em variáveis elétricas e variáveis térmicas. As variáveis elétricas têm tipicamente uma evolução mais rápida quando comparando com as variáveis térmicas. As variáveis térmicas representam a temperatura em vários pontos da estrutura física dos componentes e, conseqüentemente, o ritmo de evolução entre elas é também diferente. No caso de dispositivos semicondutores de potência (por exemplo os MOSFETs) a variável térmica que representa a temperatura da junção tende a evoluir mais rapidamente, uma vez que é na junção que o calor é gerado. As restantes variáveis térmicas modelam a transmissão de calor entre as várias secções parciais da estrutura física do componente, sendo que as mais afastadas da junção têm uma evolução mais lenta. Neste documento vai ser abordado este caso, sendo feita a simulação eletrotérmica de dois circuitos. Ambos os circuitos contêm MOSFETs cujas variáveis térmicas serão estimadas.

Este tipo de comportamento, onde um circuito contém regimes de funcionamento de escalas temporais muito distintas, pode ser denominado por funcionamento multi-ritmo. A resolução numérica de circuitos deste género utilizando os métodos convencionais apresentados no Capítulo 4 é em geral bastante ineficiente. Os métodos convencionais, como os métodos de Runge-Kutta, Trapezoidal, Gear-2, etc... , obtêm as variáveis de estado usando uma medida de passo que é comum para todas os componentes do sistema, que, obrigatoriamente, tem de satisfazer o regime mais rápido. Conseqüentemente, para as variáveis com regime lento é desperdiçado esforço computacional e o tempo de integração é prolongado desnecessariamente.

Para fornecer uma explicação ilustrativa deste problema, considere-se um circuito eletrônico genérico de com N variáveis de estado descrito como um problema de valor inicial no seguinte formato ODE

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}), \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0, \quad t_0 \leq t \leq t_{Final}, \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^N. \quad (5.1)$$

Para circuitos com apenas uma escala temporal é possível utilizar-se um método convencional, uma vez que os sinais apresentam todos o mesmo ritmo de evolução. A Figura

5.1 ilustra um hipotético exemplo onde todas as variáveis do circuito teriam a mesma escala temporal de $y(t)$ e seriam assim integradas com a mesma medida de passo h .

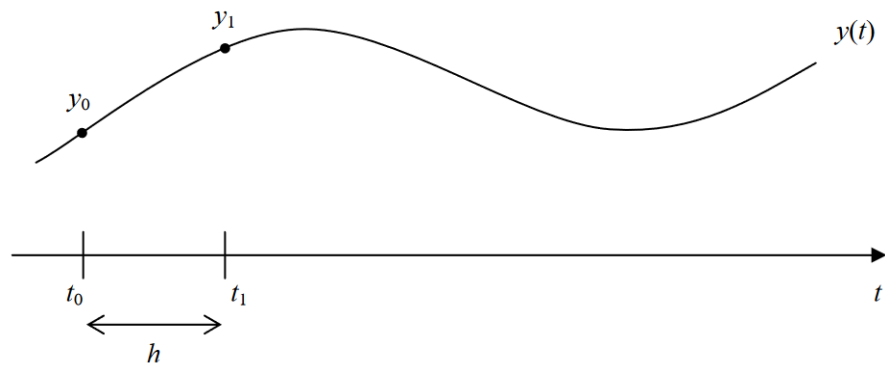


Figura 5.1 - Passo na integração com um método numérico convencional.

Por outro lado, para circuito com vários ritmos de variação é aconselhável utilizar um método com diferentes medidas de passo. A Figura 5.2 ilustra um caso em que existem sinais que variam rapidamente e outros que variam lentamente. Ao se utilizar apenas um ritmo, que, por exemplo, se adequa aos sinais de ritmo lento então os sinais de ritmo rápido seriam subamostrados e a informação sobre esses sinais era perdida. Ao se utilizar apenas um ritmo adequado aos sinais de ritmo rápido então os sinais de ritmo lento seriam sobre amostrados e estar-se-ia a utilizar demasiado esforço computacional e a aumentar o tempo de simulação.

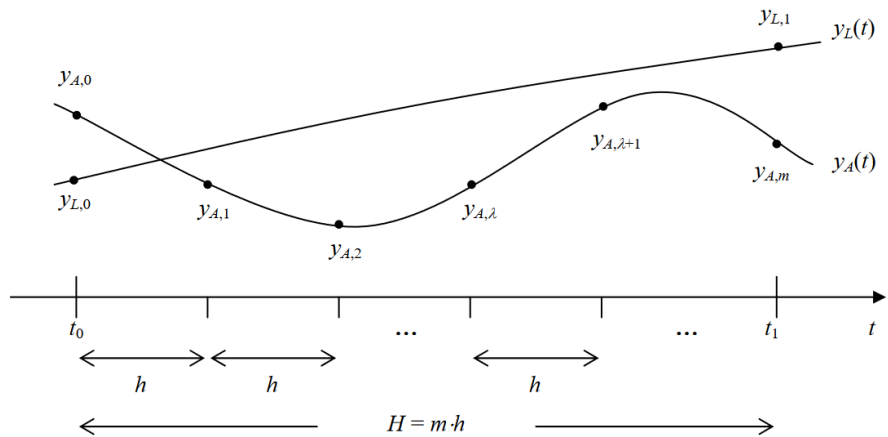


Figura 5.2 - Macro passo e micro passo na integração com um método multi-ritmo.

A solução para este problema pode ser alcançada através da utilização de esquemas multi-ritmo, onde é feita a divisão entre as variáveis de estado que variam rapidamente e as que variam mais lentamente em dois subsistemas. O subsistema lento utiliza uma medida de passo maior que o subsistema rápido. O problema pode ser separado em dois subsistemas descritos no formato ODE

$$\mathbf{y}'_A(t) = \mathbf{f}_A(t, \mathbf{y}_A, \mathbf{y}_L), \quad \mathbf{y}_A(t_0) = \mathbf{y}_{A,0} \quad (5.2)$$

$$\mathbf{y}'_L(t) = \mathbf{f}_L(t, \mathbf{y}_A, \mathbf{y}_L), \quad \mathbf{y}_L(t_0) = \mathbf{y}_{L,0} \quad (5.3)$$

que fazem parte do sistema

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_A \\ \mathbf{y}_L \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}_A \in \mathbb{R}^{N_A}, \quad \mathbf{y}_L \in \mathbb{R}^{N_L}, \quad N_A + N_L = N, \quad (5.4)$$

onde \mathbf{y}_A corresponde ao vetor de variáveis de estado ativas, e \mathbf{y}_L ao vetor de variáveis de estado latentes. As variáveis de estado ativas são as variáveis que variam rapidamente e são integradas com uma medida de passo pequena h (micro passo). As variáveis de estado latentes são as variáveis que variam lentamente, sendo integradas com uma medida de passo muito maior H (macro passo). A relação entre H e h é dada por

$$H = m \cdot h, \quad (5.5)$$

onde m é obrigatoriamente um valor inteiro.

Uma determinada variável de estado pode variar a diferentes ritmos ao longo do tempo, e consequentemente, a sua caracterização pode variar também ao longo do tempo. Quando a variável de estado está a variar rapidamente esta é caracterizada como sendo rápida. Quando esta mesma variável mudar para um ritmo mais lento ou até próximo de constante a variável passa a ser caracterizada como lenta. O valor de m pode também mudar de valor ao longo do tempo consoante a disparidade de evolução entre as variáveis ativas e latentes [37].

5.2. Métodos de Runge-Kutta Multi-Ritmo (MRK)

Para se entender os fundamentos dos esquemas multi-ritmo, considere-se o método Runge-Kutta explícito de primeira ordem e de uma etapa, que também pode ser descrito como o método de Euler explícito. A sua solução numérica é dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t_0 + h) &\approx \mathbf{y}_1 = \mathbf{y}_0 + h\mathbf{k}, \\ \mathbf{k} &= \mathbf{f}(t_0, \mathbf{y}_0) \end{aligned} \quad (5.6)$$

A versão de multi-ritmo correspondente ao método Euler explícito para a solução numérica do sistema particionado de (5.2) e (5.3) para as componentes latentes seria dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_L(t_0 + H) &\simeq \mathbf{y}_{L,1} = \mathbf{y}_{L,0} + H\mathbf{k}_L, \\ \mathbf{k}_L &= \mathbf{f}(t_0, \mathbf{y}_{A,0}, \mathbf{y}_{L,0}) \end{aligned} \quad (5.7)$$

e para as componentes ativas seria dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_A(t_0 + h) &\simeq \mathbf{y}_{A,1} = \mathbf{y}_{A,0} + h\mathbf{k}_A^0, \\ \mathbf{k}_A^0 &= \mathbf{f}_A(t_0, \mathbf{y}_{A,0}, \mathbf{y}_{L,0}), \\ \mathbf{y}_A(t_0 + 2h) &\simeq \mathbf{y}_{A,2} = \mathbf{y}_{A,1} + h\mathbf{k}_A^1, \\ \mathbf{k}_A^1 &= \mathbf{f}_A(t_0 + h, \mathbf{y}_{A,1}, \mathbf{y}_{L,0} + h\mathbf{k}_L), \\ &\vdots \\ \mathbf{y}_A(t_0 + \lambda h + h) &\simeq \mathbf{y}_{A,\lambda+1} = \mathbf{y}_{A,\lambda} + h\mathbf{k}_A^\lambda, \\ \mathbf{k}_A^\lambda &= \mathbf{f}_A(t_0 + \lambda h, \mathbf{y}_{A,\lambda}, \mathbf{y}_{L,0} + \lambda h\mathbf{k}_L), \\ &\lambda = 0, 1, \dots, m-1 \end{aligned} \quad (5.8)$$

Conforme ilustrado na Figura 5.2 e definido em (5.8), as variáveis de estado ativas em cada um dos instantes de tempo $t + \lambda h$ são calculadas a partir dos seus valores anteriores e as respetivas derivadas no tempo definidas por $k_A^{\lambda-1}$. Por outro lado, as variáveis de estado latentes são calculadas para um instante de tempo mais longo $t_0 + H$, sendo que se assume que as suas derivadas k_L são constantes durante o intervalo temporal.

Este algoritmo constitui apenas uma forma simples de um esquema de Runge-Kutta multi-ritmo. Uma definição geral de um método de Runge-Kutta multi-ritmo é apresentada a seguir.

Considere-se dois métodos Runge-Kutta com etapas s e \bar{s} que podem ser descritos através dos seus quadros de Butcher (b, A, c) e $(\bar{b}, \bar{A}, \bar{c})$

$$\begin{array}{c|cccc} c_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ c_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_s & a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{ss} \\ \hline & b_1 & b_2 & \cdots & b_s \end{array} \quad (5.9)$$

$$\begin{array}{c|cccc} \bar{c}_1 & \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} & \cdots & \bar{a}_{1\bar{s}} \\ \bar{c}_2 & \bar{a}_{21} & \bar{a}_{22} & \cdots & \bar{a}_{2\bar{s}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{c}_{\bar{s}} & \bar{a}_{\bar{s}1} & \bar{a}_{\bar{s}2} & \cdots & \bar{a}_{\bar{s}\bar{s}} \\ \hline & \bar{b}_1 & \bar{b}_2 & \cdots & \bar{b}_{\bar{s}} \end{array} \quad (5.10)$$

para integrar \mathbf{y}_A e \mathbf{y}_L respetivamente. O método de Runge-Kutta multi-ritmo resultante da junção destes dois métodos é definido da seguinte forma.

As componentes ativas \mathbf{y}_A são dadas por

$$\mathbf{y}_A(t_0 + \lambda h + h) \approx \mathbf{y}_{A,\lambda+1} = \mathbf{y}_{A,\lambda} + h \sum_{i=1}^s b_i \mathbf{k}_{A,i}^\lambda, \quad (5.11)$$

$$\lambda = 0, 1, \dots, m-1,$$

$$\mathbf{k}_{A,i}^\lambda = \mathbf{f}_A \left(t_0 + \lambda h + c_i h, \mathbf{y}_{A,\lambda} + h \sum_{j=1}^s a_{ij} \mathbf{k}_{A,j}^\lambda, \tilde{\mathbf{Y}}_{L,i}^\lambda \right), \quad (5.12)$$

$$i = 1, 2, \dots, s,$$

em que $\tilde{\mathbf{Y}}_{L,i}^\lambda \approx \mathbf{y}_L(t_0 + \lambda h + c_i h)$ e $c_i = \sum_{j=1}^s a_{ij}$.

As componentes latentes \mathbf{y}_L são dadas por

$$\mathbf{y}_L(t_0 + H) \approx \mathbf{y}_{L,1} = \mathbf{y}_{L,0} + H \sum_{i=1}^{\bar{s}} \bar{b}_i \mathbf{k}_{L,i}, \quad (5.13)$$

$$\mathbf{k}_{L,i} = \mathbf{f}_L \left(t_0 + \bar{c}_i H, \tilde{\mathbf{Y}}_{A,i}, \mathbf{y}_{L,0} + H \sum_{j=1}^{\bar{s}} \bar{a}_{ij} \mathbf{k}_{L,j} \right), \quad (5.14)$$

$$i = 1, 2, \dots, \bar{s},$$

em que $\tilde{\mathbf{Y}}_{A,i} \approx \mathbf{y}_A(t_0 + \bar{c}_i H)$ e $\bar{c}_i = \sum_{j=1}^{\bar{s}} \bar{a}_{ij}$.

Os métodos a utilizar para integrar cada uma das componentes podem ou não ser o mesmo. A escolha dependerá não só da natureza dos sinais de cada componente, mas como também do esforço computacional disponível e a precisão requerida. O acoplamento entre os subsistemas ativo e latente e vice-versa é realizada através dos parâmetros intermédios $\tilde{\mathbf{Y}}_{L,i}^\lambda$ e $\tilde{\mathbf{Y}}_{A,i}$. Estes parâmetros podem ser obtidos de diversas formas. Tradicionalmente estes são obtidas por técnicas de extrapolação/interpolação, como é sugerido por Günther e Rentrop [38] e [39]. Existe também o processo baseado em coeficientes de acoplamento sugerido por Kværnø e Rentrop [10-12] e [40].

Nos dias de hoje os métodos de multi-ritmo têm sido vastamente utilizados para resolver problemas de valor inicial. Estes têm sido utilizados em conjunto com métodos linearmente implícitos, onde a estabilidade dos métodos implícitos é preservada [13], [41-43]. São também utilizados em conjunto com os métodos *General Additive Runge-Kutta* (GARK), uma vez que estes apresentam excelentes propriedades de estabilidade e flexibilidade no

comportamento de subcircuitos [44]. Para problemas que requerem uma maior ordem, estes métodos também são utilizados [45], [46].

5.3. Método MRK23

O método Runge-Kutta Multi-Ritmo utilizado neste estudo é baseado no método Bogacki-Shampine (2)3 [47]. Este é um método embutido composto por 3 etapas mais 1 etapa que tem como objetivo a estimação do erro. Este método é dado pelo quadro de Butcher (5.15).

$$\begin{array}{c|cccc}
 0 & 0 & & & \\
 1/2 & 1/2 & 0 & & \\
 3/4 & 0 & 3/4 & 0 & \\
 1 & 2/9 & 3/9 & 4/9 & 0 \\
 \hline
 b_i & 2/9 & 3/9 & 4/9 & \\
 \hline
 \hat{b}_i & 7/24 & 6/24 & 8/24 & 3/24
 \end{array} \quad (5.15)$$

Através do quadro é possível verificar-se que o método dado pelo coeficiente b_i é de ordem 3, enquanto que o dado pelo coeficiente \hat{b}_i é de ordem 2, apesar de este ser composto por 4 etapas. O erro local deste método pode ser estimado pela expressão

$$err = h \sum_{i=1}^4 (b_i - \hat{b}_i) \mathbf{k}_i = h \sum_{i=1}^4 d_i \mathbf{k}_i . \quad (5.16)$$

Através desta expressão é possível retirar as estimativas do erro para as componentes ativas e latentes. As estimativas do erro das componentes ativas são dadas pela expressão

$$err_{A,\lambda+1} = h \sum_{i=1}^4 d_i \mathbf{k}_{A,i}^\lambda . \quad (5.17)$$

As estimativas do erro das componentes latentes são dadas pela expressão

$$err_{L,1} = H \sum_{i=1}^4 \bar{d}_i \mathbf{k}_{L,i} . \quad (5.18)$$

6. Casos de estudo

6.1. Introdução

Neste capítulo são apresentados e descritos os desempenhos dos vários métodos numéricos de simulação para a resolução de problemas de valor inicial aplicados a dois casos de estudo, nomeadamente, um circuito amplificador de áudio de potência (Secção 6.2) e um regulador de tensão linear de potência (Secção 6.3). Para cada circuito, é descrito o seu modelo elétrico, são apresentados os modelos dos transístores e de propagação térmica da respetiva estrutura de dissipação de potência. No final do capítulo, são apresentados os resultados numéricos de simulação e é feita a comparação dos resultados entre os métodos numéricos utilizados.

6.2. Amplificador de áudio de potência

O circuito do amplificador de áudio ilustrado na Figura 6.1 é formado pelo circuito de entrada, constituído por um amplificador operacional, e por um circuito de saída que possui dois MOSFETs de potência, um do tipo N e outro do tipo P, em configuração *Push-Pull* de forma que o andar de saída possa funcionar em classe AB. Como se pode verificar pelo esquema, o circuito é realimentado para garantir bom desempenho (por exemplo, linearidade). A resistência R_L tem o valor de 8Ω , pois representa a carga do circuito, que pode ser uma coluna de som com impedância de 8Ω . Os MOSFETs representados na figura estão acoplados a um modelo de propagação térmica que modela a propagação de calor no próprio transístor e no dissipador de potência acoplado. Na Figura 6.1 está ilustrada uma breve representação destes modelos, estando a descrição completa destes modelos feita na Secção 6.2.4.

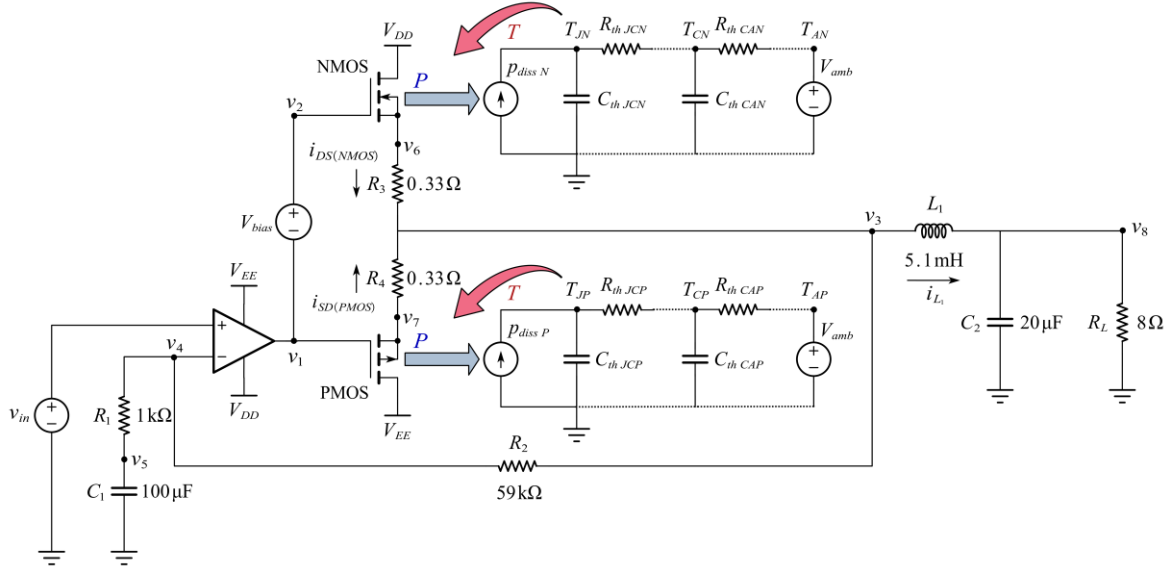


Figura 6.1 - Circuito amplificador de áudio.

O circuito amplificador apresentado é composto por 8 nós, cada um dando origem a uma variável de estado desconhecida, nomeadamente, v_1, v_2, \dots, v_8 . Da análise do circuito resulta o seguinte sistema de equações algébrico-diferenciais

$$\left\{ \begin{array}{l}
 v_1 = A_v (v_{in} - v_4) \\
 v_2 = v_1 + V_{bias} \\
 \frac{v_6 - v_3}{R_3} = \frac{v_3 - v_7}{R_4} + \frac{v_3 - v_4}{R_2} + i_{L_1} \\
 \frac{v_3 - v_4}{R_2} = \frac{v_4 - v_5}{R_1} \\
 \frac{v_4 - v_5}{R_1} = C_1 \frac{d}{dt}(v_5) \\
 \frac{v_6 - v_3}{R_3} = i_{DS(NMOS)} \\
 \frac{v_3 - v_7}{R_4} = i_{SD(PMOS)} \\
 \frac{v_8}{R_L} = i_{L_1} - C_2 \frac{d}{dt}(v_8) \\
 v_3 - v_8 = L_1 \frac{d}{dt}(i_{L_1})
 \end{array} \right. \quad (6.1)$$

6.2.1. Expressões de análise no formato DAE

Para a simulação do circuito é necessário manipular matematicamente as equações do sistema (6.1) para as definir num formato adequado, tal como foi visto no Capítulo 3. O sistema (6.1) escrito no formato DAE resulta no seguinte sistema de equações algébrico diferenciais

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{v_1}{A_v} + v_4 = v_{in} \\ v_2 - v_1 = V_{bias} \\ \frac{v_3 - v_7}{R_4} + \frac{v_3 - v_4}{R_2} - \frac{v_6 - v_3}{R_3} + i_{L_1} = 0 \\ \frac{v_3 - v_4}{R_2} - \frac{v_4 - v_5}{R_1} = 0 \\ -\frac{v_4 - v_5}{R_1} + C_1 \frac{d}{dt}(v_5) = 0 \\ i_{DS(NMOS)} - \frac{v_6 - v_3}{R_3} = 0 \\ i_{SD(PMOS)} - \frac{v_3 - v_7}{R_4} = 0 \\ \frac{v_8}{R_L} - i_{L_1} + C_2 \frac{d}{dt}(v_8) = 0 \\ v_8 - v_3 + L_1 \frac{d}{dt}(i_{L_1}) = 0 \end{array} \right. , \quad (6.2)$$

onde fica possível identificar e numerar as variáveis de estado

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_j(t), & j=1, \dots, 8 \\ y_9(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_j, & j=1, \dots, 8 \\ i_{L_1} \end{bmatrix}, \quad (6.3)$$

e de excitação

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_j(t), & j=3, \dots, 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{in} \\ V_{bias} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.4)$$

A componente algébrica $\mathbf{p}(\mathbf{y})$ pode ser definida por

$$\mathbf{p}(\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} \frac{v_1}{A_v} + v_4 \\ v_2 - v_1 \\ \frac{v_3 - v_7}{R_4} + \frac{v_3 - v_4}{R_2} - \frac{v_6 - v_3}{R_3} + i_{L_1} \\ \frac{v_3 - v_4}{R_2} - \frac{v_4 - v_5}{R_1} \\ -\frac{v_4 - v_5}{R_1} \\ i_{DS(NMOS)} - \frac{v_6 - v_3}{R_3} \\ i_{SD(PMOS)} - \frac{v_3 - v_7}{R_4} \\ \frac{v_8}{R_L} - i_{L_1} \\ v_8 - v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{y_1}{A_v} + y_4 \\ y_2 - y_1 \\ \frac{y_3 - y_7}{R_4} + \frac{y_3 - y_4}{R_2} - \frac{y_6 - y_3}{R_3} + y_9 \\ \frac{y_3 - y_4}{R_2} - \frac{y_4 - y_5}{R_1} \\ -\frac{y_4 - y_5}{R_1} \\ i_{DS(NMOS)} - \frac{y_6 - y_3}{R_3} \\ i_{SD(PMOS)} - \frac{y_3 - y_7}{R_4} \\ \frac{y_8}{R_L} - y_9 \\ y_8 - y_3 \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

e a componente dinâmica $\mathbf{q}(\mathbf{y})$ por

$$\mathbf{q}(\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ C_1 v_5 \\ 0 \\ 0 \\ C_2 v_8 \\ L_1 i_{L_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ C_1 y_5 \\ 0 \\ 0 \\ C_2 y_8 \\ L_1 y_9 \end{bmatrix}. \quad (6.6)$$

6.2.2. Expressões de análise no formato ODE

Para se poder exprimir o sistema de equações que descreve o comportamento do circuito amplificador de áudio no formato ODE é necessário combinar as equações algébricas e as equações diferenciais. O sistema com equações diferenciais é definido por

$$\begin{cases} \frac{dv_5}{dt} = \frac{v_4 - v_5}{C_1 R_1} \\ \frac{dv_8}{dt} = -\frac{v_8}{C_2 R_L} + \frac{i_{L_1}}{C_2} \\ \frac{di_{L_1}}{dt} = \frac{v_3 - v_8}{L_1} \end{cases} \quad (6.7)$$

e o sistema com equações algébricas é dado por

$$\begin{cases} v_1 - A_v (v_{in} - v_4) = 0 \\ v_1 - v_2 + V_{bias} = 0 \\ \frac{v_3 - v_7}{R_4} + \frac{v_3 - v_4}{R_2} - \frac{v_6 - v_3}{R_3} + i_{L_1} = 0 \\ \frac{v_3 - v_4}{R_2} - \frac{v_4 - v_5}{R_1} = 0 \\ \frac{v_6 - v_3}{R_3} - i_{DS(NMOS)} = 0 \\ \frac{v_3 - v_7}{R_4} - i_{SD(PMOS)} = 0 \end{cases} \quad (6.8)$$

As variáveis de estado são assim separadas em dois grupos, definidos por

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_5 \\ v_8 \\ i_{L_1} \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

e

$$\mathbf{g}(t) = \begin{bmatrix} g_j(t), & j=1, \dots, 4 \\ g_5(t) \\ g_6(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_j, & j=1, \dots, 4 \\ v_6 \\ v_7 \end{bmatrix}. \quad (6.10)$$

Assim, as equações finais para a obtenção das variáveis de estado são as seguintes:

$$\begin{cases} y_1' = \frac{g_4 - y_1}{C_1 R_1} \\ y_2' = -\frac{y_2}{C_2 R_L} + \frac{y_3}{C_2} \\ y_3' = \frac{g_3 - y_2}{L_1} \end{cases} \quad (6.11)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} g_1 - A_v (v_{in} - g_4) = 0 \\ g_1 - g_2 + V_{bias} = 0 \\ \frac{g_3 - g_6}{R_4} + \frac{g_3 - g_4}{R_2} - \frac{g_5 - g_3}{R_3} + y_3 = 0 \\ \frac{g_3 - g_4}{R_2} - \frac{g_4 - y_1}{R_1} = 0 \\ \frac{g_5 - g_3}{R_3} - i_{DS(NMOS)} = 0 \\ \frac{g_3 - g_6}{R_4} - i_{SD(PMOS)} = 0 \end{array} \right. \quad (6.12)$$

6.2.3. Modelo do transístor

O modelo dos transístores utilizados no amplificador é o apresentado na Figura 2.9 e descrito na Secção 2.3.3. Trata-se de um modelo contínuo simples baseado no modelo do MOSFET de nível 1. Os parâmetros do modelo estão indicados na Tabela 6.1.

TABELA 6.1
PARÂMETROS DO MODELO DOS TRANSÍSTORES.

Transístor	T_{REF}	β_0	β_f	v_{TH}	m_{TH}	K_T	α
NMOS	25 °C	2.5 A/V ²	1.2 A/V ²	1 V	0.005	2	5
PMOS	25 °C	2.5 A/V ²	1.2 A/V ²	-1 V	-0.005	2	5

Na Figura 6.2 é possível observar-se a relação de i_{DS} com v_{DS} e na Figura 6.3 a relação de i_{DS} com v_{GS} para o transístor de canal N.

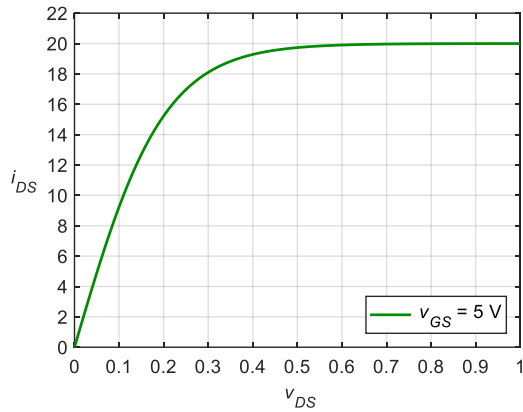


Figura 6.2 - Relação i_{DS} vs. v_{DS} .

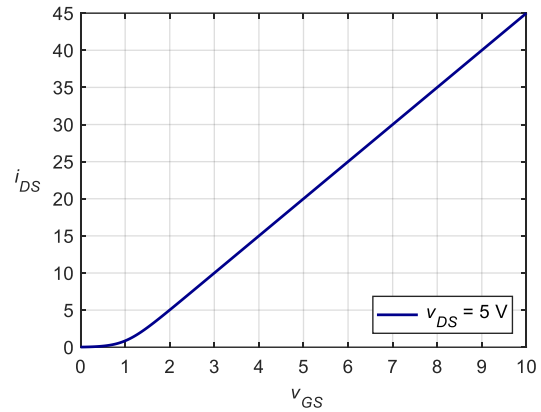


Figura 6.3 - Relação i_{DS} vs. v_{GS} .

6.2.4. Modelos de propagação térmica

O modelo eletrotérmico de um circuito é responsável por caracterizar o seu comportamento térmico e elétrico. Nem todos os componentes de um circuito precisam de ser caracterizados termicamente, apenas aqueles que tendem a aquecer durante o funcionamento e que apresentam simultaneamente variações no seu comportamento elétrico. No circuito da Figura 6.1 existem dois componentes que necessitam de caracterização térmica, estes são os dois MOSFETs. Os MOSFETs são de tipo diferente, um é de canal N e outro de canal P, mas os seus modelos de propagação térmica são iguais.

Na Secção 2.4 foram apresentados alguns modelos de propagação térmica descritos na literatura técnico-científica. Para caracterizar termicamente os MOSFETs do circuito amplificador de áudio são utilizadas redes térmicas baseadas na rede apresentada por Cauer [5], que pode ser denominada por rede com configuração em filtro. Na Figura 2.14 está representada uma rede deste género.

Cada um dos MOSFETs do circuito tem acoplado ao seu encapsulamento um dissipador de calor. Este dissipador também necessita de ser caracterizado termicamente, uma vez que está acoplado ao MOSFET. A capacidade de dissipação de calor no dissipador é diferente da no MOSFET, visto que estes são compostos por diferentes materiais e de diferentes dimensões. Consequentemente, os parâmetros do modelo de propagação térmica do MOSFET são distintos dos do modelo de propagação térmica do dissipador. Assim, é necessário utilizar uma rede térmica para a propagação de calor no MOSFET e outra para a propagação de calor no dissipador.

A rede térmica do MOSFET modela a propagação de calor desde a junção do componente até ao seu encapsulamento. Esta rede pode ser denominada como rede térmica *junction-case*. A rede térmica do dissipador permite estimar a propagação de calor desde o encapsulamento do MOSFET até ao ambiente. Esta rede pode ser denominada como rede térmica *case-ambient*.

A rede térmica *junction-case* do MOSFET é composta por 6 secções térmicas RC. Na Figura 6.4 é possível observar esta rede, onde o índice X é substituído por N ou P consoante o tipo de transístor, sendo N para o MOSFET de canal N e P para o de canal P.

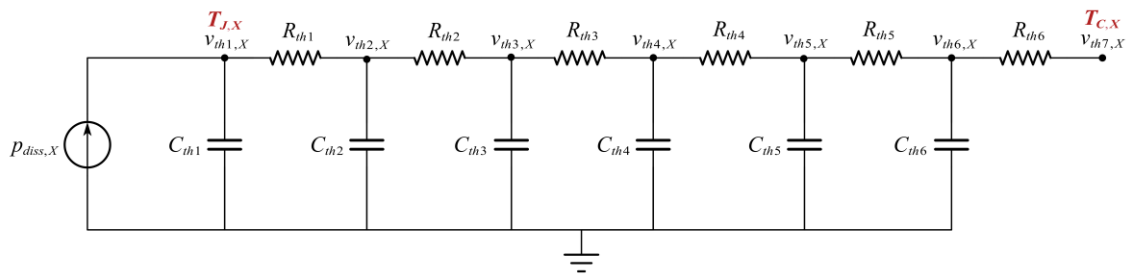


Figura 6.4 - Rede térmica *junction-case*.

Na rede da Figura 6.4 foram utilizados valores para a resistência e capacidade semelhantes aos utilizados nas redes descritas em outras publicações [6]. Os componentes da rede *junction-case* são caracterizados pelos valores dados pela Tabela 6.2.

TABELA 6.2
COMPONENTES DA REDE JUNCTION-CASE.

X	1	2	3	4	5	6
$C_{th,X}$	$2.90 \cdot 10^{-3}$ F	$1.35 \cdot 10^{-2}$ F	$6.30 \cdot 10^{-3}$ F	$7.43 \cdot 10^{-3}$ F	$2.18 \cdot 10^{-2}$ F	$4.50 \cdot 10^{-2}$ F
$R_{th,X}$	$8.10 \cdot 10^{-3}$ Ω	$2.02 \cdot 10^{-2}$ Ω	$5.70 \cdot 10^{-2}$ Ω	$2.50 \cdot 10^{-1}$ Ω	$2.75 \cdot 10^{-1}$ Ω	$3.50 \cdot 10^{-1}$ Ω

A fonte de corrente da rede térmica *junction-case* representa a potência dissipada no transístor, sendo esta calculada através das grandezas elétricas do MOSFET. As equações para o cálculo da potência dissipada para o MOSFET de canal N e P são as seguintes:

$$P_{diss,N} = v_{DS} \cdot i_{DS} \quad (6.13)$$

e

$$P_{diss,P} = v_{SD} \cdot i_{SD} \quad (6.14)$$

A rede térmica *case-ambient* do dissipador é composta por 4 linhas de transmissão iguais em paralelo, sendo cada uma destas constituída por 6 secções térmicas RC em cascata. Na Figura 6.5 é possível observar esta rede, onde X é N ou P consoante o tipo de transístor, sendo N para o MOSFET de canal N e P para o de canal P.

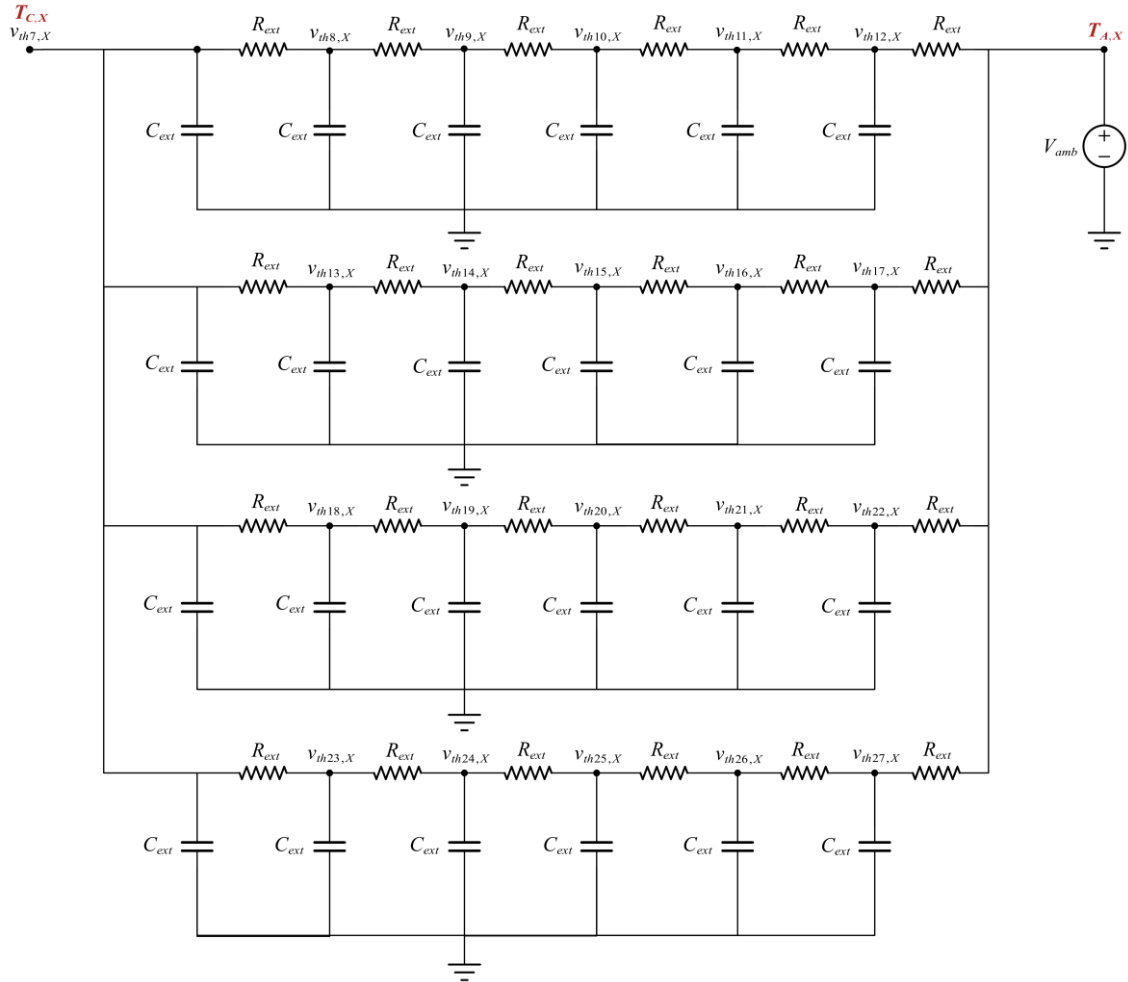


Figura 6.5 - Rede térmica *case-ambient*.

As resistências e condensadores utilizados no circuito da Figura 6.5 têm os valores indicados na Tabela 6.3.

TABELA 6.3
COMPONENTES DA REDE CASE-AMBIENT.

C_{ext}	$4.84 \cdot 10^{-2} \text{ F}$
R_{ext}	$2.59 \cdot 10^{-1} \Omega$

A rede térmica do MOSFET, quer de canal N e P, em conjunto com a rede térmica do dissipador são constituídas por 27 nós cujas variáveis de estado são desconhecidas. Estas são definidas por $v_{thn,x}$, onde nn indica o número do nó e x indica em que transistor, NMOS ou PMOS, é aplicado o dissipador de calor. A rede térmica *junction-case* tem 7 nós e a rede térmica *case-ambient* 20 nós. Aplicando as leis de Kirchhoff aos nós da rede térmica *junction-case* obtém-se o sistema de equações seguinte

$$\left\{ \begin{array}{l} p_{diss} = \frac{v_{th1} - v_{th2}}{R_{th1}} + C_{th1} \frac{d}{dt}(v_{th1}) \\ \frac{v_{thj} - v_{thj+1}}{R_{thj}} = \frac{v_{thj+1} - v_{thj+2}}{R_{thj+1}} + C_{thj+1} \frac{d}{dt}(v_{thj+1}), \quad j = 1, \dots, 5 \\ \frac{v_{th6} - v_{th7}}{R_{th6}} = \frac{4v_{th7} - (v_{th8} + v_{th13} + v_{th18} + v_{th23})}{R_{ext}} + 4C_{ext} \frac{d}{dt}(v_{th7}) \end{array} \right. \quad (6.15)$$

e aos nós da rede térmica *case-ambient* o sistema seguinte:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \frac{v_{th\,j+1} - v_{th\,j+2}}{R_{ext}} + C_{ext} \frac{d}{dt}(v_{th\,j+1}) = \frac{v_{th\,j} - v_{th\,j+1}}{R_{ext}}, \quad j = 7, \dots, 10 \\
 \frac{v_{th12} - V_{amb}}{R_{ext}} + C_{ext} \frac{d}{dt}(v_{th12}) = \frac{v_{th11} - v_{th12}}{R_{ext}} \\
 \frac{v_{th13} - v_{th14}}{R_{ext}} + C_{ext} \frac{d}{dt}(v_{th13}) = \frac{v_{th7} - v_{th13}}{R_{ext}} \\
 \frac{v_{th\,j+1} - v_{th\,j+2}}{R_{ext}} + C_{ext} \frac{d}{dt}(v_{th\,j+1}) = \frac{v_{th\,j} - v_{th\,j+1}}{R_{ext}}, \quad j = 13, \dots, 15 \\
 \frac{v_{th17} - V_{amb}}{R_{ext}} + C_{ext} \frac{d}{dt}(v_{th17}) = \frac{v_{th16} - v_{th17}}{R_{ext}} \\
 \frac{v_{th18} - v_{th19}}{R_{ext}} + C_{ext} \frac{d}{dt}(v_{th18}) = \frac{v_{th7} - v_{th18}}{R_{ext}} \\
 \frac{v_{th\,j+1} - v_{th\,j+2}}{R_{ext}} + C_{ext} \frac{d}{dt}(v_{th\,j+1}) = \frac{v_{th\,j} - v_{th\,j+1}}{R_{ext}}, \quad j = 18, \dots, 20 \\
 \frac{v_{th22} - V_{amb}}{R_{ext}} + C_{ext} \frac{d}{dt}(v_{th22}) = \frac{v_{th21} - v_{th22}}{R_{ext}} \\
 \frac{v_{th23} - v_{th24}}{R_{ext}} + C_{ext} \frac{d}{dt}(v_{th23}) = \frac{v_{th7} - v_{th23}}{R_{ext}} \\
 \frac{v_{th\,j+1} - v_{th\,j+2}}{R_{ext}} + C_{ext} \frac{d}{dt}(v_{th\,j+1}) = \frac{v_{th\,j} - v_{th\,j+1}}{R_{ext}}, \quad j = 23, \dots, 25 \\
 \frac{v_{th27} - V_{amb}}{R_{ext}} + C_{ext} \frac{d}{dt}(v_{th27}) = \frac{v_{th26} - v_{th27}}{R_{ext}}
 \end{array} \right. \quad (6.16)$$

6.2.4.1. Expressões de análise no formato DAE

Colocando as equações anteriores no formato DAE obtém-se o sistema de equações algébrico diferenciais da rede térmica *junction-case*

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \frac{v_{th1} - v_{th2}}{R_{th1}} + C_{th1} \frac{d}{dt}(v_{th1}) = p_{diss} \\
 \frac{v_{th\,j+1} - v_{th\,j+2}}{R_{th\,j+1}} - \frac{v_{th\,j} - v_{th\,j+1}}{R_{th\,j}} + C_{th\,j+1} \frac{d}{dt}(v_{th\,j+1}) = 0, \quad j = 1, \dots, 5 \\
 \frac{4v_{th7} - (v_{th8} + v_{th13} + v_{th18} + v_{th23})}{R_{ext}} - \frac{v_{th6} - v_{th7}}{R_{th6}} + 4C_{ext} \frac{d}{dt}(v_{th7}) = 0
 \end{array} \right. \quad (6.17)$$

e o da rede térmica *case-ambient*

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \frac{v_{thj+1} - v_{thj+2}}{R_{ext}} - \frac{v_{thj} - v_{thj+1}}{R_{ext}} + C_{ext} \frac{d}{dt}(v_{thj+1}) = 0, \quad j = 7, \dots, 10 \\
 2v_{th12} - v_{th11} + C_{ext} R_{ext} \frac{d}{dt}(v_{th12}) = V_{amb} \\
 \frac{v_{th13} - v_{th14}}{R_{ext}} - \frac{v_{th7} - v_{th13}}{R_{ext}} + C_{ext} \frac{d}{dt}(v_{th13}) = 0 \\
 \frac{v_{thj+1} - v_{thj+2}}{R_{ext}} - \frac{v_{thj} - v_{thj+1}}{R_{th2}} + C_{ext} \frac{d}{dt}(v_{thj+1}) = 0, \quad j = 13, \dots, 15 \\
 2v_{th17} - v_{th16} + C_{ext} R_{ext} \frac{d}{dt}(v_{th17}) = V_{amb} \\
 \frac{v_{th18} - v_{th19}}{R_{ext}} - \frac{v_{th7} - v_{th18}}{R_{ext}} + C_{ext} \frac{d}{dt}(v_{th18}) = 0 \\
 \frac{v_{thj+1} - v_{thj+2}}{R_{ext}} - \frac{v_{thj} - v_{thj+1}}{R_{ext}} + C_{ext} \frac{d}{dt}(v_{thj+1}) = 0, \quad j = 18, \dots, 20 \\
 2v_{th22} - v_{th21} + C_{ext} R_{ext} \frac{d}{dt}(v_{th22}) = V_{amb} \\
 \frac{v_{th23} - v_{th24}}{R_{ext}} - \frac{v_{th7} - v_{th23}}{R_{ext}} + C_{ext} \frac{d}{dt}(v_{th23}) = 0 \\
 \frac{v_{thj+1} - v_{thj+2}}{R_{ext}} - \frac{v_{thj} - v_{thj+1}}{R_{ext}} + C_{ext} \frac{d}{dt}(v_{thj+1}) = 0, \quad j = 23, \dots, 25 \\
 2v_{th27} - v_{th26} + C_{ext} R_{ext} \frac{d}{dt}(v_{th27}) = V_{amb}
 \end{array} \right. , \quad (6.18)$$

onde fica possível identificar e numerar as variáveis de estado $\mathbf{y}(t)$ da seguinte forma

$$\mathbf{y}(t) = [y_j(t), \quad j = 10, \dots, 36] = [v_{thj}, \quad j = 1, \dots, 27] \quad (6.19)$$

e as de excitação $\mathbf{x}(t)$ como

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_{10}(t) = p_{diss} \\ x_j(t) = 0, \quad j = 11, \dots, 20 \\ x_{21}(t) = V_{amb} \\ x_j(t) = 0, \quad j = 22, \dots, 25 \\ x_{26}(t) = V_{amb} \\ x_j(t) = 0, \quad j = 27, \dots, 30 \\ x_{31}(t) = V_{amb} \\ x_j(t) = 0, \quad j = 32, \dots, 35 \\ x_{36}(t) = V_{amb} \end{bmatrix} . \quad (6.20)$$

A componente algébrica $\mathbf{p}(\mathbf{y})$ da rede térmica *junction-case* é definida por

$$\mathbf{p}(\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} \frac{v_{th1} - v_{th2}}{R_{th1}} \\ \frac{v_{thj+1} - v_{thj+2}}{R_{thj+1}} - \frac{v_{thj} - v_{thj+1}}{R_{thj}}, \quad j = 1, \dots, 5 \\ \frac{4v_{th7} - (v_{th8} + v_{th13} + v_{th18} + v_{th23})}{R_{ext}} - \frac{v_{th6} - v_{th7}}{R_{th6}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{y_{10} - y_{11}}{R_{th1}} \\ \frac{y_{j+10} - y_{j+11}}{R_{thj+1}} - \frac{y_{j+9} - y_{j+10}}{R_{thj}}, \quad j = 1, \dots, 5 \\ \frac{4y_{16} - (y_{17} + y_{22} + y_{27} + y_{32})}{R_{ext}} - \frac{y_{15} - y_{16}}{R_{th6}} \end{bmatrix} \quad (6.21)$$

e da rede térmica *case-ambient* por

$$\mathbf{p}(\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} \frac{v_{thj+1} - v_{thj+2}}{R_{ext}} - \frac{v_{thj} - v_{thj+1}}{R_{ext}}, \quad j = 7, \dots, 10 \\ -(v_{th11} - v_{th12}) + v_{th12} \\ \frac{v_{th13} - v_{th14}}{R_{ext}} - \frac{v_{th7} - v_{th13}}{R_{ext}} \\ \frac{v_{thj+1} - v_{thj+2}}{R_{ext}} - \frac{v_{thj} - v_{thj+1}}{R_{ext}}, \quad j = 13, \dots, 15 \\ -(v_{th16} - v_{th17}) + v_{th17} \\ \frac{v_{th18} - v_{th19}}{R_{ext}} - \frac{v_{th7} - v_{th18}}{R_{ext}} \\ \frac{v_{thj+1} - v_{thj+2}}{R_{ext}} - \frac{v_{thj} - v_{thj+1}}{R_{ext}}, \quad j = 18, \dots, 20 \\ -(v_{th21} - v_{th22}) + v_{th22} \\ \frac{v_{th23} - v_{th24}}{R_{ext}} - \frac{v_{th7} - v_{th23}}{R_{ext}} \\ \frac{v_{thj+1} - v_{thj+2}}{R_{ext}} - \frac{v_{thj} - v_{thj+1}}{R_{ext}}, \quad j = 23, \dots, 25 \\ -(v_{th26} - v_{th27}) + v_{th27} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{y_{j+1} - y_{j+2}}{R_{ext}} - \frac{y_j - y_{j+1}}{R_{ext}}, \quad j = 16, \dots, 19 \\ -(y_{20} - y_{21}) + y_{21} \\ \frac{y_{22} - y_{23}}{R_{ext}} - \frac{y_{16} - y_{22}}{R_{ext}} \\ \frac{y_{j+1} - y_{j+2}}{R_{ext}} - \frac{y_j - y_{j+1}}{R_{ext}}, \quad j = 22, \dots, 24 \\ -(y_{25} - y_{26}) + y_{26} \\ \frac{y_{27} - y_{28}}{R_{ext}} - \frac{y_{16} - y_{27}}{R_{ext}} \\ \frac{y_{j+1} - y_{j+2}}{R_{ext}} - \frac{y_j - y_{j+1}}{R_{ext}}, \quad j = 27, \dots, 29 \\ -(y_{30} - y_{31}) + y_{31} \\ \frac{y_{32} - y_{33}}{R_{ext}} - \frac{y_{16} - y_{32}}{R_{ext}} \\ \frac{y_{j+1} - y_{j+2}}{R_{ext}} - \frac{y_j - y_{j+1}}{R_{ext}}, \quad j = 32, \dots, 34 \\ -(y_{35} - y_{36}) + y_{36} \end{bmatrix}. \quad (6.22)$$

A componente dinâmica $\mathbf{q}(\mathbf{y})$ da rede térmica *junction-case* é definida por

$$\mathbf{q}(\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} C_{thj} v_{thj}, \quad j = 1, \dots, 6 \\ 4C_{ext} v_{th7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{thj} y_{j+9}, \quad j = 1, \dots, 6 \\ 4C_{ext} y_{16} \end{bmatrix} \quad (6.23)$$

e da rede térmica *case-ambient* é definida por

$$\mathbf{q}(\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} C_{ext} v_{thj}, & j = 8, \dots, 11 \\ C_{ext} R_{ext} v_{th12} \\ C_{ext} v_{thj}, & j = 13, \dots, 16 \\ C_{ext} R_{ext} v_{th14} \\ C_{ext} v_{thj}, & j = 18, \dots, 21 \\ C_{ext} R_{ext} v_{th22} \\ C_{ext} v_{thj}, & j = 23, \dots, 26 \\ C_{ext} R_{ext} v_{th27} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{ext} y_j, & j = 17, \dots, 20 \\ C_{ext} R_{ext} y_{21} \\ C_{ext} y_j, & j = 22, \dots, 25 \\ C_{ext} R_{ext} y_{26} \\ C_{ext} y_j, & j = 27, \dots, 30 \\ C_{ext} R_{ext} y_{31} \\ C_{ext} y_j, & j = 32, \dots, 35 \\ C_{ext} R_{ext} y_{36} \end{bmatrix}. \quad (6.24)$$

6.2.4.2. Expressões de análise no formato ODE

Utilizando o formato ODE obtém-se o sistema de equações diferenciais ordinário da rede térmica *junction-case*

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(v_{th1}) = \frac{1}{C_{th1}} \left(P_{diss} - \frac{v_{th1} - v_{th2}}{R_{th1}} \right) \\ \frac{d}{dt}(v_{thj+1}) = \frac{1}{C_{thj+1}} \left(\frac{v_{thj} - v_{thj+1}}{R_{thj}} - \frac{v_{thj+1} - v_{thj+2}}{R_{thj+1}} \right), & j = 1, \dots, 5 \\ \frac{d}{dt}(v_{th7}) = \frac{1}{4C_{ext}} \left(\frac{v_{th6} - v_{th7}}{R_{th6}} - \frac{4v_{th7} - (v_{th8} + v_{th13} + v_{th18} + v_{th23})}{R_{ext}} \right) \end{cases} \quad (6.25)$$

e da rede térmica *case-ambient*

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{d}{dt}(v_{thj+1}) &= \frac{1}{C_{ext}} \left(\frac{v_{thj} - v_{thj+1}}{R_{ext}} - \frac{v_{thj+1} - v_{thj+2}}{R_{ext}} \right), \quad j = 7, \dots, 10 \\
 \frac{d}{dt}(v_{th12}) &= \frac{1}{C_{ext}} \left(\frac{v_{th11} - v_{th12}}{R_{ext}} - \frac{v_{th12} - V_{amb}}{R_{ext}} \right) \\
 \frac{d}{dt}(v_{th13}) &= \frac{1}{C_{ext}} \left(\frac{v_{th7} - v_{th13}}{R_{ext}} - \frac{v_{th13} - v_{th14}}{R_{ext}} \right) \\
 \frac{d}{dt}(v_{thj+1}) &= \frac{1}{C_{ext}} \left(\frac{v_{thj} - v_{thj+1}}{R_{ext}} - \frac{v_{thj+1} - v_{thj+2}}{R_{ext}} \right), \quad j = 13, \dots, 15 \\
 \frac{d}{dt}(v_{th17}) &= \frac{1}{C_{ext}} \left(\frac{v_{th16} - v_{th17}}{R_{ext}} - \frac{v_{th17} - V_{amb}}{R_{ext}} \right) \\
 \frac{d}{dt}(v_{th18}) &= \frac{1}{C_{ext}} \left(\frac{v_{th7} - v_{th18}}{R_{ext}} - \frac{v_{th18} - v_{th19}}{R_{ext}} \right) \\
 \frac{d}{dt}(v_{thj+1}) &= \frac{1}{C_{ext}} \left(\frac{v_{thj} - v_{thj+1}}{R_{ext}} - \frac{v_{thj+1} - v_{thj+2}}{R_{ext}} \right), \quad j = 18, \dots, 20 \\
 \frac{d}{dt}(v_{th22}) &= \frac{1}{C_{ext}} \left(\frac{v_{th21} - v_{th22}}{R_{ext}} - \frac{v_{th22} - V_{amb}}{R_{ext}} \right) \\
 \frac{d}{dt}(v_{th23}) &= \frac{1}{C_{ext}} \left(\frac{v_{th7} - v_{th23}}{R_{ext}} - \frac{v_{th23} - v_{th24}}{R_{ext}} \right) \\
 \frac{d}{dt}(v_{thj+1}) &= \frac{1}{C_{ext}} \left(\frac{v_{thj} - v_{thj+1}}{R_{ext}} - \frac{v_{thj+1} - v_{thj+2}}{R_{ext}} \right), \quad j = 23, \dots, 25 \\
 \frac{d}{dt}(v_{th27}) &= \frac{1}{C_{ext}} \left(\frac{v_{th26} - v_{th27}}{R_{ext}} - \frac{v_{th27} - V_{amb}}{R_{ext}} \right)
 \end{aligned} \right\} \quad (6.26)$$

As variáveis ativas são definidas pelas variáveis de estado do circuito representado na Figura 6.1 e pelas variáveis da temperatura da junção do MOSFET de canal N e canal P

$$\mathbf{y}_A = \begin{bmatrix} y_{A_1} \\ y_{A_2} \\ y_{A_3} \\ y_{A_4} \\ y_{A_5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_5 \\ v_8 \\ i_{L_1} \\ v_{th1} \\ v_{th28} \end{bmatrix} \quad \mathbf{g}_A = \begin{bmatrix} g_{A_j}, \quad j = 1, \dots, 4 \\ g_{A_5} \\ g_{A_6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_j, \quad j = 1, \dots, 4 \\ v_6 \\ v_7 \end{bmatrix}. \quad (6.27)$$

As variáveis latentes são definidas pelas variáveis de estado das redes térmicas representadas na Figura 6.4 e Figura 6.5, à exceção das variáveis referentes à temperatura da junção de cada um dos transístores

$$\mathbf{y}_L(NMOS) = \left[y_{L_j}(t), \quad j = 1, \dots, 26 \right] = \left[v_{thj}, \quad j = 2, \dots, 27 \right] \quad (6.28)$$

$$\mathbf{y}_L(PMOS) = \left[y_{L_j}(t), \quad j = 27, \dots, 52 \right] = \left[v_{thj}, \quad j = 29, \dots, 54 \right]. \quad (6.29)$$

6.2.5. Resultados numéricos de simulação

De forma a validar que os objetivos definidos na Secção 1.2 foram alcançados com sucesso, foram realizados diversos testes de desempenho. Para comparar o esforço computacional (tempos de simulação), assim como a precisão dos resultados obtidos utilizando a técnica de simulação multi-ritmo em estudo, foram implementados em Matlab o método MRK23 e também os métodos convencionais Trapezoidal e Gear-2. Estes resultados foram ainda posteriormente validados através do simulador LTspice [48] da *Analog Devices*.

Os resultados obtidos com o método MRK23 implementados em Matlab apresentam grande concordância com os resultados obtidos com os métodos convencionais Trapezoidal e Gear-2, sendo isto válido para todas as variáveis do circuito, elétricas e térmicas. Antes de serem apresentados os resultados de simulação, é necessário definir as condições de simulação.

O sinal de entrada v_{in} é suposto ser constituído por um sinal de áudio mas, com vista à simplificação dos testes, foi considerado um sinal de três tons (três sinusoides não correlacionadas) com as seguintes características

$$v_{in}(t) = 0.5 \sin(2\pi 60t) + 0.124 \sin(2\pi 980t) + 0.031 \sin(2\pi 18000t) \text{ V}. \quad (6.30)$$

A temperatura ambiente é definida por uma fonte de tensão no circuito da rede térmica de cada MOSFET, onde existe a equivalência de $^{\circ}\text{C} = \text{V}$. Esta fonte e as restantes fontes de tensão utilizadas no circuito são definidas pelos seguintes valores

$$V_{amb} = 25 \text{ V}, \quad V_{bias} = 1.5 \text{ V}, \quad V_{DD} = 60 \text{ V}, \quad V_{EE} = -60 \text{ V}. \quad (6.31)$$

A seguir são ilustrados alguns exemplos dos resultados de simulação.

A tensão de saída do circuito amplificador de áudio (sinal v_8) obtida com o método MRK23 é praticamente igual às tensões obtidas com os métodos convencionais, tal como pode ser visto na Figura 6.6. Como se pode observar, o valor absoluto máximo do erro no intervalo considerado é inferior a 0.00001%.

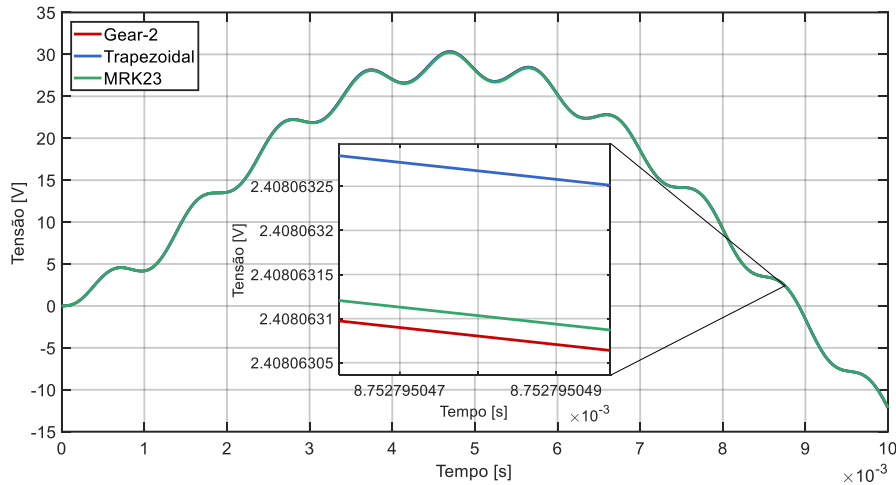


Figura 6.6 - Tensão de saída do amplificador (v_s).

Também o sinal de corrente no indutor (sinal i_{L1}) obtido com o método MRK23 é bastante semelhante às correntes no indutor obtidas com os métodos convencionais. Na Figura 6.7 é possível observar-se o sinal da corrente no indutor, obtido através dos três métodos. Uma vez mais verifica-se que o módulo do erro percentual máximo no intervalo em questão é inferior a 0.00006%.

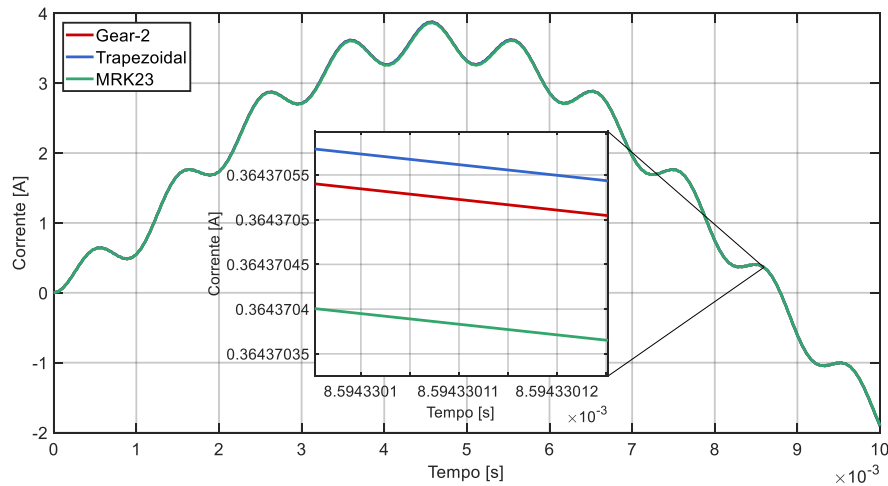


Figura 6.7 - Corrente no indutor (i_{L1}).

As temperaturas da junção de ambos os MOSFETs do andar de saída do amplificador de áudio obtidas com o método MRK23 são muito semelhantes às obtidas com os métodos convencionais. Na Figura 6.8 é possível observar os resultados obtidos para a temperatura de junção para o MOSFET de canal N. O valor absoluto máximo do erro percentual no intervalo considerado é aproximadamente de 0.0007%.

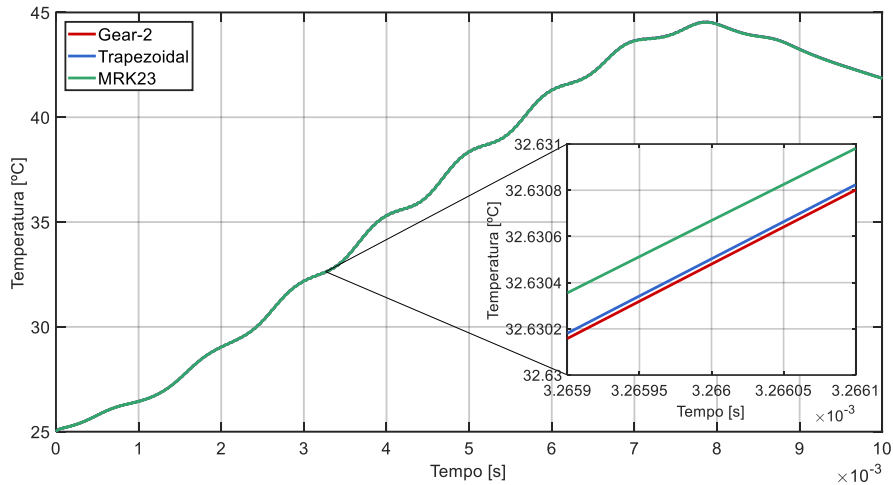


Figura 6.8 - Temperatura da junção do MOSFET de canal N ($T_{j,N}$).

Os resultados para a potência dissipada em cada transistor, obtidos através do método MRK23 apresentam também uma grande concordância com os resultados obtidos com os métodos convencionais. Como se pode observar através dos resultados ilustrados na Figura 6.9, neste caso o método Trapezoidal parece inclusive ser aquele que apresenta menor desempenho.

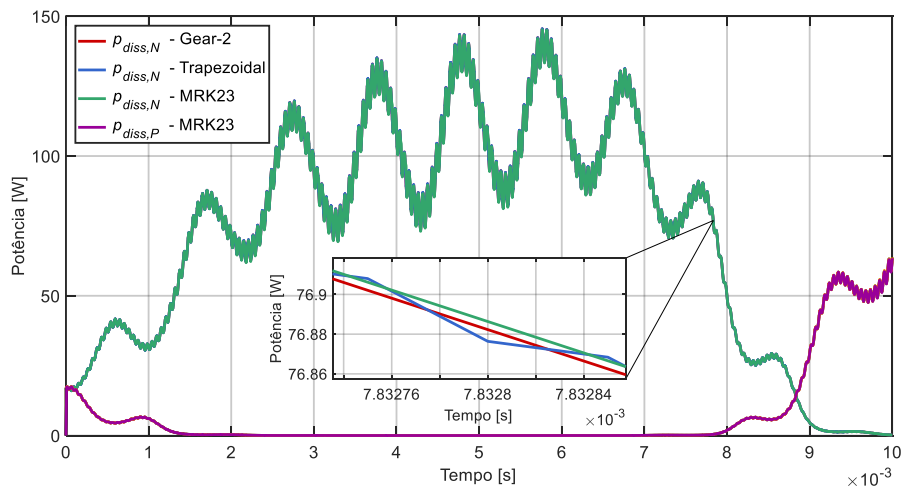


Figura 6.9 - Potência dissipada no MOSFET de canal N ($p_{diss,N}$) e P ($p_{diss,P}$).

De forma a validar todos os resultados numéricos obtidos com o método MRK23 implementados em Matlab, foram igualmente efetuados testes de simulação em LTspice [48].

O LTspice permite que o utilizador escolha o método numérico de simulação, entre as opções “Gear-2”, “Trapezoidal” ou “Trapezoidal modificado”. Neste caso optou-se pelo método

Gear-2, tendo-se constatado que os resultados de simulação com os outros dois métodos de simulação do LTspice são bastante semelhantes aos obtidos com o Gear-2.

A partir dos resultados ilustrados na Figura 6.10 e Figura 6.11 é possível compararem-se os resultados obtidos com o método MRK23 e os resultados obtidos com o LTspice, para a tensão de saída (v_s) e para a corrente no indutor (i_{L1}), respetivamente.

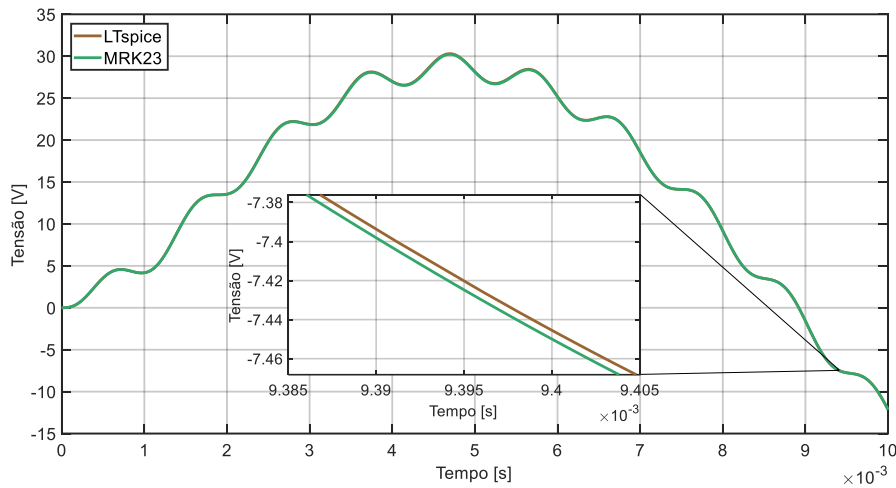


Figura 6.10 - MRK23 vs. LTspice – Tensão de saída (v_s)

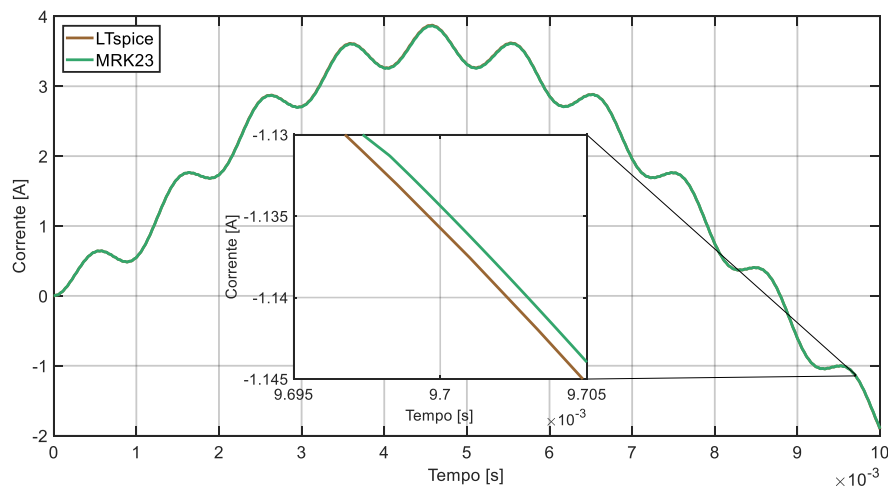


Figura 6.11 - MRK23 vs. LTspice – Corrente no indutor (i_{L1})

Tanto os resultados da tensão de saída (v_s) como da corrente no indutor (i_{L1}) obtidos com o método MRK23 apresentam um erro inferior a 0.15% quando comparados com os resultados obtidos com o LTspice.

Na Figura 6.12 é possível observar-se as formas de onda da temperatura da junção e do encapsulamento do MOSFET de canal N. Na Figura 6.13 estão ilustradas as formas de onda das mesmas temperaturas para o MOSFET de canal P. Foi escolhido um intervalo de tempo de 2s, imediatamente após o arranque do amplificador de áudio, uma vez que após este período de tempo as temperaturas já se encontram estabilizadas.

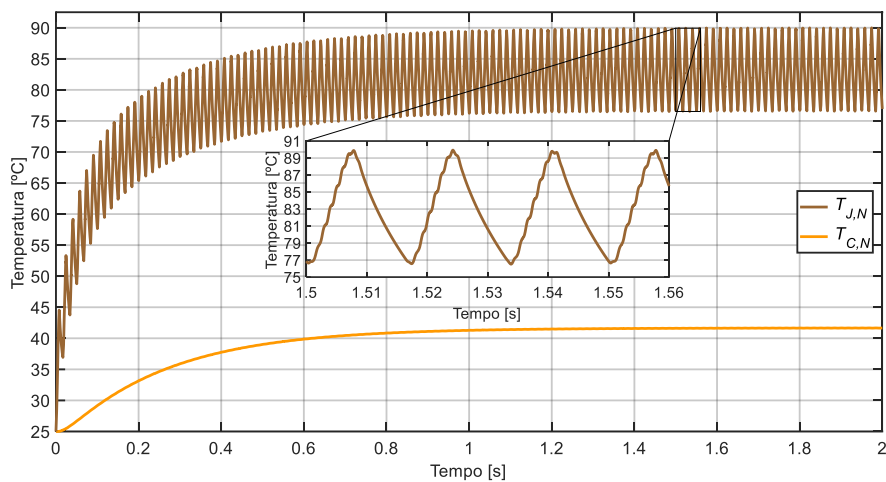


Figura 6.12 - Temperatura da junção ($T_{J,N}$) e encapsulamento ($T_{C,N}$) do NMOS.

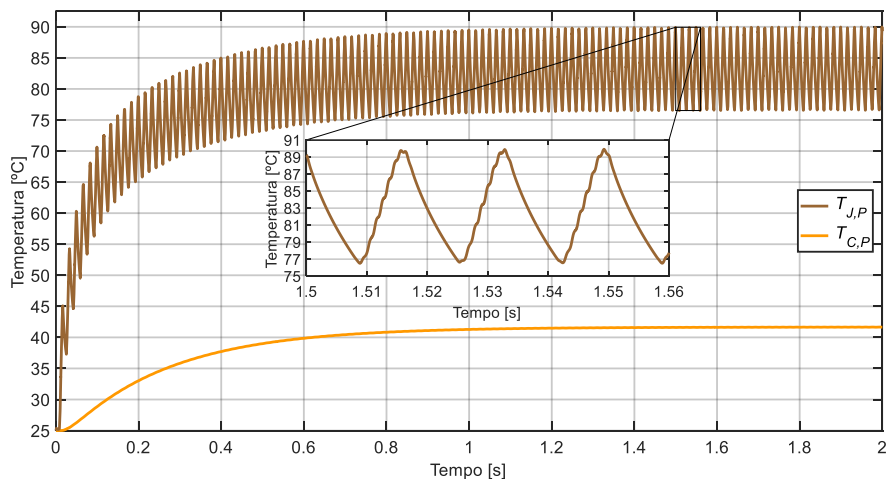


Figura 6.13 - Temperatura da junção ($T_{J,P}$) e encapsulamento ($T_{C,P}$) do PMOS.

No início da simulação, quando $t = 0$ s, a temperatura da junção e do encapsulamento é igual à temperatura ambiente, que neste caso toma o valor de 25°C. Após cerca de 1,1 segundos de simulação, a temperatura de junção oscila periodicamente (de acordo com o sinal de entrada) entre os 77°C e 90°C e a temperatura do encapsulamento estabiliza num valor constante de cerca de 42°C.

6.2.6. Comparação entre métodos

Para o circuito amplificador áudio são vários os ganhos de eficiência que o método MRK23 apresenta face aos métodos convencionais (Trapezoidal e Gear-2). Estes ganhos estão resumidos na Tabela 6.4 para três intervalos de tempo de simulação distintos.

TABELA 6.4
 RESULTADOS DA SIMULAÇÃO DO CIRCUITO REPRESENTADO NA FIGURA 6.1 (AMPLIFICADOR DE ÁUDIO).
 GANHOS DE EFICIÊNCIA (M = 10).

Intervalo de tempo da simulação	Tempo do CPU (h:min:sec)			Ganhos de Eficiência	
	SPICE (Trapezoidal)	SPICE (Gear-2)	MRK23	(MRK23 vs. Trapezoidal)	(MRK23 vs. Gear-2)
[0, 10 μ s]	00:00:40	00:00:31	00:00:03	13.30	10.30
[0, 100 μ s]	00:05:01	00:04:11	00:00:23	13.09	10.91
[0, 10 ms]	10:36:10	07:05:36	00:38:17	16.62	11.12

Como é possível observar-se pela Tabela 6.4, o tempo utilizado pelo processador (CPU) para simular o circuito amplificador de áudio é bastante inferior utilizando o método numérico MRK23 quando em comparação com os métodos convencionais. O método convencional trapezoidal é o que utiliza mais tempo do processador, seguindo-se o método Gear-2 e por fim o método MRK23. Os ganhos de eficiência utilizando o método MRK23 são sempre superiores a uma ordem de grandeza, atingindo o valor de 16 (comparativamente ao método Trapezoidal), e de 11 (comparativamente ao método Gear-2), para um intervalo de tempo de simulação de 10 ms. Verifica-se ainda que o ganho de eficiência do método MRK23 face aos outros dois métodos tende a aumentar com o tempo de simulação.

A precisão dos resultados numéricos obtidos com o método MRK23 foi quantificada usando a métrica *Normalized Mean Squared Error* (NMSE). O objetivo é medir a discrepância entre as diversas formas de onda obtidas com a utilização do método MRK23 e as correspondentes formas de onda obtidas com os métodos convencionais. Como é possível observar-se pela Tabela 6.5, os valores de NMSE relativos à comparação do método MRK23 com os métodos convencionais são bastante baixos, isto é, são bastante bons. Note-se que, em alguns casos, estes valores são inclusive inferiores aos valores de NMSE relativos à discrepância entre os dois métodos convencionais.

TABELA 6.5

RESULTADOS DA SIMULAÇÃO DO CIRCUITO REPRESENTADO NA FIGURA 6.1 (AMPLIFICADOR DE ÁUDIO).
VALORES DO ERRO QUADRÁTICO MÉDIO NORMALIZADO (M = 10).

Variável	Intervalo de tempo da simulação	MRK23 vs. Trapezoidal	MRK23 vs. Gear-2	Trapezoidal vs. Gear-2
v_8	[0, 10 μ s]	1.77×10^{-3}	1.74×10^{-3}	1.52×10^{-7}
	[0, 100 μ s]	3.36×10^{-6}	3.16×10^{-6}	3.43×10^{-9}
	[0, 10 ms]	7.65×10^{-6}	7.65×10^{-6}	8.33×10^{-15}
i_{L1}	[0, 10 μ s]	2.05×10^{-4}	2.00×10^{-4}	5.04×10^{-8}
	[0, 100 μ s]	1.91×10^{-6}	1.82×10^{-6}	1.48×10^{-9}
	[0, 10 ms]	8.14×10^{-6}	8.14×10^{-6}	1.02×10^{-14}
$T_{J,N}$	[0, 10 μ s]	8.81×10^{-11}	5.64×10^{-14}	9.19×10^{-11}
	[0, 100 μ s]	1.94×10^{-11}	7.66×10^{-14}	1.99×10^{-11}
	[0, 10 ms]	3.77×10^{-8}	3.75×10^{-8}	4.34×10^{-13}
$T_{J,P}$	[0, 10 μ s]	9.59×10^{-11}	5.63×10^{-14}	9.20×10^{-11}
	[0, 100 μ s]	2.04×10^{-11}	7.17×10^{-14}	1.99×10^{-11}
	[0, 10 ms]	7.07×10^{-11}	7.67×10^{-11}	8.58×10^{-13}
$p_{diss,N}$	[0, 10 μ s]	5.18×10^{-3}	4.73×10^{-8}	5.21×10^{-3}
	[0, 100 μ s]	5.15×10^{-4}	3.03×10^{-8}	5.16×10^{-4}
	[0, 10 ms]	5.44×10^{-5}	5.41×10^{-5}	2.46×10^{-7}
$p_{diss,P}$	[0, 10 μ s]	4.80×10^{-3}	4.14×10^{-8}	4.82×10^{-3}
	[0, 100 μ s]	4.96×10^{-4}	2.65×10^{-8}	4.97×10^{-4}
	[0, 10 ms]	2.12×10^{-5}	1.61×10^{-5}	5.07×10^{-6}

6.3.Regulador de tensão linear

O circuito da Figura 6.14 é um regulador de tensão linear. Este circuito regula a tensão de saída para um valor de tensão desejado dado por

$$v_2 = \frac{R_1 + R_2}{R_2} V_{ref}. \quad (6.32)$$

Esta regulação é feita através de um amplificador operacional que compara a tensão v_3 com a tensão de referência V_{ref} . Este circuito incorpora também um MOSFET de canal N que com a ajuda do amplificador operacional regula a tensão de saída para a tensão desejada.

A resistência R_3 representa uma carga fixa e a fonte de corrente definida por i_1 representa uma carga variável.

O MOSFET representado na figura está acoplado a um modelo de propagação térmica que modela a propagação de calor no próprio transístor e no dissipador acoplado. Na Figura 6.14 apenas está ilustrada uma representação simplificada deste modelo, estando a versão detalhada descrita na Secção 6.3.4.

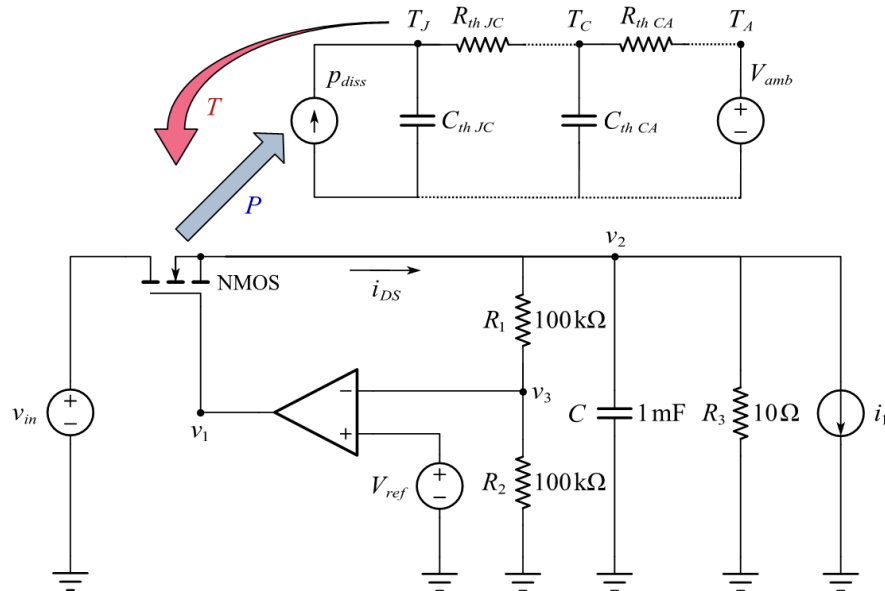


Figura 6.14 - Circuito regulador de tensão linear.

Este circuito do regulador tem 3 nós cujas tensões são desconhecidas, sendo definidas por v_1 , v_2 e v_3 . Cada um destes nós vai dar origem a uma variável de estado. Aplicando as leis de Kirchhoff a esses nós, obtém-se o seguinte sistema

$$\begin{cases} v_1 = V_{amp} \tanh\left(\frac{A_v}{V_{amp}}(V_{ref} - v_3)\right) \\ i_{DS} = \frac{v_2 - v_3}{R_1} + C \frac{d}{dt}(v_2) + \frac{v_2}{R_3} + i_1, \\ \frac{v_2 - v_3}{R_1} = \frac{v_3}{R_2} \end{cases} \quad (6.33)$$

onde V_{amp} representa a tensão de alimentação do amplificador operacional e A_v representa o ganho de tensão do amplificador operacional.

6.3.1. Expressões de análise no formato DAE

Colocando as equações anteriores no formato DAE obtém-se o sistema de equações algébrico diferenciais

$$\begin{cases} v_1 - V_{amp} \tanh\left(\frac{A_v}{V_{amp}}(V_{ref} - v_3)\right) = 0 \\ i_{DS} - \frac{v_2 - v_3}{R_1} - \frac{v_2}{R_3} - C \frac{d}{dt}(v_2) = i_1 \\ \frac{v_2 - v_3}{R_1} - \frac{v_3}{R_2} = 0 \end{cases}, \quad (6.34)$$

onde fica possível identificar e numerar as variáveis de estado

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \quad (6.35)$$

e de excitação

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ i_1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.36)$$

A componente algébrica $\mathbf{p}(\mathbf{y})$ pode ser definida por

$$\mathbf{p}(\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} v_1 - V_{amp} \tanh\left(\frac{A_v}{V_{amp}}(V_{ref} - v_3)\right) \\ i_{DS} - \frac{v_2 - v_3}{R_1} - \frac{v_2}{R_3} \\ \frac{v_2 - v_3}{R_1} - \frac{v_3}{R_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 - V_{amp} \tanh\left(\frac{A_v}{V_{amp}}(V_{ref} - y_3)\right) \\ i_{DS} - \frac{y_2 - y_3}{R_1} - \frac{y_2}{R_3} \\ \frac{y_2 - y_3}{R_1} - \frac{y_3}{R_2} \end{bmatrix} \quad (6.37)$$

e a componente dinâmica $\mathbf{q}(\mathbf{y})$ por

$$\mathbf{q}(\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} 0 \\ -Cv_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -Cy_2 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.38)$$

6.3.2. Expressões de análise no formato ODE

Para se puder utilizar o formato ODE é necessário combinar as equações algébricas e as equações diferenciais da seguinte forma

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(v_2) = \frac{1}{C} \left(i_{DS} - i_1 - \frac{v_2 - v_3}{R_1} - \frac{v_2}{R_3} \right) \\ v_1 - V_{amp} \tanh \left(\frac{A_v}{V_{amp}} (V_{ref} - v_3) \right) = 0, \\ \frac{v_2 - v_3}{R_1} - \frac{v_3}{R_2} = 0 \end{cases} \quad (6.39)$$

onde as duas equações do sistema anterior são divididas numa equação diferencial

$$\frac{d}{dt}(v_2) = \frac{1}{C} \left(i_{DS} - i_1 - \frac{v_2 - v_3}{R_1} - \frac{v_2}{R_3} \right) \quad (6.40)$$

e duas equações algébricas

$$\begin{cases} v_1 - V_{amp} \tanh \left(\frac{A_v}{V_{amp}} (V_{ref} - v_3) \right) = 0 \\ \frac{v_2 - v_3}{R_1} - \frac{v_3}{R_2} = 0 \end{cases}. \quad (6.41)$$

As variáveis de estado das equações diferenciais podem ser definidas por

$$\mathbf{y}(t) = v_2 \quad (6.42)$$

e das equações algébricas por

$$\mathbf{g}(t) = \begin{bmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_3 \end{bmatrix}. \quad (6.43)$$

As equações finais para a obtenção das variáveis de estado são as seguintes

$$y_1' = \frac{1}{C} \left(i_{DS} - i_1 - \frac{y_1 - g_2}{R_1} - \frac{y_1}{R_3} \right) \quad (6.44)$$

$$g_1 - V_{amp} \tanh \left(\frac{A_v}{V_{amp}} (V_{ref} - g_2) \right) = 0 \quad (6.45)$$

$$\frac{y_1(t) - g_2(t)}{R_1} - \frac{g_2(t)}{R_2} = 0. \quad (6.46)$$

6.3.3. Modelo do transístor

O modelo do transístor NMOS do circuito regulador de tensão linear é o mesmo que o utilizado pelo circuito amplificador de áudio, estando descrito na Secção 2.3.3. Neste circuito o transístor possui os parâmetros indicados na Tabela 6.6.

TABELA 6.6
PARÂMETROS DO MODELO DO TRANSÍSTOR.

Transístor	T_{REF}	β_0	β_f	v_{TH}	m_{TH}	K_T	α
NMOS	25 °C	0.035 A/V ²	1.2 A/V ²	1 V	0.005	2	5

Na Figura 6.15 é possível observar-se a relação de i_{DS} com v_{DS} e na Figura 6.16 a relação de i_{DS} com v_{GS} para o transístor de canal N.

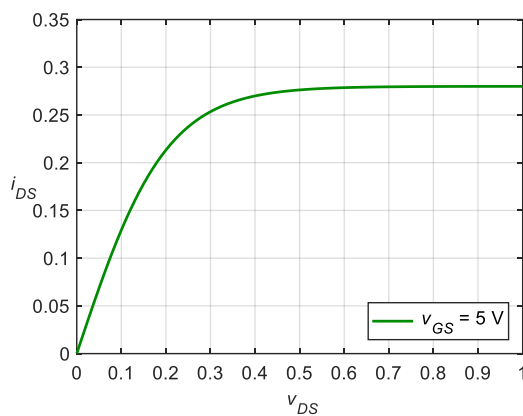


Figura 6.15 - Relação i_{DS} vs. v_{DS} .

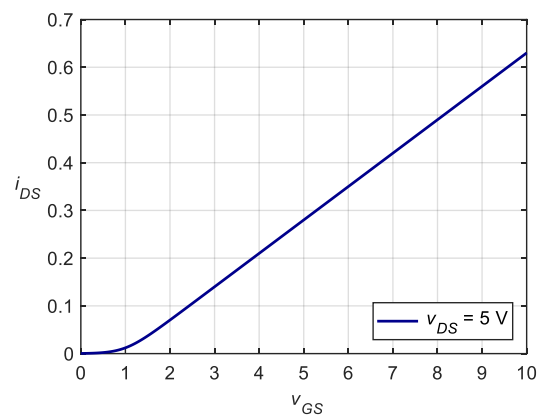


Figura 6.16 - Relação i_{DS} vs. v_{GS} .

6.3.4. Modelos de propagação térmica

No circuito da Figura 6.14, e tal como aconteceu no circuito amplificador, o MOSFET de potência tem acoplado um dissipador de calor. Para a caracterização térmica do conjunto é necessária uma rede de modelação térmica para a propagação de calor gerado pelo MOSFET. Esta pode ser decomposta em duas: A rede específica do MOSFET e a do dissipador de calor.

A rede térmica *junction-case* do MOSFET é composta por 6 secções térmicas RC, sendo o seu circuito igual ao da rede térmica *junction-case* do circuito amplificador áudio. A Figura 6.4 representa esta rede térmica. Os valores das resistências e condensadores utilizados nesta sub-rede toma valores diferentes dos utilizados no circuito amplificador de áudio, pois o MOSFET utilizado no circuito do regulador de tensão é diferente dos utilizados no circuito amplificador de áudio. Os componentes da rede são definidos pelos valores na Tabela 6.7.

TABELA 6.7
COMPONENTES DA REDE JUNCTION-CASE.

X	1	2	3	4	5	6
C_{thX}	$1.94 \cdot 10^{-3}$ F	$9.00 \cdot 10^{-3}$ F	$4.20 \cdot 10^{-3}$ F	$4.95 \cdot 10^{-3}$ F	$1.46 \cdot 10^{-2}$ F	$3.00 \cdot 10^{-2}$ F
R_{thX}	$4.86 \cdot 10^{-2}$ Ω	$1.21 \cdot 10^{-1}$ Ω	$3.42 \cdot 10^{-1}$ Ω	1.50 Ω	1.65 Ω	2.10 Ω

O cálculo da potência dissipada no MOSFET é feito através da seguinte expressão

$$p_{diss} = v_{DS} \cdot i_{DS} \quad (6.47)$$

A rede térmica *case-ambient* do MOSFET é composta por 4 linhas de transmissão iguais em paralelo, sendo cada uma destas constituída por 6 secções térmicas RC em cascata. A sua constituição é igual à rede térmica *case-ambient* do circuito amplificador áudio. A Figura 6.5 representa esta rede térmica. Os valores das resistências e condensadores para rede térmica tomam os valores da Tabela 6.8.

TABELA 6.8
COMPONENTES DA REDE CASE-AMBIENT.

C_{ext}	$6.45 \cdot 10^{-3}$ F
R_{ext}	1.30 Ω

A rede térmica do MOSFET em conjunto com a rede térmica do dissipador possui 27 nós, o que dá origem a 27 variáveis de estado desconhecidas. Como as redes térmicas são iguais às utilizadas no amplificador de áudio, a análise dos nós dessas redes dá origem aos sistemas (6.15) e (6.16).

6.3.4.1. Expressões de análise no formato DAE

Colocando as equações dos sistemas (6.15) e (6.16) no formato DAE, obtém-se o sistema de equações algébrico diferenciais da rede térmica *junction-case* (6.17) e para a rede térmica *case-ambient* o sistema (6.18), onde fica possível identificar e enumerar as variáveis de estado $\mathbf{y}(t)$

$$\mathbf{y}(t) = [y_j(t), \quad j = 4, \dots, 30] = [v_{thj}, \quad j = 1, \dots, 27] \quad (6.48)$$

e de excitação $\mathbf{x}(t)$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_4(t) = P_{diss} \\ x_j(t) = 0, \quad j = 5, \dots, 14 \\ x_{15}(t) = V_{amb} \\ x_j(t) = 0, \quad j = 16, \dots, 19 \\ x_{20}(t) = V_{amb} \\ x_j(t) = 0, \quad j = 21, \dots, 24 \\ x_{25}(t) = V_{amb} \\ x_j(t) = 0, \quad j = 26, \dots, 29 \\ x_{30}(t) = V_{amb} \end{bmatrix}. \quad (6.49)$$

A componente algébrica $\mathbf{p}(\mathbf{y})$ da rede térmica *junction-case* é definida por

$$\mathbf{p}(\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} \frac{v_{th1} - v_{th2}}{R_{th1}} \\ \frac{v_{thj+1} - v_{thj+2}}{R_{thj+1}} - \frac{v_{thj} - v_{thj+1}}{R_{thj}}, \quad j = 1, \dots, 5 \\ \frac{4v_{th7} - (v_{th8} + v_{th13} + v_{th18} + v_{th23})}{R_{ext}} - \frac{v_{th6} - v_{th7}}{R_{th6}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{y_4 - y_5}{R_{th1}} \\ \frac{y_{j+4} - y_{j+5}}{R_{thj+1}} - \frac{y_{j+3} - y_{j+4}}{R_{thj}}, \quad j = 1, \dots, 5 \\ \frac{4y_{10} - (y_{11} + y_{16} + y_{21} + y_{26})}{R_{ext}} - \frac{y_9 - y_{10}}{R_{th6}} \end{bmatrix} \quad (6.50)$$

e da rede térmica *case-ambient* por

$$\mathbf{p}(\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} \frac{v_{thj+1} - v_{thj+2}}{R_{ext}} - \frac{v_{thj} - v_{thj+1}}{R_{ext}}, & j = 7, \dots, 10 \\ -\frac{R_{ext}}{R_{ext}}(v_{th11} - v_{th12}) + v_{th12} \\ \frac{v_{th13} - v_{th14}}{R_{ext}} - \frac{v_{th7} - v_{th13}}{R_{ext}} \\ \frac{v_{thj+1} - v_{thj+2}}{R_{ext}} - \frac{v_{thj} - v_{thj+1}}{R_{ext}}, & j = 13, \dots, 15 \\ -\frac{R_{ext}}{R_{ext}}(v_{th16} - v_{th17}) + v_{th17} \\ \frac{v_{th18} - v_{th19}}{R_{ext}} - \frac{v_{th7} - v_{th18}}{R_{ext}} \\ \frac{v_{thj+1} - v_{thj+2}}{R_{ext}} - \frac{v_{thj} - v_{thj+1}}{R_{ext}}, & j = 18, \dots, 20 \\ -\frac{R_{ext}}{R_{ext}}(v_{th21} - v_{th22}) + v_{th22} \\ \frac{v_{th23} - v_{th24}}{R_{ext}} - \frac{v_{th7} - v_{th23}}{R_{ext}} \\ \frac{v_{thj+1} - v_{thj+2}}{R_{ext}} - \frac{v_{thj} - v_{thj+1}}{R_{ext}}, & j = 23, \dots, 25 \\ -\frac{R_{ext}}{R_{ext}}(v_{th26} - v_{th27}) + v_{th27} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{y_{j+1} - y_{j+2}}{R_{ext}} - \frac{y_j - y_{j+1}}{R_{ext}}, & j = 10, \dots, 13 \\ -\frac{R_{ext}}{R_{ext}}(y_{14} - y_{15}) + y_{15} \\ \frac{y_{16} - y_{17}}{R_{ext}} - \frac{y_{10} - y_{16}}{R_{ext}} \\ \frac{y_{j+1} - y_{j+2}}{R_{ext}} - \frac{y_j - y_{j+1}}{R_{ext}}, & j = 16, \dots, 18 \\ -\frac{R_{ext}}{R_{ext}}(y_{19} - y_{20}) + y_{20} \\ \frac{y_{21} - y_{22}}{R_{ext}} - \frac{y_{10} - y_{21}}{R_{ext}} \\ \frac{y_{j+1} - y_{j+2}}{R_{ext}} - \frac{y_j - y_{j+1}}{R_{ext}}, & j = 21, \dots, 23 \\ -\frac{R_{ext}}{R_{ext}}(y_{24} - y_{25}) + y_{25} \\ \frac{y_{26} - y_{27}}{R_{ext}} - \frac{y_{10} - y_{26}}{R_{ext}} \\ \frac{y_{j+1} - y_{j+2}}{R_{ext}} - \frac{y_j - y_{j+1}}{R_{ext}}, & j = 26, \dots, 28 \\ -\frac{R_{ext}}{R_{ext}}(y_{29} - y_{30}) + y_{30} \end{bmatrix}. \quad (6.51)$$

A componente dinâmica $\mathbf{q}(\mathbf{y})$ da rede térmica *junction-case* é definida por

$$\mathbf{q}(\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} C_{thj} v_{thj}, & j = 1, \dots, 6 \\ 4C_{ext} v_{th7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{thj} y_{j+3}, & j = 1, \dots, 6 \\ 4C_{ext} y_{10} \end{bmatrix} \quad (6.52)$$

e da rede térmica *case-ambient* por

$$\mathbf{q}(\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} C_{ext} v_{thj}, & j = 8, \dots, 11 \\ C_{ext} R_{ext} v_{th12} \\ C_{ext} v_{thj}, & j = 13, \dots, 16 \\ C_{ext} R_{ext} v_{th17} \\ C_{ext} v_{thj}, & j = 18, \dots, 21 \\ C_{ext} R_{ext} v_{th22} \\ C_{ext} v_{thj}, & j = 23, \dots, 26 \\ C_{ext} R_{ext} v_{th27} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{ext} y_j, & j = 11, \dots, 14 \\ C_{ext} R_{ext} y_{15} \\ C_{ext} y_j, & j = 16, \dots, 19 \\ C_{ext} R_{ext} y_{20} \\ C_{ext} y_j, & j = 21, \dots, 24 \\ C_{ext} R_{ext} y_{25} \\ C_{ext} y_j, & j = 26, \dots, 29 \\ C_{ext} R_{ext} y_{30} \end{bmatrix}. \quad (6.53)$$

6.3.4.2. Expressões de análise no formato ODE

Utilizando o formato ODE obtém-se o sistema de equações diferenciais ordinário da rede térmica *junction-case* (6.25) e para a rede térmica *case-ambient* o sistema (6.26).

As variáveis ativas são definidas pelas variáveis de estado do circuito representado na Figura 6.14 e pela variável da temperatura da junção do MOSFET

$$\mathbf{y}_A = \begin{bmatrix} y_{A_1} \\ y_{A_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_2 \\ v_{th1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{g}_A = \begin{bmatrix} g_{A_1} \\ g_{A_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_3 \end{bmatrix}. \quad (6.54)$$

As variáveis latentes são definidas pelas variáveis de estado das redes térmicas representadas na Figura 6.4 e Figura 6.5, à exceção da variável referente à temperatura da junção do MOSFET

$$\mathbf{y}_L = \left[y_{L_j}(t), \quad j = 1, \dots, 26 \right] = \left[v_{th_j}, \quad j = 2, \dots, 27 \right]. \quad (6.55)$$

6.3.5. Resultados numéricos de simulação

Os resultados do circuito regulador de tensão obtidos com o método MRK23 implementado em Matlab também apresentam grande concordância com os resultados obtidos com os métodos convencionais Trapezoidal e Gear-2. Isto é válido para todas as variáveis (elétricas e térmicas) do circuito, tal como acontece com o circuito amplificador de áudio. De seguida são definidas as condições de simulação para o circuito regulador de tensão.

O sinal de entrada v_{in} é composto por uma componente DC de 15 V, em conjunto com uma onda quadrada com amplitude 0.5 V, frequência 500 Hz e duty-cycle 10%. A onda quadrada tem como intuito simular o ruído (flutuações) na tensão de entrada do regulador e foi propositadamente adicionada para testar a eficácia do circuito. O sinal de entrada é assim definido pela seguinte expressão

$$v_{in} = 0.5 \text{ square}(2\pi 500t, 10) + 15 \text{ V}. \quad (6.56)$$

A fonte de corrente i_1 têm o propósito de simular uma carga variável na saída do regulador, definida pela expressão

$$i_1 = 0.35 \text{ square}(2\pi 10t, 30) \text{ A}, \quad (6.57)$$

ou seja, com um formato também em onda quadrada com amplitude 0.35 A, frequência 10 Hz e duty-cycle 30%.

A fonte de tensão que define a temperatura ambiente na rede térmica do MOSFET, a tensão de alimentação do amplificador operacional e a tensão de referência são definidas pelos seguintes valores

$$V_{amb} = 25 \text{ V}, \quad V_{amp} = 15 \text{ V}, \quad V_{ref} = 2.5 \text{ V}. \quad (6.58)$$

Alguns exemplos dos resultados de simulação do regulador de tensão são apresentados a seguir.

Na Figura 6.17 está representada a tensão de saída do regulador (sinal v_2) obtida com os três métodos de simulação num intervalo temporal de 10 ms. Como se pode verificar, a tensão de saída do circuito regulador de tensão obtida com o método MRK23 é muito próxima das tensões obtidas com os métodos Trapezoidal e Gear-2. É possível observar-se ainda pela figura que os resultados obtidos com os métodos convencionais apresentam um erro menor quando comparando com o erro dos resultados obtidos com o método MRK23, mas se tomarmos em consideração o erro absoluto percentual máximo dos resultados obtidos com o método MRK23, este toma um valor próximo de 0.00000006%.

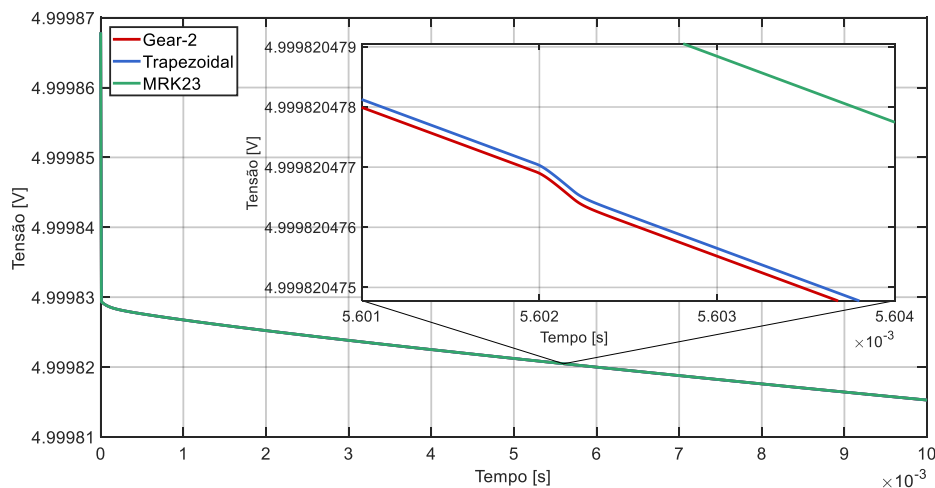


Figura 6.17 - Tensão de saída do regulador (v_2).

Os resultados obtidos para a tensão de saída do amplificador operacional (sinal v_1) estão representados na Figura 6.18. Observando as formas de onda do sinal v_1 verifica-se que o sinal obtido com o método MRK23 é bastante próximo do obtido com o método Gear-2,

enquanto que o obtido com o método Trapezoidal apresenta uma variação oscilatória em torno dos outros dois num formato triangular. Assim, pode-se concluir que o método Trapezoidal apresenta um menor desempenho que os restantes dois métodos.

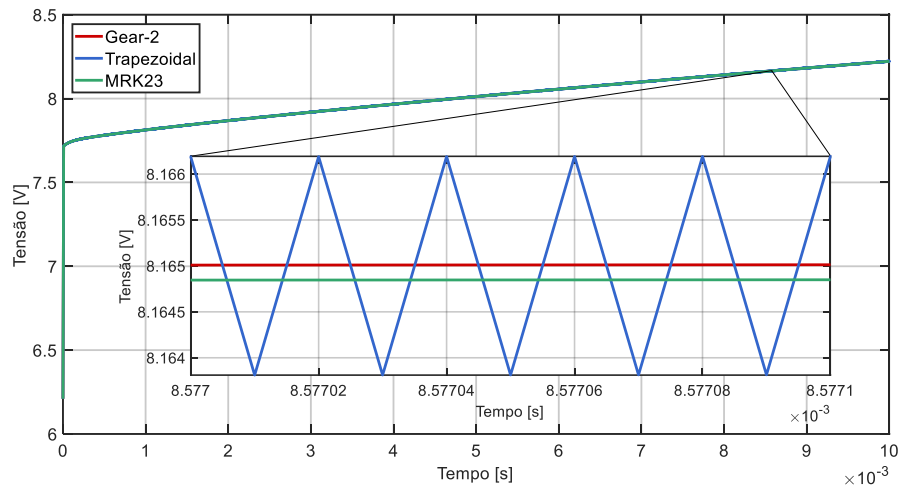


Figura 6.18 - Tensão de saída do amplificador operacional do circuito regulador de tensão (v_1).

Na Figura 6.19 está representada a potência dissipada no MOSFET. Como se pode ver, a potência dissipada obtida pelos três métodos é semelhante. Apesar disso, e tal como aconteceu para a tensão e saída do regulador, verifica-se que o método Trapezoidal produz um sinal de potência com variação triangular, não presente nos resultados dos outros dois métodos. Comparando os resultados da potência dissipada obtida através do método MRK23 e os métodos tradicionais pode-se observar que os resultados do método MRK23 apresentam um pequeno desvio temporal (cerca de 20 μ s), mas para além disto os resultados apresentam bastantes semelhanças.

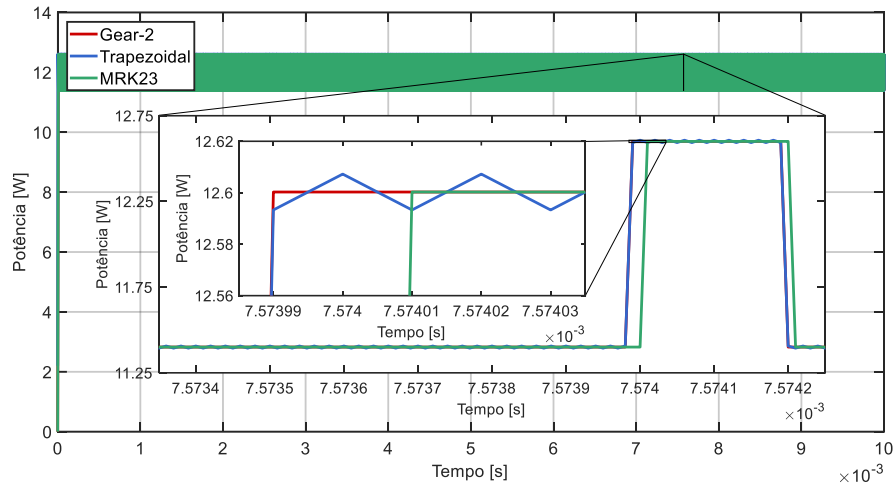


Figura 6.19 - Potência dissipada no MOSFET (p_{diss}).

Os resultados obtidos com o método MRK23 para a temperatura de junção apresentam um erro percentual bastante baixo, nomeadamente com um valor inferior a 0.006%, como se pode verificar nos resultados presentes na Figura 6.20.

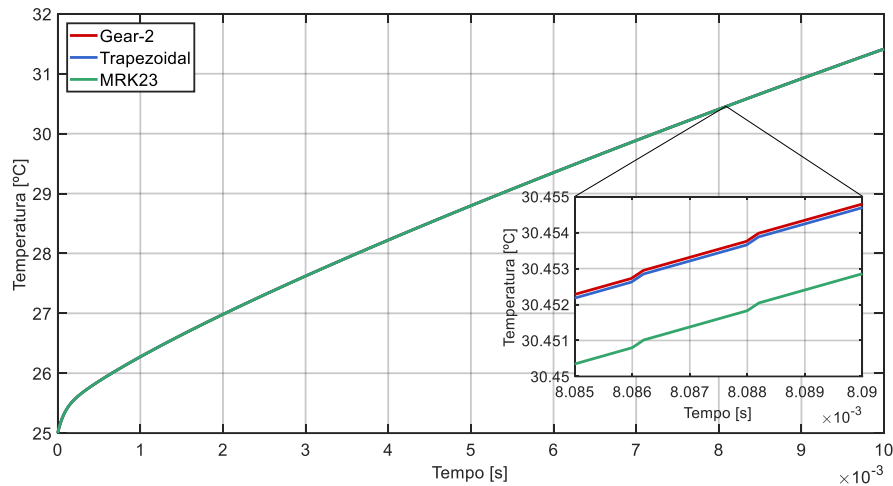


Figura 6.20 - Temperatura da junção do MOSFET (T_j).

Tal como no circuito amplificador de áudio, foram também obtidos para o regulador de tensão resultados de simulação com o LTspice utilizando o método Gear-2. A Figura 6.21 ilustra os resultados da tensão de saída do regulador obtidos com o LTspice e com o método MRK23 implementado em Matlab. Os resultados da tensão de saída obtidos através do Matlab parecem apresentar melhor resolução que os resultados obtidos através do LTspice. A explicação poderá estar no facto dos resultados obtidos com o LTspice apresentarem maior ruído numérico do que os resultados obtidos através do Matlab. Se tomarmos em

consideração o erro percentual dos resultados da tensão de saída (v_2) obtidos com o Matlab comparativamente com o LTspice, este toma um valor inferior a 0.00005%.

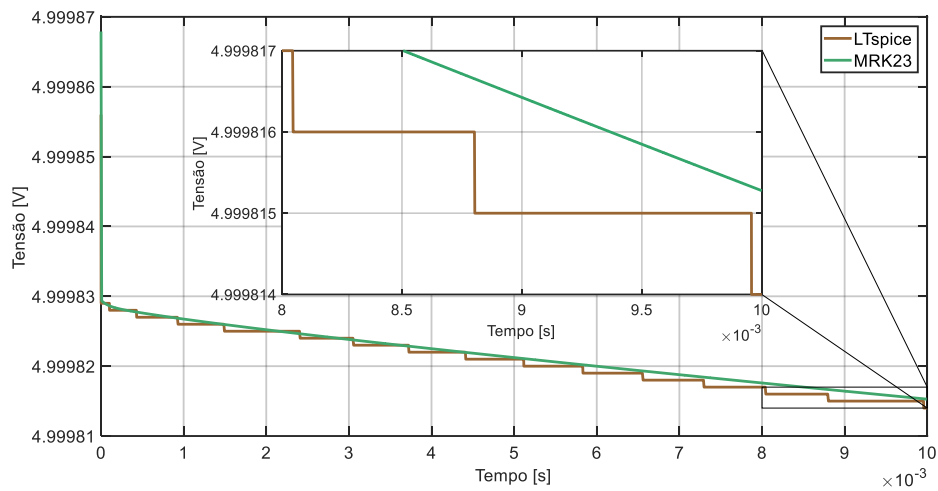


Figura 6.21 - MRK23 vs. LTspice – Tensão de saída (v_2).

A Figura 6.22 e a Figura 6.23 apresentam resultados de simulação para um período de 2s, imediatamente após o arranque do amplificador de áudio, uma vez que após este período de tempo as temperaturas já se encontram estabilizadas. A Figura 6.22 ilustra a corrente *drain-source* do MOSFET (i_{DS}).

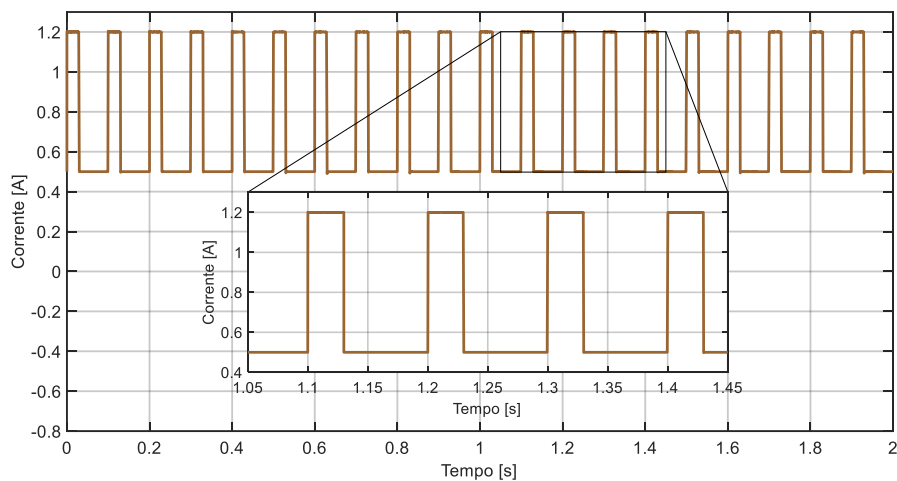


Figura 6.22 - Corrente *drain-source* do MOSFET (i_{DS}).

Na Figura 6.23 é possível observar-se as formas de onda da temperatura da junção e encapsulamento do MOSFET. No início da simulação, quando $t = 0$ s, a temperatura da junção e encapsulamento é igual à temperatura ambiente, que neste caso toma o valor de

25°C. Após cerca de 1,5 segundos de simulação, a temperatura de junção oscila entre os 78°C e 85°C e a temperatura do encapsulamento estabiliza num valor próximo dos 38°C.

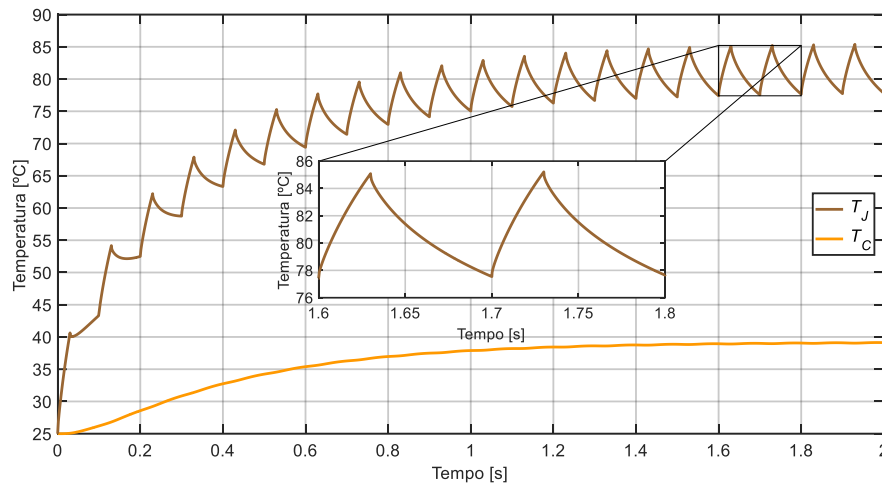


Figura 6.23 - Temperatura da junção (T_J) e encapsulamento (T_C) do MOSFET.

6.3.6. Comparação entre métodos

Tal como para o circuito amplificador de áudio, também os resultados de simulação obtidos para o circuito regulador de tensão linear obtidos com o método MRK23 foram comparados com os métodos convencionais de forma a verificar a precisão e ganhos de eficiência que este método potencia. A Tabela 6.9 indica resumidamente os ganhos de eficiência que o método MRK23 apresenta em relação aos métodos convencionais (Trapezoidal e Gear-2). Como se pode verificar, os ganhos de eficiência atingem um valor próximo a 15 (comparativamente ao método Trapezoidal), e de 11 (comparativamente ao método Gear-2), para o intervalo de tempo mais longo (10 ms). Estes ganhos são elevados, sendo sempre superiores a uma ordem de grandeza.

TABELA 6.9

RESULTADOS DA SIMULAÇÃO DO CIRCUITO REPRESENTADO NA FIGURA 6.14 (REGULADOR DE TENSÃO).
GANHOS DE EFICIÊNCIA ($M = 10$).

Intervalo de tempo da simulação	Tempo do CPU (h:min:sec)			Ganhos de eficiência	
	SPICE (Trapezoidal)	SPICE (Gear-2)	MRK23	(MRK23 vs. Trapezoidal)	(MRK23 vs. Gear-2)
[0, 10 μ s]	00:00:31	00:00:23	00:00:01	31.00	23.00
[0, 100 μ s]	00:04:58	00:03:39	00:00:10	29.80	21.90
[0, 10 ms]	07:19:02	05:29:16	00:29:57	14.66	11.00

A Tabela 6.10 indica os valores de NMSE relativos à comparação do método MRK23 com os métodos convencionais. A precisão utilizando o método MRK23 é bastante elevada, uma vez que os valores NMSE dos resultados obtidos entre o método MRK23 e os métodos convencionais são bastantes reduzidos.

TABELA 6.10

RESULTADOS DA SIMULAÇÃO DO CIRCUITO REPRESENTADO NA FIGURA 6.14 (REGULADOR DE TENSÃO).

VALORES DO ERRO QUADRÁTICO MÉDIO NORMALIZADO ($M = 10$).

Variável	Intervalo de tempo da simulação	MRK23 vs. Trapezoidal	MRK23 vs. Gear-2	Trapezoidal vs. Gear-2
v_2	[0, 10 μ s]	7.42×10^{-19}	1.62×10^{-17}	1.01×10^{-17}
	[0, 100 μ s]	7.47×10^{-20}	1.62×10^{-18}	1.01×10^{-18}
	[0, 10 ms]	3.90×10^{-19}	4.38×10^{-19}	1.18×10^{-20}
v_1	[0, 10 μ s]	3.76×10^{-7}	4.04×10^{-7}	2.97×10^{-8}
	[0, 100 μ s]	5.88×10^{-8}	4.02×10^{-8}	2.43×10^{-8}
	[0, 10 ms]	2.26×10^{-8}	5.81×10^{-10}	2.21×10^{-8}
T_J	[0, 10 μ s]	5.47×10^{-14}	7.23×10^{-14}	1.10×10^{-14}
	[0, 100 μ s]	4.10×10^{-12}	2.67×10^{-12}	1.96×10^{-13}
	[0, 10 ms]	2.29×10^{-9}	2.48×10^{-9}	1.02×10^{-11}
p_{diss}	[0, 10 μ s]	2.40×10^{-4}	2.10×10^{-4}	8.40×10^{-5}
	[0, 100 μ s]	1.93×10^{-4}	1.98×10^{-4}	1.63×10^{-5}
	[0, 10 ms]	1.83×10^{-4}	1.79×10^{-4}	8.12×10^{-6}

7. Conclusões

7.1. Conclusões

O trabalho apresentado nesta dissertação demonstra o elevado desempenho computacional obtido através da aplicação de técnicas multi-ritmo (técnicas baseadas em múltiplas escalas temporais) à simulação de circuitos eletrónicos que requerem a estimação do seu comportamento eletrotérmico. Como se demonstrou no capítulo anterior, os ganhos de eficiência face às técnicas de simulação SPICE tradicionais (técnicas que utilizam apenas uma escala temporal) foram obtidos sem comprometer a precisão dos resultados.

Os circuitos eletrónicos utilizados nos casos de estudo desta dissertação usam MOSFETs. Assim, foi desenvolvido e apresentado um modelo de MOSFET simples que, apesar da sua baixa complexidade e precisão moderada, permite estimar o comportamento real do transístor em baixa frequência perante variações térmicas significativas. Para isso, foi necessário considerar no modelo a temperatura de funcionamento (dinâmica). Esta, ao variar ao longo do tempo da simulação do circuito condiciona e faz variar alguns dos valores dos parâmetros do modelo do MOSFET. A temperatura é obtida por meio de um modelo de propagação térmica composto por uma rede térmica para cada MOSFET utilizado nos circuitos. A combinação destes dois modelos permite determinar as temperaturas do MOSFET e consequentemente estimar o comportamento real do mesmo.

Na simulação eletrotérmica de circuitos eletrónicos com grandezas elétricas e térmicas cujos ritmos de evolução temporal podem ser bastante díspares, o método multi-ritmo utilizado, MRK23, mostrou que existe uma vantagem considerável na sua utilização relativamente aos métodos tradicionais Gear-2 e Trapezoidal. Da aplicação dos três métodos à simulação eletrotérmica de um amplificador de potência de áudio e de um regulador linear de potência, estando os transístores dos circuitos acoplados a dissipadores de calor, foi possível concluir que o método multi-ritmo apresenta ganhos de eficiência bastante elevados, na ordem de 10 vezes, quando comparados com os métodos tradicionais. Estes ganhos de eficiência traduzem-se na diminuição do tempo de simulação e do esforço computacional, o que acontece devido ao facto das componentes de evolução rápida serem integradas com um passo temporal reduzido, enquanto que as componentes lentas são integradas com um passo mais longo. Desta forma, consegue-se diminuir o desperdício computacional inerente aos

métodos tradicionais, pelo facto destes integrarem as componentes lentas também com um passo temporal reduzido. Quanto maior for a relação entre componentes lentas e componentes rápidas, menor será o desperdício computacional.

As grandezas elétricas e térmicas dos dois circuitos de teste estimadas através da simulação com o método multi-ritmo foram comparadas com as obtidas a partir dos métodos de simulação tradicionais. A comparação mostrou que os resultados do método MRK23 são bastante semelhantes aos dos métodos Gear-2 e Trapezoidal, apresentando um valor de NMSE bastante reduzido.

O trabalho desta dissertação vai ser apresentado num artigo científico que estará em breve concluído.

7.2. Trabalho futuro

O modelo utilizado para os MOSFETs foi adaptado e simplificado a partir do modelo de MOSFET de nível 1. Apesar deste ser suficiente para o principal objetivo do trabalho, o modelo eletrotérmico pode ser melhorado para aumentar a sua precisão, isto é, para aproximar os resultados obtidos através de simulação aos resultados experimentais efetuados em testes de laboratório. Existem modelos de nível superior, os quais tomam em consideração um maior número de parâmetros físicos, e aos quais correspondem um conjunto de expressões e equações em maior número e mais complexas. Assim, o esforço computacional será acrescido, quer no caso dos métodos tradicionais, quer no caso do método MRK23. Apesar de ser previsível que o método MRK23 conduza sempre a uma poupança de recursos (memória e processamento), não é possível garantir que os ganhos de eficiência se mantêm sempre na mesma ordem de grandeza independentemente da complexidade do modelo usado para o MOSFET.

A rede térmica utilizada para cada MOSFET nos circuitos testados neste documento é composta por 6 andares RC em cascata, em que cada andar RC representa a equivalência da propagação térmica numa certa porção estrutural do dispositivo. Esta rede estimou com alguma precisão as várias temperaturas estruturais dos MOSFETs utilizados. No entanto, a rede térmica ideal para cada MOSFET seria composta por infinitos elementos RC, na qual a estrutura do componente seria dividida em infinitas porções de tamanho infinitesimal. De uma forma mais realista, 6 andares RC poderão não ser suficientes para estimar com elevada precisão a temperatura em certos pontos do MOSFET, sendo que um número excessivo de

secções poderá tornar-se impraticável em termos computacionais. Note-se que para dispositivos de grande dimensão alguns autores sugerem que a rede térmica seja tridimensional, o que faz aumentar drasticamente o número de elementos R_{th} e C_{th} . Desta forma, a pesquisa de um compromisso entre o número de andares RC necessários e a precisão da modelação da propagação de calor no dispositivo poderia ser um tema a explorar.

Outro aspeto importante a melhorar e a incluir na simulação eletrotérmica é a interação térmica entre componentes distintos do mesmo circuito. Por exemplo, no amplificador de potência de áudio, os efeitos térmicos no funcionamento dos dois transístores são considerados isoladamente, o que não traduz a realidade prática, pois estes são normalmente montados no mesmo dissipador de calor. Assim, é importante considerar o acoplamento térmico entre componentes para que a estimativa do funcionamento através de simulação seja próxima do funcionamento real.

O método numérico multi-ritmo utilizado neste trabalho para a resolução de problemas de valor inicial utiliza duas medidas de passo para integrar as variáveis de estado, onde uma medida (passo longo) é normalmente utilizada para as variáveis que variam lentamente (tipicamente as variáveis térmicas) e outra medida de passo (passo curto) para as variáveis que variam rapidamente (tipicamente as variáveis elétricas). Se tomarmos em consideração um circuito de potência de radiofrequência, o qual pela sua natureza já contém variáveis elétricas com diferentes ritmos de evolução temporal, constataremos que existirão mais do que dois grupos de ritmos de evolução, isto é, mais do que duas escalas de tempo distintas, se quisermos efetuar a respetiva simulação eletrotérmica. Para este caso um método multi-ritmo com mais do que duas medidas de passo seria um bom tema a estudar e testar, de forma a verificar se o tempo de processamento do CPU seria significativamente inferior ao do método MRK23, que apenas contém duas medidas de passo.

Referências

- [1] Z. Jakopovic, V. Sunde e Z. Bencic, “Electro-Thermal Modelling and Simulation of a Power-MOSFET,” *Automatika*, vol. 42, n° 1, pp. 71-77, 2001.
- [2] M. Marz e P. Nance, Thermal Modeling of Power-electronic Systems, PCIM Europe: Mag. 2, 2000.
- [3] A. Laprade, S. Pearson, S. Benczkowski, G. Dolny e F. Wheatley, A New PSPICE Electro-Thermal Subcircuit For Power MOSFETs, Application Note 7534 , 2003.
- [4] W. Liyao e S. Maryam, “A Simple Behavioral Electro-Thermal Model of GaN FETs for SPICE Circuit Simulation,” em *IEEE Applied Power Electronics Conference and Exposition (APEC)*, Long Beach, CA, USA, 2016.
- [5] K. Pandya, “Thermal Simulation of Power MOSFETs on the P-SPICE Platform,” em *AN609 Vishay Siliconix*, 2005.
- [6] M. Lotfi e S. Toufik, “The Electro-Thermal Sub Circuit Model for Power MOSFETs,” em *24th International Conference on Microelectronics (ICM)*, Algiers, Algeria, 2012.
- [7] K. Nakabayashi, T. Ozasa e T. Nakabayashi, “Electro-Thermal Modeling and Reliability Simulation of Power MOSFETs with SystemC-AMS - Case Study: An Unclamped Inductive Switching Test Circuit,” 2012.
- [8] A. Chvala, D. Donoval, J. Marek, P. Příbytný, M. Molnár e M. Mikolášek, “Three-Dimensional Electro-Thermal Verilog-A Model of Power MOSFET for Circuit Simulation,” em *Journal of Physics: Conference Series 494*, 2014.
- [9] J. Oliveira, “Analysis of Multirate Behavior in Electronic Systems,” *Tese de Doutoramento, Universidade de Aveiro*, 2009.
- [10] J. Oliveira, “Métodos Multi-Ritmo na Análise e Simulação de Circuitos Electrónicos não lineares,” Dissertação de Mestrado, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade de Coimbra, 2004.
- [11] M. Günther, A. Kværnø e P. Rentrop, “Multirate Partitioned Runge-Kutta Methods,” *BIT Numerical Mathematics*, vol. 41, pp. 504-514, 2001.

- [12] A. Kvernø e P. Rentrop, *Low Order Multirate Runge-Kutta Methods in Electric Circuit Simulation*, IWRMM Universität Karlsruhe, 1999.
- [13] M. Günther e A. Sandu, “Multirate linearly-implicit GARK schemes,” *BIT. Numerical mathematics*, p. 62(3), 2021.
- [14] M. A. Rahman, “A Review on Semiconductors Including Applications and Temperature Effects in Semiconductors,” *American Scientific Research Journal for Engineering, Technology, and Sciences (ASRJETS)*, vol. 7, nº 1, pp. 50-70, 2014.
- [15] W. J. Hepp e C. F. Wheatley, “A new PSICE sub-circuit for the power MOSFET featuring global temperature options,” em *PESC '91 Record 22nd Annual IEEE Power Electronics Specialists Conference*, Cambridge, MA, USA, 1991.
- [16] L. W. Nagel, “The Life of SPICE,” em *Joint Meeting of the Princeton ACM and IEEE Computer Society*, 2004.
- [17] T. Patel, “Comparison of Level 1, 2 and 3 MOSFET’s,” 3 Dezembro 2014.
- [18] L. W. Nagel, “Is It Time for SPICE 4 ?,” 24 Agosto 2004. [Online]. Available: <http://www.omega-enterprises.net/Is%20It%20Time%20For%20SPICE4.pdf>. [Acedido em 31 Outubro 2022].
- [19] L. W. Nagel, “SPICE2: A Computer Program to Simulate Semiconductor Circuits,” EECS Department, University of California, Berkeley, 1975.
- [20] V. Siliconix, “Power MOSFET Basics: Understanding Gate Charge and Using it to Assess Switching Performance,” 16 Fevereiro 2016. [Online]. Available: <https://www.vishay.com/docs/73217/an608a.pdf>. [Acedido em 10 Abril 2023].
- [21] “Chapter 16. Selecting a MOSFET Model,” Star-Hspice Manual Index, 1998. [Online]. Available: <https://class.ece.uw.edu/cadta/hspice/>. [Acedido em 23 Agosto 2022].
- [22] I. A. Kharitonov, “Compact Power BJT and MOSFET models parameter extraction with account for thermal effects,” Russia, Moscow State Institute of Electronics and Mathematics, 2011.
- [23] G. Miller, “LEVEL1 Model (MOSFET Level-1 Model),” 2008. [Online]. Available: <https://edadocs.software.keysight.com/pages/viewpage.action?pageId=5908967>. [Acedido em 23 Agosto 2022].
- [24] Motorola, “Motorola's Electro Thermal (MET) LDMOS Model,” [Online].

- [25] A. LAKRIM e D. TAHRI, “The DC Behavioural Electrothermal Model of Silicon Carbide Power MOSFETs under SPICE,” em *IEEE International Conference on Industrial Technology (ICIT)*, Seville, Spain, 2015.
- [26] N. B. Carvalho e J. C. Pedro, *Intermodulation Distortion in Microwave and Wireless Circuits*, Artech, 2003.
- [27] E. Hairer e G. Wanner, *Solving Ordinary Differential Equations II: Stiff and Differential-Algebraic Problems*, Springer-Verlag, Berlin: Springer Series in Computational Mathematics 14, 1991.
- [28] E. Hairer, S. P. Norsett e G. Wanner, *Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems*, Springer-Verlag, Berlin: Springer Series in Computational Mathematics 8, 1987.
- [29] J. D. Lambert, *Numerical Methods for Ordinary Differential Systems: The Initial Value Problem*, John Wiley & Sons, West Sussex, 1991.
- [30] J. C. Butcher, “A history of Runge-Kutta methods,” *Applied Numerical Mathematics* 20, Department of Mathematics, The University of Auckland, Auckland, New Zealand, 1996.
- [31] J. C. Butcher e G. Wanner, “Runge-Kutta methods: some historical notes,” *Applied Numerical Mathematics*, vol. 22, pp. 113-151, 1996.
- [32] P. Kaps e P. Rentrop, “Generalized Runge-Kutta Methods of Order Four with Step-size Control for Stiff Ordinary Differential Equations,” *Numerische Mathematik*, vol. 33, pp. 55-68, 1979.
- [33] A. R. Gourlay, “A Note on Trapezoidal Methods for the Solution of Initial Value Problems,” *Mathematics of Computational*, vol. 24, pp. 629-633, 1970.
- [34] O. A. Akinfenwa, S. N. Jator e N. M. Yao, “Continuous block backward differentiation formula for solving stiff ordinary differential equations,” *Computers and Mathematics with Applications*, 2012.
- [35] E. Suli e D. Mayers, “An Introduction to Numerical Analysis,” University of Oxford, 2003.
- [36] A. Ben-Israel, “A Newton-Raphson Method for the Solution of Systems of Equations,” *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Technion-Israel Institute of Technology and Northwestern University, 1966.

- [37] J. Oliveira e A. Araújo, “Envelope Transient Simulation of Nonlinear Electronic Circuits Using Multi-Rate Runge-Kutta Algorithms,” *WSEAS Transactions on Electronics*, vol. 3, pp. 77-84, 2006.
- [38] M. Günther e P. Rentrop, “Multirate ROW Methods and Latency of Electric Circuits,” *Applied Numerical Mathematics*, vol. 13, pp. 83-102, 1993.
- [39] P. R. Michael Günther, “Partitioning and Multirate Strategies in Latent Electric Circuits,” *International Series of Numerical Mathematics*, 1994.
- [40] A. Kværnø, “Stability of multirate Runge-Kutta schemes,” *International Journal of Differential Equations and Applications*, vol. 1, 2000.
- [41] C. Hachtel, A. Bartel, M. Günther e A. Sandu, “Multirate implicit Euler schemes for a class of differential–algebraic equations of index-1,” *Journal of Computational and Applied Mathematics*, p. 387, 2021.
- [42] M. G. S. R. Adrian Sandu, “Linearly implicit GARK schemes,” em *Applied Numerical Mathematics*, 2021, pp. 286-310.
- [43] S. Roberts, J. Loffeld, A. Sarshar, C. Woodward e A. Sandu, “Implicit Multirate GARK Methods,” *Journal of Scientific Computing*, p. 87, 2021.
- [44] M. Günther e A. Sandu, “Multirate generalized additive Runge Kutta methods,” *Numerische Mathematik*, p. 133(3), 2013.
- [45] A. Sarshar, S. Roberts e A. Sandu, “Design of High-Order Decoupled Multirate GARK Schemes,” *Computational Science Laboratory*, Virginia, USA, 2018.
- [46] M. H. C. Christopher A. Kennedy, “Higher-order additive Runge–Kutta schemes for ordinary differential equations,” *Applied Numerical Mathematics*, pp. 183-205, 2019.
- [47] P. Bogacki e L. Shampine, “A (2)3 pair of Runge-Kutta formulas,” *Applied Math. Letters*, pp. 2:1-9, 1989.
- [48] LTspice, “All things LTspice,” [Online]. Available: <https://www.analog.com/en/design-center/design-tools-and-calculators/ltspice-simulator.html>. [Acedido em 05 Maio 2023].
- [49] U. M. Ascher e L. R. Petzold, *Computer Methods for Ordinary Differential Equations and Differential-Algebraic Equations*, United States: University City Science Center Philadelphia, PA, 1998.
- [50] “4. SPICE LEVEL 1 MOSFET,” *Institute of Microelectronic Systems*, [Online]. Available: <http://www.csit->

sun.pub.ro/courses/vlsi/VLSI_Darmstad/www.microelectronic.e-technik.tu-darmstadt.de/lectures/winter/vlsi/vorlesung_pdf/chap04.pdf.

- [51] M. A. Belaïd, A. M. Nahhas e M. Masmoudi, “A Compact Model of Mosfet Transistors Including Dispersion and Thermal Phenomena,” *Journal of Electrical and Electronic Engineering*, vol. 3, n° 6, pp. 192-197, 2015.
- [52] M. Shahjalal, H. Lu e C. j. Baile, “A Review of the Computer Based Simulation of Electro-Thermal Design of Power Electronics Devices,” em *20th International Workshop on Thermal Investigations of ICs and System*, Greenwich, London, UK, 2014.
- [53] D. Lena, I. Buraioli, A. Bocca, D. Demarchi e A. Macii, “An Accurate Electro-Thermal Model of SiC Power MOSFETs for Fast Simulations,” em *IEEE International Conference on Industrial Technology (ICIT)*, Lyon, France, 2018.
- [54] L. Cai, W. Chen, P. Chang, G. Du, X. Zhang, J. Kang e X. Liu, “A Physics-based Thermal Model of Nanosheet MOSFETs for Device-Circuit Co-design,” em *IEEE International Electron Devices Meeting (IEDM)*, San Francisco, CA, USA, 2018.
- [55] T. Smaili, Z. Dibi e D. Bendib, “PSpice Implementation and Simulation of a New Electro-Thermal Modeling for Estimating the Junction Temperature of Low Voltage Power MOSFET,” *Journal of Nano- and Electronic Physic*, vol. 10, n° 6, 2018.
- [56] L. W. Nagel e D. O. Pederson, “SPICE,” em *Midwest Symposium on Circuit Theory*, Waterloo, Ontario, 1973.
- [57] Ł. Starzak, M. Zubert, M. Janicki, T. Torzewicz, M. Napieralska, G. Jablonski e A. i. o. A. Napieralski, “Behavioral Approach to SiC MPS Diode Electrothermal Model Generation,” *IEEE Transactions on Eletron Devices*, vol. 60, pp. 630-638, 2013.
- [58] C.-K. Cheng, “The Life of SPICE as a Transient Circuit Simulator,” [Online]. Available: <https://cseweb.ucsd.edu/~kuan/talk/mtu18/MtuTalk022318.pdf>. [Acedido em 31 Outubro 2022].
- [59] P. M. Asbeck, L. E. Larson e I. G. Falton, “Synergistic design of DSP and power amplifiers for wireless communications,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 49, n° 11, pp. 2163-2169, 2001.
- [60] L. Larson, D. Kimball, P. Asbeck, P. Draxler, J. Deng e M. Li, “Digital predistortion techniques for linearized power amplifiers,” em *Asia-Pacific Microwave Conference*, Yokohama, Japan, 2006.
- [61] A. Ghadam, S. Burplechner, A. H. Gokceoglu, M. Valkama e A. Springer, “Implementation and Performance of DSP-Oriented Feedforward Power Amplifier

Linearizer,” *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, vol. 59, nº 2, pp. 409-425, 2011.

[62] “LTspice,” [Online]. Available: <https://www.analog.com/en/design-center/design-tools-and-calculators/ltspice-simulator.html>.

[63] E. Hairer, “Order conditions for numerical methods for partitioned ordinary differential equations,” *Numerische Mathematik*, vol. 36, pp. 431-445, 1981.