

Modelo de Comportamento Dinâmico do Veículo Formula Student para otimização do Sistema de Suspensão

Projeto

Mestrado em Engenharia Automóvel

Diogo Luís Marques Gaspar

Leiria, abril de 2026

Modelo de Comportamento Dinâmico do Veículo Formula Student para otimização do Sistema de Suspensão

Projeto

Mestrado em Engenharia Automóvel

Diogo Luís Marques Gaspar, Número: 2230422

Trabalho de Projeto Automóvel realizado sob a orientação do Professor Doutor Sérgio
Santos.

Leiria, abril de 2026

Originalidade e Direitos de Autor

O presente relatório de projeto é original, elaborado unicamente para este fim, tendo sido devidamente citados todos os autores cujos estudos e publicações contribuíram para o elaborar.

Reproduções parciais deste documento serão autorizadas na condição de que seja mencionado os Autores e feita referência ao ciclo de estudos no âmbito do qual o mesmo foi realizado, a saber, Curso de Mestrado em Engenharia Automóvel, no ano letivo 2025/2026, da Escola Superior de Tecnologia e Gestão do Instituto Politécnico de Leiria, Portugal, e, bem assim, à data das provas públicas que visaram a avaliação destes trabalhos.

Resumo

O presente trabalho descreve o desenvolvimento de um simulador de dinâmica de veículos com 12 graus de liberdade em MATLAB Simulink para um protótipo de Fórmula Student, motivado pela ausência de ferramentas de simulação, tanto próprias como comerciais, durante o período de participação na equipa entre 2021 e 2023, e pela ambição de aprofundar competências em dinâmica de veículos e em MATLAB e Simulink com vista a ingressar no mercado de trabalho da competição automóvel.

O modelo integra subsistemas de dinâmica longitudinal e lateral, subsistema de movimento da suspensão e modelo de pneus baseado na Fórmula Mágica de Pacejka, entre outros, sendo validado com dados de telemetria reais obtidos nas provas da FSPT 2025 e da FSG 2025. A simulação da prova de aceleração demonstrou que o modelo replica com boa aproximação o comportamento longitudinal do veículo, obtendo-se um RMSE de 1,805 km/h. A simulação em curva revelou-se inviável devido à instabilidade do controlador de direção em condições transientes, tendo o simulador sido reorientado como ferramenta de análise cinemática, recebendo diretamente dados de telemetria para calcular grandezas tipicamente não medidas em pista, como os movimentos de *pitch*, *roll* e *heave* da carroçaria e o deslocamento individual da suspensão em cada roda. A utilidade prática da ferramenta foi demonstrada através da análise do efeito da introdução de uma barra estabilizadora, onde se verificou uma redução de 25% no ângulo de *roll*. A ferramenta desenvolvida representa um contributo concreto para a equipa, colmatando uma lacuna que persistiu ao longo de vários anos.

Palavras-chave: Formula Student, Suspensão, Matlab, Desenvolvimento.

Abstract

This work describes the development of a 12 degrees-of-freedom vehicle dynamics simulator in MATLAB Simulink for a Formula Student prototype, motivated by the absence of simulation tools, both in-house and commercial, during the period of participation in the team between 2021 and 2023, and by the ambition to deepen expertise in vehicle dynamics and MATLAB and Simulink with the goal of pursuing a career in motorsport engineering.

The model integrates subsystems for longitudinal and lateral dynamics, suspension motion and a tyre model based on Pacejka's Magic Formula, among others, and was validated against real telemetry data obtained during the FSPT 2025 and FSG 2025 competitions. The acceleration event simulation demonstrated that the model replicates the longitudinal behaviour of the vehicle with good accuracy, achieving an RMSE of 1.805 km/h. The cornering simulation proved unfeasible due to instability of the steering controller under transient conditions, leading to the simulator being repurposed as a kinematic analysis tool, receiving telemetry data directly to compute quantities typically not measured during events, such as pitch, roll and heave body motions and individual suspension displacement at each wheel. The practical utility of the tool was demonstrated through the analysis of the effect of introducing an anti-roll bar, where a 25% reduction in roll angle was observed. The developed tool represents a concrete contribution to the team, addressing a gap that persisted over several years.

Keywords: Formula Student, Suspension, Matlab, Development.

Índice

Modelo de Comportamento Dinâmico do Veículo Formula Student para otimização do Sistema de Suspensão.....	i
Modelo de Comportamento Dinâmico do Veículo Formula Student para otimização do Sistema de Suspensão.....	ii
Originalidade e Direitos de Autor	iii
Resumo	iv
Abstract	v
Lista de tabelas	xii
Lista de siglas e acrónimos.....	xiii
Glossário	xvii
1. Introdução	1
2. Competição Formula Student	2
2.1. Estrutura da Competição.....	2
2.2. LART	3
3. Estado de Arte.....	5
3.1. Ferramentas Comerciais.....	5
3.1.1. Optimum G	5
3.1.2. IPG CarMaker	6
3.2. Ferramentas de Simulação de Desenvolvimento Próprio	6
3.2.1. Vehicle Dynamics Analysis in a Formula Student Racing Car, Henrique Amaral	6
3.2.2. Modelling of a high-performance vehicle in MATLAB/Simulink, Rickard Hoglund	7
4. Conceitos de Dinâmica de Veículos.....	8
4.1. Sistema de Coordenadas	8
4.2. Forças Longitudinais.....	8
4.3. Forças Laterais	10
4.4. Definição do Movimento do Veículo	11
4.4.1. Modelo de Duas Rodas	11
4.4.2. Modelo de Quatro rodas	13

4.5. Pneus.....	14
4.5.1. <i>Slip Angle</i>	15
4.5.2. <i>Slip Ratio</i>	17
4.5.3. <i>Camber</i>	18
4.5.4. Resistência ao Rolamento.....	19
4.5.5. Círculo de Fricção	19
4.5.6. <i>Combined Slip</i>	20
4.5.7. Formula Mágica.....	20
4.6. Suspensão	21
4.6.1. Equação do movimento	22
4.6.2. Molas	23
4.6.1. Amortecedor	24
4.6.2. Sistema <i>Anti-Roll Bar</i>	26
4.6.3. Dimensionamento do sistema <i>Anti-Roll bar</i>	27
4.7. Sistema de Travagem	28
4.8. Aerodinâmica	30
4.9. Simulação de tempo por volta	30
4.9.1. Regime Permanente.....	31
4.9.2. Regime Quase-Permanente.....	31
4.9.3. Regime Transitório	32
4.10. Modelo de Espaço de estados.....	33
5. Dados de Referência	35
5.1. Pneus Hoosier R20.....	35
5.2. Formula Student T24e	40
5.2.1. Sistema de aquisição de dados.....	42
5.2.2. Telemetria das provas FSPT e FSG.....	43
6. Desenvolvimento do Modelo de Comportamento Dinâmico	46
6.1. Sistema de Travagem	46
6.2. Sistema de Propulsão	49
6.3. Sistema de Transferência de Cargas.....	51
6.4. Sistema de Cálculo do <i>Slip Angle</i>	52
6.5. Sistema de Cálculo das Velocidades Angulares das Rodas	54
6.6. Sistema de Cálculo do <i>Slip Ratio</i>	55

6.7.	Sistema da Fórmula Mágica de Pacejka	57
6.8.	Sistema de Cálculo das Acelerações.....	61
6.9.	Modelo de Comportamento da Suspensão	63
6.10.	Modelo do Condutor	68
6.11.	Sistema Completo	70
7.	Simulações	73
7.1.	Simulação da Prova de Aceleração	73
7.2.	Simulação da Prova de Autocross.....	78
7.2.1.	Análise do camber dinâmico	84
7.2.2.	Implementação de <i>Anti Roll bar</i>	86
8.	Conclusão	87
8.1.	Trabalhos Futuros	88
9.	Bibliografia.....	89

Lista de Figuras

Figura 1 - Formula Student T24e.	4
Figura 2 - Referencial ortogonal do veículo, (Domingues dos Santos et al., 2014).	8
Figura 3 - Diagrama de corpo livre do veículo (DCL), (https://News.Cision.Com/Koenigsegg/r/ , n.d.).....	9
Figura 4 - DCL lateral do veículo.....	10
Figura 5 - Modelo de duas rodas sem acelerações, (Mastinu & Ploechl, 2014).....	11
Figura 6 - Modelo de duas rodas com três graus de liberdade, (Ramanata, 1998).	12
Figura 7 - Modelo planar de quatro rodas.	13
Figura 8 - Ilustração do <i>slip Angle</i> ,(<i>Tyre Slip Angle – Geometry Explained Suspension Secrets</i> , 2024).	15
Figura 9 - Relação entre o <i>slip angle</i> e a força lateral(<i>Tyre Slip Angle – Geometry Explained Suspension Secrets</i> , 2024).	16
Figura 10 - Aderência longitudinal face ao <i>slip ratio</i>	17
Figura 11 - <i>Camber thrust</i> , (Damian Harty & Michael Blundell, 2015).	18
Figura 12 - Círculo de fricção.	20
Figura 13 - Modelo do sistema com um grau de liberdade, (Rodrigues, 2016).....	22
Figura 14 - Diagrama de simplificação da rigidez da suspensão, (H. Marzbani & Reza N. Jazar, 2024).	24
Figura 15 - Curva de amortecimento de um amortecedor de competição, (Domingues dos Santos et al., 2014).	26
Figura 16 - Barra de torção, adaptado de (H. Marzbani & Reza N. Jazar, 2024).	27
Figura 17 - Círculo de fricção combinado(Amaral, 2022).	32
Figura 18 - Código para interpretação dos dados de forças laterais produzidas pelos pneus.	35
Figura 19 - Gráfico 2D F_y vs SA.	36
Figura 20 - Parâmetros laterais do pneu Hoosier R20 para formulação da fórmula mágica.	37
Figura 21 - Gráfico 3D F_y vs F_z vs SA.....	37
Figura 22 - Parâmetros longitudinais do pneu Hoosier R20 para formulação da fórmula mágica.	38
Figura 23 - Força Longitudinal em função do <i>Slip Ratio</i> e da carga F_z	39
Figura 24 - Coeficiente de fricção em função do SR e de F_z	39
Figura 25 - Dimensões do T24e.	40
Figura 26 - Módulo MTi-680G.	42

Figura 27 - Localização do MTi no veículo.	43
Figura 28 - Dados do teste de aceleração [km/h].....	44
Figura 29 - Dados da velocidade do T24e.....	44
Figura 30 – Dados da aceleração do T24e.....	45
Figura 31 - Dados de <i>yaw</i> do T24e.....	45
Figura 32 - Fluxograma do dimensionamento do sistema de travagem.	47
Figura 33 - Esquema das forças a atuar no sistema de travagem desenvolvido.	48
Figura 34 - Modelação do sistema de travagem.	48
Figura 35 - Curva de potência do motor Emrax 228, (Emrax, 2025).	49
Figura 36 - Esquema do sistema de propulsão do T24e.	49
Figura 37 - Modelo do sistema de propulsão.....	50
Figura 38 - Esquema de funcionamento do modelo de cargas verticais.	52
Figura 39 - Modelo das cargas verticais.	52
Figura 40 - Esquema de funcionamento do modelo de cálculo do <i>slip angle</i>	53
Figura 41 - Sistema de cálculo do <i>Slip Angle</i>	54
Figura 42 - Esquema de funcionamento do modelo de cálculo das velocidades angulares.....	54
Figura 43 - Sistema de cálculo das velocidades angulares.	55
Figura 44 - Sistema de cálculo do <i>slip ratio</i>	56
Figura 45 - Sistema para cálculo do escorregamento longitudinal.	57
Figura 46 - Subsistema dos parâmetros experimentais dos pneus.	57
Figura 47 - Código desenvolvido para cálculo da fórmula mágica.	58
Figura 48 - Código para implementação do círculo de fricção.....	59
Figura 49 - Esquema de funcionamento do modelo da fórmula mágica.	59
Figura 50 - Sistema completo para cálculo das forças dos pneus.	60
Figura 51 - Código para definição das matrizes do modelo de acelerações.	62
Figura 52 - Esquema de funcionamento do modelo de cálculo das acelerações.	63
Figura 53 - Modelo de cálculo das acelerações.	63
Figura 54 - Código para cálculo das matrizes do modelo de suspensão.....	67
Figura 55 - Código para análise do deslocamento vertical de cada roda.	67
Figura 56 – Esquema de funcionamento do modelo de comportamento da suspensão.	68

Figura 57 - Modelo de comportamento da suspensão.	68
Figura 58 - Esquema de funcionamento do modelo do condutor.	69
Figura 59 – Modelo simulink do condutor.	70
Figura 60 - Diagrama de interligação dos subsistemas do modelo.....	71
Figura 61 - Modelo completo desenvolvido no simulink.	72
Figura 62 - Gráfico comparativo entre a velocidade de referência e a velocidade simulada.	74
Figura 63 - RMSE da simulação da prova de aceleração.	75
Figura 64 - <i>Pitch</i> durante a prova de aceleração.....	76
Figura 65 - Gráficos do movimento de heave e das cargas verticais na prova de aceleração.....	77
Figura 66 - Gráficos da força e escorregamento longitudinal da roda traseira esquerda na prova de aceleração.	78
Figura 67 - Dados de referência da prova de autocross face aos dados simulados.....	79
Figura 68 - Modelo completo para análise da suspensão.	80
Figura 69 - Gráfico de comparação entre aceleração longitudinal e <i>pitch</i>	80
Figura 70 - Gráfico de comparação entre aceleração lateral e <i>roll</i>	81
Figura 71 - Correlação entre <i>Roll</i> e distribuição de carga lateral.	82
Figura 72 - Correlação entre o <i>pitch</i> e a carga longitudinal.....	82
Figura 73 - Curso de suspensão nos primeiros 80s da prova de autocross.	83
Figura 74 - Evolução do camber na roda frente esquerda nos primeiros 80s de prova.	84
Figura 75 - Evolução do camber na roda traseira direita nos primeiros 80s de prova.	85
Figura 76 - Comparação dos resultados utilizando <i>anti roll bar</i>	86

Lista de tabelas

Tabela 1 - Dados do T24e.	41
Tabela 2 - Dados do sistema de travagem.	47
Tabela 3 - Parâmetros dos controladores PID.	69

Lista de siglas e acrónimos

a	Aceleração
ARB	Anti-Roll Bar
AutoX	Autocross
A _y	Aceleração lateral
A _x	Aceleração longitudinal
B	Fator de rigidez da Fórmula Mágica
C	Fator de forma da Fórmula Mágica
C _{crit}	Amortecimento crítico
C _D	Coeficiente de arrasto aerodinâmico
CAN	Controller Area Network
CG	Centro de Gravidade
CSV	Comma-Separated Values
DCL	Diagrama de Corpo Livre
DOF	Graus de Liberdade
ESTG	Escola Superior de Tecnologia e Gestão
FSAE	Formula SAE
FSG	Formula Student Germany
FSPT	Formula Student Portugal
F _f	Carga sobre o eixo frontal
F _r	Carga sobre o eixo traseiro

F_x	Força longitudinal
F_y	Força lateral
F_z	Carga vertical
g	Aceleração gravítica
GPS	Global Positioning System
h	Distância do centro de gravidade ao solo
h_{aero}	Altura do ponto de aplicação da força de arrasto
I_z	Momento de inércia sobre o eixo z
J_e	Inércia do motor
J_T	Inércia total do sistema de transmissão
J_w	Inércia do conjunto roda
k_{arb}	Rigidez do sistema anti-roll bar
k_{arm}	Rigidez dos braços da barra estabilizadora
k_{bar}	Rigidez da barra de torção
k_r	Rigidez combinada da roda e pneu
k_s	Rigidez da mola
k_t	Rigidez do pneu
k_w	Rigidez da roda
LTS	Simulação de tempo por volta
L_f	Distancia do centro de massa ao eixo frontal
L_r	Distancia do centro de massa ao eixo traseiro

M	Massa do veículo
PID	Proporcional, Integral e Derivativo
P_h	Pressão hidráulica
QSS	Regime Quase-Permanente
RMSE	Raiz do Erro Quadrático Médio
SA	Ângulo de escorregamento
SS	Regime Permanente
SR	Escorregamento Longitudinal
R_e	Raio efetivo da roda
R_m	Raio médio da pastilha de travão
R_w	Raio da roda
TS	Regime Transitório
TTC	Tire Test Consortium
T_b	Binário de travagem
T_w	Largura entre vias do eixo
U_f	Relação do diferencial
V_c	Velocidade crítica em curva
V_x	Velocidade longitudinal do veículo
V_y	Velocidade lateral do veículo
W_b	Distância entre eixos
Z_s	Movimento vertical da carroçaria
μ	Coeficiente de aderência do pneu

θ	Angulo de pitch
γ	Angulo de roll
δ	Deslocamento

Glossário

Anti-Roll Bar	Elemento de suspensão que liga os dois lados do mesmo eixo, resistindo ao movimento de roll relativo entre as rodas. Aumenta a rigidez em roll sem alterar a rigidez vertical do eixo.
Balance Bar	Barra que conecta o pedal de travão às duas bombas principais de travão, permitindo ao condutor ajustar a distribuição da força de travagem entre o eixo dianteiro e o eixo traseiro através do ajuste da posição da alavanca.
Bound	Movimento de compressão do amortecedor.
Camber	Ângulo formado entre o plano da roda e a vertical, quando observado de frente. Camber negativo inclina o topo da roda para o interior do veículo.
Círculo de Fricção	Representação gráfica do limite de aderência do pneu, que define a combinação máxima de forças longitudinais e laterais que o pneu consegue desenvolver para uma dada carga vertical.
Combined Slip	Condição em que o pneu desenvolve simultaneamente forças longitudinais e laterais, havendo interação entre o escorregamento longitudinal e o escorregamento lateral.
Diagrama de Corpo Livre	Representação esquemática de um corpo isolado com todas as forças e momentos externos que atuam sobre ele.
Dive	Fenómeno de compressão da suspensão dianteira durante a travagem, devido à transferência de carga longitudinal do eixo traseiro para o dianteiro.
Downforce	Força aerodinâmica vertical dirigida para baixo, gerada pela geometria da carroçaria e pelos elementos aerodinâmicos do veículo.
Heave	Movimento vertical de translação da carroçaria do veículo.

Sobreviragem (oversteer)	Comportamento dinâmico em que o eixo traseiro perde aderência antes do dianteiro durante uma curva, fazendo com que o veículo rode mais do que o pretendido pelo condutor.
Pitch	Movimento de rotação da carroçaria em torno do eixo transversal do veículo.
Roll	Movimento de rotação da carroçaria em torno do eixo longitudinal do veículo.
Scrub Radius	Distância horizontal entre o ponto de contacto do pneu com o solo e o ponto onde o eixo de direção interseja o plano do solo.
Slip Angle	Ângulo entre a direção de deslocamento do pneu e o seu plano de rotação.
Slip Ratio	Parâmetro adimensional que quantifica o escorregamento longitudinal do pneu, comparando a velocidade periférica da roda com a velocidade linear do veículo.
Squat	Fenómeno de compressão da suspensão traseira durante a aceleração, devido à transferência de carga longitudinal do eixo dianteiro para o traseiro.
Toe	Ângulo de orientação da roda em relação ao eixo longitudinal do veículo, quando observado de cima.
Subviragem (understeer)	Comportamento dinâmico em que o eixo dianteiro perde aderência antes do traseiro durante uma curva.
Yaw	Movimento de rotação do veículo em torno do eixo vertical.

1. Introdução

No panorama acadêmico, a Fórmula Student destaca-se como uma das competições de engenharia mais prestigiadas a nível mundial, desafiando equipas de estudantes a desenvolver e a construir protótipos de forma a aplicar os conhecimentos adquiridos durante o curso, bem como a adquirir novas competências e aptidões.

Um dos pontos fulcrais na construção de um Fórmula Student é o desenvolvimento e posterior afinação do sistema de suspensão. Na ausência de ferramentas de simulação, estas decisões baseiam-se frequentemente em métodos empíricos e na intuição da equipa, o que limita o potencial de desenvolvimento do veículo, especialmente face à escassez de tempo e recursos disponível para testes físicos em pista. Durante o período compreendido entre 2021 e 2023, no decurso do envolvimento com a equipa, existia precisamente esta lacuna, a inexistência de uma ferramenta capaz de prever o comportamento dinâmico do carro ou de quantificar o impacto de alterações de configuração do mesmo.

O presente trabalho surge assim de uma dupla motivação. Por um lado, pretende-se colmatar esta lacuna através do desenvolvimento de uma ferramenta de simulação que suporte a tomada de decisão da equipa de forma fundamentada. Por outro, procura-se aprofundar competências em dinâmica de veículos e em MATLAB e Simulink, uma vez que são pilares essenciais para posteriormente ingressar no mercado de trabalho da competição automóvel.

Para cumprir estes objetivos, foi desenvolvido um modelo matemático de 12 graus de liberdade implementado em Simulink e validado com dados de telemetria reais obtidos nas provas da FSPT 2025 e da FSG 2025. O modelo integra subsistemas de dinâmica longitudinal, lateral e vertical, incluindo modelos de pneus e de condutor, permitindo não só simular o comportamento global do veículo como também calcular e analisar grandezas tipicamente não medidas em pista.

O documento está organizado em nove capítulos. O Capítulo 2 expõe os fundamentos da competição Fórmula Student. O Capítulo 3 revê o estado da arte das ferramentas de simulação existentes. O Capítulo 4 apresenta os fundamentos teóricos de dinâmica de veículos necessários ao desenvolvimento do trabalho. O Capítulo 5 descreve a forma como foram obtidos os dados experimentais utilizados. O Capítulo 6 detalha o desenvolvimento do modelo e dos seus subsistemas. O Capítulo 7 apresenta as simulações realizadas para as duas provas distintas e a discussão dos resultados obtidos. Por fim, o Capítulo 8 expõe as conclusões do trabalho, e o Capítulo 9 as referências.

2. Competição Formula Student

A Formula Student é uma competição de engenharia académica destinada a estudantes universitários de todo o mundo, centrada no projeto e construção de um monolugar de competição do tipo fórmula. Proposta pela SAE International (Society of Automotive Engineers) em 1981, nos Estados Unidos da América, sob a designação de Formula SAE, a iniciativa rapidamente ganhou projeção internacional, chegando à Europa nas décadas seguintes. Desde então, a competição não parou de crescer. Atualmente, os eventos espalham-se por diversos países, reunindo anualmente centenas de equipas de universidades e institutos politécnicos de todo o globo.

A sua origem responde a uma necessidade real, a de aproximar a formação académica da prática de engenharia. O percurso universitário, por mais completo que seja, raramente coloca o estudante perante as exigências de um projeto real como trabalhar em equipa sob pressão, tomar decisões com consequências físicas e tangíveis, ou lidar com imprevistos que nenhum manual antecipa. É precisamente neste espaço que a Formula Student se insere, desafiando os estudantes a desenvolver, construir e testar um protótipo.

2.1. Estrutura da Competição

A avaliação das equipas divide-se em duas componentes: os eventos estáticos e os eventos dinâmicos.

Os eventos estáticos avaliam o trabalho de engenharia e de gestão que suporta o protótipo. Incluem a apresentação de negócio (Business Presentation), a análise de custos (Cost Report) e a prova de design (Engineering Design), onde a equipa defende perante o júri as opções técnicas tomadas ao longo do desenvolvimento do veículo. Completam esta componente as verificações técnicas de segurança, o teste de inclinação e o teste de ruído.

Nos eventos dinâmicos, o veículo é colocado à prova em pista em quatro provas distintas. A prova de Aceleração consiste em percorrer 75 metros em linha reta a partir do repouso no menor tempo possível. O Skid Pad avalia a aderência lateral através de um percurso em forma de oito. O Autocross é uma prova de velocidade num circuito misto de curvas técnicas e retas, onde se mede a agilidade do conjunto veículo-piloto. Por fim, o Endurance é a prova mais exigente, com cerca de 22 km, testando a fiabilidade, a durabilidade e a eficiência energética do protótipo em condições de corrida prolongada.

A competição organiza-se ainda em duas classes distintas, concebidas para acomodar diferentes graus de maturidade dos projetos. A Classe 1 é a categoria principal, destinada a equipas que apresentam um protótipo totalmente projetado, construído e funcional, sujeito às verificações técnicas de segurança e apto a competir em todos os eventos dinâmicos. A Classe 2, por sua vez, é uma classe de conceito orientada para equipas que ainda não dispõem de um veículo a funcionar, sendo avaliada apenas nos eventos estáticos com base no projeto, no planeamento e no desenvolvimento computacional do veículo.

Esta estrutura permite que equipas mais recentes distribuam por duas épocas o projeto e a construção de um veículo de Classe 1, tornando mais gradual a curva de aprendizagem. A classe é ainda acompanhada de um sufixo que identifica o tipo de motorização, distinguindo os veículos de combustão dos elétricos; é neste contexto que se enquadra a designação Classe 1E, correspondente a um veículo elétrico de Classe 1.

2.2.LART

A LART, Leiria Academic Racing Team, é a equipa de Formula Student do Instituto Politécnico de Leiria, dedicada ao projeto e desenvolvimento do monolugar de competição com sistema de propulsão totalmente elétrico, competindo na Classe 1E. Em 2025, a equipa participou em dois eventos internacionais, a Formula Student Portugal (FSPT), realizada em Portugal, e a Formula Student Germany (FSG), um dos eventos de maior prestígio e competitividade a nível mundial, realizado no circuito de Hockenheim, na Alemanha. A Formula Student Portugal assume particular relevância no presente trabalho, por ter sido a prova onde foram recolhidos parte dos dados de telemetria utilizados. Trata-se de um evento recente no calendário, cuja primeira edição decorreu em 2022 e que, a partir de 2023, passou a realizar-se em Castelo Branco, tornando-se a primeira competição do género em território nacional. A edição de 2025, da qual provêm os dados da prova de aceleração utilizados nesta dissertação, correspondeu já à terceira edição do evento e reuniu mais de seis centenas de estudantes e dezenas de equipas universitárias de várias nacionalidades, refletindo o rápido crescimento e a consolidação da competição no panorama internacional.

A presente tese tem como base o veículo T24e, o quarto protótipo desenvolvido e construído pela LART, de propulsão totalmente elétrica, presente na figura 1. Trata-se de um monolugar de competição com uma massa total de 330 kg incluindo piloto e uma distância entre eixos de 1,55 m, cujas características completas servem de base à parametrização do modelo desenvolvido ao longo deste trabalho.



Figura 1 - Formula Student T24e.

3. Estado de Arte

A Fórmula 1 representa o estado de arte do desenvolvimento automóvel baseado em simulação. Numa disciplina onde os testes em pista são severamente limitados pelo regulamento desportivo, apenas seis dias de testes de pré-época e quatro horas de treinos livres por grande prémio, as equipas transferiram grande parte do seu processo de desenvolvimento para o ambiente virtual.

Esta cultura de simulação, proveniente da Fórmula 1, tem vindo a difundir-se progressivamente pela indústria automóvel mais abrangente e, naturalmente, pelas competições académicas. No contexto do Formula Student, a necessidade de simulação torna-se também de extrema importância uma vez que as equipas têm orçamentos reduzidos, não existem peças suplentes, e os pilotos não têm experiência de corrida profissional. Nestas condições, um erro de design ou de afinação do carro que numa equipa profissional seria corrigido em alguns treinos livres, pode comprometer o bom desempenho da equipa nas competições. A simulação torna-se, portanto, não um luxo, mas uma necessidade estrutural, uma vez que permite antecipar o comportamento do veículo antes do desenvolvimento físico, reduzir o número de iterações em hardware e, após os testes, extrair de dados de telemetria de grandezas que não foram medidas diretamente, alargando assim o valor de cada sessão em pista.

Este capítulo apresenta uma revisão das ferramentas e metodologias de simulação mais relevantes para o contexto da Formula Student, organizada em dois grupos, sendo estes os softwares comerciais especializados em dinâmica de veículos e os modelos desenvolvidos internamente por equipas académicas.

3.1. Ferramentas Comerciais

No panorama das ferramentas comerciais, a escolha da plataforma adequada implica sempre um compromisso entre o nível de detalhe do modelo, os recursos necessários para o operar e o custo da licença. As secções seguintes apresentam as ferramentas com maior presença documentada no contexto da Formula Student, analisando as suas capacidades e limitações.

3.1.1. Optimum G

A OptimumG, empresa fundada por um dos júris mais conhecido nas competições de Formula Student realizadas na Europa, Claude Rouelle, oferece diferentes softwares de simulação, sendo estes o OptimumKinematics para análise cinemática da suspensão, o OptimumTire para modelação de pneus, e o OptimumLap para simulação de tempo por volta.

O OptimumLap é uma ferramenta baseada num modelo de massa pontual em regime quase-permanente. O veículo é definido por 10 parâmetros de entrada, massa, área frontal, coeficientes aerodinâmicos, raio de roda, resistência ao rolamento, coeficientes de atrito

longitudinal e lateral, relações de transmissão e curva de binário do motor. O traçado pode ser gerado a partir de dados de telemetria reais ou descarregado de uma base de dados de circuitos disponível na plataforma. Os resultados abrangem cerca de 60 canais de saída, incluindo tempo por volta, perfil de velocidade, consumos energéticos e acelerações, entre outros. A empresa indica um desvio típico de até 10% face a dados reais, (Optimum G, 2026).

As limitações do OptimumLap são estruturais, o modelo de massa pontual não contabiliza a transferência de carga entre rodas, os efeitos transitórios da suspensão, nem incorpora modelos de pneu semi-empíricos como a Fórmula Mágica de Pacejka, assumindo coeficientes de atrito constantes.

3.1.2. IPG CarMaker

O IPG CarMaker é uma plataforma de simulação desenvolvida pela IPG Automotive especificamente para o desenvolvimento e teste de automóveis ligeiros em todas as fases do processo de desenvolvimento. O software permite construir um protótipo virtual completo do veículo, incluindo a dinâmica de veículo, o sistema de propulsão, o modelo de pneu e o traçado da pista, e combiná-lo com um modelo de condutor adaptativo que aprende os limites do veículo e do traçado de forma automática. O modelo multicorpo do veículo permite analisar em detalhe o comportamento da suspensão, calculando os deslocamentos individuais de cada roda, a variação de camber, a transferência de carga e os movimentos de *roll*, *pitch* e *heave* da carroçaria em qualquer manobra simulada.

3.2.Ferramentas de Simulação de Desenvolvimento Próprio

Para além das ferramentas comerciais, diversas equipas de Fórmula Student têm desenvolvido internamente os seus próprios simuladores de dinâmica de veículos. Esta abordagem reduz custos, eliminando a dependência de licenças comerciais e aprofunda o conhecimento técnico da equipa sobre os fenómenos físicos em jogo. Ao contrário dos softwares pagos, onde o utilizador está limitado às funcionalidades disponibilizadas pelo fabricante, um modelo desenvolvido internamente pode ser adaptado, expandido e integrado com dados de telemetria reais sem qualquer restrição, o limite do que se pode alcançar é determinado pelo conhecimento e pelo esforço da própria equipa. As secções seguintes apresentam alguns trabalhos relevantes publicados na literatura académica.

3.2.1. Vehicle Dynamics Analysis in a Formula Student Racing Car, Henrique Amaral

Na dissertação desenvolvida por (Amaral, 2022) com base no veículo Formula Student T14, desenvolvido pela equipa do Instituto politécnico de Leiria, verificou-se um exemplo de software de simulação de desenvolvimento próprio.

Neste Amaral descreveu a ferramenta desenvolvida como um simulador de tempo por volta utilizando o Simulink. Atendendo aos requisitos específicos da equipa, o simulador foi construído sem a utilização de blocos de dinâmica de veículos predefinidos, ou seja,

o algoritmo é totalmente personalizável. O simulador desenvolvido utilizou uma abordagem de massa pontual, isto é, o chassi foi convertido num único ponto, desprezando por exemplo os efeitos de transferência de peso. Apesar dessa limitação, a simulação utilizou um algoritmo dos componentes do motor definido pelo binário, relações de transmissão, inércia rotacional e consumo de combustível. Calculou também as forças aerodinâmicas com um módulo aerodinâmico que controla a força negativa de sustentação e arrasto presente em cada ponto da pista. O comportamento do pneu foi definido por um modelo básico que prevê forças longitudinais, laterais e de resistência de rolamento do pneu, (Amaral, 2022).

Em comparação com a simulação realizada no software CarMaker onde foi obtido um erro de apenas 6,31% face aos dados reais obtidos em pista. O modelo em Simulink apresentou desvios maiores, na ordem dos 16% a 17%.

Embora o Simulink tenha erros absolutos maiores, Amaral concluiu que é uma ferramenta valiosa para prever tendências e comparar o impacto relativo de diferentes componentes ou configurações de forma rápida e gratuita.

3.2.2. Modelling of a high-performance vehicle in MATLAB/Simulink, Rickard Hoglund

A dissertação de (Höglund, 2022) apresentou o desenvolvimento de um simulador de dinâmica de veículos no software Simulink. Este estudo focou-se na criação de um modelo matemático capaz de prever o comportamento do veículo, dividindo o problema em duas componentes principais: a dinâmica longitudinal e a dinâmica lateral.

O modelo longitudinal recebe uma velocidade de referência e utiliza um controlador PID para simular o comportamento do condutor (aceleração ou travagem). A partir daqui o simulador integra blocos para o motor, embraiagem, transmissão e cálculo de escorregamento do pneu. O movimento final é calculado através de uma equação de resistência ao movimento, que contabiliza a força de tração, o arrasto aerodinâmico e a resistência ao rolamento.

Para o comportamento em curva, adotou-se um modelo de 4 rodas onde este assume o veículo como uma massa pontual com quatro pontos de contacto com o solo, calculando a aceleração lateral e o *yaw rate*. Para a interação pneu-estrada, utilizou-se a Fórmula Mágica de Pacejka, acoplada ao conceito de círculo de tração (garantindo que o pneu não excede o seu limite de aderência ao combinar forças longitudinais e laterais).

Comparada à simulação utilizando o software Adams/Car o autor concluiu que o modelo do simulink foi preciso para situações de baixas velocidades e pouco transientes, tendo apresentado algumas limitações nas condições inversas de maiores velocidades.

4. Conceitos de Dinâmica de Veículos

4.1. Sistema de Coordenadas

O estudo da dinâmica de veículos exige a utilização de um sistema de coordenadas que permita descrever, de forma rigorosa, o movimento e as forças a que está sujeito o veículo. Sendo assim, é utilizado o sistema de coordenadas ortogonal (x , y , z), fixado no centro de gravidade do veículo, conforme ilustrado na figura 2, amplamente adotado na literatura técnica, seguindo a convenção de eixos SAE.

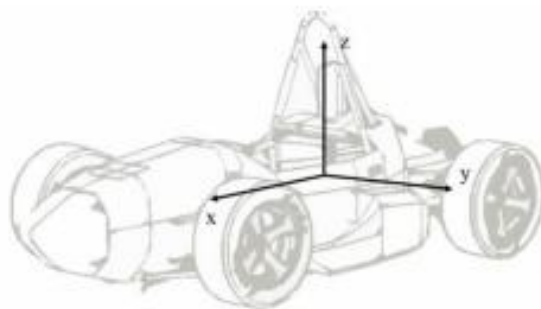


Figura 2 - Referencial ortogonal do veículo, (Domingues dos Santos et al., 2014).

Os movimentos rotacionais do veículo resultam diretamente das forças aplicadas e da transferência de peso entre os eixos ou vias. A rotação em torno do eixo y , designada por *pitch*, ocorre quando forças longitudinais são aplicadas, durante a aceleração ou travagem, provocando a transferência de peso entre os eixos frontal e traseiro. Por sua vez, a rotação em torno do eixo x , conhecida como *roll*, é induzida por forças laterais, típicas em curvas, que geram uma transferência de peso entre as vias, levando o veículo a rotacionar sobre este eixo. Já a rotação em torno do eixo z , ou *yaw*, ocorre quando as rodas exteriores apresentam velocidades superiores às rodas interiores, fazendo o veículo descrever uma trajetória curva e rodar sobre este eixo.

4.2. Forças Longitudinais

A dinâmica de um veículo em movimento resulta da complexa interação entre três elementos fundamentais, sendo estes, o próprio veículo, o piso sobre o qual se desloca, e o ambiente circundante. Por sua vez é possível simplificar esta interação através de um diagrama de corpo livre, figura 3, onde se define um conjunto de forças equivalentes aplicadas ao veículo (considerando o mesmo como um corpo rígido).

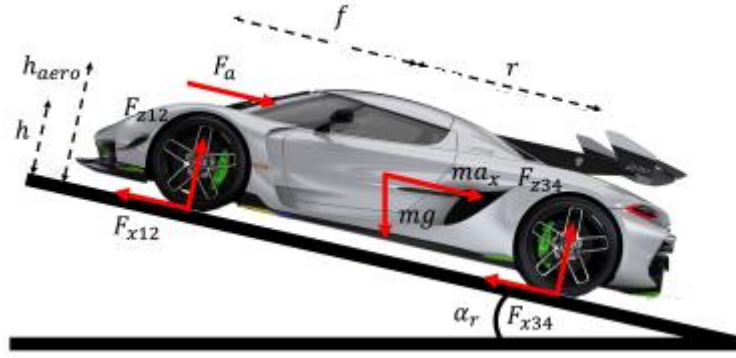


Figura 3 - Diagrama de corpo livre do veículo (DCL), (<https://News.Cision.Com/Koenigsegg/r/>, n.d.).

Conforme representado na figura 3, as forças que atuam no veículo contêm pontos de aplicação distintos originando momentos em torno do centro de massa do veículo e consequentemente transferências de peso entre os eixos.

Aplicando a segunda lei de Newton, responsável por descrever que a força resultante aplicada ao veículo é igual ao produto da massa da sua massa pela aceleração a que está sujeito, obtém-se as seguintes equações:

$$ma_x = F_x - F_{ax} - mg \sin(\alpha_r) \quad (1)$$

$$ma_z = F_z - F_{az} - mg \cos(\alpha_r) \quad (2)$$

Sendo F_x a força de tração do veículo, F_a a força de arrasto aerodinâmico, α_r o ângulo de inclinação do piso e $mg \sin(\alpha_r)$ a componente x do peso do veículo e $mg \cos(\alpha_r)$ a componente z .

Calculando o somatório dos momentos sobre cada eixo do veículo obtém-se a força normal no eixo dianteiro F_{z12} , e a força normal no eixo traseiro F_{z34} . L é a distância entre eixos do veículo, h é a altura do centro de massa e h_{aero} a altura do ponto de aplicação da força de arrasto. Desta forma obtém-se as equações seguintes:

$$F_{z12} = \frac{-F_a h_{aero} - ma_x h - mgh \sin(\alpha_r) + mgr \cos(\alpha_r)}{L} \quad (3)$$

$$F_{z34} = \frac{F_a h_{aero} + ma_x h + mgh \sin(\alpha_r) + mgr \cos(\alpha_r)}{L} \quad (4)$$

4.3. Forças Laterais

No caso de o veículo descrever uma trajetória curva sujeito a uma determinada aceleração lateral, serão originadas forças centrípetas pelos pneus e consequentemente será exercida uma força centrífuga sobre o veículo no seu centro de massa, figura 4.

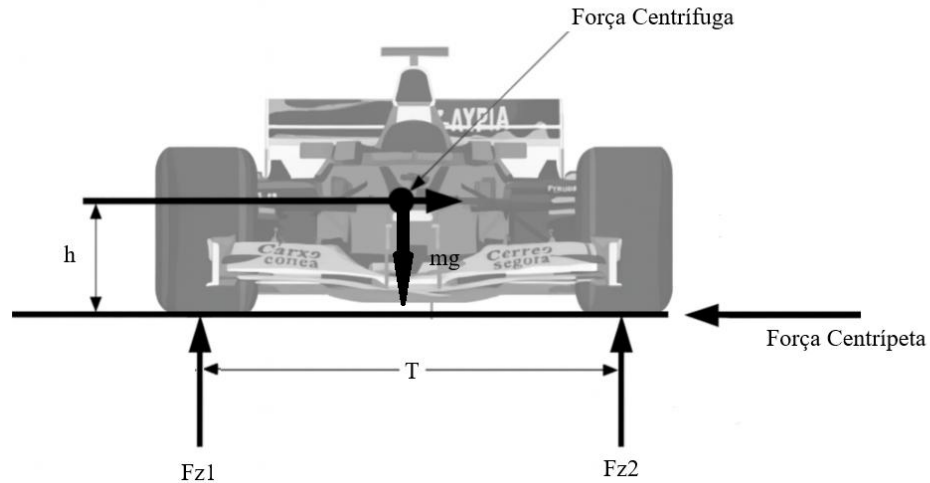


Figura 4 - DCL lateral do veículo.

Assim como anteriormente, recorre-se à segunda lei de Newton para se obter as forças normais em cada roda do eixo, F_{z1} e F_{z2} . A largura entre vias do eixo é representada por T .

$$F_{z1} = \frac{mg}{2} - \frac{ma_y h}{T} \quad (5)$$

$$F_{z2} = \frac{mg}{2} + \frac{ma_y h}{T} \quad (6)$$

4.4. Definição do Movimento do Veículo

4.4.1. Modelo de Duas Rodas

A definição das equações de equilíbrio que permitem descrever o comportamento do veículo são de extrema importância para o desenvolvimento de um simulador como pretendido. Para este efeito podem ser utilizados vários modelos, sendo um dos mais conhecidos o modelo de duas rodas, figura 5.

Quando o veículo se encontra a baixa velocidade, as acelerações longitudinal e lateral podem ser consideradas desprezáveis, pelo que os pneus não necessitam de gerar forças laterais e, conseqüentemente, não se verificam ângulos de escorregamento. Uma vez que as rodas traseiras não desenvolvem ângulos de escorregamento, a projeção do eixo traseiro intersecta o centro instantâneo de rotação da trajetória. Nestas condições é utilizada a versão mais simplificada do modelo de duas rodas.

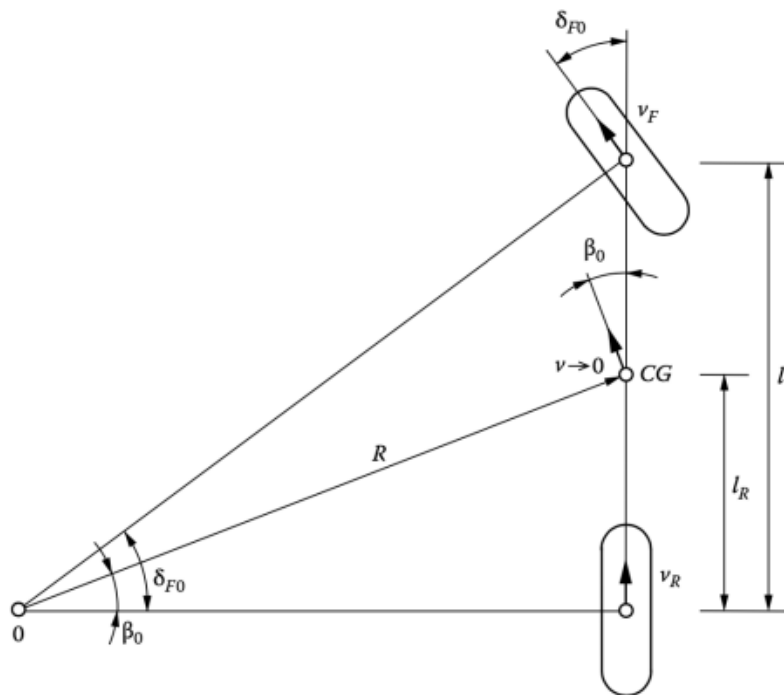


Figura 5 - Modelo de duas rodas sem acelerações, (Mastinu & Ploechl, 2014).

A velocidades maiores pode introduzir-se neste modelo as acelerações longitudinais e laterais a que o veículo está sujeito, figura 6. A aceleração longitudinal irá originar por parte dos pneus forças longitudinais e a aceleração lateral irá originar ângulos de escorregamento tanto nos pneus dianteiros como nos pneus traseiros, o que por sua vez levará à produção de forças laterais. Nesta situação considera-se um modelo de duas rodas com três graus de liberdade: movimento longitudinal, movimento lateral, e rotação sobre o eixo z.

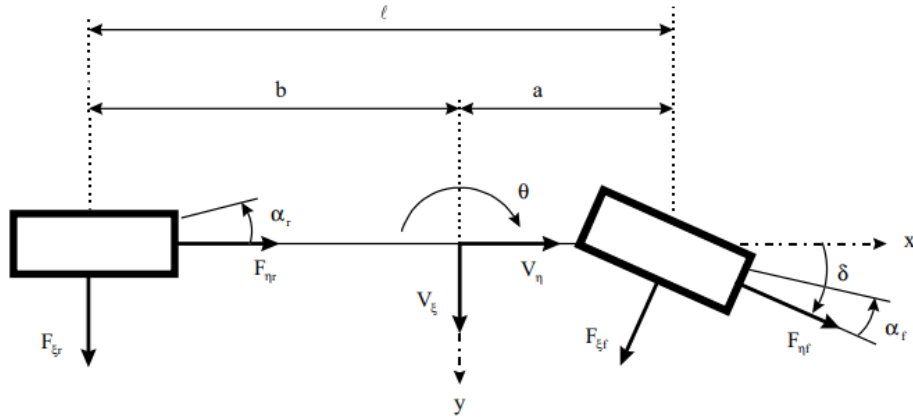


Figura 6 - Modelo de duas rodas com três graus de liberdade, (Ramanata, 1998).

Segundo o autor (Ramanata, 1998), as equações que descrevem, respetivamente a rotação sobre o eixo do z, o movimento lateral e o movimento longitudinal são as seguintes:

$$I\ddot{\theta} = aF_{\eta f} \cos(\delta) + aF_{\xi f} - bF_{\xi r} \quad (7)$$

$$m(\dot{V}_{\xi} + V_{\eta}\dot{\theta}) = F_{\eta f} \sin(\delta) + F_{\xi f} \cos(\delta) + F_{\xi r} \quad (8)$$

$$m(\dot{V}_{\eta} - V_{\xi}\dot{\theta}) = F_{\eta f} + F_{\eta r} + F_{\xi f} \sin(\delta) \quad (9)$$

Onde:

- $F_{\xi f}, F_{\xi r}$ = força lateral nos pneus dianteiros e traseiros;
- $F_{\eta f}, F_{\eta r}$ = força longitudinal nos pneus dianteiros e traseiros;
- a = distância do centro de gravidade ao eixo dianteiro;
- b = distância do centro de gravidade ao eixo traseiro;
- m = massa do veículo;
- I = momento de inércia do veículo;
- V_{η}, V_{ξ} = velocidade longitudinal/lateral do veículo no referencial;
- x, y = posição longitudinal/lateral do veículo no referencial;
- δ = ângulo de direção;
- η = eixo longitudinal no referencial;
- θ = ângulo de rotação;
- $\dot{\theta}$ = velocidade de rotação;
- ξ = eixo lateral no referencial.

4.4.2. Modelo de Quatro rodas

O modelo planar de quatro rodas permite uma análise mais precisa do movimento do veículo uma vez que são utilizados um maior número de graus de liberdade. Assim como o nome indica, neste modelo as quatro rodas do veículo influenciam o mesmo individualmente, figura 7.

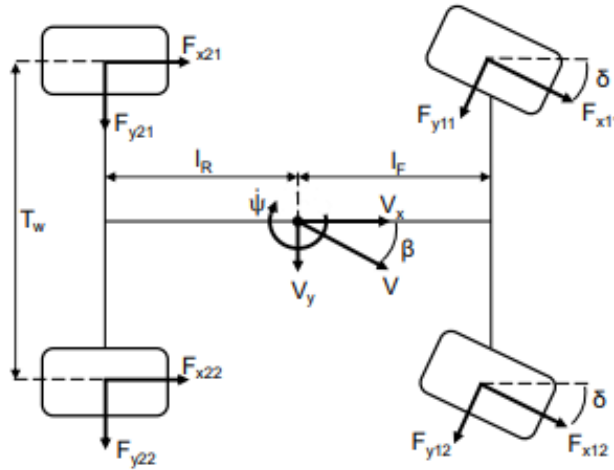


Figura 7 - Modelo planar de quatro rodas.

Considerando a existência de arrasto aerodinâmico apenas sobre o eixo x e aplicando a segunda lei de Newton, obtém-se as seguintes equações, (Narby, 2006).

Direção x :

$$m(\dot{v}_x - v_y \dot{\psi}) = (F_{x11} + F_{x12}) \cos(\delta) - (F_{y11} + F_{y12}) \sin(\delta) + F_{x21} + F_{x22} - F_a \quad (10)$$

Direção y :

$$m(\dot{v}_y + v_x \dot{\psi}) = (F_{x11} + F_{x12}) \sin(\delta) + (F_{y11} + F_{y12}) \cos(\delta) + F_{y21} + F_{y22} \quad (11)$$

Momento sobre o eixo z :

$$I_z \ddot{\psi} = l_F \left((F_{x11} + F_{x12}) \sin(\delta) + (F_{y11} + F_{y12}) \cos(\delta) \right) - l_R (F_{x21} + F_{x22}) + \frac{T_w}{2} \left((F_{x11} - F_{x12}) \cos(\delta) + (F_{y12} - F_{y11}) \sin(\delta) \right) \quad (12)$$

Colocando as acelerações sobre cada direção em evidência é possível obter as expressões que determinam a aceleração do veículo sobre as direções x e y e a aceleração rotacional.

$$\dot{v}_x = \frac{1}{m_v} \left((F_{x11} + F_{x12}) \cos \delta - (F_{y11} + F_{y12}) \sin \delta + F_{x21} + F_{x22} - \frac{1}{2} \rho C_D A_f v_x^2 \right) + v_y \dot{\psi} \quad (13)$$

$$\dot{v}_y = \frac{1}{m_v} \left((F_{y11} + F_{y12}) \cos \delta + (F_{x11} + F_{x12}) \sin \delta + F_{y21} + F_{y22} \right) - v_x \dot{\psi} \quad (14)$$

$$\ddot{\psi} = \frac{1}{I_z} \left(l_F \left((F_{x11} + F_{x12}) \sin \delta + (F_{y11} + F_{y12}) \cos \delta \right) - l_R (F_{y21} + F_{y22}) + 0.5 T_w \left((F_{x11} - F_{x12}) \cos \delta + (F_{y12} - F_{y11}) \sin \delta + (F_{x21} - F_{x22}) \right) \right) \quad (15)$$

4.5. Pneus

Os pneus são o único ponto de contacto entre o veículo e o solo, sendo por isso elementos fundamentais na transmissão de forças entre a estrada e o chassis. Todas as ações dinâmicas do veículo — aceleração, travagem e curvar — dependem diretamente da capacidade de os pneus gerarem e transmitirem forças através da sua área de contacto.

Estas forças são desenvolvidas devido às propriedades viscoelásticas da borracha que compõe o pneu. A borracha apresenta simultaneamente deformação elástica (recuperável) e viscosa (permanente), o que permite modelar o pneu, de forma simplificada, como um sistema mola-amortecedor. Esta natureza viscoelástica faz com que o deslocamento do pneu se encontre em desfase relativamente à força aplicada, originando dissipação de energia sob a forma de calor.

O comportamento da borracha pode ser caracterizado pelo seu módulo de elasticidade (rigidez) e pela sua perda de energia (histerese), ambos dependentes da temperatura e da frequência de excitação a que o pneu está sujeito. Esta variabilidade torna o pneu um dos componentes mais complexos de modelar num veículo. No entanto, é possível aproximar o seu comportamento através de modelos empíricos ou analíticos, sendo fundamental, para tal, compreender os mecanismos responsáveis pela geração de aderência e a forma como as forças resultantes podem ser representadas.

A aderência entre o pneu e o pavimento não segue um modelo de atrito de *Coulomb* clássico com coeficiente constante. Em vez disso, a aderência de um pneu pode ser decomposta em três componentes principais:

1. Atrito – relacionado com o deslizamento e altamente dependente da temperatura e da velocidade relativa entre o pneu e o solo.
2. Encravamento, conhecido como “*Interlocking*” – ocorre quando o pneu se deforma mecanicamente para se ajustar às micro-irregularidades da superfície da estrada.
3. Adesão – resulta da ligação temporária entre as cadeias moleculares da borracha e o pavimento.

A segunda e terceira componente aumentam com a largura do pneu. Além disso, a combinação da primeira e segunda componente com as cargas verticais originadas pelo peso do veículo dá origem à chamada aderência mecânica (Seward, 2014).

4.5.1. *Slip Angle*

O *slip angle*, representado por α , define-se como o ângulo entre o plano de rotação da roda e a trajetória imposta pelas condições de aderência entre o pneu e a estrada. Esta diferença angular surge devido à resistência ao deslizamento oferecida pela borracha do pneu, que gera uma deformação elástica do contacto com o solo, visível na figura 8.

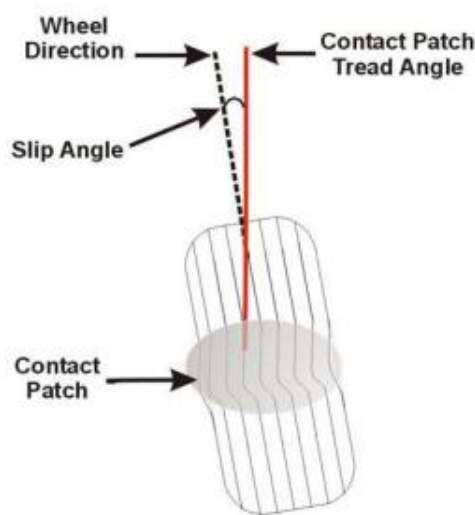


Figura 8 - Ilustração do *slip Angle*, (Tyre Slip Angle – Geometry Explained Suspension Secrets, 2024).

Segundo (Narby, 2006), matematicamente, o *slip angle* pode ser expresso pela equação seguinte, onde V_y representa a velocidade lateral e V_x a velocidade longitudinal. Este modelo simplificado permite avaliar o *slip angle* com base no estado cinemático da roda.

$$\tan(\alpha) = -\frac{V_y}{V_x} \quad (16)$$

Em regimes de *slip angle* reduzido, a relação entre força lateral e o *slip angle* é aproximadamente linear. A inclinação da reta desta relação é dada pela rigidez lateral do pneu, ou *cornering stiffness*, simbolizada por $C_{F\alpha}$. No entanto, à medida que o *slip angle* cresce, a resposta do pneu torna-se não linear, a força lateral atinge um valor máximo, correspondente ao pico de aderência lateral, após o qual o pneu entra em saturação e inicia o deslizamento. Este comportamento é possível ser visualizado no gráfico presente na figura 9 para diferentes cargas sobre o pneu.

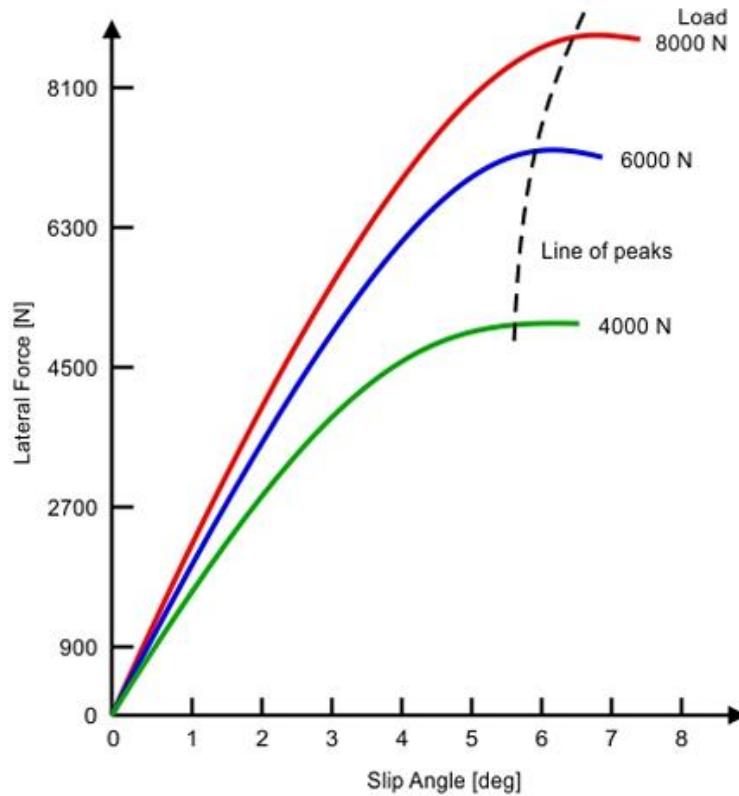


Figura 9 - Relação entre o *slip angle* e a força lateral (Tyre Slip Angle – Geometry Explained Suspension Secrets, 2024).

4.5.2. Slip Ratio

O *slip ratio*, ou rácio de escorregamento longitudinal, é descrito como a relação entre a velocidade angular da roda e a velocidade efetiva do veículo quando é aplicado binário na mesma.

Se o rácio entre a força de aderência longitudinal, F_x , e a carga vertical sobre a roda, F_z , for representado graficamente em função do *slip ratio* em percentagem, figura 10, verifica-se que o pico de aderência ocorre por volta dos 10 a 15% de escorregamento. Acima deste valor, a aderência diminui à medida que a roda começa a patinar ou contrariamente bloqueia(Seward, 2014), como se verifica na figura 10.

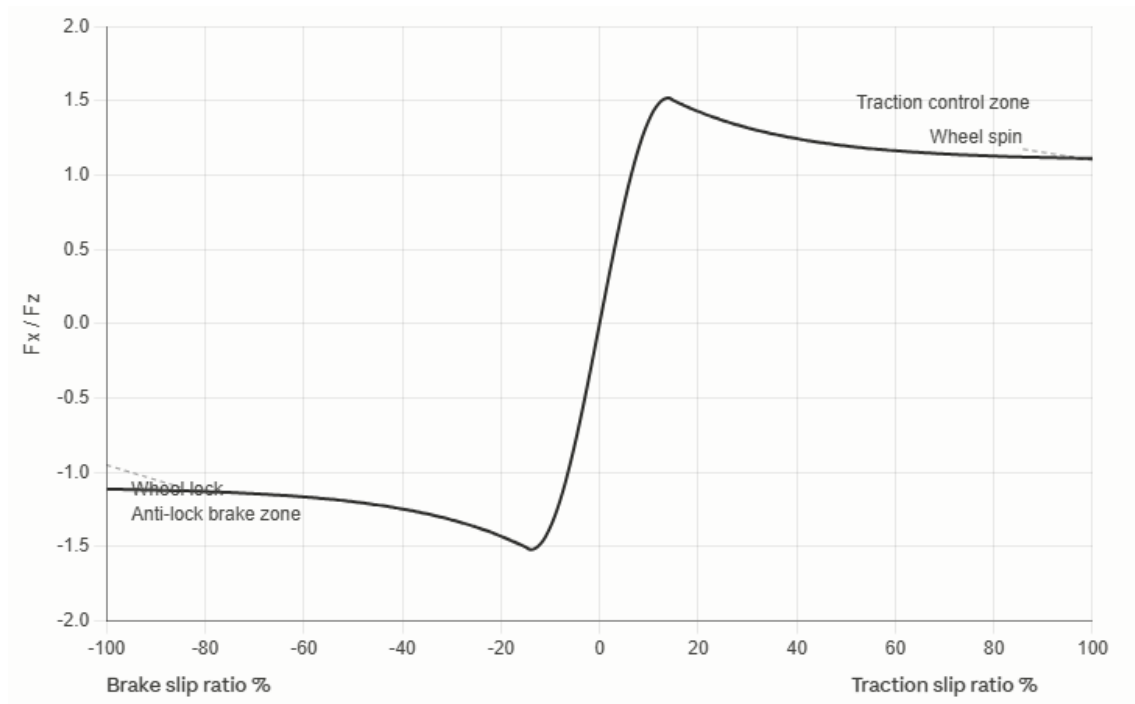


Figura 10 - Aderência longitudinal face ao *slip ratio*.

Deste modo torna-se necessário calcular a velocidade angular da roda para se obter o escorregamento longitudinal, sendo que esta é calculada integrando a aceleração angular, $\dot{\omega}$ que é dada pela equação (17). Onde F_x é a força de atrito, F_{rr} é a força de resistência ao rolamento, T_b é o binário resultante da travagem e T_w é o binário proveniente do motor aplicado no eixo de tração, (Höglund, 2022).

$$\dot{\omega} = \frac{T_w - F_x r_w - F_{rr} r_w - T_b}{J_T} \quad (17)$$

Assim, sendo o formula student um automóvel de tração traseira é necessário ter em conta a inércia do sistema de transmissão, que neste caso não contém caixa de velocidades. A inércia total, J_T , pode ser calculada através da equação (18). J_w é a inércia de uma roda e J_e é a inércia do motor que por sua vez é multiplicada pela relação do diferencial U_f .

$$J_T = J_w + \frac{J_e (U_f)^2}{2} \quad (18)$$

4.5.3. *Camber*

O *camber* pode ser definido como o ângulo formado pela inclinação da roda em relação ao plano longitudinal do veículo. Na figura 11 encontra-se ilustrada uma configuração de *camber* negativo, ou seja, o topo da roda inclinado para dentro do veículo, denotado como γ .

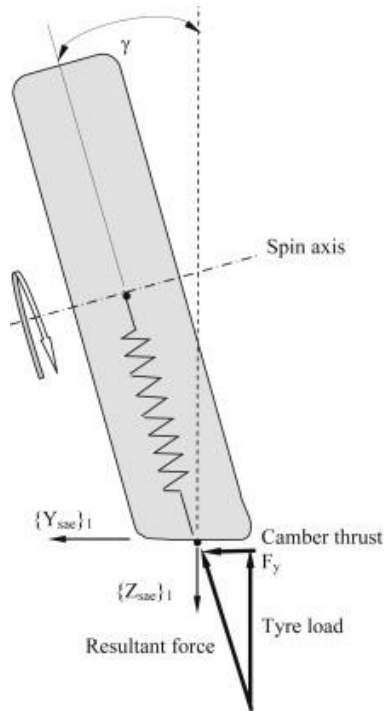


Figura 11 - *Camber thrust*, (Damian Harty & Michael Blundell, 2015).

Quando uma roda com *camber* é submetida a um movimento retilíneo forçado, ocorre uma distorção na orientação do pneu, resultando na origem de uma força lateral designada por *camber thrust*. Este é calculado através da expressão (19), sendo C_γ o coeficiente de rigidez de *camber* do pneu (*camber stiffness*).

$$F_Y = C_Y \cdot \gamma \quad (19)$$

Contudo, segundo (Pacejka, 2006), esta componente de força lateral é geralmente de magnitude significativamente inferior à gerada pelo *slip angle*, sendo frequentemente omitida em modelos dinâmicos de veículos devido à sua reduzida relevância. Em condições de aceleração lateral, a transferência de carga lateral provoca um aumento da força F_Z na roda exterior e uma diminuição na roda interior. Consequentemente, o *camber thrust* da roda exterior assume preponderância, podendo ser combinado com a força de aderência associada ao ângulo de escorregamento para contrabalançar a força centrífuga.

4.5.4. Resistência ao Rolamento

A resistência ao rolamento é caracterizada, tal como o nome indica, como a força de resistência inerente ao movimento do pneu em rotação livre. Esta ocorre, principalmente, pela deformação do composto de borracha na zona de contacto com o solo, e sendo influenciada por diversos fatores, tais como a velocidade e a pressão do pneu.

A influência da resistência ao rolamento pode ser quantificada através do coeficiente de resistência ao rolamento, designado por C_{rr} , o qual representa a relação entre a força de resistência e a carga vertical aplicada ao pneu. Com base neste coeficiente, a força de resistência ao rolamento F_{rr} pode ser estimada pela seguinte expressão:

$$F_{rr} = C_{rr} \cdot F_Z \quad (20)$$

4.5.5. Círculo de Fricção

O círculo de fricção, figura 12, também denominado de diagrama g-g, delimita o limite de tração do pneu em qualquer direção que o mesmo possa tomar.

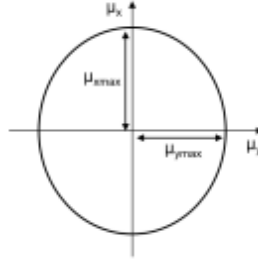


Figura 12 - Círculo de fricção.

As forças longitudinais e laterais produzidas pelos pneus não são independentes umas das outras, sendo geralmente experienciadas em conjunto, por exemplo em aceleração na saída de uma curva. Contudo, a resultante das forças produzidas por um pneu não pode exceder o produto da carga normal pelo coeficiente de fricção. Considerando que os pneus podem apresentar coeficientes de fricção longitudinais e laterais diferentes, os fatores combinados podem ser expressos pela equação (21), onde μ_x e μ_y são os coeficientes de fricção longitudinal e lateral e $\mu_{x_{\max}}$ e $\mu_{y_{\max}}$ os respectivos máximos, (Seward, 2014).

$$\left(\frac{\mu_x}{\mu_{x_{\max}}} \right)^2 + \left(\frac{\mu_y}{\mu_{y_{\max}}} \right)^2 \leq 1 \quad (21)$$

Aplicando este diagrama às acelerações longitudinais e laterais é possível verificar se o condutor se encontra no limite do pneu ou se ainda existe espaço para melhorias de forma a maximizar a tração disponível.

4.5.6. Combined Slip

Contrariamente a uma idealização linear, a capacidade de um pneu em gerar a força máxima num dos eixos é intrinsecamente comprometida pela presença de solicitações no outro. Este fenómeno, evidencia que o pico de força longitudinal é atingido na ausência de componentes laterais significativas, e vice-versa. Esta relação pode ser conceptualizada através do círculo de fricção referido anteriormente.

O escorregamento combinado é definido pela simultaneidade de existência de *slip angle* e *slip ratio*.

4.5.7. Formula Mágica

A forma tradicional de modelar o comportamento dos pneus em simulações de dinâmica veicular é através da Fórmula Mágica de Pacejka. Trata-se de um modelo semi-empírico

amplamente utilizado, que ajusta curvas não lineares a dados experimentais de forças geradas no contacto do pneu com o solo. O modelo permite estimar a força longitudinal F_x , a força lateral F_z , e o momento de auto-alinhamento, M_z , (Pacejka, 2006).

A fórmula base é dada pela equação seguinte:

$$y(x) = D \cdot \sin[C \cdot \arctan(Bx - E(Bx - \arctan(Bx)))] \quad (22)$$

Onde B representa o fator de rigidez, C o fator de forma, D o valor de pico e E o fator de curvatura. Os coeficientes são obtidos com base em características específicas das curvas experimentais: valor de pico da força y_m , valor de *slip* (*angle* ou longitudinal) a que o pico ocorre x_m , o valor para o qual a curva estabiliza a grandes valores de slip y_a e o declive na origem $y'(0)$ que representa a rigidez do pneu na zona linear.

Com estes valores, os parâmetros da equação são calculados da seguinte forma:

$$D = y_m = \mu F_z \quad (23)$$

$$C = 2 - \frac{2}{\pi} \arcsin\left(\frac{y_a}{D}\right) \quad (24)$$

$$B = \frac{y'(0)}{C \cdot D} \quad (25)$$

$$E = \frac{\tan\left(\frac{\pi}{2C}\right) - Bx_m}{\arctan(Bx_m) - Bx_m} \quad (26)$$

4.6. Suspensão

No contexto da competição automóvel, como o caso do Formula Student, o sistema de suspensão assume um papel central na maximização do desempenho dinâmico do veículo. A suspensão não só garante o contacto consistente dos pneus com o solo, como também influencia diretamente o comportamento do veículo em aceleração, travagem e curva, fatores determinantes para a performance em pista.

A representação precisa do sistema de suspensão em modelos de simulação dinâmicos permite prever com maior rigor o impacto de diferentes configurações, facilitando o

processo de afinação e desenvolvimento do veículo. Modelos simplificados podem fornecer uma primeira aproximação, tratando o veículo como uma massa pontual e a suspensão como um sistema equivalente de mola e amortecedor. No entanto, para aplicações mais exigentes, como no caso da competição Formula Student, é fundamental recorrer a modelos mais detalhados, que considerem as massas suspensas e não suspensas, a individualidade de cada canto da suspensão, a rigidez dos pneus e a ação de elementos como as barras estabilizadoras.

4.6.1. Equação do movimento

O modelo físico mais simples de um sistema vibratório é o modelo linear discreto com um grau de liberdade, como se representa na figura 13. O modelo inclui o elemento de inércia de massa m , o elemento elástico de rigidez k , um mecanismo dissipador de energia de tipo viscoso e de constante C e uma excitação externa $f(t)$ que é função do tempo t . A posição instantânea do sistema é referenciada pela coordenada $x(t)$ que representa o deslocamento linear e constitui o grau de liberdade do sistema. A velocidade $\dot{x}(t)$ e a aceleração $\ddot{x}(t)$ são dadas, respetivamente, pelas primeira e segunda derivadas de $x(t)$ em ordem ao tempo (Rodrigues, 2016).

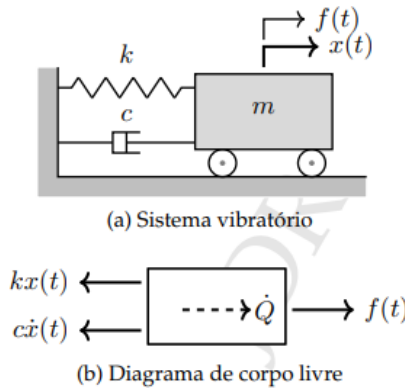


Figura 13 - Modelo do sistema com um grau de liberdade, (Rodrigues, 2016).

Deste modo aplica-se o modelo físico anterior ao sistema equivalente de mola e amortecedor responsável por controlar o movimento relativo entre a massa suspensa e a massa não suspensa, uma vez que este se trata de um sistema vibratório amortecido.

Considerando o diagrama de corpo livre representado na figura 13 e aplicando a 2ª lei de Newton, a equação de equilíbrio dinâmico escreve-se:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t). \quad (27)$$

4.6.2. Molas

As molas têm como função permitir um grau de movimento independente das rodas à medida que as cargas sobre estas variam consoante as superfícies irregulares. Na competição automóvel o objetivo é otimizar a aderência da área de contacto do pneu em cada canto do carro. Isto faz parte do que se pode genericamente designar por *compliance*. O movimento das molas ocorre também como consequência da variação das cargas nas rodas durante a aceleração, em curva e na travagem(Seward, 2014).

A *Spring rate* ou rigidez da mola, k_s , indica o quanto a mola se deforma por unidade de força aplicada, normalmente expressa em N/mm.

A *Wheel rate*, ou rigidez da roda, k_w , encontra-se relacionada com a rigidez da mola através do *Motion Ratio*, este indica quanto a mola se desloca comparativamente com o deslocamento da roda, e é dado pela equação (28).

$$MR^2 = \frac{k_{wheel}}{k_{spring}} \quad (28)$$

A *Ride Rate*, k_r , é definida como a rigidez da roda combinada com a rigidez do pneu, k_t .

$$\frac{1}{k_R} = \frac{1}{k_s} + \frac{1}{k_t} \quad (29)$$

Assumindo um movimento harmónico simples, a frequência natural da vibração do chassi suspenso é dada por:

$$f_s = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_R}{m_s}} \quad (30)$$

Na figura 14 encontra-se demonstrada visualmente a interação entre os parâmetros de rigidez anteriores.

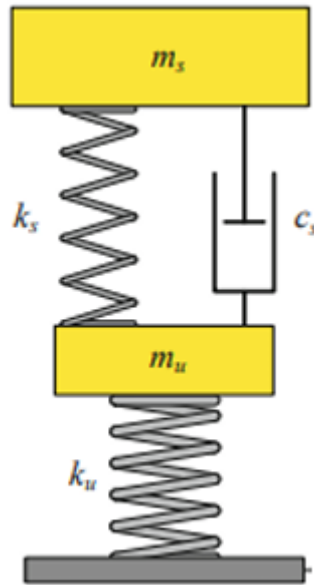


Figura 14 - Diagrama de simplificação da rigidez da suspensão, (H. Marzbani & Reza N. Jazar, 2024).

Além das rigidezes já faladas, na figura 14 encontra-se ainda presente a massa suspensa, m_s , e a massa não suspensa, m_u . A massa suspensa compreende o chassi, a carroçaria, o motor, o condutor e os demais componentes associados. Já a massa não suspensa abrange o conjunto da roda, englobando os pneus, jantes, mangas de eixo, sistema de travagem, entre outros elementos relacionados. A massa dos componentes que estabelecem a ligação entre estas duas categorias, como os braços de suspensão e os eixos de transmissão, é convencionalmente distribuída por meio de uma repartição proporcional entre ambas.

4.6.1. Amortecedor

Quando uma massa suportada por uma mola é deslocada da sua posição de equilíbrio estático e libertada, esta tende a oscilar. Na ausência de um amortecedor, essas oscilações persistem indefinidamente, com amplitude e frequência constantes. Os amortecedores são, portanto, essenciais para otimizar o contacto do pneu com a superfície, ao dissiparem a energia cinética acumulada nas molas sob a forma de calor, contribuindo assim para a estabilidade e controlo do veículo.

O amortecedor é definido pelo seu coeficiente de amortecimento, C , uma medida da força de amortecimento a uma velocidade de 1 m/s, tendo assim a unidade N/m/s. Se este valor for superior ao amortecimento crítico, C_{crit} , o sistema é considerado sobreamortecido, apresentando um retorno lento à posição de equilíbrio. Por outro lado, se C for inferior a C_{crit} , o sistema é subamortecido, permitindo oscilações em torno do ponto de equilíbrio antes de se estabilizar.

O amortecimento crítico é o valor mínimo necessário para que o sistema regresse à posição de equilíbrio sem oscilações, e é calculado através da equação seguinte.

$$C_{\text{crit}} = 4\pi m_s f_s \quad (31)$$

Para avaliar a relação entre o amortecimento real e o crítico, define-se o rácio de amortecimento, ζ , como:

$$\zeta = \frac{C}{C_{\text{crit}}} \quad (32)$$

Segundo o autor, (Seward, 2014), em veículos de passageiros, valores típicos de ζ situam-se em torno de 0,25, oferecendo um compromisso aceitável entre conforto e controlo. Em contextos de competição, onde a prioridade recai sobre o desempenho dinâmico e a resposta precisa do veículo, é comum adotar rácios de amortecimento na ordem dos 0,65 a 0,7, por se ter demonstrado eficaz na maximização da aderência e previsibilidade do comportamento do veículo em situações limite.

Nos sistemas convencionais utilizados em competições como o Formula Student, os amortecedores apresentam ainda diferentes coeficientes de amortecimento para os movimentos de compressão (*bound*) e retorno (*rebound*), bem como para diferentes velocidades da roda. Este comportamento permite dividir o amortecimento em quatro regimes distintos:

- Compressão em baixa velocidade;
- Compressão em alta velocidade;
- Retorno em baixa velocidade;
- Retorno em alta velocidade.

Estes quatro regimes do comportamento de um amortecedor são visíveis no exemplo dado no gráfico presente na figura 15.

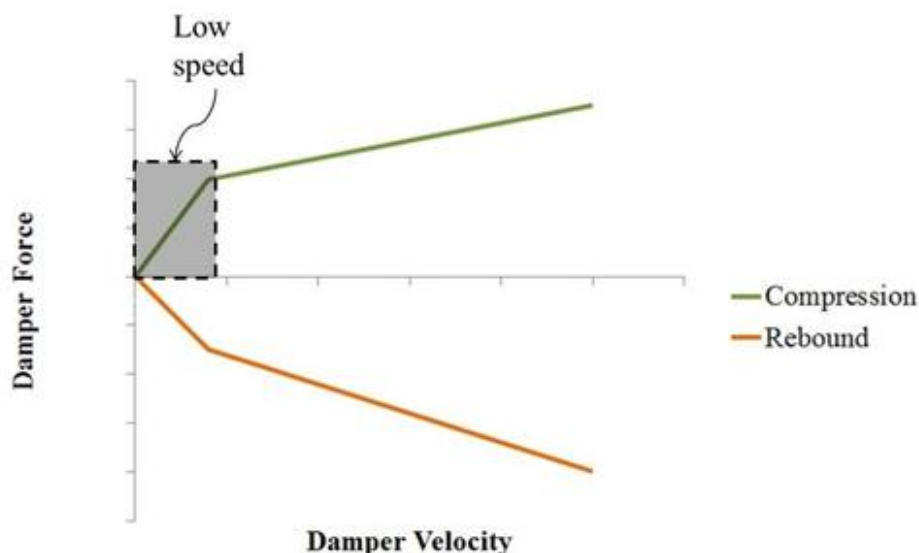


Figura 15 - Curva de amortecimento de um amortecedor de competição, (Domingues dos Santos et al., 2014).

Um aumento do amortecimento em compressão (*bound*) tem como efeito imediato uma melhoria da resposta transitória da suspensão, até que se atinja um ponto crítico em que o amortecedor se aproxima de um estado de bloqueio. Neste regime, a capacidade da suspensão em absorver irregularidades é severamente comprometida, sendo as forças transmitidas quase integralmente ao chassis. Este fenómeno anula a função da suspensão, aproximando o comportamento do veículo ao de um kart, ou seja, sem qualquer filtragem das perturbações do solo. Por outro lado, um amortecimento de compressão insuficiente conduz a uma resposta excessivamente branda, dificultando o controlo do veículo em curva, sobretudo em pisos irregulares. Assim, um compromisso adequado é essencial para garantir que o automóvel possa ser conduzido de forma previsível e explorado até aos seus limites com segurança.

No que diz respeito ao amortecimento em extensão (*rebound*), aplicam-se princípios semelhantes. Um aumento neste parâmetro reduz a velocidade de retorno da suspensão após uma compressão, o que pode ser vantajoso em manobras com cargas transitórias rápidas, como em slaloms, ao limitar o rolamento do chassis. No entanto, um valor excessivo de amortecimento em extensão pode impedir que a roda recupere contacto com o solo de forma eficiente, comprometendo a tração e a estabilidade. Este efeito, tal como no caso da compressão, poderá resultar na perda de eficácia do sistema de suspensão.

4.6.2. Sistema *Anti-Roll Bar*

O sistema *anti-roll bar*, comumente utilizado desde os automóveis de dia a dia até aos veículos de competição, tem como principal função aumentar a rigidez de rolamento do veículo, sem aumentar a rigidez quando ambas as rodas do mesmo eixo estão sujeitas à mesma carga, por exemplo em aceleração ou travagem. O aumento da rigidez de

rolamento permite assim diminuir a transferência de massa entre vias, e manter o pneu a funcionar num intervalo de graus de *camber* mais reduzido e dentro da zona de maior produção de força lateral.

Para veículos de competição, tem também uma importância significativa na afinação do equilíbrio do veículo, ao controlar o equilíbrio de transferência de carga longitudinal, influenciando o comportamento de subviragem ou sobreviragem.

Por sua vez, existe uma clara desvantagem em fornecer muita rigidez ao rolamento através deste sistema. Com sistemas muito rígidos, a suspensão deixa de ser verdadeiramente independente. As rodas de um eixo passam a agir como um eixo rígido em *single-wheel bump*. Embora a rigidez do sistema de suspensão não afete o movimento de uma roda individual em *bump* e *rebound*, sob movimento de suspensão de uma única roda, a suspensão torna-se mais rígida e, conseqüentemente, menos eficaz. Por esta razão, recomenda-se que o sistema *anti-roll bar* não contribua com mais de 50% da rigidez ao rolamento do veículo (Seward, 2014).

4.6.3. Dimensionamento do sistema *Anti-Roll bar*

Para efeitos de dimensionamento, é essencial determinar com precisão a rigidez proporcionada pela barra, tendo em consideração a sua geometria e o material a utilizar no fabrico da mesma.

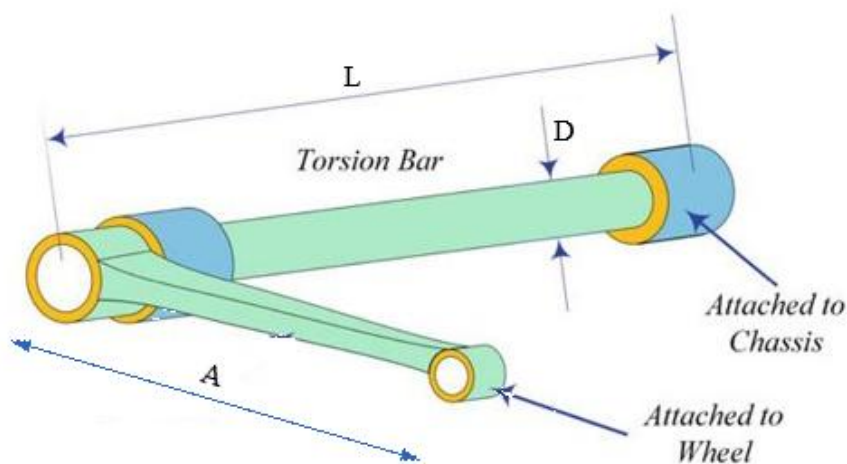


Figura 16 - Barra de torção, adaptado de (H. Marzbani & Reza N. Jazar, 2024).

Segundo (H. Marzbani & Reza N. Jazar, 2024), num cenário típico de rolamento, os braços da barra movimentam-se em sentidos opostos, o que implica que, por simetria, o ponto médio da barra de torção permanece fixo. Assim, é comum considerar apenas metade da barra de comprimento L , para efeitos de cálculo, G o módulo de corte e D o diâmetro da secção circular da barra, estes parâmetros são visíveis na figura 16. O objetivo é determinar a rigidez no ponto de aplicação da força, situado no topo de um braço com comprimento A .

$$K_{bar} = \frac{\pi G D^4}{32 L A^2} \quad (33)$$

Adicionalmente, os próprios braços da barra deformam-se sob carga, comportando-se como vigas. A deflexão, δ , de um braço com comprimento A , sujeito a uma força pontual F , é dada pela equação 34, representado E o módulo de elasticidade e I o segundo momento de área da secção transversal do braço.

$$\delta = \frac{F A^3}{3 E I} \quad (34)$$

Desta forma, a rigidez dos braços do sistema de *anti-roll bar* é dada pela equação (35).

$$K_{arm} = \frac{3 E \pi D^4}{64 A^3} \quad (35)$$

Por fim, a rigidez do sistema de *anti-roll bar* é dado pela equação 36, uma vez que a barra de torção e os braços atuam em série.

$$K_{arb} = \frac{K_{bar} \cdot K_{arm}}{K_{bar} + K_{arm}} \quad (36)$$

4.7.Sistema de Travagem

O sistema de travagem de um veículo Formula Student é composto por dois circuitos hidráulicos independentes, um para o eixo dianteiro e outro para o eixo traseiro. Ambos são acionados simultaneamente através do pedal de travão, presente na *balance bar*. A *balance bar* é uma barra presente na pedaleira que liga o pedal de travão às duas bombas principais de travão, permitindo regular a distribuição da pressão hidráulica entre os dois eixos através do ajuste do ponto de articulação da barra.

Quando o condutor pressiona o pedal, a força aplicada é então dividida entre as duas bombas principais presentes na *balance bar*. Segundo (Limpert, 2011), a pressão

hidráulica gerada no circuito é diretamente proporcional à força aplicada no pedal, sendo determinada pelo rácio do pedal e pela área do pistão da bomba principal. Cada uma das bombas gera uma pressão hidráulica que é transmitida às pinças de travão respetivas, resultando numa força de contacto entre as pastilhas e os discos. Essa força, combinada com o atrito entre as pastilhas e o disco, origina o binário resistente que atua sobre as rodas.

A distribuição da força de travagem entre eixos é um parâmetro crítico para a segurança e eficiência do sistema. De acordo com (Limpert, 2011), a distribuição ótima de travagem é aquela que garante que as rodas dianteiras bloqueiam antes das traseiras, assegurando a estabilidade direcional do veículo durante a travagem.

Segundo (Amaral, 2022), para efeitos de simulação, é possível simplificar este processo assumindo que:

- A área do pistão da bomba secundária corresponde à área de contacto da pastilha;
- O coeficiente de atrito entre a pastilha e disco permanece constante durante a travagem,
- O sistema opera em condições ideais (sem perdas ou deformações significativas).

O binário de travagem aplicado a cada roda pode ser calculado com base na força transmitida pelas bombas secundárias ao disco de travão. A formulação simplificada apresentada a seguir assume que a área de contacto da pastilha é igual à área do pistão, e que o coeficiente de atrito se mantém constante durante a travagem, (Amaral, 2022).

$$T_b = F_b \cdot R_m \quad (37)$$

$$F_b = A_p \cdot p_h \cdot \mu_p \cdot n_p \quad (38)$$

Onde:

- T_b = Binário de travagem [Nm];
- F_b = Força de travagem [N];
- R_m = Raio médio da pastilha [m];
- A_p = Área do pistão do travão [m²];
- p_h = Pressão hidráulica [Pa];
- μ_p = Coeficiente de atrito pastilha-disco;
- n_p = Número de pastilhas de travão.

4.8. Aerodinâmica

A aerodinâmica é um dos pontos de estudo presente na dinâmica de veículos que maior relevância tem ganho com a evolução dos automóveis. Apesar de não se ter como objetivo o estudo aerodinâmico do Formula Student, é necessário definir, por via de equações, a interação entre o ar e o veículo.

Duas forças principais influenciam o comportamento do veículo: a força de arrasto e a força de sustentação (ou *downforce*). A força de arrasto é oposta ao movimento do veículo, resultante da diferença de pressão do ar entre a frente e a traseira do carro e do atrito viscoso do ar sobre a superfície. Sendo calculada pela equação (39), onde ρ é a massa volúmica do ar, C_D é o coeficiente de arrasto do veículo e A é a área frontal do veículo. Assume-se que em condições normais a massa volúmica do ar é de 1,225 kg/m³.

$$F_a = \frac{1}{2} \rho C_D A v^2 \quad (39)$$

A força de sustentação, por sua vez, é gerada pela diferença de pressão entre a parte inferior e superior do veículo. No caso do Formula Student, procura-se gerar *downforce*, ou seja, uma força com sentido negativo (tendo em conta o sistema de coordenadas apresentado previamente) que pressiona o formula sobre o piso, aumentando a carga sobre os pneus e consecutivamente a capacidade de aceleração lateral. Esta força é expressa pela equação (40), onde C_L representa o coeficiente de sustentação, (Guiggiani, 2014).

$$F_L = \frac{1}{2} \rho C_L A v^2 \quad (40)$$

4.9. Simulação de tempo por volta

A simulação de tempo de volta (*Lap Time Simulation* - LTS) é amplamente utilizada no desporto motorizado para prever e analisar o comportamento dinâmico de um veículo num traçado. Permite reduzir falhas de conceção, minimizar custos com protótipos e diminuir a necessidade de testes reais, aumentando a eficiência e a consistência dos resultados.

Existem três abordagens principais de LTS, cada uma com diferentes pressupostos, complexidade e aplicações:

- Regime Permanente (*Steady-State*, SS);
- Regime Quase-Permanente (*Quasi-Steady State*, QSS);
- Regime Transitório (*Transient State*, TS).

4.9.1. Regime Permanente

A abordagem em regime permanente constitui o método mais simples e amplamente utilizado na simulação de tempo por volta. Este método assume que o veículo se encontra, em todos os instantes, em equilíbrio dinâmico.

O circuito é discretizado em segmentos de reta e curvas com raio constante. Nas retas, a aceleração longitudinal é considerada constante, sendo a velocidade final obtida pela equação (41), onde v_0 representa a velocidade inicial, a_x a aceleração longitudinal e d o deslocamento.

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2a_x d} \quad (41)$$

Em situação de curva, considera-se uma velocidade constante, denominada velocidade crítica (v_c), que depende da massa do veículo (m), do raio da curva (R_c) e da força lateral máxima transmitida pelos pneus (F_y).

$$v_c = \sqrt{\frac{F_y \cdot R_c}{m}} \quad (42)$$

A modelação do veículo é geralmente realizada através de um modelo de massa pontual, que utiliza unicamente os coeficientes de atrito longitudinal e lateral. Neste contexto, as forças máximas são função direta destes coeficientes e da força normal.

Embora esta metodologia seja útil em fases iniciais de desenvolvimento e análise de desempenho, apresenta limitações significativas na representação realista do comportamento dinâmico, especialmente em fases transitórias como aceleração, travagem e variações rápidas de trajetória.

4.9.2. Regime Quase-Permanente

O regime quase-permanente constitui uma evolução do método em regime permanente, permitindo a inclusão de efeitos transitórios de forma simplificada. Nesta metodologia, o comportamento do veículo é modelado como uma sequência de estados quase-estacionários ao longo de curtos intervalos da pista. Para cada segmento, calcula-se a

curvatura local e aplica-se uma solução estática, seguida da transição para o segmento seguinte.

Neste método em vez de considerar forças constantes do pneu em regime estacionário, recorre-se a uma formulação baseada no círculo de fricção, conjugada com o modelo *Pacejka Magic Formula*. Deste modo permite representar de forma mais realista a interação entre as forças longitudinais e laterais no pneu, figura 17, refletindo com maior precisão o seu comportamento dinâmico(Amaral, 2022).

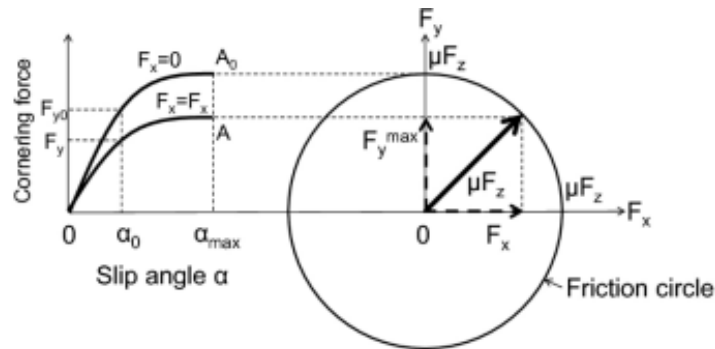


Figura 17 - Círculo de fricção combinado(Amaral, 2022).

4.9.3. Regime Transitório

Em condições reais, os veículos encontram-se sujeitos a acelerações nos 3 eixos de movimento referidos anteriormente, por exemplo ao descrever uma curva, desta forma raramente se encontram em regime estacionário. Por conseguinte, a abordagem em regime transitório baseia-se numa simulação dinâmica completa do comportamento do veículo, incorporando todos os efeitos transitórios relevantes. Esta abordagem requer a modelação detalhada dos vários subsistemas do veículo, nomeadamente a suspensão, os modelos de pneu, os efeitos aerodinâmicos e as entradas do condutor. Para resolver as equações de movimento associadas, é necessário recorrer à integração numérica com passos temporais reduzidos, de forma a captar com precisão a resposta dinâmica do sistema.

Apesar da complexidade inerente a este tipo de modelação, diversos estudos têm demonstrado que os resultados obtidos ao nível do tempo por volta apresentam diferenças pouco significativas face a abordagens simplificadas, com discrepâncias típicas na ordem dos 0,77%(Amaral, 2022). Importa, contudo, interpretar este valor com cautela: embora a diferença no tempo por volta seja reduzida, o tempo por volta é uma métrica global que esconde diferenças locais relevantes. Um modelo transitório capta a evolução instantânea de grandezas como as transferências de carga, os ângulos de camber ou o deslocamento da suspensão em cada instante, informação que uma abordagem simplificada não fornece e que é precisamente a mais útil para a afinação do veículo. Por esse motivo, a utilização

de modelos transitórios torna-se particularmente vantajosa em contextos que exigem uma análise de desempenho detalhada ou na afinação precisa da configuração do veículo.

4.10. Modelo de Espaço de estados

O modelo de espaço de estados é uma ferramenta fundamental na modelação e simulação de sistemas dinâmicos, como aquele que se pretende realizar utilizando o software Simulink.

Apesar de serem utilizadas equações de segunda ordem ou superior para descrever a dinâmica de um veículo, estas podem ser expressas matematicamente como um sistema de equações diferenciais de primeira ordem. Um sistema que é descrito por um sistema de equações diferenciais de primeira ordem diz-se estar na forma de espaço de estados. Conhecer o estado de um sistema torna possível calcular todos os sinais de saída futuros se todos os sinais de entrada futuros forem conhecidos, (Narby, 2006). Um sistema linear de tempo contínuo na forma de espaço de estados pode ser escrito como:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (43)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (44)$$

onde x é o vetor de estado, u é o vetor de sinal de entrada e y é o vetor de sinal de saída. As matrizes A , B , C e D definem a dinâmica do sistema e têm significados físicos distintos (Ogata, 2022).

A matriz A , de dimensão $n \times n$ onde n é o número de estados, designada por matriz de estado, descreve a dinâmica interna do sistema, traduzindo de que forma os estados atuais influenciam a sua própria evolução temporal. Os seus coeficientes são determinados diretamente pelas equações de movimento do sistema, sendo função da rigidez, dos coeficientes de amortecimento e das massas envolvidas.

A matriz B , de dimensão $n \times m$ onde m é o número de entradas, designada por matriz de entrada, relaciona as entradas externas do sistema com a evolução dos estados.

A matriz C , de dimensão $p \times n$ onde p é o número de saídas, designada por matriz de saída, define quais os estados ou combinações de estados que constituem as saídas do sistema, tomando a forma de uma matriz identidade quando se pretende observar diretamente todos os estados.

Por fim, a matriz D , de dimensão $p \times m$, designada por matriz de transmissão direta, representa a influência direta das entradas nas saídas sem passar pelos estados, sendo nula

na maioria dos sistemas físicos, uma vez que as entradas apenas afetam as saídas através da dinâmica interna do sistema.

Para obter estas matrizes a partir das equações de movimento, reescreve-se cada equação de segunda ordem como duas equações de primeira ordem, introduzindo a derivada do estado como um novo estado (Ogata, 2022). Por exemplo, para um sistema massa-mola-amortecedor com deslocamento z , define-se o vetor de estados como $x = [z, \dot{z}]^T$, do qual resulta diretamente a forma matricial do sistema. Este processo é aplicado sistematicamente a cada grau de liberdade do modelo, sendo o vetor de estados final a concatenação dos deslocamentos e velocidades de todos os graus de liberdade considerados, como será detalhado na secção 6.9.

5. Dados de Referência

Neste capítulo pretende-se apresentar todos os passos necessários para a obtenção de dados reais e tratamento dos mesmos relativamente aos pneus Hoosier 20.5x7.0-13 R20 e de telemetria do T24e. Estes são estritamente necessários para a correta configuração do simulador que se pretende desenvolver.

5.1. Pneus Hoosier R20

Para a obtenção dos dados dos pneus, a equipa do Formula Student disponibilizou o acesso ao fórum formula SAE tire test consortium (FSAE TTC) que se trata de uma iniciativa colaborativa sem fins lucrativos criada para disponibilizar dados experimentais de pneus de elevada qualidade às equipas participantes na competição FSAE.

Os ensaios a cada pneu são realizados na instalação da empresa Calspan Tire Research Facility (TIRF), em Buffalo, Nova Iorque, e os resultados obtidos nos testes experimentais são publicados posteriormente no fórum. Devido a estes serem publicados em formato CSV é necessário desenvolver código em Matlab para que se consiga analisar os mesmos. Na figura 18 verifica-se o código desenvolvido para extrair os dados pretendidos através do Matlab.

```
%%Lateral Tyre Data
fprintf('0. Localizando ficheiro...\n');
if exist('tire_lookup_table.mat', 'file')
    fprintf('    ✓ Ficheiro no folder atual\n');
else
    p_paths = {'C:\Users\Utilizador\Downloads\tire_lookup_table.mat'; fullfile(userpath, 'tire_lookup_table.mat')};
    file_found = false;
    for i = 1:length(p_paths)
        if exist(p_paths(i), 'file'), [fp, ~, ~] = fileparts(p_paths(i)); addpath(fp); file_found = true; break; end
    end
    if ~file_found, error('Ficheiro tire_lookup_table.mat não encontrado!'); end
end

%% 1. CARREGAR E DIAGNOSTICAR
load('tire_lookup_table.mat');
fprintf('    ✓ SA: %d pts | Fz: %d pts | Fy: %d valores\n', length(SA_breakpoints), length(Fz_breakpoints), numel(Fy_table));
fprintf('    [DEBUG] Dimensões: SA(%d), Fz(%d), Table(%dx%d)\n', length(SA_breakpoints), length(Fz_breakpoints), size(Fy_table,1), size(Fy_table,2));

%% 2. CRIAR INTERPOLADOR 2D
% griddedInterpolant([SA_bp, Fz_bp], Fy_table) -> Ordem correta para 50x5
F_interp = griddedInterpolant([SA_breakpoints, Fz_breakpoints], Fy_table, 'linear');
fprintf('    ✓ Interpolador criado (linear)\n\n');

%% 3. TESTES DE VALIDAÇÃO
SA1 = 0.0; Fz1 = 660; Fy1 = F_interp(SA1, Fz1);
fprintf('    T1 (Origem): SA=%1f, Fz=%1f -> Fy=%1f N\n', SA1, Fz1, Fy1);
SA2 = 5.0; Fz2 = 800; Fy2 = F_interp(SA2, Fz2);
fprintf('    T2 (Slip):   SA=%1f, Fz=%1f -> Fy=%1f N\n', SA2, Fz2, Fy2);
SA3 = 8.0; Fz3 = 1550; Fy3 = F_interp(SA3, Fz3);
fprintf('    T3 (Pico):   SA=%1f, Fz=%1f -> Fy=%1f N\n', SA3, Fz3, Fy3);
SA4p = 6.0; SA4n = -6.0; Fz4 = 450; Fy4p = F_interp(SA4p, Fz4); Fy4n = F_interp(SA4n, Fz4);
fprintf('    T4 (Simetria): +%1f/%+1f | Soma: %1f N\n', Fy4p, Fy4n, Fy4p + Fy4n);

%% 5. SIMULAÇÃO DINÂMICA
t = 0:0.01:5; SA_dyn = 3*sin(2*pi*0.2*t); Fz_dyn = 800 + 300*sin(2*pi*0.3*t);
Fy_dyn = arrayfun(@(s,f) F_interp(s,f), SA_dyn, Fz_dyn);
figure('Name', 'Dinâmica');
subplot(3,1,1); plot(t, SA_dyn, 'b'); grid on; ylabel('SA [deg]'); title('Input: SA');
subplot(3,1,2); plot(t, Fz_dyn, 'r'); grid on; ylabel('Fz [N]'); title('Input: Fz');
subplot(3,1,3); plot(t, Fy_dyn, 'g', 'LineWidth', 2); grid on; ylabel('Fy [N]'); xlabel('t [s]');
sgtitle('Exemplo Dinâmico');

%% 6. RESUMO SIMULINK
fprintf('    ✓ Pronta para Simulink: n-D Lookup Table (2-D)\n');
fprintf('    Table: Fy_table | BP1: SA_breakpoints | BP2: Fz_breakpoints\n');
```

Figura 18 - Código para interpretação dos dados de forças laterais produzidas pelos pneus.

A figura 19 apresenta um gráfico 2D da relação entre a força lateral produzida pelo pneu face ao *slip angle* para diferentes cargas sobre o pneu.

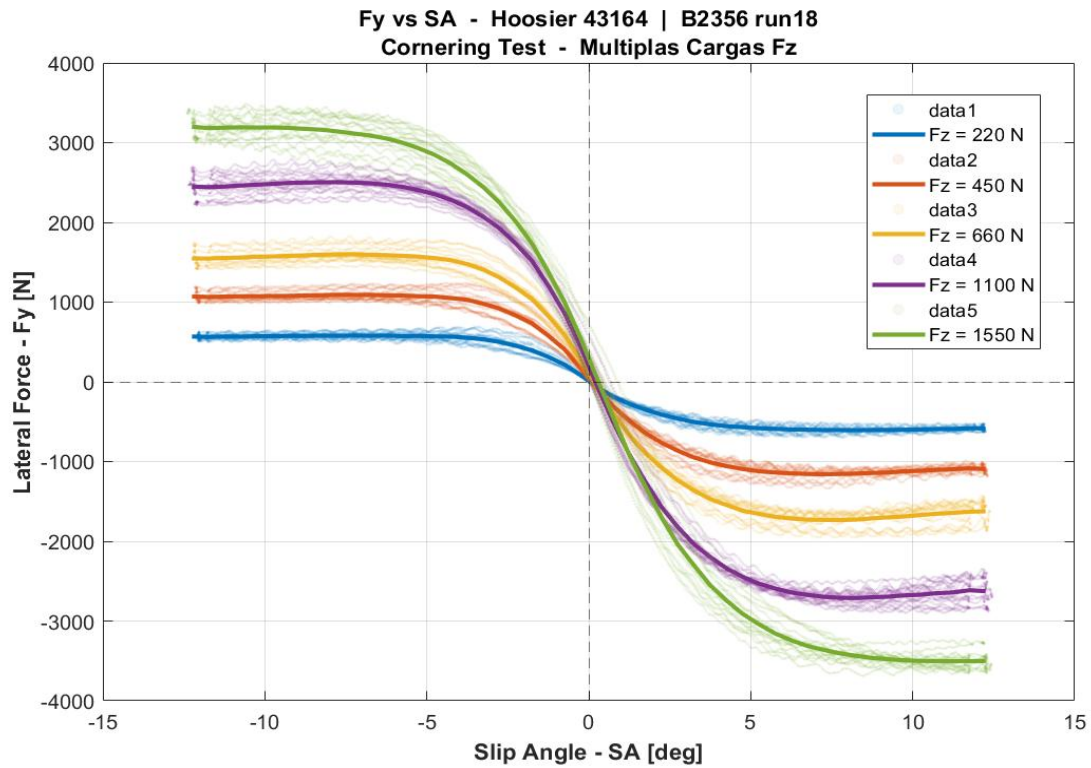


Figura 19 - Gráfico 2D Fy vs SA.

As cargas Fz apresentadas são aquelas que foram utilizadas para testar os pneus, sendo depois necessário interpolar os dados para as diferentes cargas que os pneus podem estar sujeitos durante a utilização real em pista. Esta interpolação é realizada através da formulação da fórmula mágica de Pacejka apresentada no capítulo anterior, deste modo obteve-se os 4 parâmetros dos pneus necessários, figura 20.

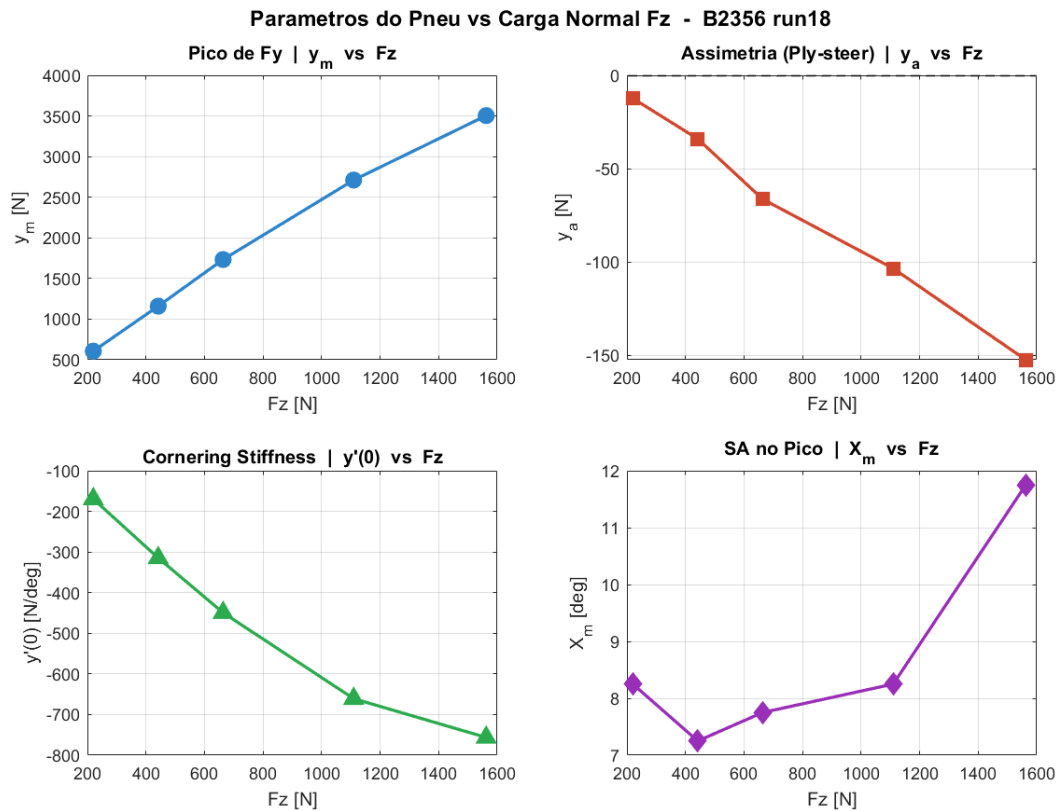


Figura 20 - Parâmetros laterais do pneu Hoosier R20 para formulação da fórmula mágica.

O gráfico 3D presente na figura 21 apresenta de forma mais elucidativa o comportamento do pneu face ao *slip angle* e à carga Fz.

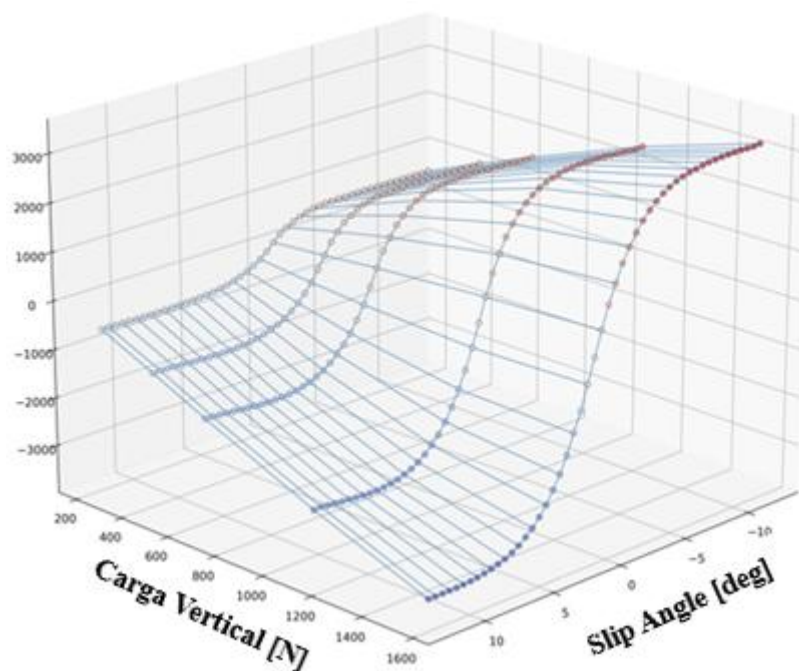


Figura 21 - Gráfico 3D Fy vs Fz vs SA.

Para a obtenção dos dados longitudinais dos pneus reiterou-se o mesmo processo, tendo-se contruído os seguintes gráficos para visualização dos parâmetros a utilizar na fórmula mágica, figura 22.

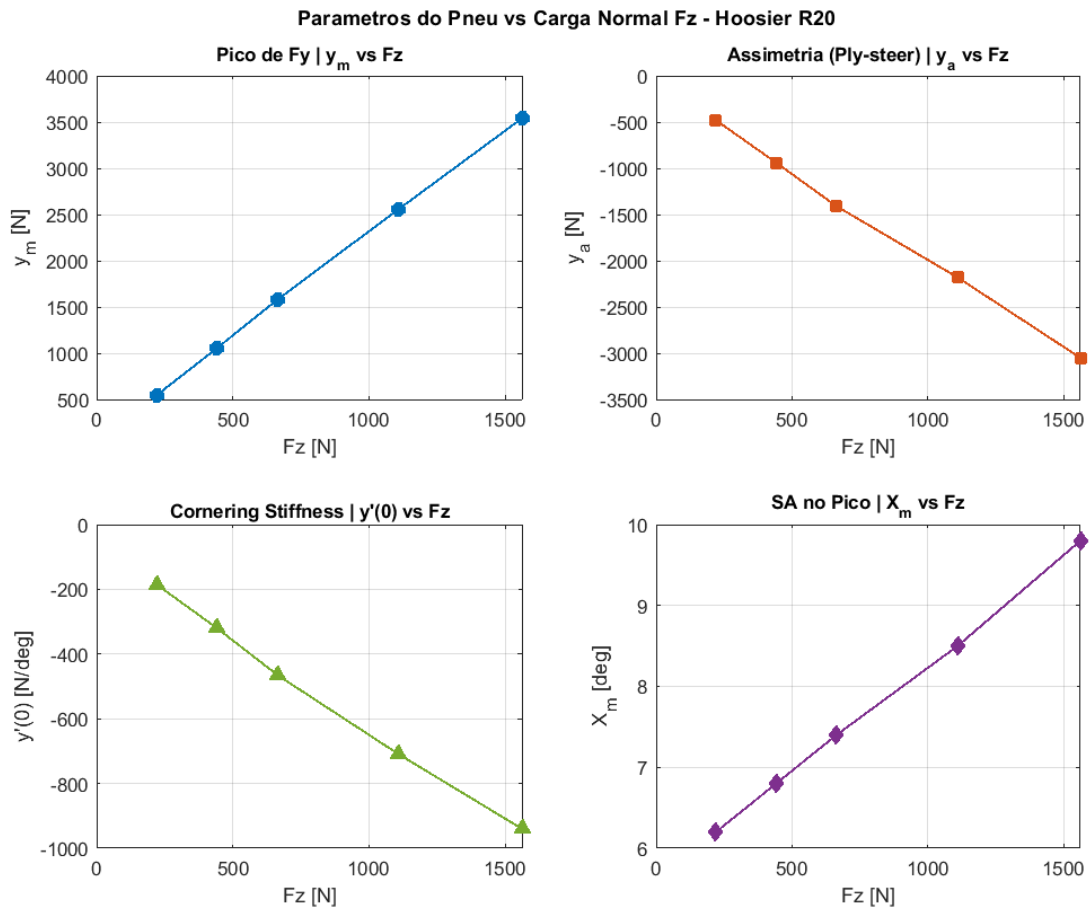


Figura 22 - Parâmetros longitudinais do pneu Hoosier R20 para formulação da fórmula mágica.

Construíram-se ainda dois gráficos para visualização da força longitudinal em função do *slip ratio* e da carga vertical, figura 23, e para visualização do coeficiente de fricção em função do *slip ratio* e da carga vertical, figura 24.

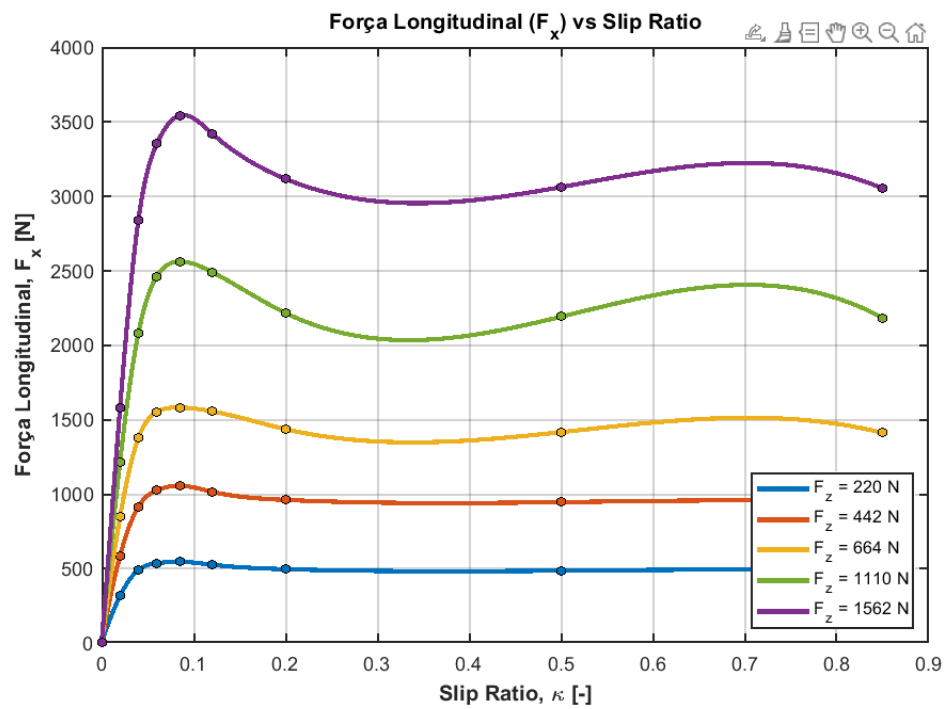


Figura 23 - Força Longitudinal em função do *Slip Ratio* e da carga F_z .

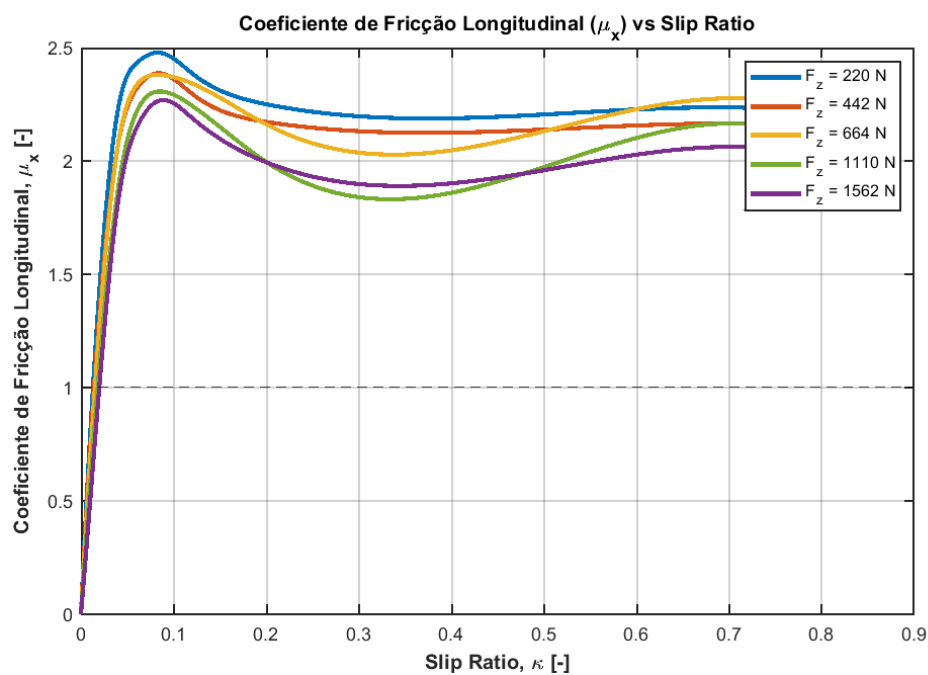


Figura 24 - Coeficiente de fricção em função do SR e de F_z .

5.2. Formula Student T24e

Os dados de referência do veículo necessários para o desenvolvimento do simulador englobam os dados que caracterizam o veículo estaticamente e os dados de GPS do mesmo em utilização em pista. Na figura 25 é possível verificar o T24e sobre diferentes vistas num plano 2D.

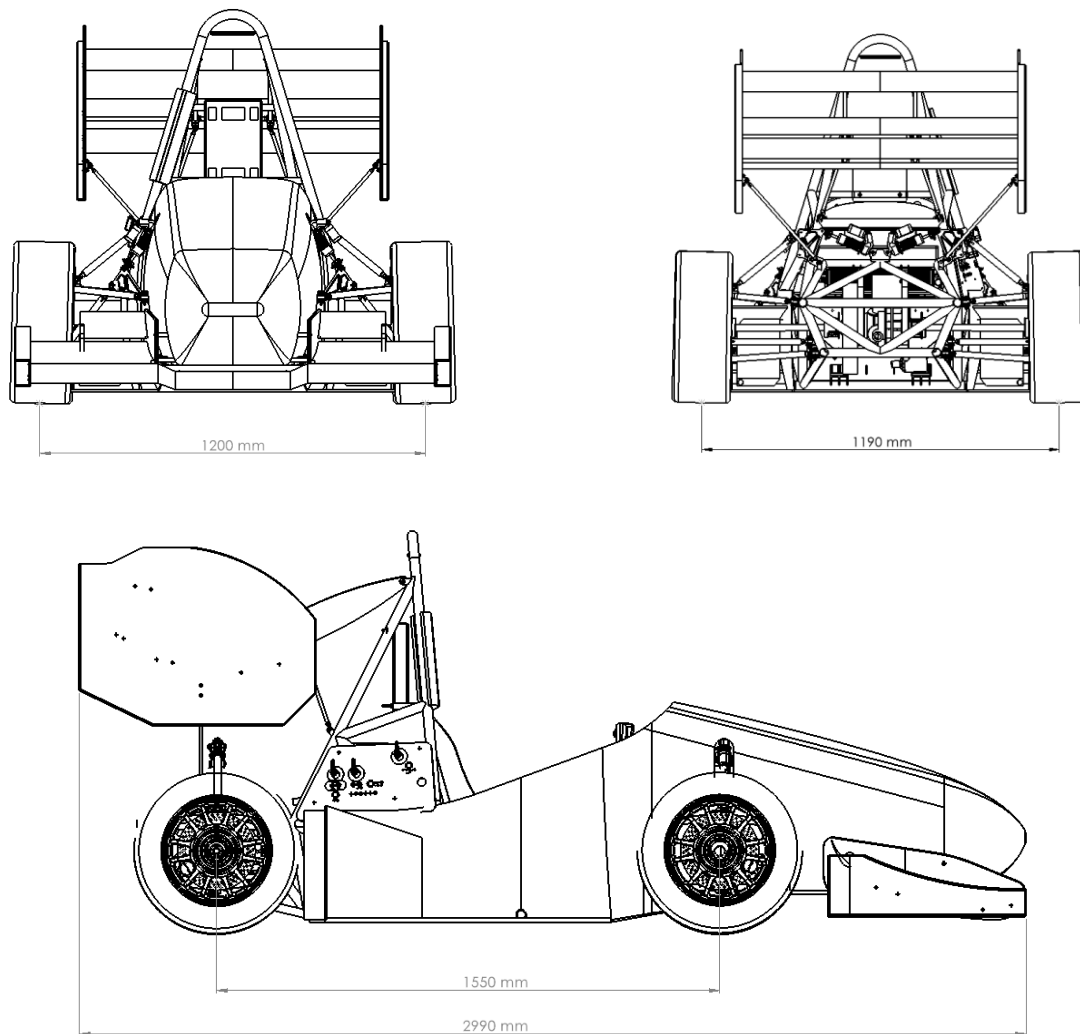


Figura 25 - Dimensões do T24e.

Na tabela 1 encontram-se assim, os dados fornecidos pelo formula student que caracterizam o veículo.

Tabela 1 - Dados do T24e.

Sigla	Descrição	Valor	Unidade
m_v	Massa Total do Veículo (c/ piloto)	330	kg
W_b	Distância entre Eixos	1,55	m
T_w	Largura Entre vias Via	1,2	m
h_{cg}	Altura do Centro de Gravidade	0,285	m
l_f	Distância do Eixo Dianteiro ao CG	0,802	m
l_r	Distância do Eixo Traseiro ao CG	0,748	m
J_{xx}	Inércia de <i>Roll</i>	83,326	Kg*m ²
J_{yy}	Inércia de <i>Pitch</i>	214,782	Kg*m ²
J_{zz}	Inércia de <i>yaw</i>	190,426	Kg*m ²
J_w	Inércia do Conjunto Roda/Pneu	0,32	Kg*m ²
K_{Rf}	Rigidez da Roda frontal	42,03	N/mm
K_{Rr}	Rigidez da Roda Traseira	52,4	N/mm
C_{fb}	Amortecimento Dianteiro (<i>bound</i>)	1,68	Ns/m
C_{fr}	Amortecimento Dianteiro (<i>rebound</i>)	2,19	Ns/m
C_{rb}	Amortecimento Traseiro (<i>bound</i>)	3,78	Ns/m
C_{rr}	Amortecimento Traseiro (<i>rebound</i>)	4,92	Ns/m
C_D	Coeficiente de Resistência Aerodinâmica	0,9	-
C_L	Coeficiente de Sustentação	1,6	-
A_f	Área frontal	1,0348	m ²

5.2.1. Sistema de aquisição de dados

O sistema de aquisição de dados do T24e, no que concerne à dinâmica do veículo, está centralizado no módulo MTi-680G, desenvolvido pela empresa Xsens. Devido à ausência de sensores de hall para leitura da velocidade individual de roda e de potenciômetros lineares para a medição do curso de suspensão, este módulo é o único responsável pela aquisição dos dados gerados pelo veículo, tais como os valores de *yaw*, velocidades e acelerações que serão analisados neste trabalho.



Figura 26 - Módulo MTi-680G.

O MTi-680G, figura 26, é um sistema GNSS/INS, sistema de navegação global por satélite com sistema de navegação inercial, onde a sua função é agregar e processar dados de movimento e de posicionamento num único módulo.

A aquisição de dados opera segundo o princípio de fusão de sensores estritamente acoplados. O hardware do MTi-680G integra uma unidade de medida inercial, IMU, composta por acelerômetros, capazes de medir forças até 10 g, e giroscópios, com um fundo de escala de 2000 deg/s. Estes componentes inerciais operam com frequências de até 2 kHz de amostragem interna, capturando as acelerações e rotações transientes do chassis. Contudo, devido à natureza da integração matemática necessária para derivar velocidade e posição a partir da aceleração, os dados puramente inerciais estão sujeitos a erros cumulativos ao longo do tempo, um fenómeno conhecido como desvio inercial ou drift.

Para mitigar esta limitação e garantir a estabilidade dos dados, o sistema recorre ao seu recetor GNSS interno. A componente crítica que eleva a precisão deste sistema aos padrões exigidos no formula student é a introdução de correções RTK através da norma RTCM 3.2/3.3. Utilizando algoritmos avançados de estimação de estado, o processador do sensor cruza as medições inerciais de alta frequência com as coordenadas espaciais

absolutas de baixa frequência fornecidas pela constelação de satélites. Este processo de filtragem resulta numa estimativa de posição com precisão centimétrica ($1\text{ cm} + 1\text{ ppm CEP}$) e em vetores de velocidade com uma raiz do erro quadrático médio (RMS) de apenas $0,05\text{ m/s}$, (Xsense, 2025). Na figura 27 verifica-se a localização do módulo no T24e.

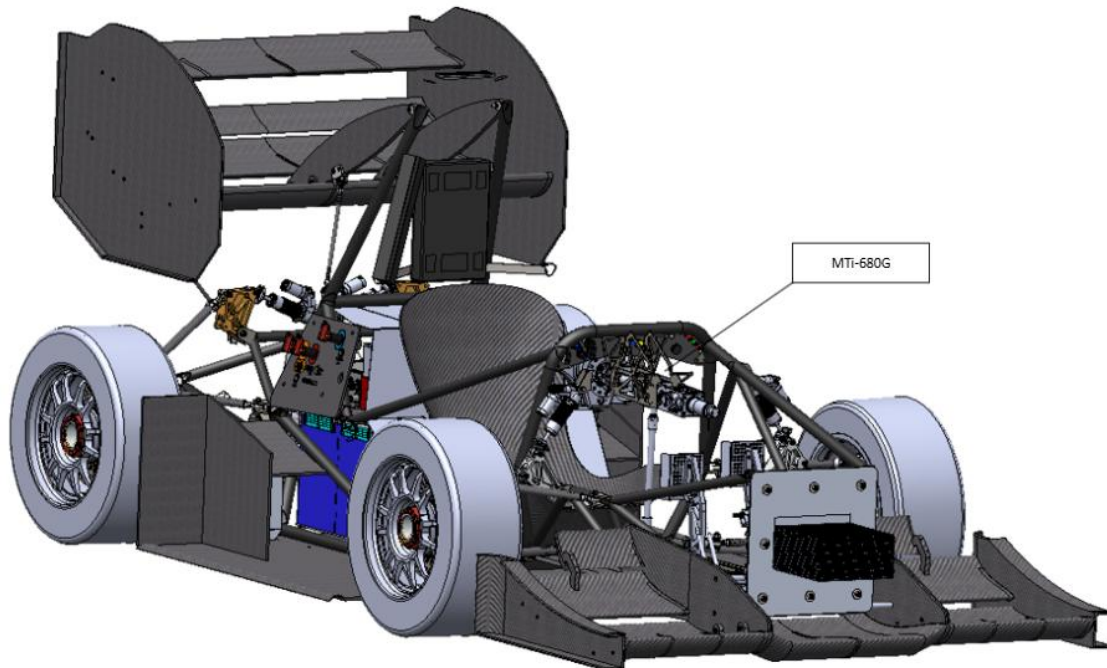


Figura 27 - Localização do MTi no veículo.

5.2.2. Telemetria das provas FSPT e FSG

Relativamente aos dados de utilização em pista foram recolhidas as gravações provenientes do sistema de aquisição de dados presente no carro de uma prova de aceleração e de uma prova de autocross. O teste de aceleração ocorreu na FSPT de 2025 onde foi apenas possível obter o valor da velocidade em módulo do veículo, figura 28, dentro do que seriam os dados relevantes para este projeto.

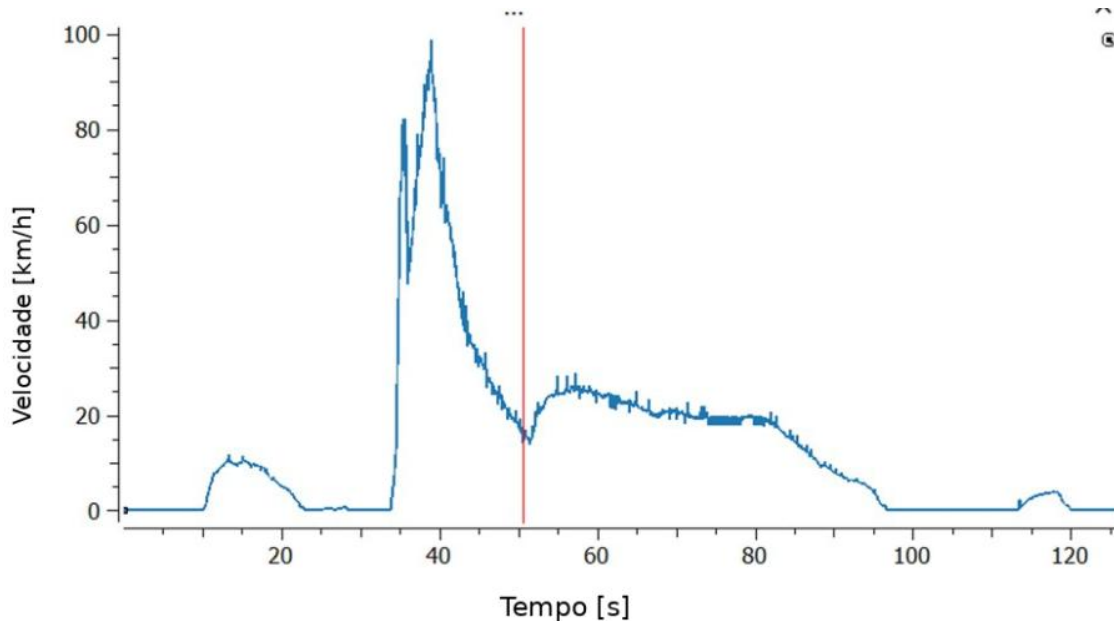


Figura 28 - Dados do teste de aceleração [km/h].

Na prova de *autocross* realizada na FSG 2025 já foi possível obter um conjunto de dados mais completo. A Figura 29 apresenta as velocidades longitudinal e lateral do veículo ao longo da prova, onde é bem visível o comportamento típico de um percurso de autocross, com variações de velocidade frequentes e bruscas mudanças de direção. A Figura 30 mostra as acelerações longitudinal e lateral, sendo possível identificar os instantes de maior solicitação do veículo, nomeadamente nas travagens mais intensas e nas curvas mais rápidas. Por fim, a Figura 31 apresenta o ângulo de *yaw*, cuja variação contínua ao longo de toda a prova reflete a natureza sinuosa do percurso e constitui um dos dados mais relevantes para validar o comportamento lateral do modelo.

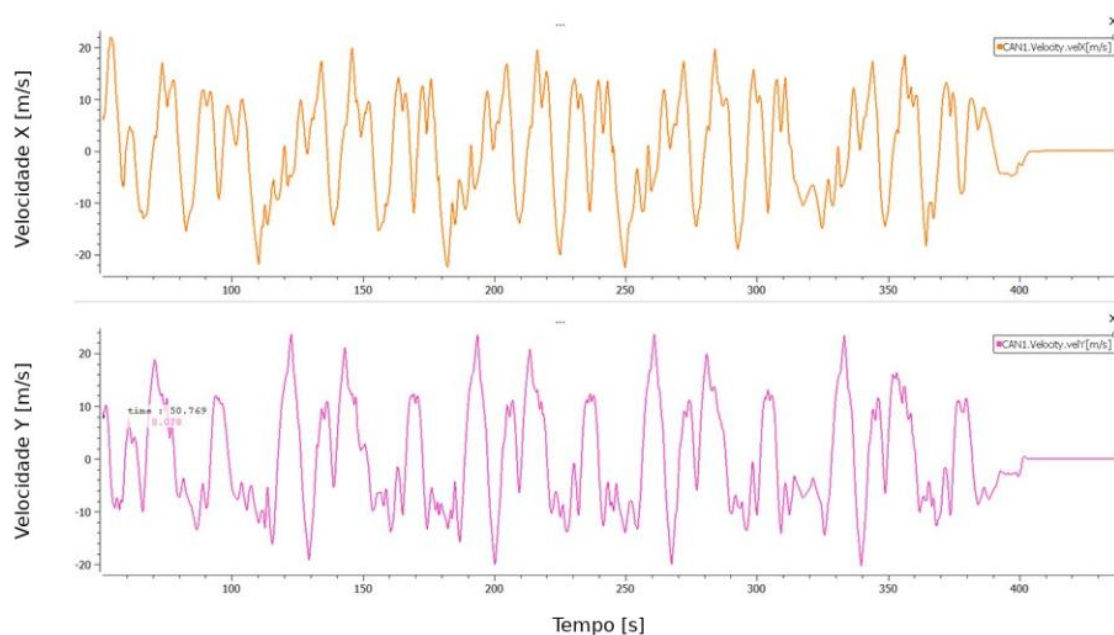


Figura 29 - Dados da velocidade do T24e.

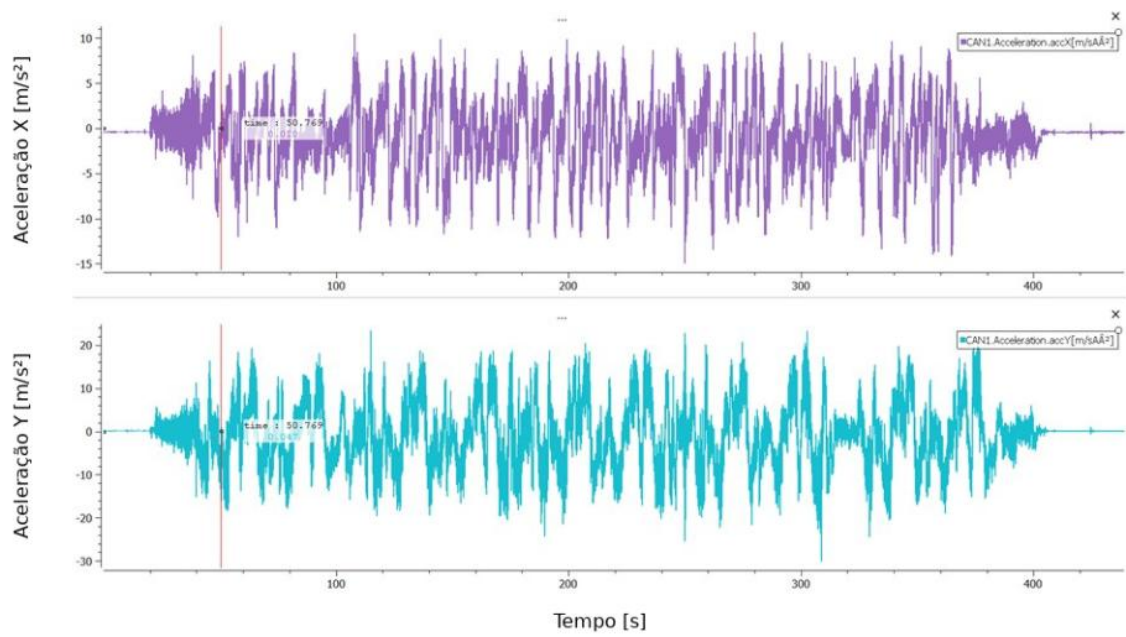


Figura 30 – Dados da aceleração do T24e.

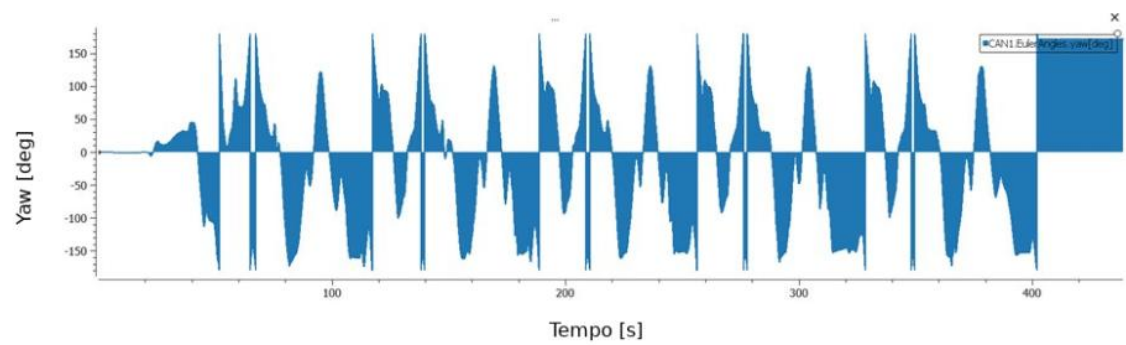


Figura 31 - Dados de yaw do T24e.

6. Desenvolvimento do Modelo de Comportamento Dinâmico

A modelação da dinâmica de um veículo é complexa devido ao número elevado de variáveis que é necessário definir para descrever o mesmo, o ambiente que o rodeia, e como estes interagem. Deste modo, é necessário definir a priori do desenvolvimento de qualquer modelo quais são os pressupostos e as simplificações que serão realizadas, sem que estas adulterem significativamente a veracidade dos resultados.

Assim, no presente trabalho, o veículo é representado por um modelo com 12 graus de liberdade, permitindo o deslocamento lateral e longitudinal do mesmo, o movimento vertical da massa suspensa (*heave*), bem como as rotações em torno dos três eixos ortogonais previamente definidos (*roll*, *pitch* e *yaw*). O modelo contempla ainda a rotação independente de cada uma das quatro rodas e a direção das rodas do eixo dianteiro.

Dada a extrema dificuldade que seria modelar as irregularidades da estrada, considerou-se que a massa suspensa do veículo será a massa total do veículo, uma vez que a superfície da estrada não provocará excitações na massa não suspensa. Além disso, considerou-se ainda que o centro de rolamento do veículo se situa ao nível do solo e que o centro de pressões aerodinâmicas coincide com o centro de massa do mesmo.

O desenvolvimento do modelo de comportamento dinâmico do veículo Formula Student foi realizado através do software MATLAB, utilizando a ferramenta Simulink. Este modelo está dividido em dez sistemas, sendo estes:

- Sistema de travagem;
- Sistema de propulsão;
- Sistema de cálculo das transferências de carga;
- Sistema de cálculo dos *slip angles*;
- Sistema de cálculo do escorregamento longitudinal;
- Sistema de cálculo das velocidades angulares;
- Sistema de cálculo da fórmula mágica de Pacejka;
- Sistema de cálculo das acelerações;
- Modelo de comportamento da suspensão;
- Sistema do condutor.

6.1. Sistema de Travagem

O sistema de travagem do formula student é composto por uma *Balance Bar* onde estão presentes duas bombas principais de travão AP Racing CP7855-91PRTE, colocadas especificamente de forma a obter-se uma distribuição de travagem de 60-40%. Cada eixo do veículo tem o seu circuito de travagem independente do outro, sendo a pressão hidráulica fornecida pela bomba principal de travão respetiva. Por sua vez em ambas as

quatro rodas são utilizadas as pinças de travão Wilwood GP200 que contém dois êmbolos cada uma.

Tabela 2 - Dados do sistema de travagem.

Nº de pastilhas de travão por eixo	4
Pressão hidráulica máxima	80 bar
Coefficiente de atrito pastilha-disco	0.4
Área do pistão da bomba secundária	0,003168 m²
Raio médio do disco	0,12 m

Na figura 32 visualiza-se o fluxograma desenvolvido para modelar o sistema de travagem. Para tal recorreu-se às equações descritas na secção 4.7 e aos dados presentes na tabela anterior.

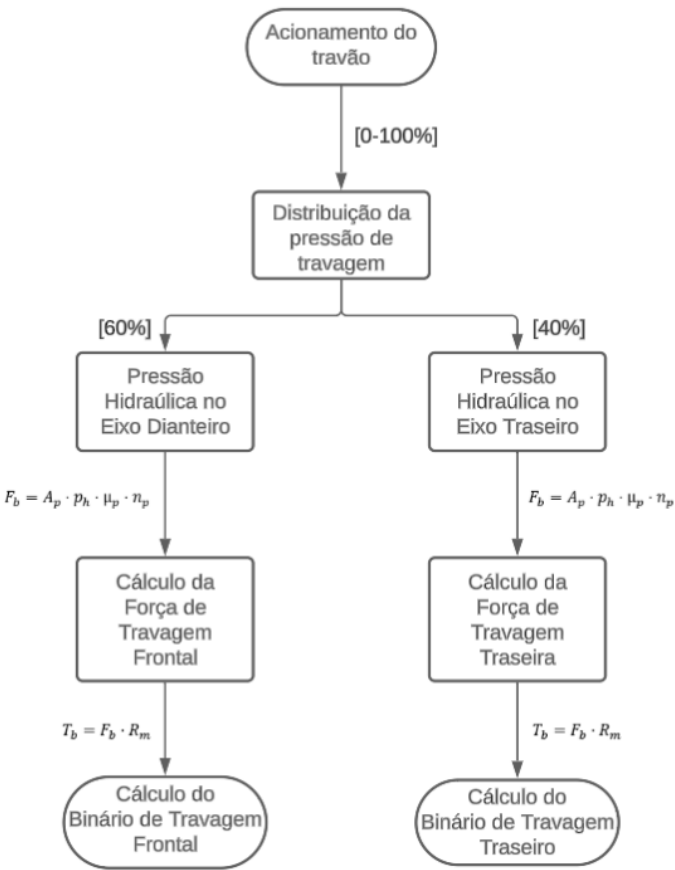


Figura 32 - Fluxograma do dimensionamento do sistema de travagem.

No sistema modelado, figura 34, o parâmetro de entrada é a percentagem de travagem desejada pelo condutor proveniente de um subsistema anterior do Simulink. Sabendo a priori qual é a pressão máxima que o sistema de travagem consegue realizar obtém-se a

pressão no circuito. Posteriormente, esta pressão hidráulica divide-se entre o eixo dianteiro e o eixo traseiro através da distribuição da força de travagem que ocorre na *balance bar*. De seguida o sistema calcula a força e o binário de travagem em cada eixo. Na figura 33 verifica-se uma ilustração de como funciona o sistema no veículo real.

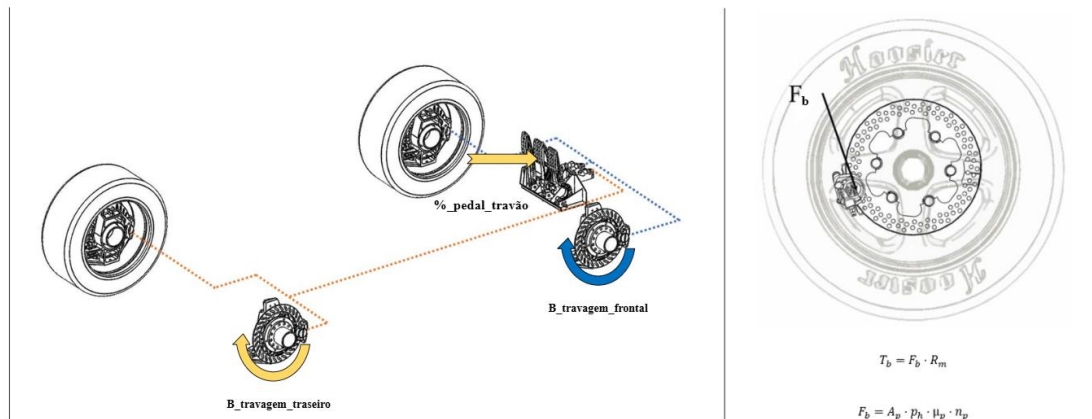


Figura 33 - Esquema das forças a atuar no sistema de travagem desenvolvido.

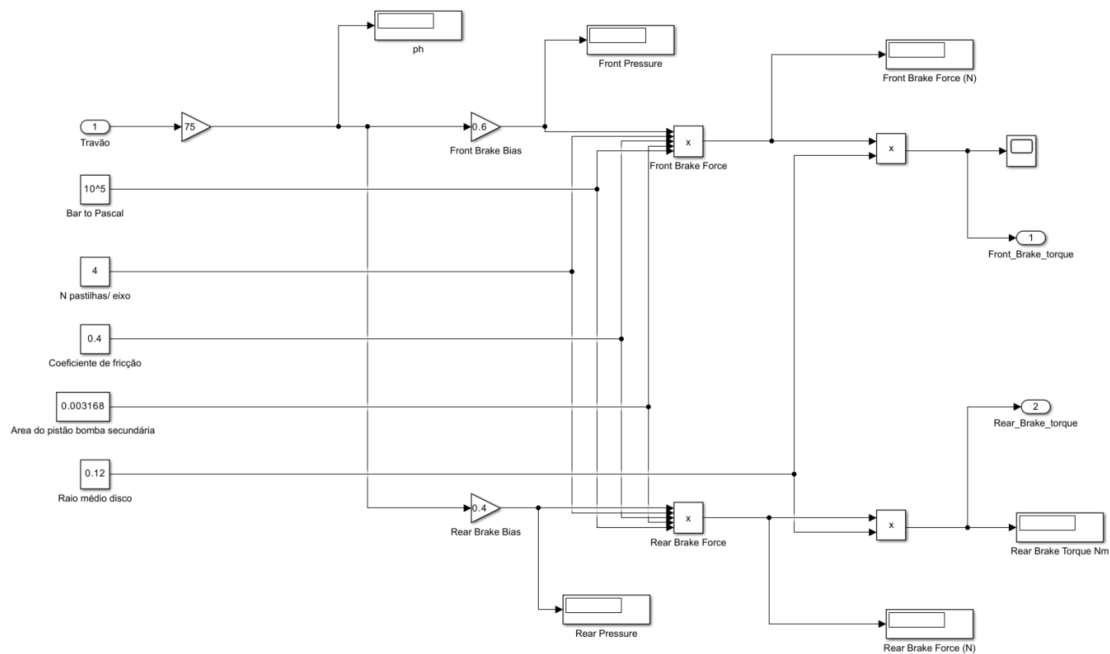


Figura 34 - Modelação do sistema de travagem.

6.2. Sistema de Propulsão

O sistema de propulsão do Formula Student Te-24 é composto por um motor elétrico Emrax 228 ligado diretamente ao diferencial autoblocante por uma corrente com uma relação de transmissão de 4:1, sendo a relação de transmissão do diferencial de 1:1. Na figura 35 encontra-se presente a curva de potência deste motor.

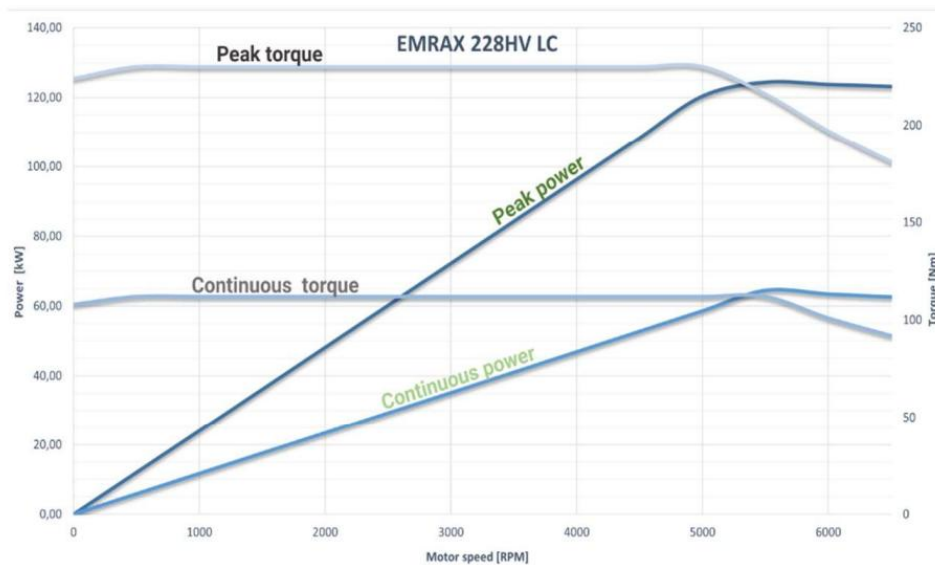


Figura 35 - Curva de potência do motor Emrax 228, (Emrax, 2025).

Para modelar este sistema, figura 37, tem-se como entradas as componentes de velocidade longitudinal e lateral do veículo, bem como o sinal de aceleração imposto pelo condutor. A saída do sistema corresponde ao binário aplicado às rodas motrizes, visível na ilustração da figura 36.

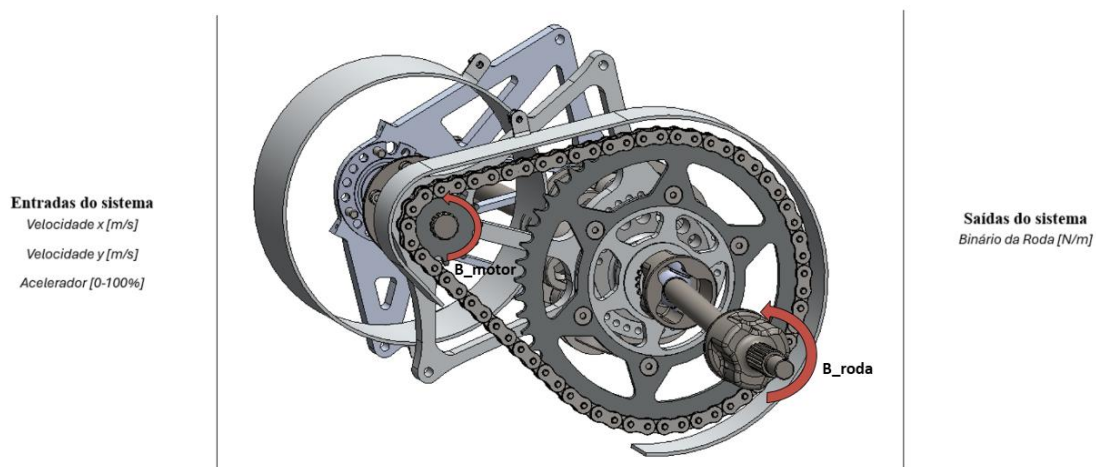


Figura 36 - Esquema do sistema de propulsão do T24e.

Inicialmente, a velocidade escalar do veículo é determinada a partir das componentes V_x e V_y , calculando a norma do vetor velocidade, posteriormente esta permite saber a velocidade angular das rodas motrizes.

Considerando a relação de transmissão total do sistema de transmissão de 4:1, o regime de rotação do motor é obtido diretamente a partir da velocidade angular da roda, multiplicada pela relação de transmissão.

$$n_{motor} = \frac{60}{2\pi r} n_{roda} \quad (45)$$

Este sistema precisa de utilizar uma proteção “if else” para condições de arranque. Uma vez que a velocidade do veículo é zero ou muito próxima de zero, caso não seja pré-definido um valor de rotação de motor a aplicar, a saída de binário enviado por este sistema do modelo seria zero, ficando o veículo no estado estacionário.

O binário do motor é determinado através de uma tabela unidimensional (lookup table 1-D), que caracteriza o binário disponível em função do regime de rotação do motor. O valor obtido é posteriormente escalado pelo sinal de aceleração, representando a solicitação de binário por parte do condutor.

Finalmente, o binário transmitido às rodas é calculado aplicando a relação de transmissão.

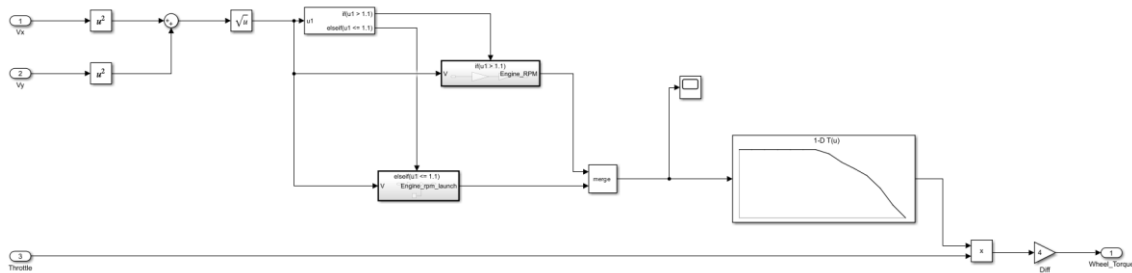


Figura 37 - Modelo do sistema de propulsão.

6.3.Sistema de Transferência de Cargas

O sistema de transferência de peso implementado, figura 39, calcula a distribuição das cargas verticais nos quatro pneus do veículo, integrando os efeitos das acelerações longitudinal e lateral, bem como a influência das forças aerodinâmicas verticais. Este torna-se essencial para que seja possível noutros sistemas do modelo contabilizar a sensibilidade à carga dos pneus.

Deste modo recorre-se às seguintes equações para calcular a carga sobre cada pneu. É de notar que a convenção de sinais em cada equação segue o referencial ortogonal apresentado inicialmente.

$$F_{z11} = \frac{m_v g l_R}{2w_b} - \frac{m_v a_x h_{cg}}{2w_b} + \frac{(m_v l_R/w_b) a_y h_{cg}}{T_w} + \frac{1}{2} \rho C_L A_f v_x^2 \frac{l_R}{2w_b} \quad (46)$$

$$F_{z12} = \frac{m_v g l_R}{2w_b} - \frac{m_v a_x h_{cg}}{2w_b} - \frac{(m_v l_R/w_b) a_y h_{cg}}{T_w} + \frac{1}{2} \rho C_L A_f v_x^2 \frac{l_R}{2w_b} \quad (47)$$

$$F_{z21} = \frac{m_v g l_F}{2w_b} + \frac{m_v a_x h_{cg}}{2w_b} + \frac{(m_v l_F/w_b) a_y h_{cg}}{T_w} + \frac{1}{2} \rho C_L A_f v_x^2 \frac{l_F}{2w_b} \quad (48)$$

$$F_{z22} = \frac{m_v g l_F}{2w_b} + \frac{m_v a_x h_{cg}}{2w_b} - \frac{(m_v l_F/w_b) a_y h_{cg}}{T_w} + \frac{1}{2} \rho C_L A_f v_x^2 \frac{l_F}{2w_b} \quad (49)$$

A implementação em Simulink foi realizada através de blocos aritméticos que executam as operações definidas pelas equações anteriores, como se verifica na figura 38. Este sistema tem como entradas a aceleração sobre o eixo de x e y e a velocidade sobre o eixo x , que provém de sistemas anteriores. Como saídas tem-se então a carga sobre cada pneu, F_{z11} , F_{z12} , F_{z21} e F_{z22} , que por sua vez serão utilizadas no sistema que define o comportamento dos pneus. Neste são ainda definidas todas as constantes presentes nas equações anteriores, como a massa do veículo, distância entre eixos, largura entre vias, altura do centro de massa e os coeficientes aerodinâmicos.



Figura 38 - Esquema de funcionamento do modelo de cargas verticais.

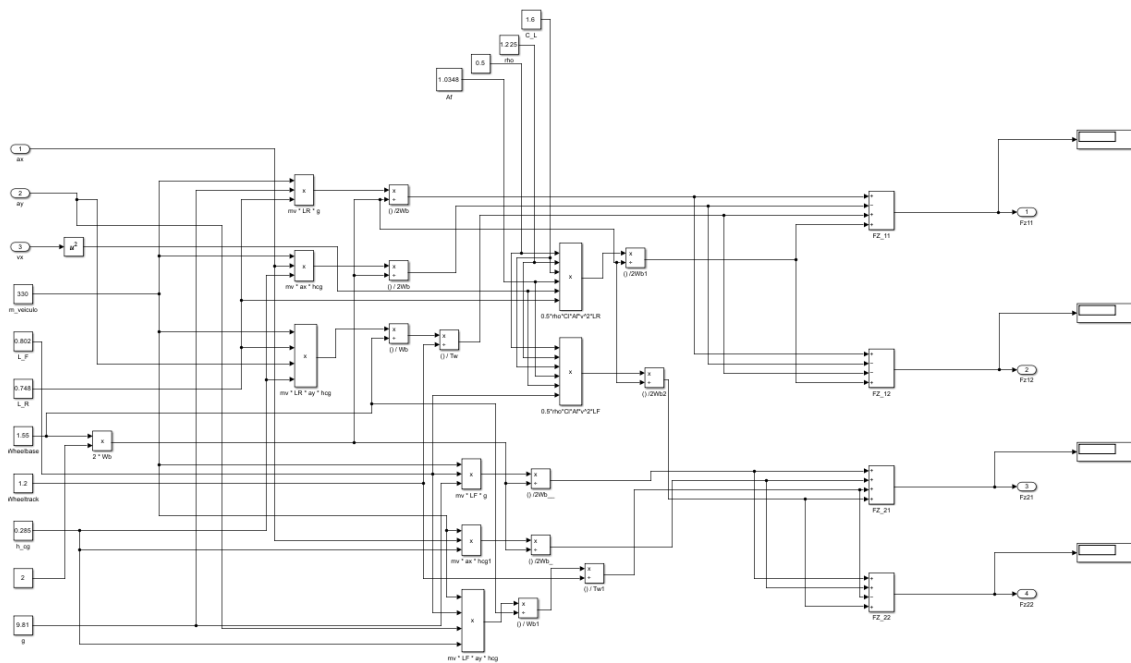


Figura 39 - Modelo das cargas verticais.

6.4. Sistema de Cálculo do *Slip Angle*

De modo a caracterizar a dinâmica lateral do veículo é fundamental calcular os *slip angles* de cada pneu em cada time-step da simulação. Conforme apresentado no capítulo 4 e considerando as velocidades V_y e V_x no centro de massa do veículo pode calcular-se o *slip angle* através da equação 16. Mas uma vez que o simulador apresenta 12 graus de liberdade, é necessário transpor esta expressão e realizar o cálculo individual do *slip angle* de cada pneu. Para tal tem-se agora em conta as velocidades lineares do veículo, a velocidade imposta pela velocidade angular do chassis e o ângulo de direção das rodas do eixo da frente.

Deste modo obtém-se as seguintes expressões para o *slip angle* individual de cada roda:

$$\alpha_{11} = \arctan\left(\frac{V_y + l_F \dot{\psi}}{V_x + \frac{T_w}{2} \dot{\psi}}\right) - \delta \quad (50)$$

$$\alpha_{12} = \arctan\left(\frac{V_y + l_F \dot{\psi}}{V_x - \frac{T_w}{2} \dot{\psi}}\right) - \delta \quad (51)$$

$$\alpha_{21} = \arctan\left(\frac{V_y - l_R \dot{\psi}}{V_x + \frac{T_w}{2} \dot{\psi}}\right) \quad (52)$$

$$\alpha_{22} = \arctan\left(\frac{V_y - l_R \dot{\psi}}{V_x - \frac{T_w}{2} \dot{\psi}}\right) \quad (53)$$

O sistema no simulink para este modelo, figura 41, tem como base as equações descritas, que foram implementadas através de blocos de lógica do software. Para tal foi necessário definir as constantes geométricas do carro presentes nas fórmulas, e colocar através de blocos “inputs” as variáveis V_y , V_x e $\dot{\psi}$, que provém de outro sistema. Este tem ainda uma proteção através de blocos “if else”, para quando a velocidade do veículo for inferior a 1 m/s, este automaticamente definir os *slip angles* com o valor 0, assim evita divisões por 0 quando o carro estiver parado ou próximo disso, de forma a não parar a simulação. Por fim, os *slip angles* são ligados a blocos “output” para seguirem para outro sistema. Na figura 40 está representado o esquema de funcionamento deste modelo.



Figura 40 - Esquema de funcionamento do modelo de cálculo do *slip angle*.

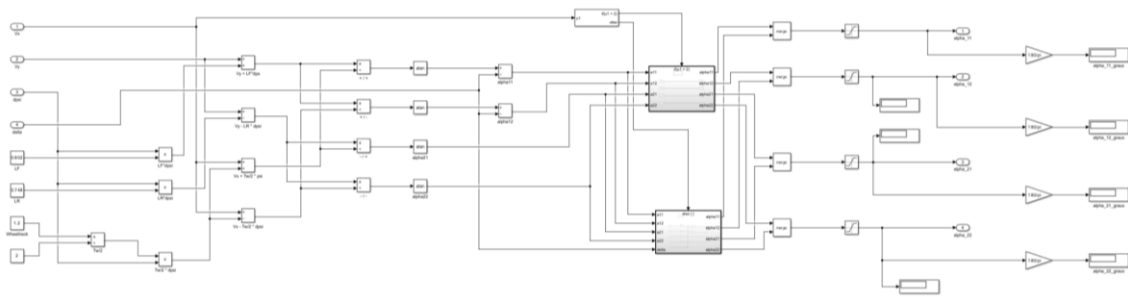


Figura 41 - Sistema de cálculo do *Slip Angle*.

6.5. Sistema de Cálculo das Velocidades Angulares das Rodas

A base do sistema de cálculo das velocidades angulares é a expressão (17) para a aceleração angular, sendo que é possível integrar a mesma para se obter a velocidade angular tal como referido no capítulo 4.

Assim, neste sistema utiliza-se como inputs as forças dos pneus provenientes de outro sistema, o binário que chega à roda, e o binário de travagem.

Este calcula também a inércia total através da definição das constantes de inércia do motor, inércia da roda e da relação do sistema de transmissão, seguindo a expressão (18).

Posto isto, novamente, introduz-se os blocos de lógica para replicar a equação (17), saindo do sistema como outputs as velocidades angulares de cada roda, figura 43.

Na figura 42 está representado o esquema de funcionamento deste modelo.

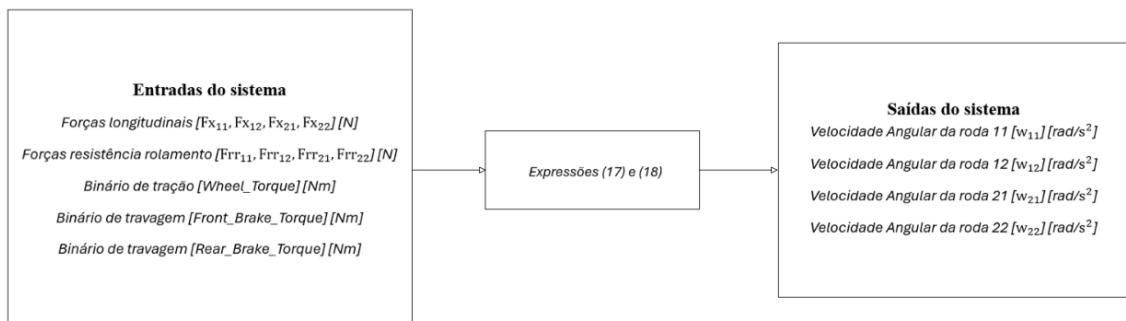


Figura 42 - Esquema de funcionamento do modelo de cálculo das velocidades angulares.

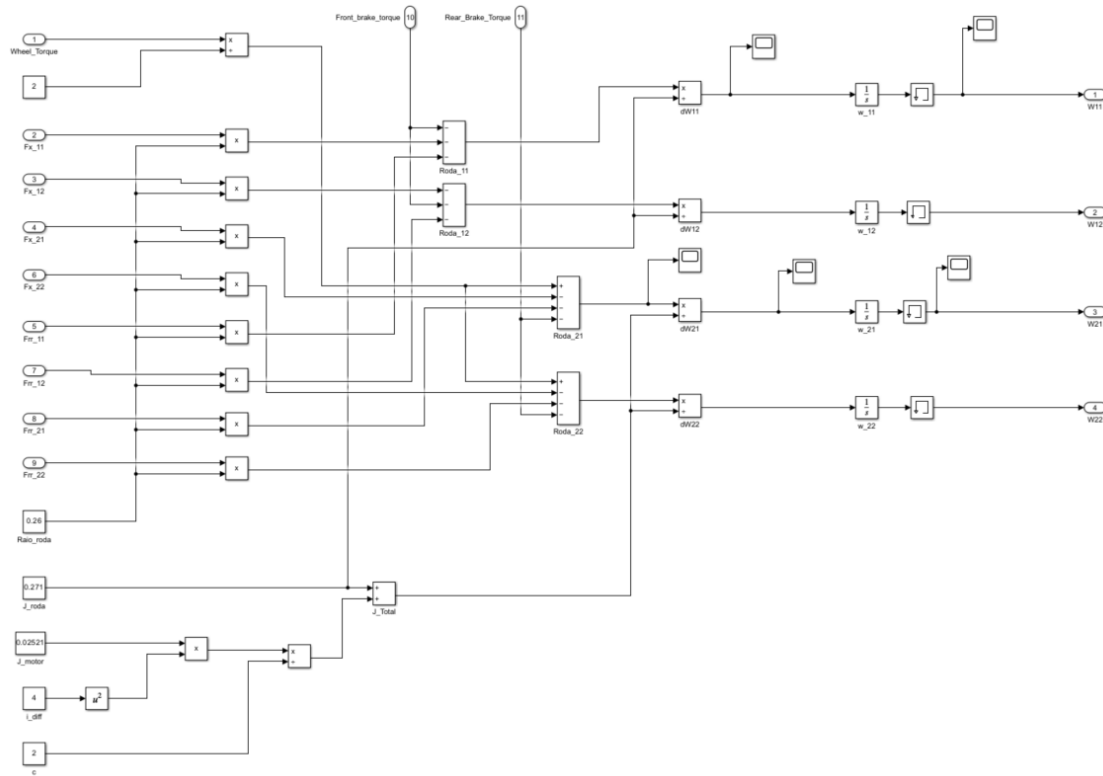


Figura 43 - Sistema de cálculo das velocidades angulares.

6.6. Sistema de Cálculo do *Slip Ratio*

O escorregamento longitudinal, comumente referido como *slip ratio*, é expresso pela equação 54, onde V_x é a velocidade longitudinal da roda e $r_e \Omega$ a sua velocidade periférica. Um valor positivo indica condição de tracção ($r_e \Omega > V_x$) e negativo indica travagem ($r_e \Omega < V_x$).

$$k = -\frac{V_x - r_e \Omega}{V_x} \quad (54)$$

Para exprimir a velocidade longitudinal no referencial do pneu, recorre-se ao *slip angle* α previamente calculado. A velocidade combinada da roda v_t resultante das componentes lateral e longitudinal induzidas pelo movimento do veículo e pela velocidade angular do chassis, não está de forma geral, alinhada com o plano do pneu. A sua componente longitudinal obtém-se por projeção geométrica:

$$v_x = v_t \cdot \cos \alpha \quad (55)$$

A velocidade combinada v_t incorpora o contributo da velocidade angular do chassis nas velocidades locais de cada roda, seguindo o mesmo raciocínio cinemático utilizado no cálculo do *slip angle*.

$$v_{tFr} = \sqrt{(v_y + l_F \dot{\psi})^2 + \left(v_x + \frac{T}{2} \dot{\psi}\right)^2} \quad (56)$$

Com expressões análogas para as restantes rodas, alterando os sinais de l_F para $-l_R$ nas rodas traseiras e de $\frac{T_w}{2}$ para $-\frac{T_w}{2}$ nas rodas do lado direito.

No simulink, figura 45, foi introduzido blocos inputs para o sistema receber as 2 variáveis de velocidade do veículo, a velocidade angular dos chassis, as velocidades angulares e o *slip angle* de cada roda. E ainda adicionado um bloco que define a constante do raio efetivo da roda. De seguida introduziram-se os blocos de lógica para reproduzir as equações mencionadas. Por fim, antes dos 4 “outputs” responsáveis por encaminhar os valores de *slip ratio* de cada roda, colocou-se um bloco “saturation” em cada linha para que este valor seja sempre compreendido entre -1 e 1. Na figura 44 encontra-se esquematizado as entradas e saídas do modelo assim como as expressões utilizadas.

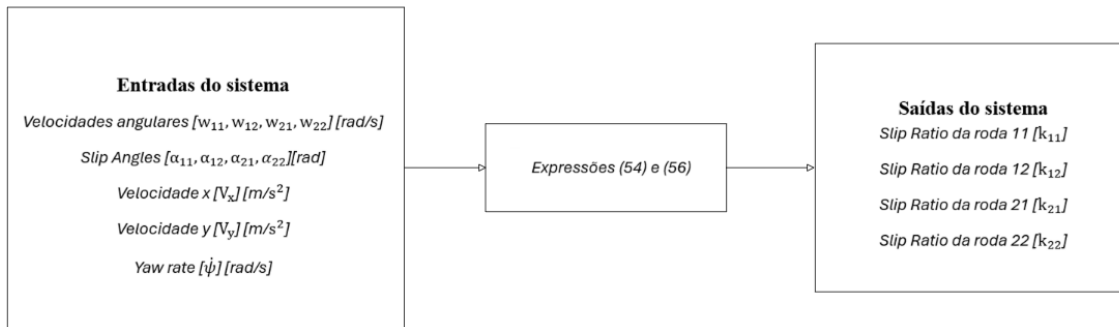


Figura 44 - Sistema de cálculo do *slip ratio*.

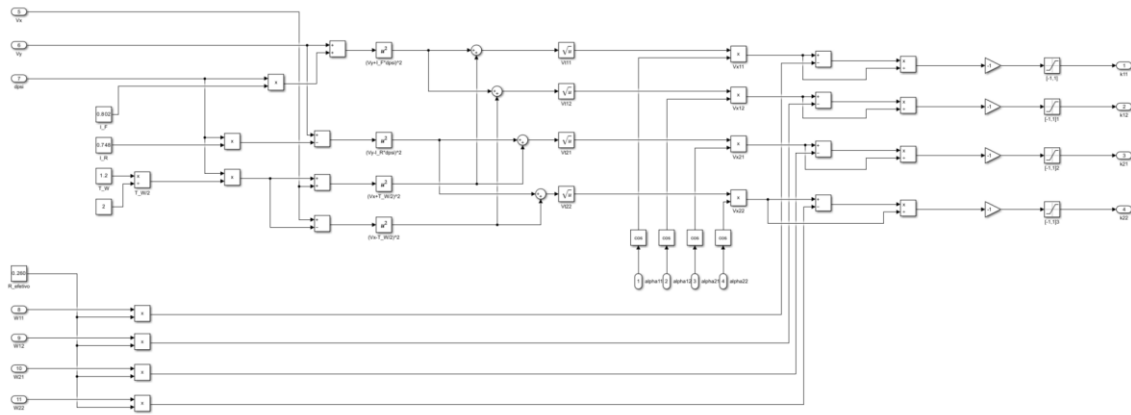


Figura 45 - Sistema para cálculo do escorregamento longitudinal.

6.7. Sistema da Fórmula Mágica de Pacejka

O sistema de cálculo das forças do pneu recebe como entradas o *slip angle*, o escorregamento longitudinal e a carga vertical de cada roda, e aplica a Fórmula Mágica de Pacejka para determinar as forças lateral e longitudinal produzidas por cada pneu.

O primeiro passo para a construção deste sistema foi desenvolver um subsistema, figura 46, responsável por calcular os parâmetros y_m , y_a , $y'(0)$ e x_m consoante a carga vertical no pneu em cada time-step. Este é composto por um único bloco input responsável por trazer o valor de F_z , de seguida este valor é introduzido em 4 tabelas (2D Look up table) responsáveis por interpolar os valores dos parâmetros dos pneus com base nos gráficos experimentais apresentados no capítulo 5.

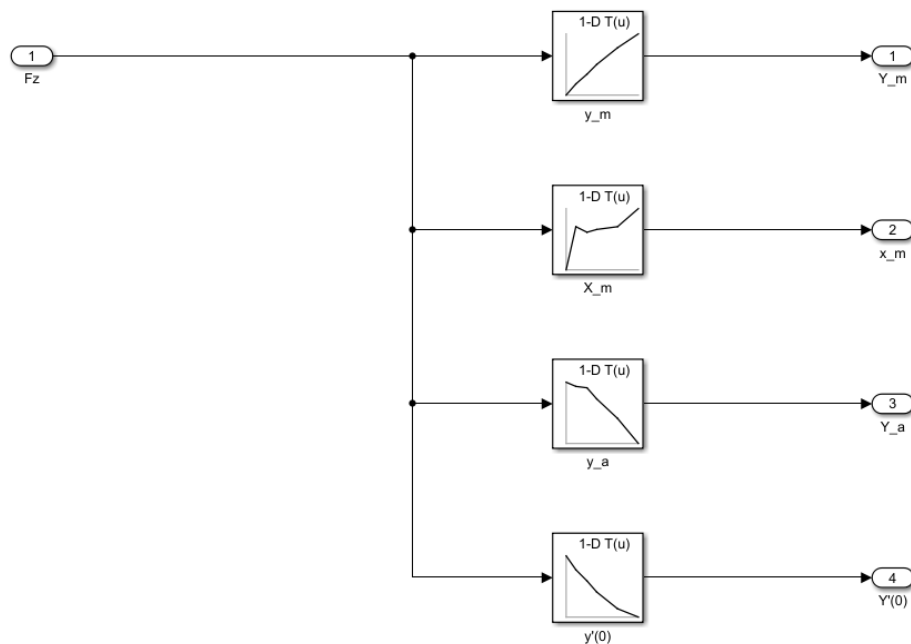


Figura 46 - Subsistema dos parâmetros experimentais dos pneus.

Posteriormente já com os parâmetros definidos em cada carga F_z que entra no sistema, utilizou-se o bloco Matlab function para calcular os coeficientes B, C, D e E que permitem aplicar a fórmula mágica. Desenvolveu-se o código presente na figura 47 para aplicar dentro da função.

```
function [B, C, D, E, Fy] = pacejka_completo(alpha, ym, ya, y_grad, xm)
% ENTRADAS:
% alpha: Slip angle (entrada do sistema)
% ym, ya, y_grad, xm: Saídas das tabelas de lookup

% 1. Trabalhar com magnitudes POSITIVAS para os coeficientes
D = abs(ym);
C = 2 - (2/pi) * asin(abs(ya)/D);
B = abs(y_grad) / (C * D);

% 2. Cálculo de E (usando unidades consistentes em graus)
% tand e atand usam graus automaticamente no MATLAB
num = tand(180 / (2*C)) - (B * abs(xm));
den = atand(B * abs(xm)) - (B * abs(xm));
E = num / den;

% 3. A FÓRMULA MÁGICA (O corpo final)
% y = D*sin(C*atan(B*x - E*(B*x - atan(B*x))))

x = alpha;
term_inner = B*x - E*(B*x - atand(B*x));
Fy = D * sind(C * atand(term_inner));

end
```

Figura 47 - Código desenvolvido para cálculo da fórmula mágica.

Aplicando os dois subsistemas anteriores tanto para as forças longitudinais como para as forças laterais, torna-se ainda necessário definir como ambas interagem entre si e se os cálculos das mesmas estão dentro do círculo de fricção. Deste modo foi necessário colocar mais um bloco Matlab function com o código presente na figura 48. Este assegura que a resultante das forças se mantém dentro dos limites de aderência do pneu, prevenindo assim a ocorrência de forças sobrestimadas pelo modelo em situações de aceleração ou travagem combinadas com curva. Adicionalmente, introduziu-se ainda um fator de atenuação linear para velocidades inferiores a 0,5 m/s, de forma a prevenir instabilidades numéricas e singularidades matemáticas inerentes ao cálculo dos slips em regimes de baixa velocidade, principalmente quando esta é próxima de zero.

```

function [Fx_comb, Fy_comb] = tire_interaction_final(Fx_puro, Fy_puro, SR, alpha, Vx, Vy)
% 1. Calcular a velocidade resultante (Hipotenusa)
V_res = sqrt(Vx^2 + Vy^2);

% 2. Lógica da Elipse (0 que já tínhamos)
s = abs(SR);
a = abs(deg2rad(alpha));
denominador = sqrt(s^2 + (tan(a))^2);

if denominador < 0.001
    Fx_temp = Fx_puro;
    Fy_temp = Fy_puro;
else
    Fx_temp = Fx_puro * (s / denominador);
    Fy_temp = Fy_puro * (tan(a) / denominador);
end

% 3. Proteção de Baixa Velocidade usando a resultante
% Usamos V_res para garantir que o pneu " acorde " quer o movimento seja frontal ou lateral
v_threshold = 0.5;
if V_res < v_threshold
    k_fade = V_res / v_threshold;
else
    k_fade = 1.0;
end

% 4. Saídas
Fx_comb = Fx_temp * k_fade;
Fy_comb = Fy_temp * k_fade;
end

```

Figura 48 - Código para implementação do círculo de fricção.

Por fim, na figura 50 está presente o sistema completo desenvolvido para cálculo das forças laterais e longitudinais de apenas uma roda, sendo necessário replicar o mesmo sistema para as restantes. Para calcular a força de resistência ao rolamento multiplicou-se a carga F_z pelo coeficiente de resistência ao rolamento de valor 0,015. Na figura 49 encontra-se esquematizado as entradas e saídas do modelo assim como as expressões utilizadas.



Figura 49 - Esquema de funcionamento do modelo da fórmula mágica.

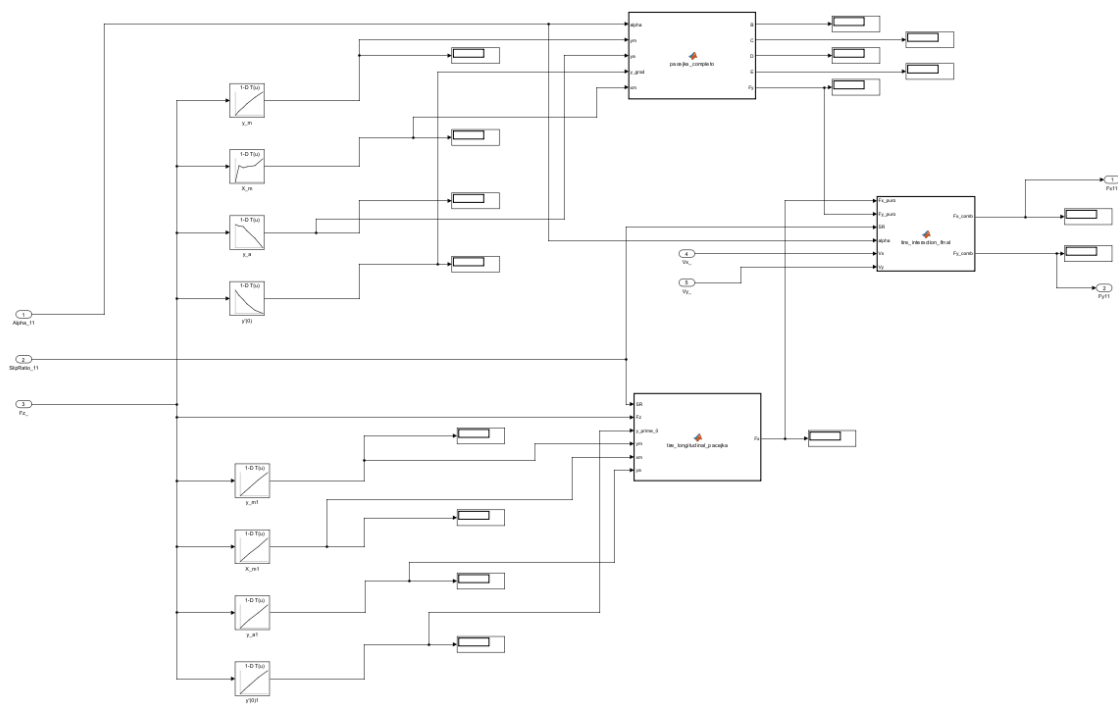


Figura 50 - Sistema completo para cálculo das forças dos pneus.

6.8. Sistema de Cálculo das Acelerações

O sistema de cálculo das acelerações tem como objetivo determinar as acelerações longitudinal, lateral e rotacional do veículo com base nas equações (13), (14) e (15) apresentadas no capítulo 4. Estas são equações diferenciais de segunda ordem, uma vez que contêm a segunda derivada da posição em ordem ao tempo como variável dependente. Para que o Simulink as possa resolver numericamente, é necessário transformá-las em equações de primeira ordem através da representação em espaço de estados.

Esta transformação consiste em definir um vetor de estados $x(t)$ que agrupa todas as variáveis que variam ao longo do tempo, sendo estas as posições longitudinal e lateral, as velocidades longitudinal e lateral, o ângulo de *yaw* e a velocidade angular do chassi. É ainda necessário definir um vetor de entradas $u(t)$ que contém as grandezas externas que alimentam o sistema, nomeadamente o ângulo de direção e as forças longitudinais e laterais de cada pneu, calculadas anteriormente no sistema da fórmula mágica.

$$x(t) = [x; y; V_x; V_y; \psi; \dot{\psi}]^T \quad (57)$$

$$u(t) = [\delta; F_{x11}; F_{y11}; F_{x12}; F_{y12}; F_{x21}; F_{y21}; F_{x22}; F_{y22}]^T \quad (58)$$

O sistema fica então descrito pela equação $\dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t)$, onde a matriz A relaciona os estados entre si e a matriz B relaciona as entradas com a variação dos estados. A cada *time-step*, o Simulink multiplica as matrizes pelos respetivos vetores, obtendo as derivadas dos estados, ou seja, as acelerações e as velocidades, que são depois integradas para fornecer os valores atualizados de x, y, V_x, V_y, ψ e $\dot{\psi}$.

Deste modo tornou-se ainda preciso desenvolver o seguinte código, figura 51, para colocar dentro de um bloco “matlab function”, com o objetivo de definir as matrizes A, B, C e D .

```

function [A, B, C, D] = fcn(Vx, Vy, psi_dot, delta, C_D, rho, A_f, T_w, l_F, l_R, m_v, J_zz)
% Vx_calc >= 0.1 para evitar singularidades matemáticas (divisão por zero)
Vx_calc = max(abs(Vx), 0.1);
aero_term = -0.5 * C_D * rho * A_f * Vx_calc / m_v;
cos_d = cos(delta);
sin_d = sin(delta);
% -----
% 4. Matriz A (6x6)
A = [0, 0, 1, 0, 0, 0;
     0, 0, 0, 1, 0, 0;
     0, 0, aero_term, psi_dot, 0, 0;
     0, 0, -psi_dot, 0, 0, 0;
     0, 0, 0, 0, 0, 1;
     0, 0, 0, 0, 0, 0];
% -----

% 5. Termos da Matriz B para a linha do yaw (linha 6)
% Fx11 (col 2): momento de Fx11 no eixo Z
b61 = ( l_F * sin_d + 0.5 * T_w * cos_d ) / J_zz;
% Fy11 (col 3): momento de Fy11 no eixo Z
b62 = ( l_F * cos_d - 0.5 * T_w * sin_d ) / J_zz;
% Fx12 (col 4): momento de Fx12 no eixo Z
b63 = ( l_F * sin_d - 0.5 * T_w * cos_d ) / J_zz;
% Fy12 (col 5): momento de Fy12 no eixo Z
b64 = ( l_F * cos_d + 0.5 * T_w * sin_d ) / J_zz;
% Fx21 (col 6): momento de Fx21 no eixo Z (traseiro esquerdo)
b65 = 0.5 * T_w / J_zz;
% Fy21 (col 7): momento de Fy21 no eixo Z (traseiro esquerdo)
b66 = -l_R / J_zz;
% Fx22 (col 8): momento de Fx22 no eixo Z (traseiro direito)
b67 = -0.5 * T_w / J_zz;
% Fy22 (col 9): momento de Fy22 no eixo Z (traseiro direito)
b68 = -l_R / J_zz;
% -----
% 6. Matriz B (6x9)
B = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0;
     0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0;
     0, cos_d/m_v, -sin_d/m_v, cos_d/m_v, -sin_d/m_v, 1/m_v, 0, 1/m_v, 0;
     0, sin_d/m_v, cos_d/m_v, sin_d/m_v, cos_d/m_v, 0, 1/m_v, 0, 1/m_v;
     0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0;
     0, b61, b62, b63, b64, b65, b66, b67, b68];
% -----
% 7. Matriz C (6x6) - Identidade: todos os estados são observáveis
% -----
C = eye(6);
% -----
% 8. Matriz D (6x9) - Nula: sem transmissão direta entrada->saída
% -----
D = zeros(6, 9);
end

```

Figura 51 - Código para definição das matrizes do modelo de acelerações.

A figura 53 apresenta o modelo construído no simulink, através de 9 blocos “inputs” para as entradas do sistema, um bloco “matlab function” com 8 blocos “constant” associados, um bloco “varying state-space”, dois blocos “demux” para ser possível visualizar as saídas provenientes do “state-space”, e blocos outputs para enviar os valores das variáveis calculadas para fora do sistema, sendo que na figura 52 é possível verificar de forma simplificada a ligação entre estes inputs e outputs.

O movimento vertical da carroçaria, designado por *heave* e representado por Z_s , é influenciado pela força aerodinâmica vertical, proporcional ao quadrado da velocidade, e pelas forças geradas pelas molas e amortecedores dos dois eixos, de onde resulta o fator 2 na equação. Substituindo na forma geral obtém-se a equação seguinte.

$$\ddot{Z}_s = \frac{\frac{1}{2}\rho C_D A_f \dot{x}^2 - 2(k_{sf} + k_{sr})Z_s - 2(C_f + C_r)\dot{Z}_s}{m_v} \quad (60)$$

Para os movimentos rotacionais da carroçaria, a massa é substituída pela inércia e as forças pelos momentos correspondentes. No caso do *roll*, considerando que o centro de rolamento se situa ao nível do solo, o momento desestabilizador é gerado diretamente pela aceleração lateral a_y a atuar na massa da carroçaria, tendo como braço a altura total do centro de massa em relação ao solo. Esta simplificação corresponde a adotar o maior braço de momento possível, sendo por isso conservadora, na medida em que sobrestima ligeiramente o momento de roll relativamente a uma modelação com o centro de rolamento acima do solo. Quando a carroçaria apresenta um ângulo de *roll*, o peso gera igualmente um momento desestabilizador, ao qual a suspensão se opõe através da sua rigidez ao movimento de *roll* e do amortecimento C_γ , obtendo-se a equação seguinte.

$$\ddot{\gamma} = \frac{-m_v h_{cg} a_y + \gamma(m_v g h_{cg} - k_\gamma) + \dot{\gamma}(-C_\gamma)}{J_{xx}} \quad (61)$$

O raciocínio para o *pitch* é idêntico, mas em torno do eixo lateral y com inércia J_{yy} . O momento desestabilizador é gerado pela aceleração longitudinal a_x actuando igualmente à altura do centro de massa, opondo-se-lhe a rigidez em *pitch* k_θ e o amortecimento C_θ .

$$\ddot{\theta} = \frac{m_v h_{cg} a_x + \gamma(m_v g h_{cg} - k_\theta) + \dot{\theta}(-C_\theta)}{J_{yy}} \quad (62)$$

Segundo o autor (Milliken, 1995), as rigidezes de *pitch* e *roll* podem ser expressas pelas equações seguintes, notando que devido à possibilidade das distâncias de cada eixo ao centro de massa serem diferentes, assim como a rigidez das molas, o cálculo da rigidez de *pitch* divide-se entre travagem e aceleração.

$$k_{\gamma} = \frac{T_w^2(k_{rf} + k_{rr})}{2} \quad (63)$$

$$k_{\theta \text{ travagem}} = w_b 2k_{sf} l_F \quad (64)$$

$$k_{\theta \text{ aceleração}} = -w_b 2k_{sr} l_R \quad (65)$$

$$C_{\gamma} = \frac{T_w^2(C_{rf} + C_{rr})}{2} \quad (66)$$

Para a análise do deslocamento da suspensão em cada roda individualmente, é necessário exprimir o deslocamento vertical de cada roda em função dos movimentos da carroçaria. Seguindo a convenção SAE, Z_s positivo corresponde à carroçaria a subir. Com θ positivo considerou-se que o eixo traseiro comprime, reduzindo Z_s na traseira e aumentando na frente. Com γ positivo a carroçaria inclina para a direita e o lado direito desce e comprime.

Combinando os três movimentos, obtêm-se as expressões do deslocamento vertical em cada roda:

$$Z_{S_{11}} = Z_s + l_F \cdot \sin(\theta) + \left(\frac{T_w}{2}\right) \cdot \sin(\gamma) \quad (67)$$

$$Z_{S_{12}} = Z_s + l_F \cdot \sin(\theta) - \left(\frac{T_w}{2}\right) \cdot \sin(\gamma) \quad (68)$$

$$Z_{S_{21}} = Z_s - l_R \cdot \sin(\theta) + \left(\frac{T_w}{2}\right) \cdot \sin(\gamma) \quad (69)$$

$$Z_{S_{22}} = Z_s - l_R \cdot \sin(\theta) - \left(\frac{T_w}{2}\right) \cdot \sin(\gamma) \quad (70)$$

Analogamente ao modelo das acelerações, transformou-se as equações de segunda ordem em equações de primeira ordem resolúveis pelo Simulink por integração numérica. Neste caso o vetor de estados agrupa os deslocamentos e as velocidades nos três graus de liberdade da carroçaria.

$$x(t) = [Z_s, \theta, \gamma, \dot{Z}_s, \dot{\theta}, \dot{\gamma}]^T \quad (71)$$

O vetor de entradas contém as grandezas fornecidas pelo modelo de cálculo das acelerações, onde v_x é necessário para o cálculo da força aerodinâmica, a_x alimenta a equação do *pitch* e a_y alimenta a equação do *roll*.

$$u(t) = [v_x, a_x, a_y]^T \quad (72)$$

No código presente na figura 54 encontra-se presente a definição das matrizes necessárias para o bloco de espaço de estados. Este tem ainda a particularidade de definir que quando o deslocamento de cada eixo atinge os limites de compressão ou extensão da suspensão, a rigidez aumenta abruptamente com a adição da rigidez dos batentes de fim de curso e define ainda o amortecimento dos amortecedores consoante estes estejam em extensão ou compressão.

```
function [A, B, C, D] = matrix_ride(Zs, theta, gamma, Zs_dot, theta_dot, gamma_dot, Vx, ax, ay)
% --- 1. PARÂMETROS LEIRIA (CAR 129) ---
m = 330; % Massa total (kg)
Jxx = 83.326; % Inércia Roll (kgm²)
Jyy = 214.782; % Inércia Pitch (kgm²)
hcg = 0.285; % Altura do CG (m)
Lf = 0.802; % Distância CG eixo frontal (m)
Lr = 1.55 - Lf; % Distância CG eixo traseiro (m) = 0.748m
Tw = 1.200; % Track width (m)
rho = 1.225; % Densidade do ar
Cl = 1.6; % Coeficiente de Lift (Downforce)
Cd = 0.9; % Coeficiente de Drag
Af = 1.0348; % Área frontal (m²)
% Rigidez (N/mm → N/m, x1000)
kf_nom = 42030; % 42.03 N/mm
kr_nom = 52400; % 52.4 N/mm
k_bump = 50000;
% Amortecimento (Ns/mm → Ns/m, x1000)
cf_j = 1680; % Amortecimento dianteiro jounce (1.68 Ns/mm)
cf_r = 3780; % Amortecimento dianteiro rebound (3.78 Ns/mm)
cr_j = 2190; % Amortecimento traseiro jounce (2.19 Ns/mm)
cr_r = 4920; % Amortecimento traseiro rebound (4.92 Ns/mm)
% Limites de curso (m)
lim_j_f = 0.03403; lim_r_f = -0.02932;
lim_j_r = 0.03153; lim_r_r = -0.03473;
```

```

% --- 2. LÓGICA DE SUSPENSÃO ---
Zf = Zs - Lf * theta;
Zr = Zs + Lr * theta;
Zf_dot = Zs_dot - Lf * theta_dot;
Zr_dot = Zs_dot + Lr * theta_dot;
kf = kf_nom + (Zf > lim_j_f || Zf < lim_r_f) * k_bump;
kr = kr_nom + (Zr > lim_j_r || Zr < lim_r_r) * k_bump;
cf = (Zf_dot > 0)*cf_j + (Zf_dot <= 0)*cf_r;
cr = (Zr_dot > 0)*cr_j + (Zr_dot <= 0)*cr_r;
% --- 3. RIGIDEZES ROTACIONAIS ---
k_theta = 2*(kf*Lf^2 + kr*Lr^2);
k_gamma = (kf+kr)*(Tw^2)/2;
c_theta = 2*(cf*Lf^2 + cr*Lr^2);
c_gamma = (cf+cr)*(Tw^2)/2;

% --- 4. FORÇA AERODINÂMICA PRÉ-CALCULADA ---
F_aero = 0.5 * rho * Cl * Af * Vx^2;
% --- 5. MATRIZES ---
A = [0, 0, 0, 1, 0, 0;
     0, 0, 0, 0, 1, 0;
     0, 0, 0, 0, 0, 1;
     -2*(kf+kr)/m, 0, 0, -2*(cf+cr)/m, 0, 0;
     0, (m*9.81*hcg-k_theta)/Jyy, 0, 0, 0, -c_theta/Jyy;
     0, 0, (m*9.81*hcg-k_gamma)/Jxx, 0, 0, -c_gamma/Jxx];
% Entradas u = [Vx; ax; ay]
B = [0, 0, 0;
     0, 0, 0;
     0, 0, 0;
     F_aero/m, 0, 0;
     0, (m*hcg)/Jyy, 0;
     0, 0, (-m*hcg)/Jxx];
C = eye(6);
D = zeros(6, 3);
end

```

Figura 54 - Código para cálculo das matrizes do modelo de suspensão.

Desenvolveu-se ainda o código presente na figura 55 para análise individual do deslocamento sofrido pela suspensão em cada roda e análise da velocidade de movimento de cada uma.

```

function [Zf_l, Zf_r, Zr_l, Zr_r, Zf_l_dot, Zf_r_dot, Zr_l_dot, Zr_r_dot] = fcn(Zs, theta, gamma, Zs_dot, theta_dot, gamma_dot)

% PARÂMETROS LEIRIA (CAR 129)
Lf = 0.802; % Distância CG eixo frontal (m)
Lr = 1.55 - Lf; % Distância CG eixo traseiro (m)
Tw = 1.200; % Track width (m)

% DESLOCAMENTO DE CADA CORNER (m)
Zf_l = Zs - Lf*theta + (Tw/2)*gamma; % dianteiro esquerdo
Zf_r = Zs - Lf*theta - (Tw/2)*gamma; % dianteiro direito
Zr_l = Zs + Lr*theta + (Tw/2)*gamma; % traseiro esquerdo
Zr_r = Zs + Lr*theta - (Tw/2)*gamma; % traseiro direito

% VELOCIDADE DE CADA CORNER (m/s)
Zf_l_dot = Zs_dot - Lf*theta_dot + (Tw/2)*gamma_dot;
Zf_r_dot = Zs_dot - Lf*theta_dot - (Tw/2)*gamma_dot;
Zr_l_dot = Zs_dot + Lr*theta_dot + (Tw/2)*gamma_dot;
Zr_r_dot = Zs_dot + Lr*theta_dot - (Tw/2)*gamma_dot;

end

```

Figura 55 - Código para análise do deslocamento vertical de cada roda.

Por fim, e seguindo a mesma filosofia de desenvolvimento dos modelos no Simulink utilizada até aqui, construiu-se o modelo da figura 57. Verificando-se o esquema de funcionamento do mesmo na figura 56.

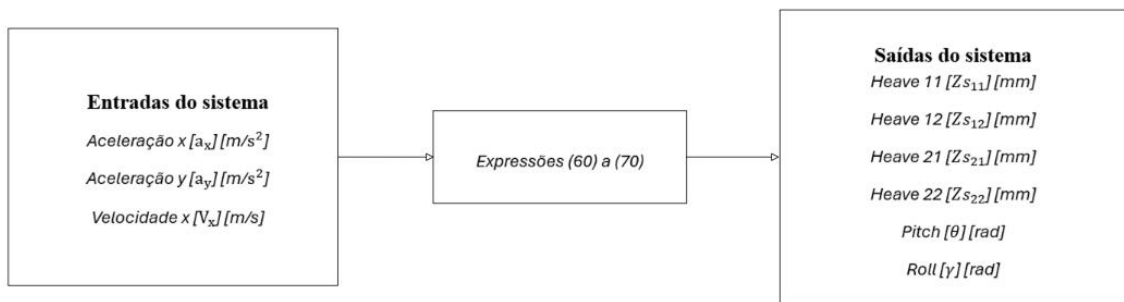


Figura 56 – Esquema de funcionamento do modelo de comportamento da suspensão.

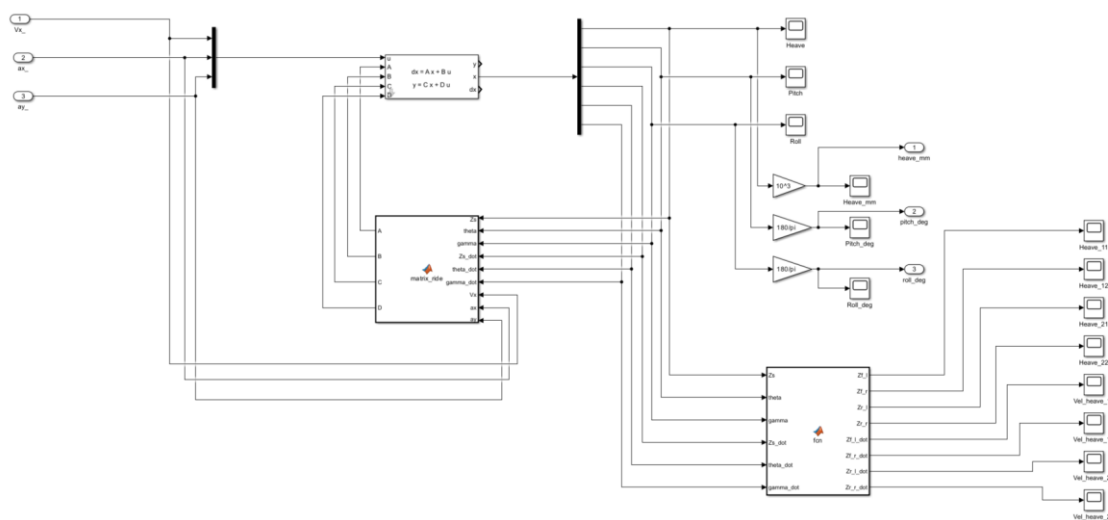


Figura 57 - Modelo de comportamento da suspensão.

6.10. Modelo do Condutor

O modelo do condutor, figura 58, tem como objetivo controlar o acelerador, o travão e o ângulo de direção a aplicar em cada instante de simulação. Para tal, são utilizados valores de referência reais de velocidade e ângulo de *yaw*, obtidos a partir de dados registados em pista.

Dois controladores PID comparam continuamente o erro entre os valores de referência e os valores calculados pelo simulador, ajustando os comandos de forma a aproximar o mais possível o valor calculado do valor real. O primeiro controlador, responsável pelo acelerador e pelo travão produz um sinal entre o intervalo $[-1, 1]$ onde valores positivos serão direcionados para o modelo do sistema de propulsão e os valores negativos serão direcionados para o modelo do sistema de travagem.

Para o controlo da direção, optou-se por utilizar o ângulo de *yaw* como variável de referência em vez do ângulo de direção uma vez que este apresenta valores mais estáveis e com menos correções face aos dados de referência existentes para o ângulo de direção.

Assim, o segundo controlador PID compara o ângulo de *yaw* de referência com o ângulo de *yaw* atual do veículo, produzindo um sinal entre o intervalo $[-1, 1]$ que posteriormente é multiplicado pelo valor de ângulo de direção máximo que uma roda do Formula Student consegue atingir. Este valor posteriormente entra diretamente no modelo de cálculo das acelerações e do modelo que calcula os *slips angles*.

Na tabela 3 verificam-se os valores de ajuste dos controladores PID, valores estes obtidos através de várias comparações de comportamento entre o modelo e os valores reais.

Tabela 3 - Parâmetros dos controladores PID.

Controlador PID	P	I	D
Longitudinal	2	0.45	0,05
Direção	0.12	0,05	0,05

O modelo Simulink, figura 59, construído para representar o comportamento do piloto contém três blocos “From Workspace” para importar os dados de referência, dois blocos “PID Controller”, dois blocos para subtrair o valor de referência ao valor real, dois blocos “switch” para fazer a divisão do sinal entre o acelerador e o travão consoante se o valor proveniente do controlador é maior ou menor que zero, e três blocos outputs para enviar os sinais de saída respetivos.

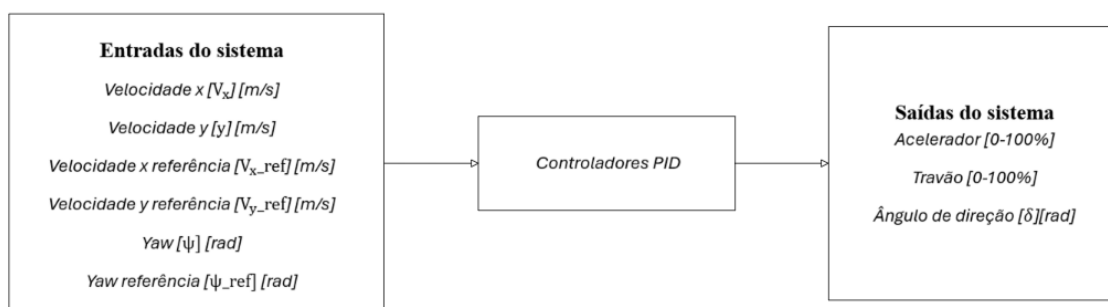


Figura 58 - Esquema de funcionamento do modelo do condutor.

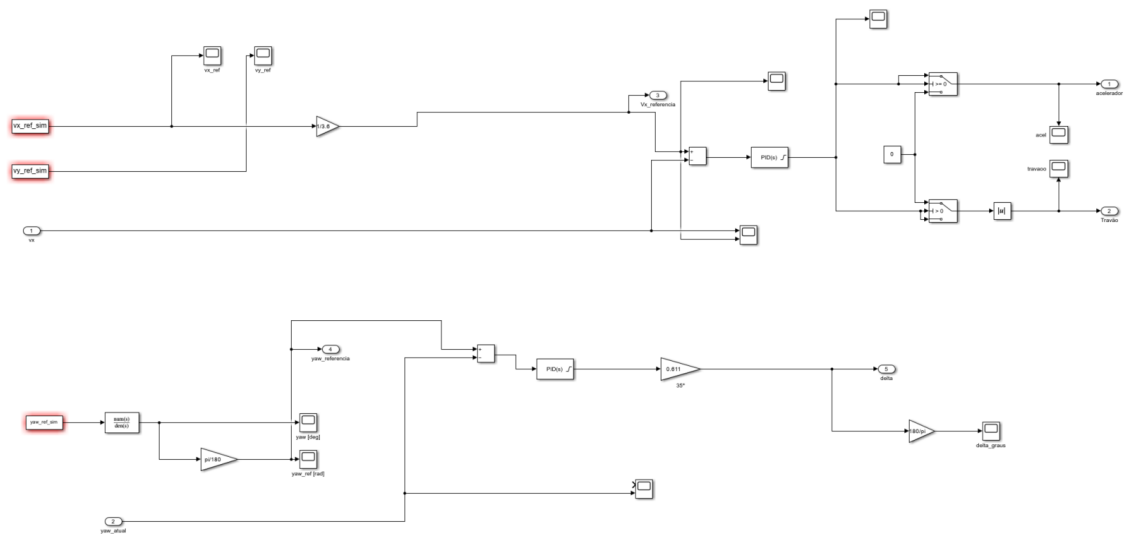


Figura 59 – Modelo simulink do condutor.

6.11. Sistema Completo

Após o desenvolvimento de todos os subsistemas que constituirão o modelo, verifica-se no diagrama presente na figura 60 como estes se encontram interligados.

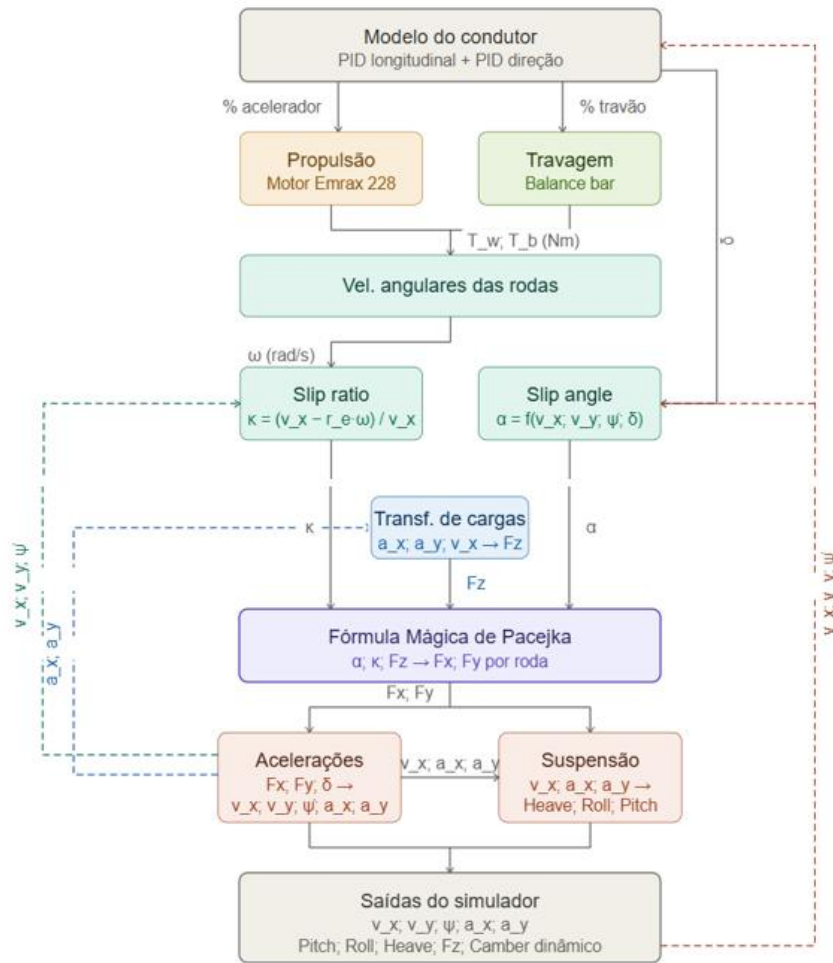


Figura 60 - Diagrama de interligação dos subsistemas do modelo.

O processo inicia-se no modelo do condutor, que recebe como referência a velocidade e o *yaw rate* registados em pista onde origina três comandos: a percentagem de acelerador, a percentagem de travão e o ângulo de direção. A percentagem de acelerador alimenta o sistema de propulsão, que calcula o binário motor T_w disponível nas rodas traseiras em função do regime do motor Emrax 228. A percentagem de travão alimenta o sistema de travagem, que determina o binário resistente T_b em cada eixo com base na pressão hidráulica gerada na *balance bar*.

Ambos os binários referidos entram no sistema de cálculo das velocidades angulares, que integra a aceleração angular de cada roda para obter ω . Esta velocidade angular alimenta o cálculo do *slip ratio*, que quantifica o escorregamento longitudinal de cada pneu em função da diferença entre a velocidade periférica da roda e a velocidade longitudinal do veículo.

Em paralelo, o *slip angle* é calculado a partir das velocidades v_x e v_y , do *yaw rate* e do ângulo de direção. O sistema de transferência de cargas calcula a carga vertical F_z em

cada roda, integrando os efeitos das acelerações longitudinal e lateral sobre a distribuição de peso do veículo.

Após calculadas as cargas sobre cada pneu e os seus escorregamentos, estes são então introduzidos no modelo da Fórmula Mágica de Pacejka, onde serão por sua vez calculadas as forças produzidas pelos pneus nas direções x e y .

As forças assim calculadas constituem as entradas dos dois subsistemas finais do modelo. O modelo de acelerações utiliza F_x , F_y e δ para resolver o sistema de equações de movimento e determinar as componentes das velocidades, o *yaw rate* e as acelerações a_x e a_y do veículo. Em paralelo, o modelo de suspensão recebe v_x , a_x e a_y e calcula os movimentos de *heave*, *roll* e *pitch* da carroçaria, bem como o deslocamento individual de cada roda. Na figura 61 está presente o modelo completo desenvolvido.

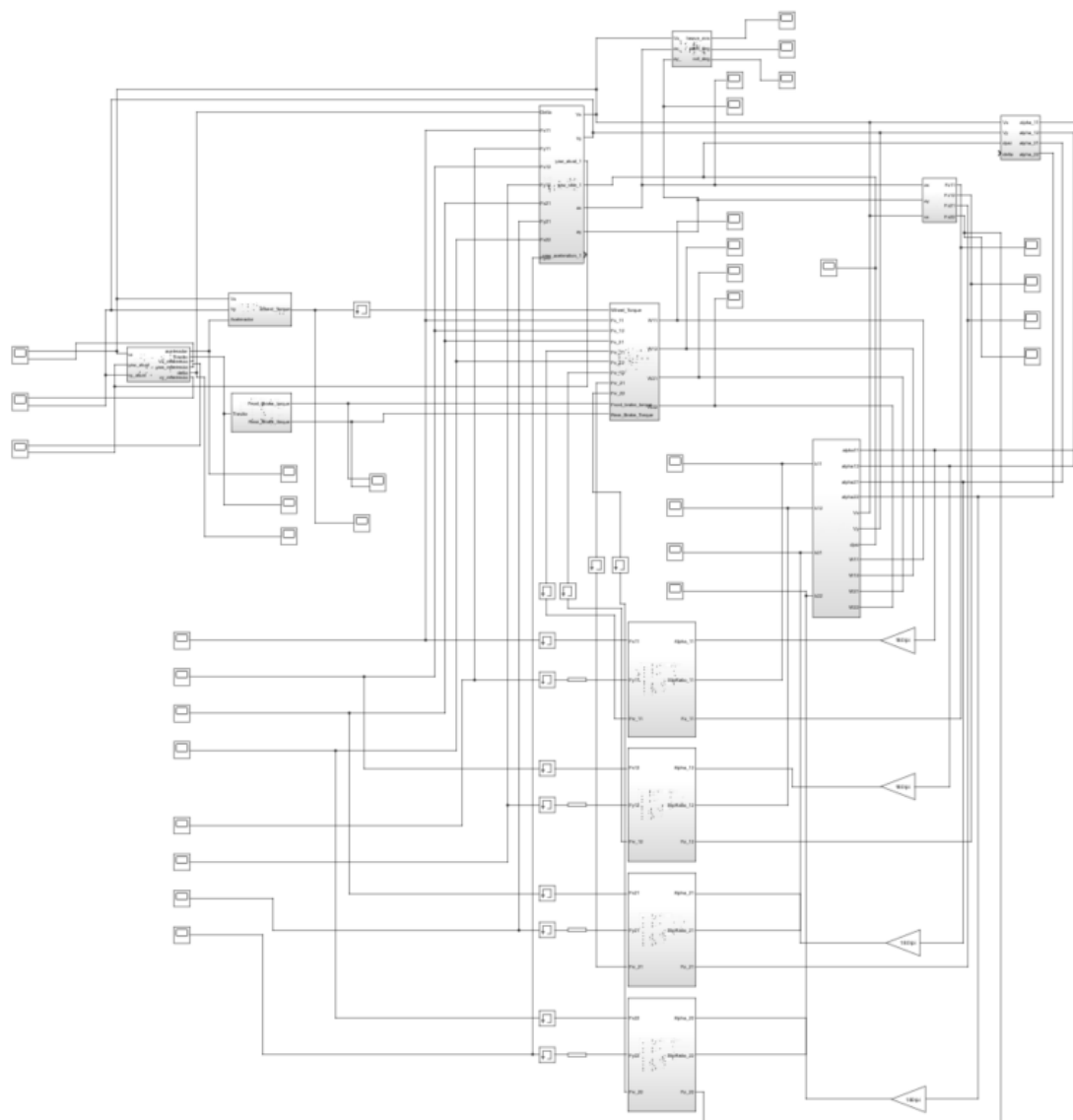


Figura 61 - Modelo completo desenvolvido no simulink.

7. Simulações

No presente capítulo pretende-se realizar dois ensaios com o objetivo de validar o comportamento do simulador desenvolvido em diferentes condições de operação,

O primeiro ensaio consiste num teste de aceleração, utilizando os dados já tratados no capítulo 5 relativamente à prova de aceleração da Fórmula Student Portugal 2025 (FSPT 2025). O segundo ensaio pretende avaliar o comportamento do simulador em situação de curva, utilizando da prova de autocross da Fórmula Student Germany 2025 (FSG 2025), envolvendo simultaneamente aceleração, travagem e mudanças de direção.

Após a validação do modelo pretende-se analisar o comportamento da suspensão, comparar as forças produzidas pelos pneus face aos dados experimentais dos mesmos, e analisar a influência de diferentes *setups* de suspensão.

7.1. Simulação da Prova de Aceleração

A prova de aceleração nas competições de Fórmula Student consiste numa reta de 75 metros onde o veículo parte da posição de repouso com o objetivo de percorrer o percurso no menor tempo possível. Sendo esta uma prova puramente longitudinal, a análise incidirá apenas sobre os parâmetros correspondentes, deixando-se de parte grandezas como as forças laterais produzidas pelos pneus.

De modo a verificar se o simulador consegue replicar o comportamento do veículo, a simulação foi executada com os dados de referência compreendidos entre os 32s e os 45s, intervalo que corresponde à prova de aceleração propriamente dita e ao percurso subsequente até à entrada na via das boxes, figura 62.

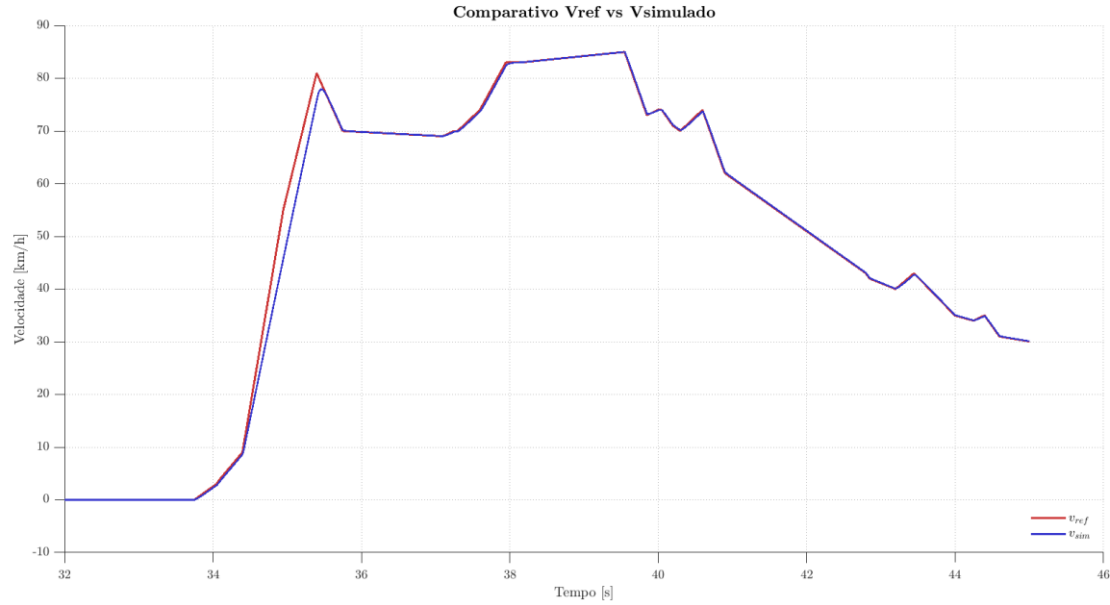


Figura 62 - Gráfico comparativo entre a velocidade de referência e a velocidade simulada.

Para quantificar a discrepância entre a os valores de velocidade da simulação e os valores da referência, calculou-se o RMSE, a raiz quadrada da média dos quadrados dos desvios. Esta métrica penaliza desvios de maior magnitude, como o que é visível no intervalo entre os 32s e 39s, a zona de maior exigência dinâmica da simulação.

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (v_{ref,i} - v_{sim,i})^2} \quad (73)$$

Através da fórmula anterior foi calculado o RMSE de 1,805 km/h. A haste vertical no gráfico de barras da figura 62 indica a variabilidade do erro instantâneo, confirmando que, apesar da precisão média, existe um pico de dispersão que atinge os 3,5 km/h.

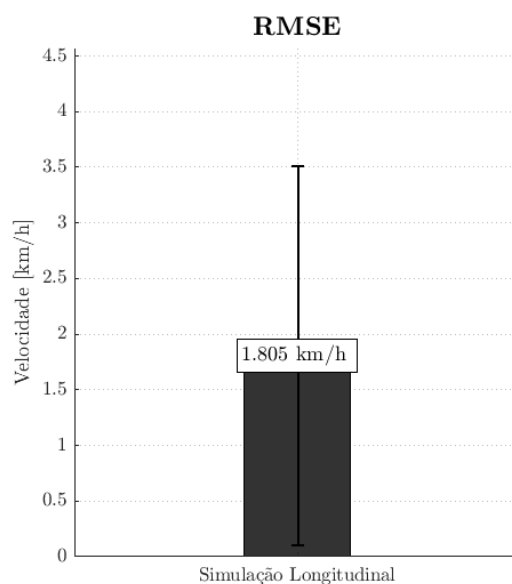


Figura 63 - RMSE da simulação da prova de aceleração.

Analisando as figuras 63 e 64, pode concluir-se que o simulador demonstra uma boa capacidade de replicar o perfil de velocidade de referência ao longo de todo o intervalo de análise. O desvio principal ocorre na fase de aceleração máxima, entre os 34s e os 35,5s, onde a velocidade de referência atinge um pico de aproximadamente 81 km/h que o simulador não replica na totalidade. Este desvio é consequência da natureza reativa do controlador PID do modelo do condutor, em regime de aceleração intensa, o controlador demora alguns instantes a impor o comando máximo de acelerador, o que se traduz num atraso da resposta simulada face à referência. Após este intervalo, o simulador recupera progressivamente, sendo as duas curvas praticamente sobrepostas nas fases posteriores de velocidade praticamente constante, travagem e condução a velocidade reduzida correspondentes ao regresso à via das boxes.

Posto isto, é agora possível analisar a dinâmica do veículo calculada pelo simulador durante a prova de aceleração. Uma vez que o arranque ocorre entre o início da simulação aos 32s e sensivelmente aos 35,5s, será analisado apenas este intervalo.

Entre os 32s e os 33,7s, o veículo encontra-se em repouso e verifica-se a presença de oscilações numéricas no *heave* e nas cargas verticais. Esta instabilidade resulta do facto de o modelo não ter sido concebido para operar em condições de velocidade nula, onde a ausência de forças dinâmicas significativas torna o sistema numericamente sensível, sendo necessário realizar operações de proteção contra divisões por zero. Esta limitação não compromete a validade da análise, uma vez que a prova de aceleração se inicia precisamente quando o veículo começa a mover-se.

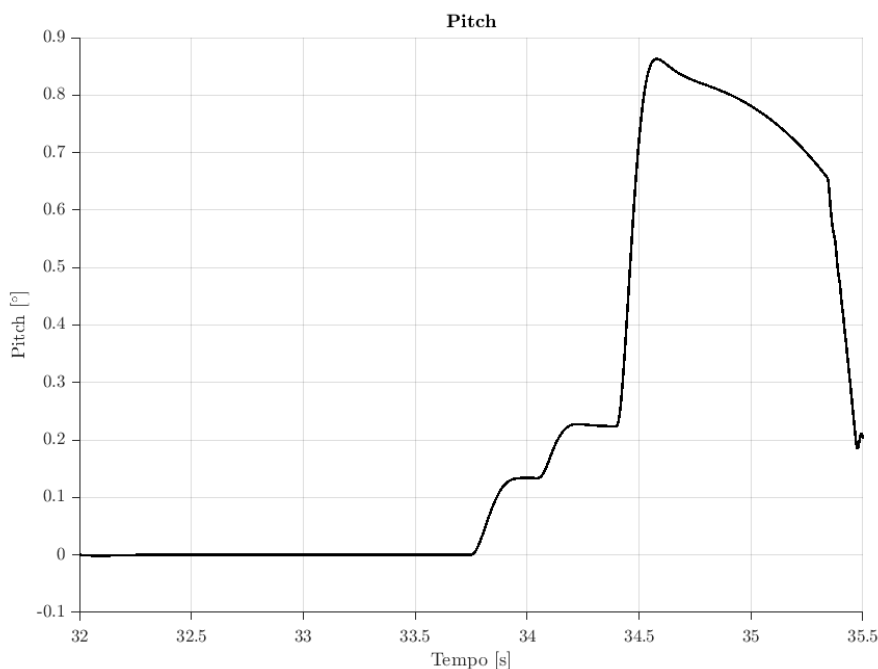


Figura 64 - *Pitch* durante a prova de aceleração.

A partir dos 33,7s, com o início da aceleração, o modelo apresenta um comportamento fisicamente coerente. Em repouso, a suspensão dianteira encontrava-se já comprimida num valor de $-18,59$ mm e a traseira em $-15,98$ mm, reflexo da carga estática do veículo, com cargas verticais de 781 N e 838 N respetivamente. Com a aceleração, a transferência de carga para o eixo traseiro provoca a extensão da suspensão dianteira até $-6,07$ mm, correspondendo a uma variação total de 12,52 mm, enquanto a suspensão traseira comprime adicionalmente de $-15,98$ mm até $-27,79$ mm, numa variação de 11,81 mm. Como esperado, a variação de deslocamento não é igual nos dois eixos, uma vez que a rigidez traseira é superior à dianteira, 52,4 N/mm face a 42,0 N/mm. Este fenómeno de *squat* reflete-se no ângulo de *pitch*, que aumenta progressivamente até atingir um máximo de $0,863^\circ$. Em termos de cargas verticais, a carga no eixo dianteiro reduz-se de 781 N para 255 N, enquanto a carga no eixo traseiro aumenta de 838 N para 1456 N, confirmando a magnitude da transferência de carga longitudinal durante a aceleração.

Na figura 65 encontram-se os gráficos do movimento da suspensão da roda frente esquerda e da roda trás esquerda, assim como o gráfico das cargas verticais em cada uma respetivamente.

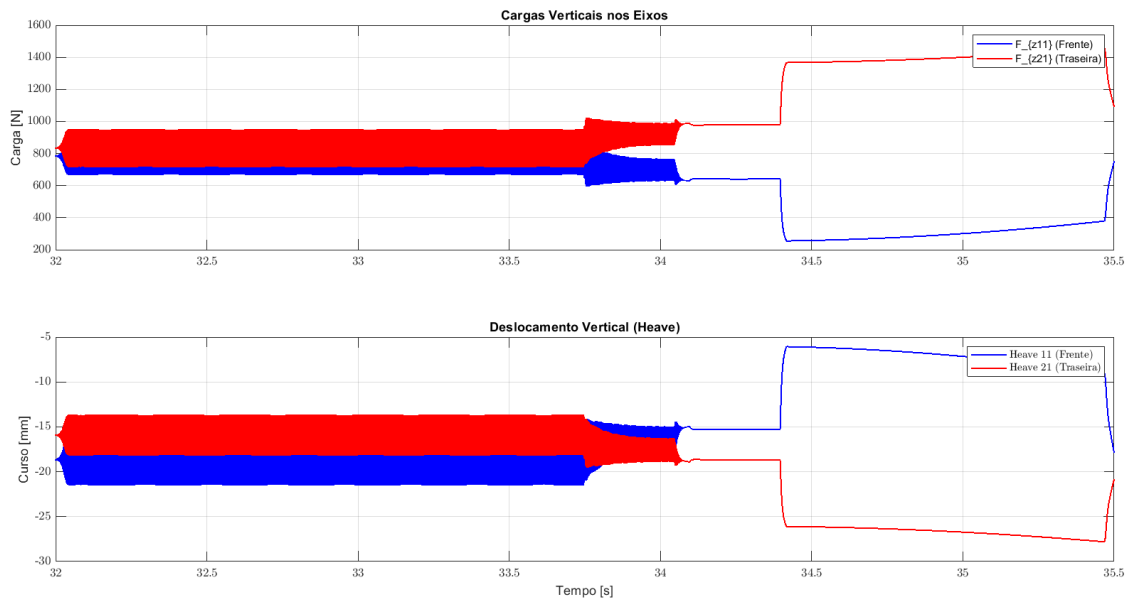


Figura 65 - Gráficos do movimento de heave e das cargas verticais na prova de aceleração.

A descida abrupta do ângulo de *pitch* após os 35,5s, visível na figura 64, corresponde à travagem no final da reta, onde a transferência de carga se inverte, a frente comprime e a traseira estende, confirmando o comportamento de “nose dive” esperado nesta fase.

Na figura 66 é possível avaliar o comportamento do pneu traseiro esquerdo durante a prova de aceleração em termos de força longitudinal produzida e o respetivo escorregamento longitudinal. A partir dos 33,7s, com o início da aceleração, a força longitudinal cresce progressivamente até atingir um máximo de 2952,95 N, acompanhada por um escorregamento longitudinal máximo de 0,0595. Consultando o gráfico presente na figura 21 onde é feita a caracterização do pneu, para uma carga vertical de aproximadamente 1456 N registada no eixo traseiro durante a aceleração, o pico de força disponível ocorre para um *slip ratio* de 0,085, onde o pneu seria capaz de gerar entre 3200 N e 3400 N. O simulador atingiu apenas 0,0595 de escorregamento, o que significa que o pneu não chegou ao seu ponto de capacidade máxima, existindo ainda uma margem de tração por explorar.

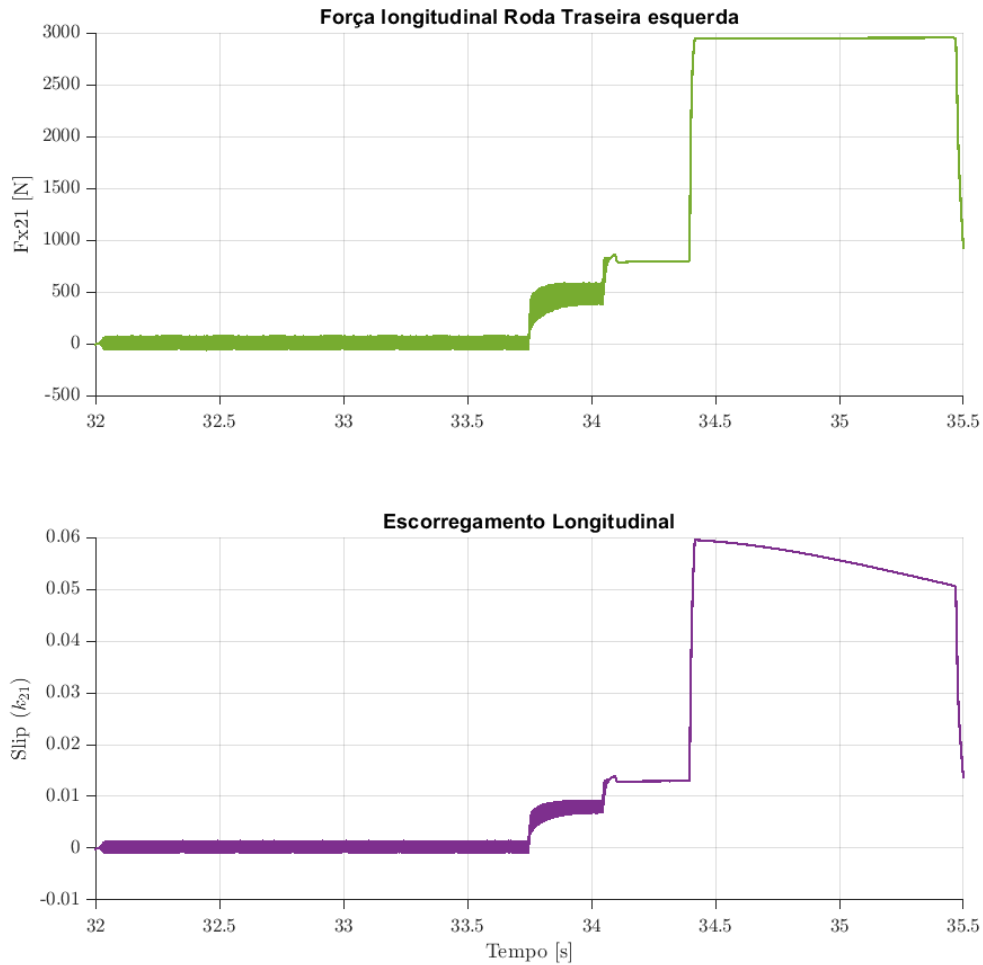


Figura 66 - Gráficos da força e escorregamento longitudinal da roda traseira esquerda na prova de aceleração.

7.2. Simulação da Prova de Autocross

A prova de *autocross* consiste num percurso definido por um conjunto de cones, onde o veículo percorre uma pista técnica com acelerações, travagens e mudanças de direção, tendo como objetivo completar o percurso no menor tempo possível. Esta é uma prova de carácter transiente que solicita simultaneamente os esforços longitudinais e laterais do veículo, tornando a sua simulação mais exigente.

Ao contrário do que sucedeu na prova de aceleração, a simulação do autocross revelou-se inviável nas condições atuais do modelo. Quando a simulação é executada apenas tendo como referência a velocidade longitudinal do veículo, o modelo, novamente, consegue acompanhar o perfil de velocidade de referência. Contudo, assim que o controlador PID do sistema de direção é ativado, o modelo colapsa ao fim de aproximadamente 1,5s de simulação, como se pode observar na figura 67, onde as velocidades longitudinal e lateral e o ângulo de *yaw* divergem para valores fisicamente impossíveis. Esta instabilidade resulta muito provavelmente da elevada sensibilidade do

controlador da direção a entradas que variam muito rapidamente, características de um percurso de autocross com mudanças de direção frequentes e repentinas.

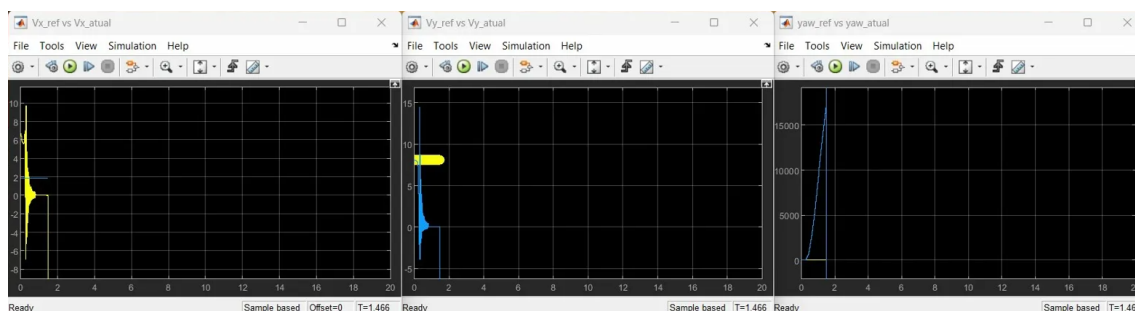


Figura 67 - Dados de referência da prova de autocross face aos dados simulados.

Face a esta limitação, e com o objetivo de retirar valor prático do trabalho desenvolvido, o simulador foi reorientado para funcionar como uma ferramenta de análise cinemática, figura 68. Nesta abordagem, em vez de calcular a trajetória do veículo de forma autónoma, o simulador recebe diretamente os dados de referência registados em pista e utiliza-os para calcular grandezas que tipicamente não são medidas durante as provas, como os movimentos de *pitch*, *roll* e *heave* da carroçaria e o deslocamento individual da suspensão de cada roda. Esta abordagem revela-se particularmente útil quando o veículo não dispõe de sensores de inclinação ou potenciômetros de suspensão instalados ou operacionais durante a prova. Adicionalmente, permite analisar como o veículo reagiria com diferentes configurações de *setup*, nomeadamente através da variação da rigidez das molas e das barras estabilizadoras, fornecendo à equipa uma ferramenta de apoio à decisão na preparação do veículo para competição sem necessidade de realizar testes físicos adicionais.

Para além do modelo de suspensão, foi também introduzido o cálculo das cargas verticais em cada roda individualmente. O deslocamento de cada roda foi obtido aplicando diretamente a Lei de Hooke, dividindo a força vertical calculada pela rigidez da mola correspondente. Esta abordagem foi preferida em detrimento das equações demonstradas no capítulo 4, que expressam o deslocamento de cada roda em função dos movimentos globais da carroçaria em *heave*, *pitch* e *roll*. Embora matematicamente mais simples, estas equações assumem que o movimento da carroçaria se propaga de forma igual nas suspensões de cada roda, o que não reflete de forma realista o comportamento individual de cada roda quando sujeita a cargas distintas. Optou-se assim por esta via pela sua simplicidade e robustez: ao calcular o deslocamento de cada roda diretamente a partir da força vertical que sobre ela atua e da rigidez da respetiva mola, evita-se a propagação de erros associada à reconstrução do movimento individual a partir dos movimentos globais da carroçaria, garantindo um resultado fisicamente coerente roda a roda.

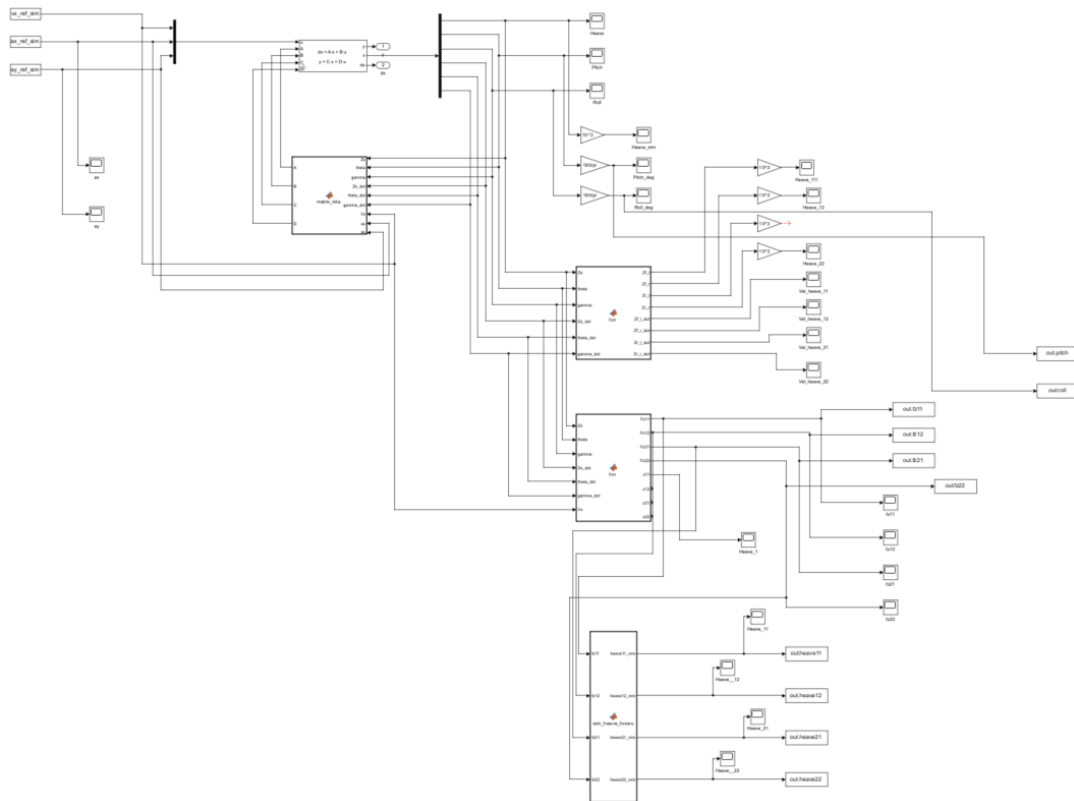


Figura 68 - Modelo completo para análise da suspensão.

Para executar a simulação, optou-se por utilizar apenas os primeiros 80 segundos dos dados de referência, de forma a reduzir o volume de dados a tratar, mas ainda assim num intervalo suficiente para observar a presença de acelerações longitudinais e laterais significativas, bem como as respostas de *pitch* e *roll* da carroçaria que delas resultam.

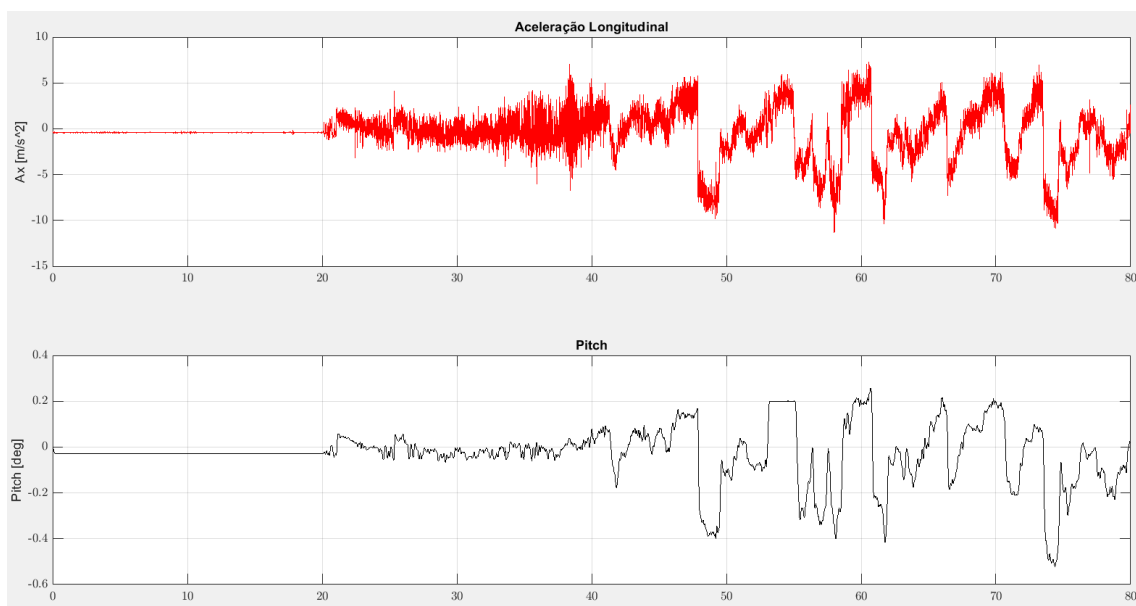


Figura 69 - Gráfico de comparação entre aceleração longitudinal e *pitch*.

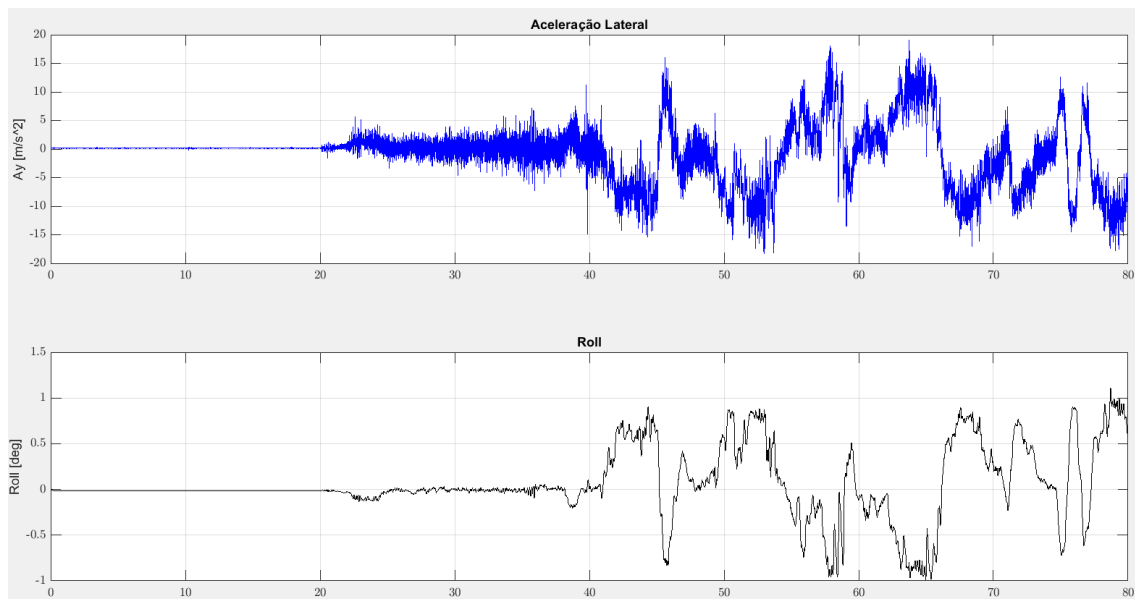


Figura 70 - Gráfico de comparação entre aceleração lateral e *roll*.

Analisando os gráficos presentes na figura 69 e na figura 70 verifica-se uma correlação direta e fisicamente coerente entre as acelerações registadas em pista e os movimentos da carroçaria calculados pelo modelo, assim como era esperado.

Durante os primeiros 20 segundos, o veículo encontra-se em repouso e tanto o ângulo de *pitch* como o de *roll* permanecem nulos, confirmado que as definições das condições iniciais do modelo estão corretas.

A partir dos 20 segundos, com o início da prova, o ângulo de *pitch* acompanha de forma clara as variações da aceleração longitudinal. Sempre que o veículo acelera, o *pitch* assume valores positivos, refletindo a transferência de carga para o eixo traseiro. Nos instantes de travagem mais intensa, como nos 48s e 75s da simulação, o *pitch* toma valores negativos, confirmando a transferência de carga para o eixo frontal. As variações do ângulo de *pitch* mantêm-se num intervalo de aproximadamente $\pm 0,6^\circ$, o que é indicativo da elevada rigidez longitudinal do Formula Student.

Relativamente à dinâmica lateral, o ângulo de *roll* acompanha diretamente a aceleração lateral registada. Nas curvas para a direita, onde a_y é negativo, o *roll* torna-se positivo, ou seja, a carroçaria inclina para o exterior da curva e o mesmo inverte-se quando a_y é positivo. Os valores máximos de roll situam-se em torno de $\pm 1^\circ$.

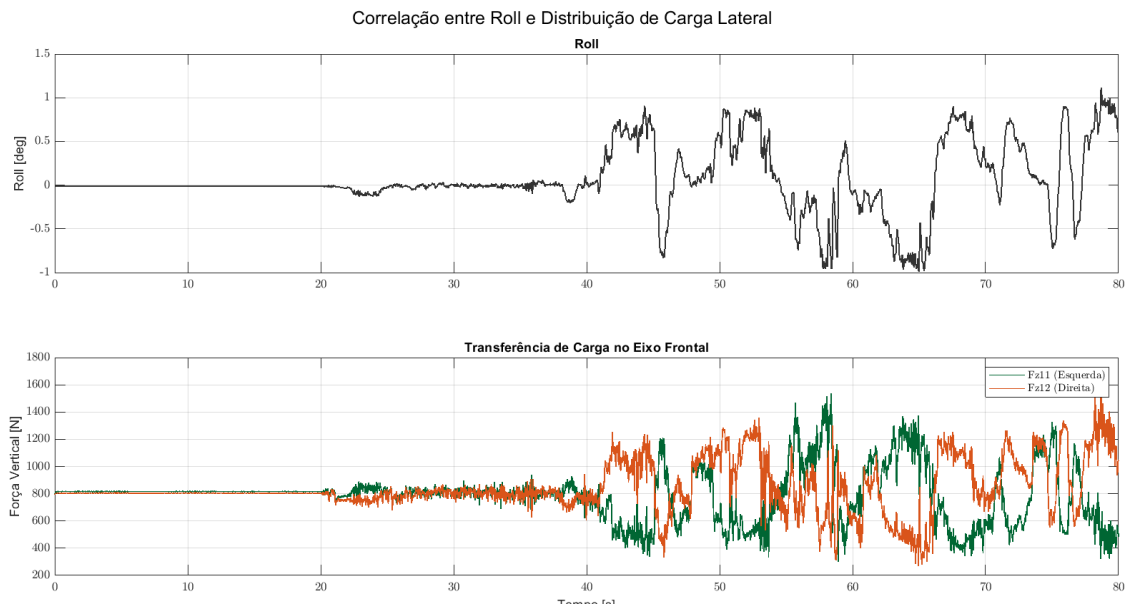


Figura 71 - Correlação entre *Roll* e distribuição de carga lateral.

A figura 71 ilustra a correlação entre o ângulo de *roll* e a transferência de carga lateral no eixo dianteiro. Até aos 20 segundos, as cargas em ambas as rodas são praticamente iguais, rondando os 800 N, confirmando uma distribuição simétrica da carga estática.

Com o início da prova, a transferência de carga lateral acompanha diretamente o ângulo de rol, quando o *roll* é positivo parte da carga é transferida para a roda direita, e quando é negativo parte da carga transfere-se para a esquerda. Nos instantes de maior solicitação lateral, entre os 40s e os 60s, esta assimetria torna-se mais pronunciada, com a roda mais carregada a atingir valores próximos de 1500 N e a oposta a aproximar-se dos 300 N.

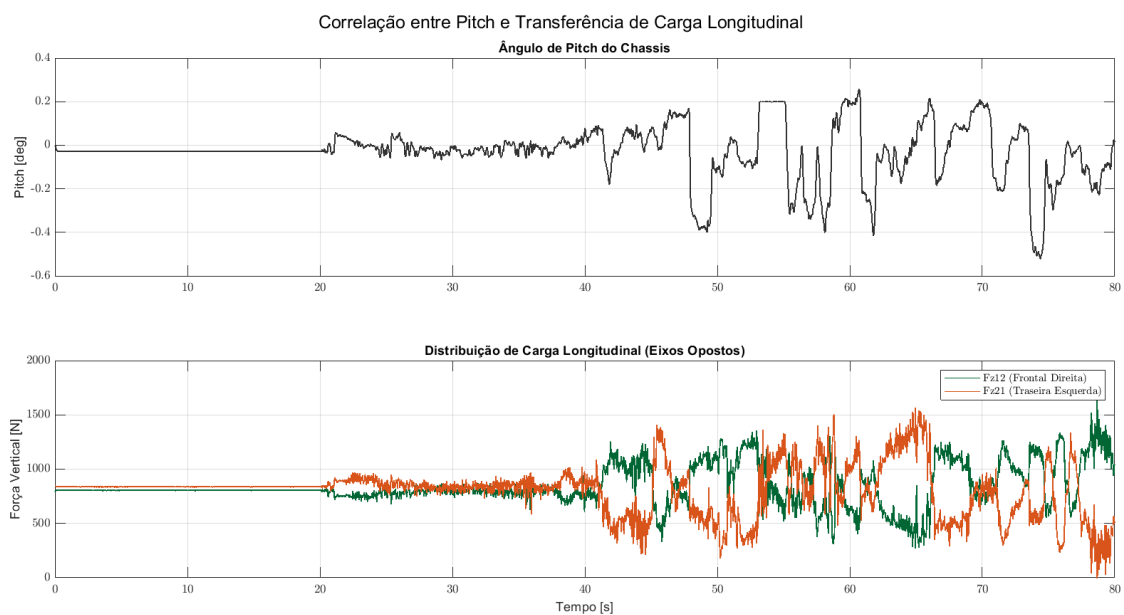


Figura 72 - Correlação entre o *pitch* e a carga longitudinal.

De forma análoga, a figura 72 ilustra a correlação entre o ângulo de *pitch* e a transferência de carga longitudinal. Em aceleração, com *pitch* positivo, parte da carga sobre o eixo da frente transfere-se para o eixo traseiro. Nos instantes de travagem, onde o *pitch* é negativo, o comportamento inverte-se, com a carga frontal a aumentar e a carga sob a traseira a reduzir, confirmando a coerência do modelo na dinâmica longitudinal.

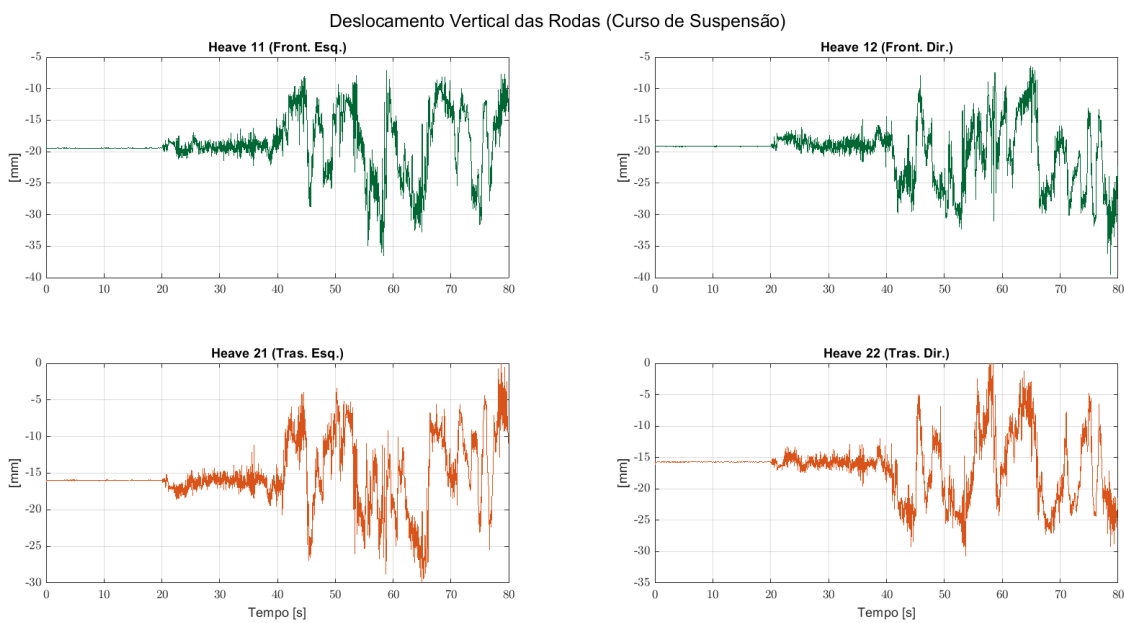


Figura 73 - Curso de suspensão nos primeiros 80s da prova de autocross.

Em repouso, a suspensão dianteira apresenta uma compressão estática de 19 mm e a traseira de 16 mm. Esta diferença resulta da combinação de dois fatores: por um lado, a distribuição de massas do veículo, cujo centro de gravidade se encontra mais próximo do eixo traseiro (a 0,748 m) do que do dianteiro (a 0,802 m), o que faz recair sobre o eixo traseiro uma fração ligeiramente superior da massa total; por outro, a utilização de rigidezes distintas entre eixos. A compressão estática de cada eixo traduz, assim, o equilíbrio entre a carga vertical que sobre ele atua e a rigidez da mola correspondente.

Com o início da prova, os deslocamentos deixam de ser simétricos entre rodas do mesmo eixo, consequência da sobreposição dos movimentos de *pitch* e *roll* induzidos pelas acelerações registadas em pista. Os picos de compressão da suspensão no eixo da frente atingem os 35 mm nos instantes de travagem mais intensa, enquanto no eixo traseiro não excede os 30 mm, como se verifica na figura 73.

As oscilações de alta frequência visíveis no sinal de *heave* resultam diretamente do ruído presente nos sinais de aceleração utilizados como entrada, e não de instabilidade numérica do modelo desenvolvido.

7.2.1. Análise do camber dinâmico

Outro ponto de análise relevante é a variação do camber das rodas ao longo da prova. Apesar de, neste trabalho, não terem sido obtidos os dados dos pneus que permitam verificar a variação da produção de cargas laterais consoante o ângulo de camber, o modelo desenvolvido permite calcular o camber dinâmico para futuras análises.

Através dos coeficientes de camber em *roll* e em *bump* do Formula Student, e conhecendo o camber estático do *setup* utilizado, é possível obter o valor do camber da roda ao longo de toda a prova. No caso do eixo frontal, os parâmetros utilizados foram os seguintes:

- Camber Estático: -2° ;
- Camber em *Roll*: $0,69^\circ/\circ$;
- Camber em *Bump*: $0,026^\circ/\text{mm}$.

Esta monitorização é essencial para garantir que a geometria da suspensão compensa eficazmente a inclinação do chassis, mantendo o pneu numa gama de trabalho estável.

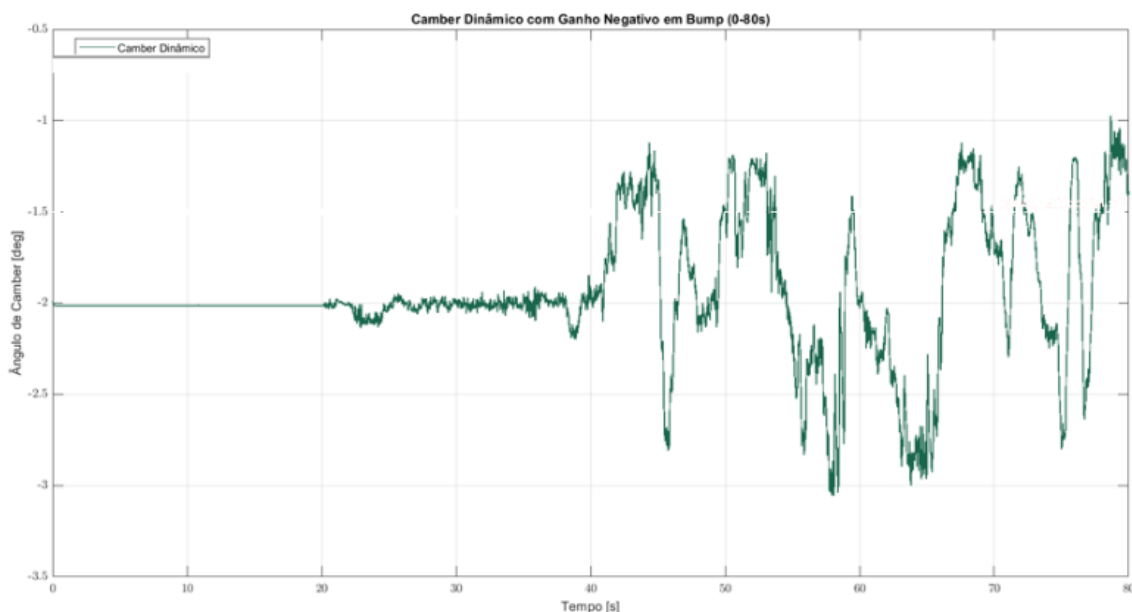


Figura 74 - Evolução do camber na roda frente esquerda nos primeiros 80s de prova.

No gráfico presente na figura 74 apresenta-se a evolução do camber na roda dianteira esquerda ao longo dos 80 segundos de simulação. O gráfico inicia-se no valor de camber estático do *setup* utilizado, aproximadamente -2° , mantendo-se nesse valor durante a fase inicial em que o veículo se encontra praticamente parado, e só se afastando dele a partir

do momento em que a prova arranca e as acelerações induzem compressão na suspensão e *roll* na carroçaria. Com o decorrer da prova, o camber oscila predominantemente entre $-1,0^\circ$ e $-3,0^\circ$, nunca assumindo valores positivos, o que confirma que a geometria da suspensão compensa eficazmente a inclinação do chassis ao longo de toda a prova. Nos instantes de maior solicitação lateral, entre os 40s e os 80s, é onde se verificam os picos negativos de $-3,0^\circ$, correspondentes às curvas mais exigentes onde a suspensão exterior comprime significativamente.

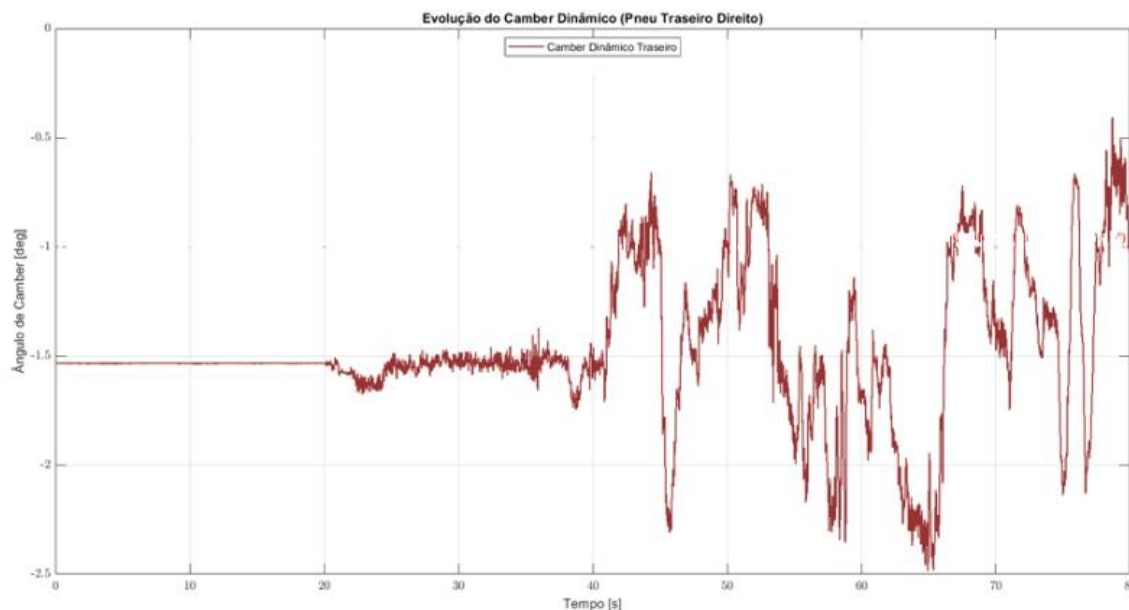


Figura 75 - Evolução do camber na roda traseira direita nos primeiros 80s de prova.

No que toca ao eixo traseiro os parâmetros da suspensão são um pouco diferentes:

- Camber Estático: $-1,5^\circ$;
- Camber em *Roll*: $0,545^\circ/\circ$;
- Camber em *Bump*: $0,033^\circ/\text{mm}$.

Por sua vez, o gráfico da figura 75 revela que o eixo traseiro mantém ângulos de camber mais baixos em comparação com o eixo frontal, nomeadamente entre $-0,4^\circ$ e $-2,5$. Esta configuração é propositada para favorecer a tração longitudinal, assegurando que, mesmo perante as oscilações dinâmicas da prova, as rodas mantenham uma área de contacto generosa com o solo para a transmissão da potência. Numa situação de prova de aceleração o expectável seria afinar o camber estático de modo que durante a mesma, o camber da roda se mantenha sempre próximo de zero para maximizar a área de contacto do pneu.

7.2.2. Implementação de *Anti Roll bar*

De forma a demonstrar a utilidade prática do modelo desenvolvido, pretende-se simular a introdução de uma barra estabilizadora no veículo de forma a verificar a sua influência no comportamento dinâmico. Segundo o autor (Seward, 2014) a barra estabilizadora não deve contribuir com mais de 50% da rigidez total em *roll* em nenhum dos eixos, uma vez que acima deste limite a suspensão deixa de ser verdadeiramente independente, as rodas de um mesmo eixo passam a comportar-se como um eixo rígido em irregularidades unilaterais do pavimento, tornando a suspensão menos eficaz. Com base neste critério, foi simulada uma contribuição de 40% da rigidez total em *roll*, analisando o seu efeito no ângulo de *roll* da carroçaria e na distribuição de carga lateral.

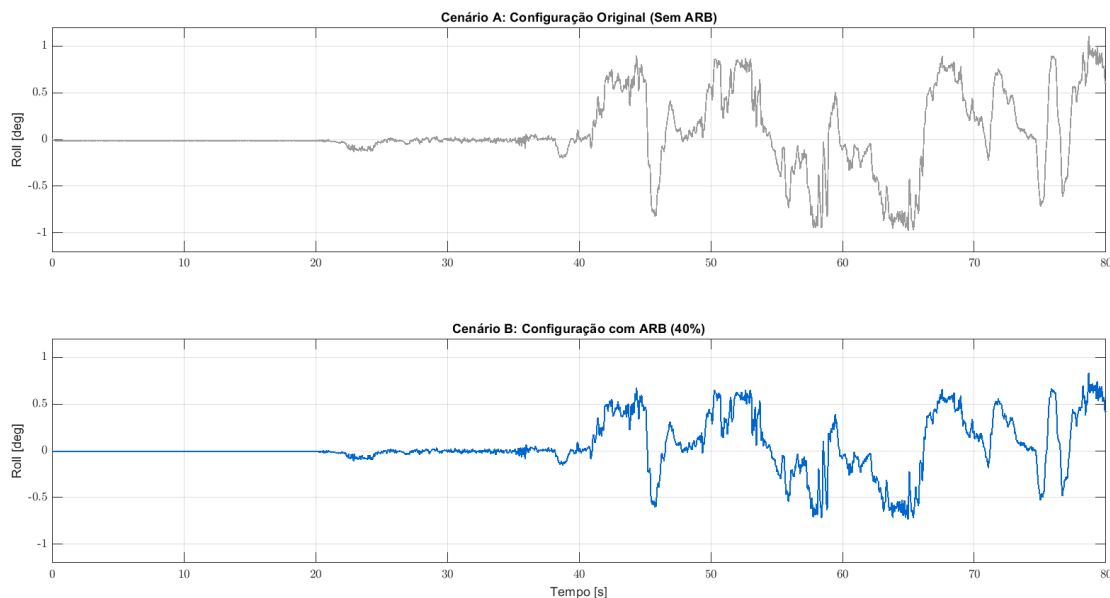


Figura 76 - Comparação dos resultados utilizando *anti roll bar*.

Na figura 76 verifica-se como a introdução de uma barra estabilizadora com uma contribuição de 40% da rigidez total em *roll* permitiu reduzir o pico de *roll* máximo de $1,105^\circ$ para $0,832^\circ$ e o pico mínimo de $-0,979^\circ$ para $-0,737^\circ$, representando uma redução de aproximadamente 25% em ambos os sentidos sem necessidade de aumentar a rigidez vertical das molas. Um intervalo de valores de *roll* mais pequeno, permite manter os valores de *camber* das rodas também estes num intervalo menor, isto torna-se fundamental para o desempenho e otimização da suspensão do veículo, uma vez que uma equipa que tenha acesso aos dados de forças laterais que os pneus produzem consoante os valores de *camber* e carga vertical a que estão sujeitos, conseguem deste modo manter os pneus na sua gama de maior produção de carga lateral.

8. Conclusão

O presente trabalho teve como objetivo o desenvolvimento de um simulador de dinâmica de veículos em Simulink para um protótipo de Fórmula Student, com o intuito de criar uma ferramenta capaz de replicar o comportamento do veículo em diferentes condições de prova e apoiar a equipa no desenvolvimento e nas decisões de *setup* do carro.

No que diz respeito aos resultados obtidos, a simulação da prova de aceleração demonstrou que o modelo foi capaz de replicar o comportamento longitudinal do veículo com um RMSE de 1,805 km/h, com os movimentos de *pitch*, *heave* e a transferência de carga longitudinal a revelarem-se fisicamente coerentes e consistentes com o comportamento esperado de um Formula Student. Durante a aceleração, a suspensão dianteira passou de uma compressão estática de 18,59 mm para 6,07 mm, enquanto a traseira comprimiu adicionalmente de 15,98 mm para 27,79 mm, reflexo direto da transferência de carga longitudinal que reduziu a carga no eixo dianteiro de 781 N para 255 N e aumentou a carga no eixo traseiro de 838 N para 1456 N. Este fenómeno de *squat* traduziu-se num ângulo de *pitch* máximo de $0,863^\circ$, confirmando a coerência física do modelo. Foi ainda possível verificar que o pneu traseiro esquerdo atingiu uma força longitudinal máxima de 2952,95 N para um escorregamento de 0,0595, valor abaixo do ponto de capacidade máxima do pneu, estimado em 0,085 para a carga vertical registada, o que indicou a existência de uma margem de tração por explorar.

Após a validação do modelo na prova de aceleração, procedeu-se à simulação da prova de autocross. Esta revelou-se, contudo, inviável nas condições atuais, devido à instabilidade do controlador PID de controlo da direção perante as entradas transientes características de um percurso de autocross. Face a esta limitação, o simulador foi reorientado como ferramenta de análise cinemática, uma abordagem que se revelou de elevado valor prático para a equipa. Ao receber diretamente os dados de telemetria registados em pista, o simulador permitiu calcular grandezas tipicamente não medidas durante as provas, como os movimentos de *pitch*, *roll* e *heave* da carroçaria, o deslocamento individual da suspensão em cada roda e o camber dinâmico, colmatando assim uma lacuna de informação que persiste em equipas que não dispõem de instrumentação completa. A análise da prova de autocross da FSG 2025 demonstrou que os picos de compressão da suspensão dianteira atingiram os 35 mm nos instantes de travagem mais intensa, que o ângulo de *roll* se manteve dentro de um intervalo de aproximadamente $\pm 1^\circ$ e que o ângulo de *pitch* se manteve num intervalo de $\pm 0,6^\circ$, indicativo da elevada rigidez longitudinal do veículo. O camber dinâmico da roda dianteira esquerda oscilou predominantemente entre $-1,0^\circ$ e $-3,0^\circ$, nunca assumindo valores positivos, confirmando que a geometria da suspensão compensou eficazmente a inclinação do chassis ao longo de toda a prova. A capacidade de apoiar decisões de *setup* foi ainda demonstrada através da simulação da introdução de uma barra estabilizadora com uma contribuição de 40% da rigidez total em *roll*, onde se verificou uma redução de aproximadamente 25% no ângulo de *roll*, de $1,105^\circ$ para $0,832^\circ$ no pico máximo, sem necessidade de qualquer teste físico adicional.

8.1.Trabalhos Futuros

O trabalho desenvolvido estabeleceu uma base sólida sobre a qual assentam três linhas de desenvolvimento futuro. A primeira, e mais imediata, é o desenvolvimento de um controlador de direção mais robusto e dotado de antecipação, capaz de lidar com as entradas transientes rápidas características de um percurso de autocross, ultrapassando assim a instabilidade que atualmente impede a validação do modelo em condições de curva. A segunda consiste na validação experimental do modelo de comportamento da suspensão através da instalação de potenciômetros nos amortecedores do veículo, o que permitiria comparar diretamente o deslocamento real de cada roda em pista com o estimado pelo modelo e, dessa forma, aumentar a confiança nos resultados obtidos. Por fim, a evolução mais ambiciosa passa pela integração de um simulador de tempo por volta com o modelo de dinâmica de suspensão desenvolvido neste trabalho, combinando a previsão do desempenho do veículo ao longo de uma volta completa com a análise detalhada do comportamento da suspensão, e tornando a ferramenta capaz de avaliar o desempenho do veículo em qualquer circuito.

A realização deste trabalho foi igualmente relevante a nível pessoal, tendo permitido consolidar competências em dinâmica de veículos e em MATLAB e Simulink, fundamentais para a ambição de futuramente trabalhar como engenheiro de performance no mundo da competição automóvel. A ferramenta desenvolvida representou ainda um contributo concreto e duradouro para a equipa, ficando disponível para ser utilizada e desenvolvida pelas gerações seguintes.

9. Bibliografia

- Amaral, henrique. (2022). *Vehicle Dynamics Analysis in a Formula Student Racing Car*.
- Damian Harty, & Michael Blundell. (2015). *The Multibody Systems Approach to Vehicle Dynamics* (second).
- Domingues dos Santos, R., Alberto Gonçalves de Sousa, L., & Manuel Varejão de Oliveira Faria Supervisor, L. (2014). *Model ans Dynamic Simulation Program For Vehicle Analysis Accounting Suspension Compliance Mechanical Engineering Examination Committee*.
- Emrax. (2025). *EMRAX_228_datasheet_v1.6 (1)*.
- Guiggiani, M. (2014). The science of vehicle dynamics: Handling, braking, and ride of road and race cars. In *The Science of Vehicle Dynamics: Handling, Braking, and Ride of Road and Race Cars* (Vol. 9789401785334). Springer Netherlands.
<https://doi.org/10.1007/978-94-017-8533-4>
- H. Marzbani, & Reza N. Jazar. (2024). *Vehicle Vibrations*.
- Höglund, R. (2022). *Modelling of a high-performance vehicle in MATLAB/Simulink and Canopy Simulations*. <http://www.kth.se/sci>
- <https://news.cision.com/koenigsegg/r/>. (n.d.). Retrieved December 10, 2025, from <https://news.cision.com/koenigsegg/r/>
- Limpert, R. (2011). *Brake Design and Safely Third Edition*. <http://books.sae.org>
- Mastinu, G., & Ploechl, M. (2014). Road and off-road vehicle system dynamics handbook. *Road and Off-Road Vehicle System Dynamics Handbook*, 1–1780.
<https://doi.org/10.1201/b15560>
- Milliken, W. F. , & M. D. L. (1995). *Race Car Vehicle Dynamics*.
- Narby, E. (2006). *Institutionen för systemteknik Department of Electrical Engineering Examensarbete Modeling and Estimation of Dynamic Tire Properties Examensarbete utfört i Reglerteknik vid Tekniska högskolan i Linköping av*.
- Ogata, Katsuhiko. (2022). *Modern control engineering*. Prentice Hall.
- Optimum G. (2026). *OptimumLap - Simple simulations. Powerful insights*.
- Pacejka, H. (2006). *Tyre and Vehicle Dynamics*.
- Ramanata, P. P. (1998). *Chapter 2 Vehicle Dynamics Modeling*.
- Rodrigues, J. (2016). *ApontamentosVSM_Ed2021.2*.

Seward, D. (2014). *Race Car Design*.

Tyre Slip Angle – Geometry Explained Suspension Secrets. (2024).
<https://suspensionsecrets.co.uk/tyre-slip-angle/>

Xsense. (2025). *MTi-680G*.