

Projeto

Mestrado em Educação e Tecnologia em Matemática

MODELAÇÃO E SIMULAÇÃO UMA APLICAÇÃO AO PROBLEMA DA RUÍNA DO JOGADOR

Salomé da Silva Pedro

Leiria, fevereiro de 2012

Projeto

Mestrado em Educação e Tecnologia em Matemática

MODELAÇÃO E SIMULAÇÃO UMA APLICAÇÃO AO PROBLEMA DA RUÍNA DO JOGADOR

Salomé da Silva Pedro

Dissertação de Mestrado realizada sob a orientação do Doutor Rui Santos, Professor da Escola Superior de Tecnologia e Gestão do Instituto Politécnico de Leiria e co-orientação do Doutor Luís Cotrim, Professor da Escola Superior de Tecnologia e Gestão do Instituto Politécnico de Leiria.

Leiria, fevereiro de 2012

Agradecimentos

As minhas primeiras palavras de agradecimento são dirigidas aos meus orientadores, o Professor Doutor Rui Santos e o Professor Doutor Luís Cotrim.

Quero agradecer-lhes tudo o que aprendi na realização do presente projeto e enquanto aluna, no primeiro ano deste mestrado. Agradeço-lhes também toda a disponibilidade, o apoio e todas as palavras de incentivo que sempre me dedicaram desde o primeiro momento. O meu obrigada à confiança que depositaram, ao bom clima de trabalho que propiciaram e à boa disposição que sempre demonstraram, pois tornaram válido e agradável o tempo que dediquei à realização deste projeto. Os meus sinceros agradecimentos.

Quero também agradecer aos meus professores do primeiro ano de mestrado, aos que me fizeram redescobrir o gosto de estudar e a vontade de aprender. Agradeço-lhes tudo o que aprendi.

Aos meus colegas de mestrado, em especial ao Carlos, à Regina e à Sónia, pelo apoio e companheirismo demonstrados tanto nos momentos mais difíceis como nos mais divertidos.

Devo agradecer a todas as pessoas que ao longo destes anos me incentivaram a continuar a estudar e que contribuíram, direta ou indiretamente, para que este trabalho fosse realizado.

Aos meus colegas e amigos do Agrupamento de Escolas de Pataias, devo-lhes palavras de apreço, por me terem concedido todas as condições para que este trabalho se realizasse e pelas suas constantes palavras de incentivo.

Agradeço aos meus alunos do Agrupamento de Escolas de Pataias, por me fazerem todos os dias relembrar o meu prazer em ensinar.

Aos meus amigos, a todos, por todo o apoio e carinho que me concedem, pela sua presença, pelas suas constantes palavras de encorajamento. Agradeço-lhes a sua amizade e devo desculpar-me pelo pouco tempo que lhes concedi nestes dois últimos anos.

Agradecimentos

Aos meus pais, Florinda e Joaquim, por tudo. Pelo esforço que fizeram por mim enquanto estudante de licenciatura e por todos os valores que me transmitiram, de trabalho, respeito, humanismo e bondade, e que os tornam nos seres preciosos que são.

Ao meu irmão, Joel, pelo seu constante apoio. Pelo seu extraordinário humor e pela sua infinita paciência.

RESUMO

Em 1657, é publicado o primeiro livro sobre cálculo de probabilidades, de Christiaan Huygens. Esta pequena coletânea de problemas relativos a jogos de azar, baseada na correspondência entre Blaise Pascal e Pierre de Fermat em 1654, permitiu despertar a atenção de numerosos matemáticos durante os séculos XVII, XVIII e XIX para esta temática, razão pela qual surgiram variadas generalizações de alguns dos problemas propostos. O último desafio apresentado neste opúsculo de Huygens, e porventura um dos mais célebres problemas em probabilidades, é o problema da ruína do jogador. A autoria deste problema foi durante muitos séculos atribuída a Huygens, no entanto, o seu verdadeiro autor é Pascal. Ao longo dos séculos, foram apresentadas diversas versões deste problema e diferentes formas de o resolver, algumas dessas resoluções utilizam equações às diferenças.

Neste trabalho, apresentaremos alguns resultados relativos a equações às diferenças de primeira e segunda ordem e abordaremos algumas das suas aplicações. Faremos uma resenha histórica acerca da origem do cálculo de probabilidades, do problema da ruína do jogador e das suas diferentes versões. Apresentaremos algumas soluções exatas para algumas dessas variantes, com recurso à modelação do problema através de equações às diferenças. Far-se-á a apresentação de algumas características do jogo da ruína e apresentaremos metodologias de obtenção de soluções aproximadas do problema da ruína do jogador, recorrendo à simulação Monte Carlo (via *software R*) e à Lei dos Grandes Números. Por fim, far-se-á uma análise crítica à possibilidade de utilização deste problema na disciplina de Matemática no ensino secundário, nomeadamente no que se refere à utilização de simulação no ensino das probabilidades, através da construção e utilização de simuladores adequados no *software R* e na folha de cálculo *Microsoft Excel*, e de uma tarefa para este nível de ensino sobre este problema.

Palavras-chave: Equações às diferenças, simulação, história da probabilidade, ensino de probabilidades.

ABSTRACT

In 1657, Christiaan Huygens published the first book on calculation of probability. This small collection of problems related to gambling, based on the correspondence between Blaise Pascal and Pierre de Fermat in 1654, allowed to call the attention of many mathematicians during the seventeenth, eighteenth and nineteenth centuries for this theme, which is why there were several generalizations of some of the problems proposed. The last challenge presented by Huygens in this booklet, and perhaps one of the most famous problems in probability, is the gambler's ruin problem. The authorship of this problem was for centuries attributed to Huygens, however, the true author is Pascal. Over the centuries, several versions of this problem were presented; as well different ways to solve it. Some of those resolutions use difference equations.

In this work, we will present some results for difference equations of first and second order and discuss some of its applications. We will make a historical review of the origin of the probability calculus, of the gambler's ruin problem and its various versions. We will present exact solutions for some of these variants, by modeling the problem using difference equations. We will present some features of the game of ruin and we were going to present forms of getting approximate solutions to the gambler's ruin problem, using the Monte Carlo simulation (with software R) and the Law of Large Numbers. Finally, we will review the possibility of using this problem in Teaching Mathematics in secondary education (high school), particularly in the use of simulation in probability, by constructing and using appropriate simulators with software R and Microsoft Excel, and proposing a task for this level of education based on this problem.

Keywords: Difference equations, simulation, history of probabilities, teaching of probabilities.

Conteúdo

Agradecimentos	i
Resumo	iii
Abstract	v
Lista de Figuras	xi
Lista de Tabelas	xiii
1 Introdução	1
2 Equações às diferenças lineares de primeira ordem	5
2.1 Solução geral	6
2.2 Equações às diferenças lineares de primeira ordem com coeficientes constantes.	8
3 Equações às diferenças lineares de segunda ordem	13
3.1 Solução geral	13
3.2 Equações às diferenças lineares de segunda ordem com coeficientes constantes	18
4 O problema da ruína do jogador	29
4.1 Os jogos de azar, a origem das Probabilidades e o problema da ruína do jogador	30
4.2 Modelação do problema da ruína do jogador	42

4.2.1	Probabilidade do jogo da ruína nunca acabar	45
4.2.2	Caso em que o jogador B tem uma fortuna ilimitada	46
4.2.3	Valor esperado de ganho	46
4.2.4	Efeito da alteração do montante apostado por partida	48
4.2.5	Sensibilidade de \mathbb{P}_a em função de a , b e p	51
4.3	Modelação da duração do jogo da ruína	54
5	Simulação	59
5.1	Simulação de Monte Carlo	60
5.2	Simulação e o problema da ruína do jogador	63
5.3	Simulação e o Ensino das Probabilidades	69
5.4	Simulação e o problema da ruína do jogador: uma proposta de implementação no ensino secundário.	75
6	Conclusão	79
Bibliografia		80
A	Programas construídos para o software R	I
A.1	Programa para representar graficamente vários jogos da ruína	I
A.2	Programa para a Lei dos Grandes Números e Lei do Logaritmo Iterado para a proporção de jogos ganhos	II
A.3	Programa para a Lei dos Grandes Números e Lei do Logaritmo Iterado para o número de jogos realizados	III
A.4	Programa para a distribuição da proporção amostral - Teorema Limite Central	IV
A.5	Programa para a distribuição da média amostral - Teorema Limite Central . .	V
A.6	Programa para a Função de distribuição empírica da duração do jogo - Teorema Glivenko-Cantelli	VI
A.7	Programa para a distribuição da proporção amostral - Teorema Glivenko-Cantelli	VII

A.8	Programa para a distribuição da média amostral da duração de n jogos - Teorema Glivenko-Cantelli	VIII
A.9	Programa para a Lei dos Grandes Números para a proporção de jogos ganhos - versão para alunos	IX
A.10	Programa para a proporção de jogos ganhos - versão para alunos - apresentação de tabelas de valores.	X
A.11	Programa para a duração média do jogos - versão para alunos - apresentação de tabelas de valores.	XI
A.12	Programa para a proporção de jogos ganhos para outro tipo de apostas - versão para alunos - apresentação de tabelas de valores.	XII
B	Programas construídos em Visual Basic para Excel	XIII
B.1	Programa para efetuar a simulação de um jogo da ruína em Excel	XIII
B.2	Programa para efetuar a simulação de vários jogos da ruína em Excel	XVI
B.3	Programa para efetuar a simulação de vários jogos da ruína em Excel com dois tipos de apostas diferentes	XXI
C	Exemplo de tarefa	XXXI
C.1	Um pouco de história das probabilidades	XXXI
C.2	O problema da ruína do jogador	XXXIII

Lista de Figuras

4.1	Simulação do jogo para diferentes valores de a e de b ($p = 0.5$)	52
4.2	Simulação do jogo para diferentes valores de p ($a = b = 15$)	53
5.1	20 réplicas da evolução da proporção amostral durante 5000 jogos	65
5.2	20 réplicas da evolução da duração média do jogo durante 5000 jogos	66
5.3	Distribuição da proporção amostral de n jogos com $a = b = 15$ e $p = 0.5$	66
5.4	Distribuição da média amostral da duração de n jogos ($a = b = 15, p = 0.5$)	67
5.5	Função de distribuição empírica da duração do jogo com $a = b = 15$ e $p = 0.5$	68
5.6	Distribuição da proporção amostral em n jogos com $a = b = 15$ e $p = 0.5$	69
5.7	Distribuição da média amostral da duração de n jogos ($a = b = 15, p = 0.5$)	70
5.8	Simulação de um jogo da Ruína em Excel, $a = b = 3$ e $p = 0,5$	76
5.9	Simulação de cinco jogos da Ruína em Excel	77
5.10	Simulação de três jogos da Ruína em Excel com 2 tipos diferentes de apostas	77
C.1	Simulação do jogo para diferentes valores de a e de b ($p = 0.5$)	XXXIII

Lista de Tabelas

4.1	Probabilidades de o jogo durar para sempre em função de a e p , quando B tem uma fortuna ilimitada ($b \rightarrow +\infty$)	46
4.2	Probabilidade de ganhar 100 euros (5 casas decimais) e valor esperado de ganho (2 casas decimais)	51
4.3	Valores de \mathbb{P}_A em função de a, b e p	52
4.4	Valores de \mathbb{E}_a (1 casa decimal) em função de a, b e p	57

Capítulo 1

Introdução

The excitement that a gambler feels when making a bet is equal to the amount he might win times the probability of winning it.

Blaise Pascal (1623-1662)

Os jogos ditos de azar, tais como a roleta, o póquer, ou mesmo o euromilhões, são amplamente divulgados nos nossos dias e conhecidos pela maioria das pessoas desde a mais tenra idade. No entanto, será que se todas as pessoas conhecessem o valor da probabilidade de vencerem um desses jogos, a excitação e a *esperança* de os ganharem seriam iguais?

Contrariando a afirmação supracitada atribuída a Blaise Pascal⁽¹⁾, acreditamos que sim, só tal justifica que matemáticos, ou qualquer pessoa que tenha alguns conhecimentos de Teoria das Probabilidades, continuem a realizar apostas em tais jogos, ou que, continue a ser muito agradável jogá-los, mesmo que não se esteja a apostar nada. Podemos até afirmar que a excitação em realizar partidas desses jogos é sempre muito superior ao produto da probabilidade de os vencer pelo montante que está em jogo. Além disso, muitas vezes, a nossa excitação em jogar é inversamente proporcional à probabilidade de vencer, principalmente se o montante em jogo for muito elevado! Tal pode ser justificado pelo facto de quem os joga sentir que a vitória nesses jogos não depende das características pessoais do jogador ou da necessidade de elaborar estratégias complexas para os vencer. Todos os jogadores estão em iguais condições, todos dependem da sorte (dos Deuses).

Os jogos de azar estão, desde sempre, relacionados com a adivinhação e têm servido de

⁽¹⁾ Retirada de N. Rose (1988): *Mathematical Maxims and Minims*, Raleigh, North Carolina, Rome Press Inc.

ferramenta para obter o conforto que muitas pessoas sentem ao *conhecerem o seu futuro* ou a sentirem-se controlados por ente(s) superior(es). Enquanto uns se preocupavam em atribuir significados às cartas ou aos números que podiam surgir num jogo de cartas ou de dados, os matemáticos preocupavam-se em perceber quantas vezes tais cartas ou tais números poderiam surgir. Qual era a possibilidade de ocorrerem? Assim, com o fim da Idade Média e, como tal, com o acabar da ideia que tudo e todos são controlados por um Deus, inclusivamente os resultados que possam surgir num simples jogo de dados, os matemáticos da época do Renascimento começaram a tentar quantificar a possibilidade de se vencer nesses jogos. As probabilidades surgem para medir as possibilidades. Os jogos de azar estão assim relacionados com a origem e o desenvolvimento da Teoria das Probabilidades e o desenvolvimento das Probabilidades condicionou o interesse em conceber mais jogos desse tipo. A sua verdadeira origem tem como base a correspondência entre Blaise Pascal e Pierre de Fermat (1601-1665), em 1654.

Nessa correspondência, entre os dois matemáticos, ficamos a conhecer a primeira versão daquele que mais tarde viria a ser conhecido como *O Problema da Ruína do Jogador*. No entanto, essa correspondência só foi conhecida em 1679, depois do primeiro livro publicado (em 1657) sobre Teoria de Probabilidades, *De Ratiociniis in Ludo Aleae*, escrito por Christiaan Huygens (1629-1695). Nesse tratado, surge uma versão do problema da ruína do jogador razão pela qual, durante muito tempo, a autoria do problema foi atribuída a Huygens. No entanto, ao longo dos séculos têm sido apresentadas outras versões desse problema, tendo inclusivamente dado origem a outros problemas mais complexos. Numa versão do problema, podemos imaginar, por exemplo, que dois jogadores, A e B , têm uma certa quantidade de dinheiro, que pode ou não ser igual, e que jogam um jogo dividido em partidas. Em cada partida, o jogador A ganha com probabilidade p , recebendo um euro do jogador B , e perde com probabilidade $q = 1 - p$, pagando um euro ao jogador B . O jogo terminará quando um dos jogadores ficar sem dinheiro. Pretende-se determinar a probabilidade de tal acontecer.

Surgiram também diversas formas de resolver este problema, uma das soluções analíticas possíveis é a que utiliza equações às diferenças. A tecnologia, nomeadamente o uso de programas que permitam a realização de simulações probabilistas, permite-nos descobrir uma solução aproximada do problema da ruína do jogador, fazendo com que muitas pessoas que não tenham conhecimentos muito avançados de probabilidades ou de equações às diferenças, nomeadamente alunos do ensino não superior, descubram características desse problema e en-

contrem aproximações da verdadeira solução. Além disso, a natureza do problema, a história das suas origens e a sua relação com os jogos de azar, poderá aumentar o interesse no estudo das probabilidades e permitir, aos professores destes níveis de ensino, a realização de tarefas de probabilidades, que não se limitem ao rotineiro aplicar de fórmulas, muitas vezes não entendidas pelos alunos.

Assim, como a resolução analítica do problema da ruína do jogador pode implicar a utilização de equações às diferenças lineares de segunda ordem com coeficientes constantes, no presente trabalho, nos capítulos 2 e 3, iremos apresentar alguns resultados referentes a equações às diferenças de primeira ordem e a equações às diferenças de segunda ordem. O presente trabalho limita-se ao estudo de equações às diferenças lineares de ordem inferior a três, tendo-se optado, no caso das equações de ordem igual a 2, pelo estudo das equações de segunda ordem lineares com coeficientes constantes, devido ao facto da resolução do problema da ruína do jogador envolver apenas equações às diferenças deste tipo. Devido à sua importância em Matemática e em outras ciências, apresentamos vários exemplos de aplicações das equações às diferenças, procurando sempre, privilegiar assuntos que possam causar interesse e cuja solução possa ser apresentada a alunos do ensino secundário.

No quarto capítulo, escreveremos acerca da origem dos jogos de azar e da sua relação com a origem da teoria das probabilidades. Apresentaremos diversas versões do problema da ruína do jogador, bem como algumas das suas possíveis soluções analíticas. Referiremos algumas propriedades do problema da ruína do jogador, tais como a duração do jogo da ruína ou a influência que o tipo de apostas tem na probabilidade de se vencer o jogo.

No quinto capítulo, apresentaremos metodologias de obtenção de soluções aproximadas do problema do jogo da ruína, usando o *software* R e a folha de cálculo *Microsoft Excel*. Escreveremos sobre a importância da simulação em Matemática, as suas origens, e também sobre a importância que a simulação e o uso de tecnologias têm no estudo das probabilidades no ensino não superior. Apresentaremos alguns resultados de convergência probabilista estocástica, tais como o Teorema Limite Central ou a Lei dos Grandes Números, e utilizaremos o problema da ruína do jogador e o *software* R para os *ilustrar*. Analisaremos os programas de matemática do ensino não superior relativamente ao ensino das probabilidades e tentaremos enquadrar o problema da ruína do jogador no currículo de matemática desses anos de escolaridade. Iremos utilizar o problema da ruína do jogador para a conceção de uma tarefa que possa ser aplicada a alunos do ensino não superior, de forma a que estes possam apreender

as principais características do referido problema e que os faça perceber a importância que a tecnologia e as simulações probabilísticas têm para a resolução de problemas e para o estudo do comportamento de fenômenos aleatórios. Esta tarefa terá por base os programas que permitem a realização de simulações probabilísticas, quer usando o *software* R, quer usando a folha de cálculo *Microsoft Excel*.

Capítulo 2

Equações às diferenças lineares de primeira ordem

Neste capítulo, começaremos por introduzir a noção de *equação às diferenças linear de primeira ordem* e encontraremos a sua solução geral. Analisaremos alguns casos particulares deste tipo de equações, nomeadamente, as equações às diferenças lineares de primeira ordem com coeficientes constantes e apresentaremos alguns exemplos de aplicações, tendo como critério de escolha, a sua relação com outras Ciências e a possibilidade de serem explicados a alunos do ensino não superior.

As equações às diferenças lineares de primeira ordem têm inúmeras aplicações em Matemática. Podemos utilizá-las por exemplo, no cálculo do número mínimo de movimentos que está associado ao jogo *Torres de Hanói* ou no cálculo do número máximo de regiões em que um plano é dividido por um certo número de retas. No entanto, estas aplicações não se limitam à área da Matemática.

Em Economia, este tipo de equações são utilizados no cálculo de capitalizações, juros ou amortizações. O recurso a este tipo de equações permite-nos determinar facilmente o número de anos que é necessário para se amortizar um empréstimo com uma determinada taxa de juro ou o valor da prestação mensal quando se contrai um empréstimo com um certo número de anos.

Na elaboração deste capítulo, baseámo-nos em [2], [12], [16], [19], [22], [31], [43] e [50].

2.1 Solução geral

Utilizaremos a notação x_{n_0} para designar o termo de ordem n_0 de uma determinada sucessão de números reais x , isto é, $x(n_0) = x_{n_0}$.

Definição 2.1.1. Sejam (a_n) e (b_n) , $n \in \mathbb{N}_0$, duas sucessões de números reais dadas, com $a_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}_0$. A equação:

$$x_{n+1} = a_n x_n + b_n, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (2.1)$$

diz-se uma *equação às diferenças linear⁽¹⁾ de primeira ordem*.

A solução deste tipo de equações, fixado um valor inicial, pode ser obtida por um processo iterativo que descreveremos a seguir.

Consideremos um determinado valor inicial x_{n_0} , $n_0 \in \mathbb{N}_0$. Conhecido esse valor inicial, podemos obter o valor de x_n , para $n = n_0 + 1, n_0 + 2, \dots$, da equação (2.1). Para $n = n_0$ a equação (2.1) escrever-se-à na forma

$$x_{n_0+1} = a_{n_0} x_{n_0} + b_{n_0}. \quad (2.2)$$

Se considerarmos $n = n_0 + 2$, usando novamente (2.1), teremos

$$x_{n_0+2} = a_{n_0+1} x_{n_0+1} + b_{n_0+1}.$$

Por (2.2), vem

$$x_{n_0+2} = a_{n_0+1}(a_{n_0} x_{n_0} + b_{n_0}) + b_{n_0+1} = a_{n_0+1} a_{n_0} x_{n_0} + a_{n_0+1} b_{n_0} + b_{n_0+1}.$$

De forma análoga, temos que:

$$\begin{aligned} x_{n_0+3} &= a_{n_0+2} x_{n_0+2} + b_{n_0+2} \\ &= a_{n_0+2} a_{n_0+1} a_{n_0} x_{n_0} + a_{n_0+2} a_{n_0+1} b_{n_0} + a_{n_0+2} b_{n_0+1} + b_{n_0+2}. \end{aligned}$$

Este processo iterativo, permite-nos escrever o valor de x_n , para $n \geq n_0$ qualquer. Temos:

$$x_n = \left(\prod_{i=n_0}^{n-1} a_i \right) x_{n_0} + \left(\prod_{i=n_0+1}^{n-1} a_i \right) b_{n_0} + \left(\prod_{i=n_0+2}^{n-1} a_i \right) b_{n_0+1} + \dots + \left(\prod_{i=n-1}^{n-1} a_i \right) b_{n-2} + b_{n-1}.$$

⁽¹⁾ Consideramos que a_n não pode ser escrita como função de x_n .

Esta equação pode ser escrita⁽²⁾ na forma,

$$x_n = \left(\prod_{i=n_0}^{n-1} a_i \right) x_{n_0} + \sum_{r=n_0}^{n-1} \left(\prod_{i=r+1}^{n-1} a_i \right) b_r. \quad (2.3)$$

Provemos, por indução matemática, que (2.3) é a solução de (2.1). Em (2.2), mostrámos que a equação (2.1) é válida para $n = n_0$, resta provar que (2.3) é a solução de (2.1) para $n > n_0$. Suponhamos que (2.3) é solução para $k \geq n_0$ qualquer. Queremos provar que, para $n = k + 1$,

$$x_{k+1} = \left(\prod_{i=n_0}^k a_i \right) x_{n_0} + \sum_{r=n_0}^k \left(\prod_{i=r+1}^k a_i \right) b_r,$$

é solução de (2.1). Usando a equação (2.1), temos que:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= a_k x_k + b_k = \left(\prod_{i=n_0}^k a_i \right) x_{n_0} + \sum_{r=n_0}^{k-1} \left(\prod_{i=r+1}^k a_i \right) b_r + \left(\prod_{i=k+1}^k a_i \right) b_k \\ &= \left(\prod_{i=n_0}^k a_i \right) x_{n_0} + \sum_{r=n_0}^k \left(\prod_{i=r+1}^k a_i \right) b_r. \end{aligned}$$

Desde modo, concluímos que a equação às diferenças de 1.^a ordem (2.1) tem por solução (2.3), dado o valor inicial x_{n_0} . Quando não conhecemos o valor inicial, dizemos que (2.3) é uma *solução geral* de (2.1).

Exemplo 2.1.1. *Capitalizações compostas com taxas de juros variáveis*

Consideremos um depósito de um determinado valor c_0 , sendo as taxas de juro compostas e variáveis e não podendo ser efetuado qualquer reforço monetário. O depósito permite a mobilização parcial ou total num determinado período de tempo, com a correspondente perda de juro, referente ao capital mobilizado. Suponhamos que:

- c_n representa o capital acumulado no fim do n -ésimo período de tempo;
- j_{n-1} representa a taxa de juro referente ao n -ésimo período de tempo;
- m_{n-1} representa o capital mobilizado no n -ésimo período de tempo.

⁽²⁾ Consideramos $\prod_{i=k+1}^k a_i = 1$.

Esta situação é descrita pela seguinte equação às diferenças,

$$c_{n+1} = (1 + j_n)c_n - (1 + j_n)m_n.$$

Utilizando (2.3), verifica-se que o capital acumulado ao fim de n períodos de tempo é dado por,

$$c_n = \left(\prod_{i=0}^{n-1} (1 + j_i) \right) c_0 - \sum_{r=0}^{n-1} \left(\prod_{i=r}^{n-1} (1 + j_i) \right) m_r. \quad (2.4)$$

Consideremos o caso de um depósito de 10000€ a 3 anos, com taxas de juro compostas e variáveis: 3% no 1.º ano, 4% no 2.º ano e 5% no 3.º ano. Foram efetuados três levantamentos naquele período de tempo: 500€ no 1.º ano, 1000€ no 2.º ano e 1500€ durante o 3.º ano. A equação (2.4), permite-nos determinar o capital acumulado ao fim de três anos. Temos:

$$\begin{aligned} c_3 &= 1,03 \times 1,04 \times 1,05 \times 10000 - 1,03 \times 1,04 \times 1,05 \times 500 \\ &\quad - 1,04 \times 1,05 \times 1000 - 1,05 \times 1500 \\ &= 8018,22\text{€}. \end{aligned}$$

2.2 Equações às diferenças lineares de primeira ordem com coeficientes constantes.

Nesta secção, iremos analisar as soluções da equação (2.1) nos casos em que as sucessões, (a_n) ou (b_n) , $n \in \mathbb{N}_0$, são constantes, conhecido um valor inicial x_{n_0} , $n_0 \in \mathbb{N}_0$. Analisemos um primeiro caso, em que (a_n) , $n \in \mathbb{N}_0$, é uma sucessão constante. Neste caso, a equação (2.1) tomará a forma

$$x_{n+1} = ax_n + b_n, n \in \mathbb{N}_0, \quad (2.5)$$

com $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Usando (2.3), verifica-se que a solução geral de (2.5) é:

$$\begin{aligned} x_n &= \left(\prod_{i=n_0}^{n-1} a \right) x_{n_0} + \sum_{r=n_0}^{n-1} \left(\prod_{i=r+1}^{n-1} a \right) b_r \\ &= a^{n-1-n_0+1} x_{n_0} + \sum_{r=n_0}^{n-1} a^{n-1-r-1+1} b_r \\ &= a^{n-n_0} x_{n_0} + a^{n-1} \sum_{r=n_0}^{n-1} a^{-r} b_r. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Exemplo 2.2.1. *Amortizações com pagamentos variáveis*

Uma *amortização* consiste num processo de pagamento de uma dívida que é usualmente feito de uma forma constante e periódica, tendo o devedor que pagar juros sobre o montante remanescente. Consideremos que:

- d_0 representa a dívida inicial;
- d_n representa o montante em dívida após n pagamentos;
- p_{n-1} representa o valor pago no n -ésimo período de pagamento;
- j representa a taxa de juro que supomos constante.

Este caso pode ser representado pela seguinte equação às diferenças,

$$d_{n+1} = (1 + j)d_n - p_n.$$

Por (2.6), temos que o montante em dívida decorridos n períodos de tempo é dado por,

$$\begin{aligned} d_n &= (1 + j)^n d_0 + (1 + j)^{n-1} \sum_{r=0}^{n-1} (1 + j)^{-r} (-p_n) \\ &= (1 + j)^n d_0 - \sum_{r=0}^{n-1} (1 + j)^{n-1-r} p_r. \end{aligned}$$

Suponhamos que estamos perante uma dívida de 20000€ com uma taxa de juro anual de 8%. Vamos supor também que as amortizações são efetuadas anualmente e que o valor pago no final do 1.º ano foi de 4000€, que o segundo pagamento efetuado foi de 5000€ e que o valor pago no final do 3.º ano foi de 6000€. Temos: $j = 0,08$; $p_0 = 4000$; $p_1 = 5000$; $p_2 = 6000$ e $d_0 = 20000$. O montante em dívida após estes 3 pagamentos, é dado por,

$$d_3 = 1,08^3 \times 20000 - 1,08^2 \times 4000 - 1,08^1 \times 5000 - 1,08^0 \times 6000 = 9128,64€.$$

Exemplo 2.2.2. *Número máximo de regiões num plano definidas por n retas*

Consideremos o seguinte problema: *Se desenharmos n retas num plano, este fica dividido num certo número de regiões. Qual será o número máximo de regiões?*

Representemos por R_n o número máximo de regiões definidas num plano, ao traçarmos n retas. Começemos por analisar este problema para um número de retas pequeno. Se não desenharmos retas, o plano fica dividido numa única região e, logo, $R_0 = 1$. Se desenharmos uma

reta, o plano ficará dividido em duas regiões, logo, $R_1 = 2$. Se traçarmos 2 retas, obteremos um número máximo de regiões se as duas não forem paralelas e, nesse caso, teremos 4 regiões, ou seja, $R_2 = 4$. No plano assim dividido em 4 regiões, poderemos colocar uma terceira reta. Obteremos um número máximo de regiões, se a terceira reta que acabámos de colocar não for paralela a nenhuma das duas retas anteriores, ou seja, se esta terceira reta intersecar as outras duas em 2 pontos de intersecção e definir assim mais 3 regiões. Estamos assim perante um processo que pode ser definido recursivamente. O número máximo de regiões definido por $n + 1$ retas é igual ao número máximo de regiões definido por n retas adicionado de $n + 1$. Podemos escrever a equação às diferenças,

$$R_{n+1} = R_n + n + 1.$$

Esta equação tem como solução,

$$R_n = 1 + (1 + 2 + \dots + n) = 1 + \frac{n(n+1)}{2}.$$

Consideremos agora o caso em que (a_n) e (b_n) , $n \in \mathbb{N}_0$, são constantes. A equação (2.1) escrever-se-á na forma,

$$x_{n+1} = ax_n + b, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (2.7)$$

com $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $b \in \mathbb{R}$. A equação (2.7) diz-se uma *equação às diferenças linear de primeira ordem com coeficientes constantes*. Por substituição em (2.6), verificamos que a solução geral de (2.7) é:

$$\begin{aligned} x_n &= a^{n-n_0} x_{n_0} + \sum_{r=n_0}^{n-1} a^{n-1-r} b \\ &= a^{n-n_0} x_{n_0} + (a^{n-1-n_0} + a^{n-1-n_0-1} + a^{n-1-n_0-2} + \dots + 1) b. \end{aligned}$$

Se $a \neq 1$, a expressão $a^{n-1-n_0} + a^{n-1-n_0-1} + a^{n-1-n_0-2} + \dots + 1$ representa a soma de $n - n_0$ termos de uma progressão geométrica de razão a . Neste caso, a solução geral de (2.7), é dada por:

$$x_n = a^{n-n_0} x_{n_0} + b \times \frac{1 - a^{n-n_0}}{1 - a}. \quad (2.8)$$

Se $a = 1$, a solução geral de (2.7), é:

$$x_n = a^{n-n_0} x_{n_0} + (n - n_0) b. \quad (2.9)$$

Exemplo 2.2.3. *Amortizações com pagamentos constantes*

Atente-se no caso idêntico ao exemplo 2.2.1, em que consideramos os valores dos pagamentos efetuados constantes. Considerando a sucessão d_n definida nesse exemplo e, designando por p o valor constante que é pago em cada período de pagamento e por j , a taxa de juro, podemos representar este caso pela equação,

$$d_{n+1} = (1 + j)d_n - p.$$

Substituindo em (2.8), concluímos que o montante em dívida decorridos n períodos de tempo é dado por,

$$\begin{aligned} d_n &= (1 + j)^n d_0 - p \times \frac{1 - (1 + j)^n}{1 - (1 + j)} \\ &= (1 + j)^n d_0 + \frac{p}{j} \times [1 - (1 + j)^n]. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Por exemplo, se considerarmos uma dívida inicial de 20000€ com uma taxa de juro anual de 10% e um pagamento anual de 4000€, podemos usar (2.10) para determinar o valor em débito, após 4 pagamentos. Temos:

$$d_4 = 1,1^4 \times 20000 + \frac{4000}{0,1} \times (1 - 1,1^4) = 10718€.$$

Neste tipo de amortizações, é útil descobrir o valor que se tem de pagar em cada período de pagamento se quisermos amortizar a nossa dívida num certo tempo ou, reciprocamente, descobrir o número de períodos de pagamentos a efetuar, se quisermos que em cada período de pagamento se pague um determinado valor. Assim, se quisermos pagar a dívida em k pagamentos, para descobrirmos o valor que teremos de pagar em cada um dos k períodos de pagamento, basta utilizarmos (2.10) e resolvermos a equação $d_k = 0$ em ordem a p . Teremos,

$$p = \frac{-j(1 + j)^k d_0}{1 - (1 + j)^k} = d_0 \left[\frac{j}{1 - (1 + j)^{-k}} \right].$$

Por outro lado, se quisermos descobrir em quantos períodos de pagamento k teremos de amortizar a dívida, para que o valor em cada período de pagamento tome um certo valor p , utilizamos (2.10) e resolvemos a equação $d_k = 0$ em ordem a k . Vem,

$$k = -\log_{1+j} \left(-\frac{jd_0}{p} + 1 \right).$$

Exemplo 2.2.4. *Torres de Hanói*

O jogo *Torres de Hanói* foi inventado pelo matemático francês Édouard Lucas em 1883. O

jogo original consiste em 8 discos circulares, com diâmetros progressivamente menores e três pinos, onde são colocados os discos por ordem decrescente de diâmetro. O objetivo do jogo é movimentar todos os 8 discos do pino 1 para o pino 2, utilizando o pino 3 como auxiliar. O jogador só poderá movimentar um disco de cada vez e, além disso, não poderá colocar um disco maior sobre um mais pequeno.

Se considerarmos torres com um número de discos inferior a 8, verificamos que, por exemplo, se a torre tiver apenas um disco, será necessário apenas um movimento; se a torre tiver 2 discos, serão necessários 3 movimentos; se a torre tiver 3 discos serão necessários 7 movimentos para cumprir o objetivo do jogo. Observa-se também, que para movimentar uma torre com n discos precisamos primeiro de conseguir movimentar a torre que contém $n - 1$ discos, sendo excluído o disco maior. Para tal, temos de conseguir colocar a torre com $n - 1$ discos no pino 3 e, em seguida, colocar o disco maior no pino 2 e por fim, voltar a movimentar a torre com $n - 1$ discos, colocando-a no pino 2. Assim, o número mínimo de movimentos para movimentar uma torre com n discos é igual à soma do dobro do número mínimo de movimentos para movimentar uma torre com $n - 1$ discos com 1 unidade.

Este número mínimo de movimentos que devem ser efetuados para cumprir o objetivo do jogo, pode ser calculado utilizando uma equação às diferenças linear de primeira ordem com coeficientes constantes. Designe-se por H_n o número mínimo de movimentos que são necessários para mudar uma torre com n discos do pino 1 para o pino 2.

O processo recursivo descrito atrás, permite-nos escrever a seguinte equação,

$$H_n = 2H_{n-1} + 1.$$

Usando (2.8), vem,

$$H_n = 2^{n-1} \times 1 + 1 \times \frac{1 - 2^{n-1}}{1 - 2} = 2^{n-1} + 2^{n-1} - 1 = 2^n - 1.$$

Assim, o número mínimo para movimentar a torre original do jogo, é dado por,

$$H_8 = 2^8 - 1 = 255.$$

Capítulo 3

Equações às diferenças lineares de segunda ordem

Neste capítulo, iremos apresentar alguns resultados referentes à existência e unicidade da solução de uma equação às diferenças linear de segunda ordem, homogénea ou completa. Faremos um estudo das equações às diferenças lineares de segunda ordem com coeficientes constantes e veremos a forma de descobrir a solução geral de uma equação deste tipo.

Referiremos também algumas aplicações deste tipo de equações. As equações às diferenças de segunda ordem permitem-nos descobrir a solução de diversos problemas em Matemática. Em particular, veremos que o termo geral da *sucessão de Fibonacci* pode ser descoberto através de uma equação às diferenças linear de segunda ordem homogénea com coeficientes constantes. Veremos também aplicações em outras Ciências, servindo em Economia, para a descrição de um modelo económico ou permitindo a contagem do certo número de *strings* que tem uma certa propriedade, em Ciências de Computação.

Na elaboração deste capítulo, baseámo-nos em [2], [12], [16], [17], [19], [22], [31], [35], [43] e [50].

3.1 Solução geral

Definição 3.1.1. Sejam (a_n) , (b_n) e (c_n) , $n \in \mathbb{N}_0$, sucessões de números reais dadas. A equação:

$$x_{n+2} = a_n x_{n+1} + b_n x_n + c_n, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (3.1)$$

com $b_n \neq 0$ diz-se uma *equação às diferenças linear*⁽¹⁾ *de segunda ordem*.

Se $c_n = 0$, $n \in \mathbb{N}_0$ em (3.1), então a equação às diferenças diz-se *homogénea*. Caso contrário, a equação diz-se *não homogénea* ou *completa* e dizemos que $x_{n+2} = a_n x_{n+1} + b_n x_n$ é a equação *homogénea associada* a (3.1).

A existência e unicidade da solução de (3.1) é garantida pelo teorema seguinte.

Teorema 3.1. A equação às diferenças (3.1) tem uma e uma só solução, determinada pelas condições iniciais x_{n_0} e x_{n_0+1} , $n \in \mathbb{N}_0$.

Demonstração. Suponhamos conhecidos x_{n_0} e x_{n_0+1} , $n \in \mathbb{N}_0$. Utilizando (3.1), podemos determinar o valor de x_{n_0+2} . De facto, temos:

$$x_{n_0+2} = a_{n_0} x_{n_0+1} + b_{n_0} x_{n_0} + c_{n_0}.$$

Pela forma como foi obtido, o valor de x_{n_0+2} é único. Este processo recursivo também nos permite descobrir os valores de x_k , para $k > n_0 + 2$. De facto, conhecidos os valores $x_{n_0}, x_{n_0+1}, \dots, x_{k-2}, x_{k-1}$, o valor de x_k será univocamente determinado por,

$$x_k = a_{k-2} x_{k-1} + b_{k-2} x_{k-2} + c_{k-2},$$

mostrando-se assim o pretendido. □

Os resultados seguintes ajudar-nos-ão a obter a solução geral da equação (3.1).

Teorema 3.2. Sejam $(x_{1,n}), (x_{2,n})$, $n \in \mathbb{N}_0$, duas soluções da equação às diferenças linear de segunda ordem homogénea,

$$x_{n+2} = a_n x_{n+1} + b_n x_n, \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{3.2}$$

Então qualquer combinação linear das soluções da equação, isto é,

$$x_n = c_1 x_{1,n} + c_2 x_{2,n}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

onde c_1, c_2 , são constantes arbitrárias é também solução de (3.2).

⁽¹⁾ Consideramos que a_n e b_n não podem ser escritas como função de x_n .

Demonstração. Como $(x_{1,n}), (x_{2,n}), n \in \mathbb{N}_0$, são soluções de (3.2), temos:

$$x_{1,n+2} = a_n x_{1,n+1} + b_n x_{1,n}, \quad (3.3)$$

$$x_{2,n+2} = a_n x_{2,n+1} + b_n x_{2,n}. \quad (3.4)$$

Multiplicando ambos os membros de (3.3) por c_1 e ambos os membros de (3.4) por c_2 e, somando a seguir, membro a membro, temos:

$$c_1 x_{1,n+2} + c_2 x_{2,n+2} = a_n (c_1 x_{1,n+1} + c_2 x_{2,n+1}) + b_n (c_1 x_{1,n} + c_2 x_{2,n}). \quad (3.5)$$

A igualdade (3.5), permite-nos concluir que $x_n = c_1 x_{1,n} + c_2 x_{2,n}, n \in \mathbb{N}_0$ é solução de (3.2), como pretendido. \square

Definição 3.1.2. O conjunto de sucessões de números reais, $\{u_{1,n}, u_{2,n}, u_{3,n}, \dots, u_{m,n}\}, n \in \mathbb{N}_0$, diz-se *linearmente dependente*, se existirem constantes reais, c_1, c_2, \dots, c_m , não simultaneamente nulas, tais que,

$$c_1 u_{1,n} + c_2 u_{2,n} + \dots + c_m u_{m,n} = 0,$$

para $n \in \mathbb{N}_0$. Caso contrário, diremos que o conjunto de sucessões é *linearmente independente*.

Definição 3.1.3. Consideremos $(x_{1,n}), (x_{2,n}), n \in \mathbb{N}_0$, duas soluções da equação homogénea associada a (3.1). Chamamos *determinante de Casorati* ao determinante

$$W(t) = \begin{vmatrix} x_{1,t} & x_{2,t} \\ x_{1,t+1} & x_{2,t+1} \end{vmatrix}, t \in \mathbb{N}_0.$$

Teorema 3.3. Sejam $(a_n), (b_n), n \in \mathbb{N}_0$, duas sucessões de números reais. A equação às diferenças linear de segunda ordem homogénea,

$$x_{n+2} = a_n x_{n+1} + b_n x_n, n \in \mathbb{N}_0, \quad (3.6)$$

tem como solução geral:

$$x_n = c_1 x_{1,n} + c_2 x_{2,n}, n \in \mathbb{N}_0,$$

onde $(x_{1,n}), (x_{2,n}), n \in \mathbb{N}_0$, são soluções linearmente independentes da equação (3.6) e c_1, c_2 são constantes arbitrárias.

Demonstração. Conhecidos os valores de x_{n_0} e x_{n_0+1} , $n_0 \in \mathbb{N}_0$, se provarmos que existem constantes, c_1 e c_2 , que verifiquem as condições:

$$c_1x_{1,n_0} + c_2x_{2,n_0} = x_{n_0} \quad (3.7)$$

e

$$c_1x_{1,n_0+1} + c_2x_{2,n_0+1} = x_{n_0+1}, \quad (3.8)$$

temos garantida, pelo teorema 3.1, que $x_n = c_1x_{1,n} + c_2x_{2,n}$ é a única solução de (3.6). Demonstramos então, que o sistema constituído pelas equações (3.7) e (3.8), tem solução única em c_1 e c_2 . Pela regra de Cramer, tal acontecerá, se o determinante,

$$W(n_0) = \begin{vmatrix} x_{1,n_0} & x_{2,n_0} \\ x_{1,n_0+1} & x_{2,n_0+1} \end{vmatrix},$$

for diferente de zero. Como podemos observar, este é o determinante de Casorati para $t = n_0$. Suponhamos, por contradição, que $W(n_0) = 0$.

Se $W(n_0)$ for nulo, as suas filas serão linearmente dependentes. Assim, existirão α , β , não simultaneamente nulos, tais que:

$$\alpha x_{1,n_0} + \beta x_{2,n_0} = 0 \quad (3.9)$$

e

$$\alpha x_{1,n_0+1} + \beta x_{2,n_0+1} = 0. \quad (3.10)$$

Considere-se $\overline{x}_k = \alpha x_{1,k} + \beta x_{2,k}$, $k \in \mathbb{N}_0$. Pelo teorema 3.2, temos que \overline{x}_k é solução de (3.6), pois estamos a supor que $(x_{1,k})$ e $(x_{2,k})$ são soluções de (3.6). Por outro lado, as equações (3.9) e (3.10), permitem-nos concluir que,

$$\overline{x}_{n_0} = 0 \text{ e } \overline{x}_{n_0+1} = 0.$$

O teorema 3.1, garante-nos que só existe uma solução \overline{x}_k que verifique (3.6) e que satisfaça $\overline{x}_{n_0} = 0$ e $\overline{x}_{n_0+1} = 0$. Utilizando (3.6), temos que $\overline{x}_k \equiv 0$ para qualquer $k \in \mathbb{N}_0$, ou seja, $\alpha x_{1,k} + \beta x_{2,k} \equiv 0$. No entanto, isto contradiz a hipótese de $(x_{1,n})$ e $(x_{2,n})$ serem linearmente independentes. Como tal, $W(n_0) \neq 0$. □

A demonstração do teorema anterior, permitiu-nos também concluir que, se provarmos que o determinante de Casorati é igual a zero, para algum $t \in \mathbb{N}_0$ e duas soluções $(x_{1,n})$, $(x_{2,n})$,

$n \in \mathbb{N}_0$, de (3.6), então essas duas soluções serão linearmente dependentes. No entanto, para podermos aplicar o teorema 3.3, é importante que estabeleçamos uma condição suficiente para que possamos concluir que $(x_{1,n}), (x_{2,n})$, presentes em (3.6), são linearmente independentes.

Teorema 3.4. Sejam $(x_{1,n}), (x_{2,n}), n \in \mathbb{N}_0$, duas soluções da equação homogénea associada a (3.1) e consideremos os valores dados iniciais, x_{n_0} e x_{n_0+1} . Se o determinante de Casorati, $W(t)$, for diferente de 0, para algum $t \in \mathbb{N}_0$, então as soluções $(x_{1,n}), (x_{2,n}), n \in \mathbb{N}_0$, serão linearmente independentes.

Demonstração. Provemos a contra-recíproca do teorema apresentado.

Suponhamos então, que $(x_{1,n}), (x_{2,n}), n \in \mathbb{N}_0$, são linearmente dependentes. Por definição, existem constantes α e β , não nulas simultaneamente, tais que

$$\alpha x_{1,t} + \beta x_{2,t} = 0, \quad (3.11)$$

para todo o $t \in \mathbb{N}_0$. Em particular, fazendo $t = n_0$ e $t = n_0 + 1$, vem,

$$\alpha x_{1,n_0} + \beta x_{2,n_0} = 0 \quad (3.12)$$

e

$$\alpha x_{1,n_0+1} + \beta x_{2,n_0+1} = 0. \quad (3.13)$$

O sistema formado pelas duas equações, (3.12) e (3.13), possui uma solução não trivial, se e somente se, o seu determinante for zero. Este determinante é igual a $W(n_0)$. Como o valor n_0 , foi escolhido arbitrariamente, provámos assim que, se $(x_{1,n}), (x_{2,n}), n \in \mathbb{N}_0$, forem linearmente dependentes então $W(t) = 0$, para todo $t \in \mathbb{N}_0$. □

Teorema 3.5. Seja $(x_{p,n}), n \in \mathbb{N}_0$, uma solução particular da equação às diferenças

$$x_{n+2} = a_n x_{n+1} + b_n x_n + c_n, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (3.14)$$

e $(x_{h,n}), n \in \mathbb{N}_0$, a solução geral da equação homogénea associada a (3.14). Então, a solução geral da equação (3.14), $(x_n), n \in \mathbb{N}_0$, obtém-se somando a solução geral da equação homogénea associada a (3.14), $(x_{h,n})$, com a solução particular $(x_{p,n})$, ou seja,

$$x_n = x_{h,n} + x_{p,n}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Demonstração. Por $(x_{p,n})$ ser uma solução particular de (3.14), vem que,

$$x_{p,n+2} = a_n x_{p,n+1} + b_n x_{p,n} + c_n, \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (3.15)$$

Como $(x_{h,n})$ é a solução geral da equação homogénea associada a (3.14), temos que,

$$x_{h,n+2} = a_n x_{h,n+1} + b_n x_{h,n}, \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (3.16)$$

Somando, membro a membro, as equações (3.15) e (3.16), temos para $n \in \mathbb{N}_0$,

$$\begin{aligned} x_{h,n+2} + x_{p,n+2} &= a_n x_{h,n+1} + b_n x_{h,n} + a_n x_{p,n+1} + b_n x_{p,n} + c_n \\ &= a_n (x_{h,n+1} + x_{p,n+1}) + b_n (x_{h,n} + x_{p,n}) + c_n. \end{aligned} \quad (3.17)$$

A igualdade (3.17) e o teorema 3.1, permitem-nos concluir que $x_n = x_{h,n} + x_{p,n}$ é a solução geral de (3.14). □

Os teoremas 3.3 e 3.5 permitem-nos concluir que a solução geral de (3.1), se obtém determinando duas soluções linearmente independentes da equação homogénea que lhe está associada, $(x_{1,n})$ e $(x_{2,n})$, $n \in \mathbb{N}_0$, e achando uma solução particular, $(x_{p,n})$, $n \in \mathbb{N}_0$, de (3.1). Temos assim, que a solução geral de (3.1), é da forma,

$$x_n = c_1 x_{1,n} + c_2 x_{2,n} + x_{p,n}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

em que c_1 e c_2 são constantes arbitrárias.

3.2 Equações às diferenças lineares de segunda ordem com coeficientes constantes

Nesta secção, estudaremos as soluções da equação (3.1) nos casos em que as sucessões, (a_n) , (b_n) e (c_n) , $n \in \mathbb{N}_0$, são constantes, conhecidos os valores iniciais x_{n_0} e x_{n_0+1} , $n_0 \in \mathbb{N}_0$.

Assim, a equação (3.1), escrever-se-á na forma

$$x_{n+2} = a x_{n+1} + b x_n + c, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (3.18)$$

com a , b e c constantes reais e $b \neq 0$.

Como vimos no teorema 3.5, para determinarmos a solução geral da equação (3.18), devemos começar por determinar a solução geral da equação homogénea que lhe está associada.

Assim, iniciaremos o nosso estudo, pela determinação da solução geral das equações às diferenças de segunda ordem do tipo,

$$x_{n+2} = ax_{n+1} + bx_n, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (3.19)$$

com a e b constantes reais e $b \neq 0$. Para isso, vamos supor que as soluções de (3.19) são da forma r^k , com $r \in \mathbb{C}$ e $k \in \mathbb{N}$. Substituindo em (3.19), teremos,

$$r^{k+2} = ar^{k+1} + br^k \Leftrightarrow r^k(r^2 - ar - b) = 0. \quad (3.20)$$

Observando (3.20), verificamos que, se $r \neq 0$, r^k é solução de (3.19), se e somente se, r for raiz do polinómio $r^2 - ar - b$. Este polinómio é chamado *polinómio caraterístico*. As soluções da equação $r^2 - ar - b = 0$ dependem do sinal do binómio $\frac{a^2}{4} + b$.

Teorema 3.6. Consideremos a equação homogénea de segunda ordem com coeficientes constantes,

$$x_{n+2} = ax_{n+1} + bx_n, \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (3.21)$$

1. Se $\frac{a^2}{4} + b > 0$ então $r_1 = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}$ e $r_2 = \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}$ são as raízes do polinómio caraterístico associado a (3.21) e a solução geral de (3.21) é dada por $x_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$;
2. Se $\frac{a^2}{4} + b = 0$ então a raiz do polinómio caraterístico associado a (3.21) é $r = \frac{a}{2}$ e a solução geral de (3.21) é $x_n = c_1 r^n + c_2 n r^n$;
3. Se $\frac{a^2}{4} + b < 0$ então o polinómio caraterístico associado a (3.21) admite duas raízes complexas e a solução geral de (3.21) é dada por $x_n = \rho^n (c_1 \cos(n\theta) + c_2 \sin(n\theta))$, onde $\rho = \sqrt{-b}$ e $\cos(\theta) = \frac{a}{2\sqrt{b}}$.

Em qualquer um dos casos, c_1 e c_2 representam constantes reais.

Demonstração. 1. Se $\frac{a^2}{4} + b > 0$, o polinómio caraterístico associado à equação (3.21) admite duas raízes reais distintas, $r_1 = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}$ e $r_2 = \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}$. Pelo que já foi referido, tal acontece, se e somente se, r_1^n e r_2^n , $n \in \mathbb{N}_0$, forem soluções de (3.21). Resta provar que tais soluções são linearmente independentes.

Consideremos o determinante de Casorati para $t = 0$, de r_1^n e r_2^n , $n \in \mathbb{N}_0$. Temos,

$$W(0) = \begin{vmatrix} r_1^0 & r_2^0 \\ r_1^1 & r_2^1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{vmatrix} = r_2 - r_1 = 2\sqrt{\frac{a^2}{4} + b}.$$

Como estamos a supor $\frac{a^2}{4} + b > 0$ temos que $W(0) \neq 0$ e logo, pelo teorema 3.4 podemos concluir que r_1^n e r_2^n , $n \in \mathbb{N}_0$, são duas soluções linearmente independentes de (3.21). O teorema 3.3 permite-nos concluir que $x_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$ é a solução geral de (3.21), como pretendido.

2. Consideremos o caso em que $\frac{a^2}{4} + b = 0$. Isso significa que o polinómio caraterístico associado à equação (3.21), tem uma raiz dupla $r = \frac{a}{2}$. Assim, a sucessão r^n , $n \in \mathbb{N}_0$, é solução de (3.21). Logo, temos

$$r^{n+2} = ar^{n+1} + br^n, n \in \mathbb{N}_0. \quad (3.22)$$

Provemos que nr^n , $n \in \mathbb{N}_0$, é também solução de (3.21). Se multiplicarmos ambos os membros da equação (3.22) por n , teremos:

$$nr^{n+2} = anr^{n+1} + bnr^n, n \in \mathbb{N}_0. \quad (3.23)$$

Como $r = \frac{a}{2}$, vem $2r = a$ e logo,

$$2r^{n+2} = ar^{n+1}, n \in \mathbb{N}_0. \quad (3.24)$$

Somando, membro a membro, as equações (3.23) e (3.24), temos para $n \in \mathbb{N}_0$:

$$(n+2)r^{n+2} = a(n+1)r^{n+1} + bnr^n, n \in \mathbb{N}_0. \quad (3.25)$$

A igualdade (3.25) permite-nos concluir que nr^n , $n \in \mathbb{N}_0$, é solução de (3.21). Prove-mos que r^n e nr^n , $n \in \mathbb{N}_0$, são duas soluções linearmente independentes de (3.21). O determinante de Casorati para $t = 0$, de r^n e nr^n , $n \in \mathbb{N}_0$ é:

$$W(0) = \begin{vmatrix} r^0 & 0 \\ r^1 & r^1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ r & r \end{vmatrix} = r = \frac{a}{2}.$$

Como estamos a supor que $b \neq 0$ e que $\frac{a^2}{4} + b = 0$, temos forçosamente $a \neq 0$ e podemos concluir, de forma análoga ao que já foi referido no ponto 1 desta demonstração, que $x_n = c_1 r^n + c_2 nr^n$ é a solução geral de (3.21), como se queria demonstrar.

3. Se $\frac{a^2}{4} + b < 0$, o polinómio caraterístico associado a (3.21) admite duas raízes complexas, r_3 e r_4 , e temos:

$$r_3 = \frac{a}{2} + i\sqrt{\left|\frac{a^2}{4} + b\right|} \text{ e } r_4 = \frac{a}{2} - i\sqrt{\left|\frac{a^2}{4} + b\right|}.$$

Podemos escrever, por exemplo, r_3 na forma trigonométrica e fazendo,

$$\rho = \sqrt{\frac{a^2}{4} - b - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{-b} \text{ e } \cos(\theta) = \frac{\frac{a}{2}}{\sqrt{-b}} = \frac{a}{2\sqrt{-b}},$$

teremos:

$$r_3 = \rho [\cos(\theta) + i\sin(\theta)].$$

Como já foi referido, $r_3^n = \rho^n [\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)]$ é uma solução de (3.21). Como tal, r_3^n satisfaz a equação (3.21) e tem-se:

$$\begin{aligned} \rho^{n+2} (\cos [(n+2)\theta] + i\sin [(n+2)\theta]) = & \quad (3.26) \\ a\rho^{n+1} (\cos [(n+1)\theta] + i\sin [(n+1)\theta]) + b\rho^n (\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)). \end{aligned}$$

A igualdade (3.26) verifica-se, se e somente se,

$$\rho^{n+2} \cos[(n+2)\theta] = a\rho^{n+1} \cos[(n+1)\theta] + b\rho^n \cos(n\theta), \quad (3.27)$$

e

$$\rho^{n+2} \sin[(n+2)\theta] = a\rho^{n+1} \sin[(n+1)\theta] + b\rho^n \sin(n\theta). \quad (3.28)$$

As equações (3.27) e (3.28) permitem-nos concluir que $\rho^n \cos(n\theta)$ e $\rho^n \sin(n\theta)$ são soluções de (3.21). O determinante de Casorati para $t = 0$, de $\rho^n \cos(n\theta)$ e $\rho^n \sin(n\theta)$, $n \in \mathbb{N}_0$, é:

$$W(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \rho \cos(\theta) & \rho \sin(\theta) \end{vmatrix} = \rho \sin(\theta) = \sqrt{\left| \frac{a^2}{4} + b \right|} \neq 0.$$

Conclui-se, como pretendido, que $\rho^n \cos(n\theta)$ e $\rho^n \sin(n\theta)$ são duas soluções linearmente independentes de (3.21) e que, $x_n = \rho^n (c_1 \cos(n\theta) + c_2 \sin(n\theta))$, é a solução geral de (3.21) se $\frac{a^2}{4} + b < 0$.

□

Exemplo 3.2.1. *O Problema dos Coelhos e a Sucessão de Fibonacci*

O *Problema dos Coelhos* surgiu pela primeira vez num livro acerca do ábaco, *Liber abaci*, escrito em 1202 pelo matemático italiano Leonardo di Pisa, conhecido usualmente por Fibonacci.

Este é um dos problemas conhecidos mais antigos relacionado com uma sucessão definida recursivamente. O problema consiste em descobrir o número de casais de coelhos que existem

ao fim de um ano, sabendo que no início existe apenas um casal de coelhos e que, cada casal quando atinge a maioridade aos dois meses, dá à luz um novo casal por cada mês que passa.

Designemos por F_n o número total de casais de coelhos que existem ao fim de n meses. Respeitando as condições que já foram enunciadas, temos que, após um mês do nascimento do primeiro casal de coelhos, este casal ainda não deu à luz nenhum casal novo de coelhos e, logo, $F_0 = 1$ e $F_1 = 1$. Passados dois meses, nasce um novo casal de coelhos e o total de casais de coelhos que existem passa a ser dois e tem-se $F_2 = 2$. No terceiro mês, o casal mais velho dá à luz um novo casal de coelhos e vem, $F_3 = 3$. Ao quarto mês, são pais os dois coelhos mais velhos e aqueles que nasceram há dois meses e assim, $F_4 = 5$. Por cada mês que passa, o número total de pares de coelhos que existem, obtém-se somando o número de casais de coelhos que existiam no mês anterior com um número de pares de coelhos igual aos que estão em condições de procriar. Como o número de pares de coelhos que podem dar à luz é igual ao número de pares de coelhos cuja idade é superior ou igual a dois meses, temos que esse número é igual ao número de coelhos que existiam há dois meses. Assim, o número de casais de coelhos que existem num certo mês é a soma do número de casais de coelhos que existiam no mês anterior com o número de casais de coelhos que existiam dois meses antes. Logo, poderemos escrever:

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, n \in \mathbb{N}_0, \text{ com } F_0 = 1 \text{ e } F_1 = 1. \quad (3.29)$$

Trata-se de uma equação às diferenças linear homogénea de segunda ordem com coeficientes constantes e cujo polinómio caraterístico é $f^2 - f - 1$. Calculemos as raízes deste polinómio:

$$f^2 - f - 1 = 0 \Leftrightarrow f = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Utilizando o teorema 3.6, a solução geral de (3.29) é

$$F_n = c_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + c_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n, c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \quad (3.30)$$

Para descobrirmos os valores das constantes c_1, c_2 , utilizaremos as condições iniciais $F_0 = 1$ e $F_1 = 1$. Por $F_0 = 1$ e usando (3.30) vem:

$$1 = c_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^0 + c_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^0 \Leftrightarrow 1 = c_1 + c_2 \Leftrightarrow 1 - c_2 = c_1. \quad (3.31)$$

Usando as equações (3.30), (3.31) e por $F_1 = 1$, temos:

$$1 = (1 - c_2) \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) + c_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) \Leftrightarrow c_2 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2\sqrt{5}}.$$

Substituindo c_2 em (3.31), vem

$$c_1 = \frac{\sqrt{5} + 1}{2\sqrt{5}}.$$

Assim, para as condições iniciais consideradas, a equação (3.30) tomará a forma:

$$F_n = \frac{\sqrt{5} + 1}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \frac{\sqrt{5} - 1}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}.$$

A resposta ao *Problema dos Coelhos* colocado por Fibonacci é o valor de F_{12} e é dada por:

$$F_{12} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{13} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{13} = 233. \quad (3.32)$$

Como tal, respeitando as condições descritas, ao fim de um ano existirão 233 casais de coelhos. A sucessão que é solução deste problema é chamada *sucessão de Fibonacci* e as suas aplicações são inúmeras em Matemática e em outras Ciências.

Exemplo 3.2.2. *Strings de bits com uma certa propriedade*

Uma *string* de *bits* é uma cadeia de algarismos com um certo comprimento em que os algarismos só podem tomar os valores 0 ou 1. Exemplos de *strings* de *bits* são 000101010 e 11100. Em Ciências da Computação é muitas vezes necessário descobrir o número de *strings* de *bits* que satisfazem uma certa propriedade e para resolvermos esse tipo de problemas podemos recorrer às equações às diferenças.

Suponhamos que queremos descobrir quantas *strings* de *bits* de comprimento n não contêm a *string* 11 e designe-se por S_n o número de *strings* de *bits* que estão nessas condições.

Existe apenas uma *string* de *bits* de comprimento 0, a *string* vazia, que obviamente não contém a *string* 11 e, assim, $S_0 = 1$. As *strings* de *bits* de comprimento 1 são, 1 e 0, e nenhuma delas contém a *string* 11. Temos assim, $S_1 = 2$. Se considerarmos as *strings* de *bits* de comprimento 2 teremos: 00, 01, 10 e 11. Três dessas *strings* não contêm a *string* 11 e vem, $S_2 = 3$.

Analisemos o que acontece com as *strings* de *bits* de um certo comprimento n , S_n , que satisfazem a propriedade já mencionada. Cada uma das *strings* de *bits* ou começará pelo algarismo 0 ou principiará pelo algarismo 1. Se a *string* de *bits* começar pelo algarismo 0 e não contiver a *string* 11 então isso significa que os $n - 1$ algarismos à direita do primeiro 0 não contêm a *string* 11, ou seja, o número de *strings* de *bits* de comprimento n que começam

por 0 e que não contêm a *string* 11 é igual ao número de *strings* de *bits* de comprimento $n - 1$ que não contêm a *string* 11, S_{n-1} .

Por outro lado, se considerarmos as *strings* de *bits* de comprimento n que começam por 1 e que satisfazem a propriedade enunciada, descobrimos que para elas não conterem a *string* 11, o segundo algarismo não pode ser 1 e os $n - 2$ algarismos à direita dos dois algarismos iniciais também não poderão conter a *string* 11. Isso significa que o número de *strings* de *bits* de comprimento n que começam por 1 e que não contêm a *string* 11 é igual ao número de *strings* de *bits* de comprimento $n - 2$ que não contêm a *string* 11, ou seja, é o valor de S_{n-2} .

Isso permite-nos escrever a equação às diferenças linear homogénea de segunda ordem com coeficientes constantes:

$$S_{n+2} = S_{n+1} + S_n, n \in \mathbb{N}_0, \text{ com } S_0 = 1 \text{ e } S_1 = 2. \quad (3.33)$$

Repare-se que esta equação é análoga à equação que traduzia o *Problema dos Coelhos*, a equação (3.29) apresentada no exemplo anterior, mudando apenas as condições iniciais. Assim, no presente problema o valor do termo de ordem 1 é 2 e no problema apresentado no exemplo anterior o termo de ordem 1 é 1.

Como tal, usando a solução geral obtida em (3.30) temos:

$$S_n = c_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + c_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n, c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \quad (3.34)$$

As condições iniciais $S_0 = 1$ e $S_1 = 2$ permitem-nos descobrir c_1 e c_2 . Temos: $c_1 = \frac{\sqrt{5}+3}{2\sqrt{5}}$ e $c_2 = \frac{\sqrt{5}-3}{2\sqrt{5}}$.

A solução do nosso problema é:

$$S_n = \frac{5 + 3\sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \frac{5 - 3\sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

Exemplo 3.2.3. *Dízimas infinitas periódicas*

Ao estarmos perante uma dízima infinita periódica cujo período seja um número superior ou igual a 10 e inferior ou igual a 99, poderemos escrever uma equação às diferenças de segunda ordem linear homogénea de coeficientes constantes, para descobrir qual o algarismo que se encontra na n -ésima casa decimal desse número.

Consideremos, por exemplo, o número $\frac{12}{99}$ que pode ser representado pela dízima infinita periódica $0,121212\dots = 0,(12)$ e cujo período é 12. Representemos por A_n o algarismo que se encontra na n -ésima casa decimal de $\frac{12}{99}$. O algarismo que se encontra na primeira casa decimal é 1 e logo, $A_1 = 1$. A segunda casa decimal é 2 e temos $A_2 = 2$. Por outro lado, o algarismo que ocupa uma certa casa decimal é igual ao algarismo que ocupa duas casas decimais à esquerda, ou seja:

$$A_{n+2} = A_n, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3.35)$$

A igualdade (3.35) é uma equação às diferenças de segunda ordem homogénea com coeficientes constantes e o polinómio característico que lhe está associado é $a^2 - 1$. As raízes deste polinómio são -1 e 1 e a solução geral de (3.35) é $A_n = c_1 + c_2(-1)^n$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Como $A_1 = 1$ e $A_2 = 2$ vem, $c_1 = \frac{3}{2}$ e $c_2 = \frac{1}{2}$. Assim, a solução da equação (3.35) é $A_n = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}(-1)^n$ para as condições iniciais consideradas.

Como já foi referido no teorema 3.5, para obtermos a solução geral de uma equação às diferenças linear de segunda ordem completa, deveremos somar à solução geral da equação às diferenças linear de segunda ordem homogénea que lhe está associada, uma solução particular dessa mesma equação. Assim, na determinação da solução geral de uma equação às diferenças lineares de segunda ordem completa com coeficientes constantes falta-nos descobrir uma solução particular de uma equação deste tipo.

Consideremos então uma equação às diferenças linear de segunda ordem completa com coeficientes constantes do tipo:

$$x_{n+2} = ax_{n+1} + bx_n + c. \quad (3.36)$$

Poderemos procurar uma solução particular desta equação, $(x_{p,n})$, $n \in \mathbb{N}_0$, que seja uma sucessão constante. Designemos essa solução por P . Nesse caso, por substituição em (3.36) teremos:

$$P = aP + bP + c. \quad (3.37)$$

De (3.37) verificamos que, se $1 - a - b \neq 0$, então:

$$x_{p,n} = \frac{c}{1 - a - b}, \quad (3.38)$$

é uma solução particular de (3.36).

Se $1 - a - b = 0$, tentemos encontrar uma solução particular, $(x_{p,n})$, $n \in \mathbb{N}_0$, da forma nP , $n \in \mathbb{N}_0$, em que P representa uma constante real. Substituindo em (3.36) vem:

$$(n + 2)P = a(n + 1)P + bnP + c \Leftrightarrow n(1 - a - b)P + 2P - aP = c.$$

Como estamos a supor $1 - a - b = 0$, podemos concluir que neste caso teremos $2P - aP = c$ e, para $a \neq 2$, virá $P = \frac{c}{2 - a}$ e uma solução particular de (3.36) é

$$x_{p,n} = \frac{c}{2 - a}n, \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (3.39)$$

Consideremos agora o caso em que $1 - a - b = 0$ e $a = 2$. Tentemos descobrir uma solução particular, $(x_{p,n})$, $n \in \mathbb{N}_0$, da forma Pn^2 , $n \in \mathbb{N}_0$, em que P representa uma constante real. Utilizando (3.36) temos:

$$(n + 2)^2P = a(n + 1)^2P + bn^2P + c \Leftrightarrow Pn^2(1 - a - b) + Pn(4 - 2a) - P(4 - a) = c.$$

Por $a = 2$ e $1 - a - b = 0$, temos $P = \frac{c}{2}$. Neste caso, poderemos considerar como solução particular,

$$x_{p,n} = \frac{c}{2}n^2, \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (3.40)$$

Por exemplo, em [16] podemos ver como se determinam soluções particulares de outros tipos de equações às diferenças completas.

Exemplo 3.2.4. *O modelo de crescimento do multiplicador-acelerador*

O modelo do crescimento do rendimento “multiplicador-acelerador” tem vindo a ser estudado por muitos economistas, tendo sido apresentado pela primeira vez pelo economista Paul Samuelson (1915-2009). Designemos por:

- Y_n , o Rendimento Nacional no período n ;
- C_n , o Consumo Privado no período n ;
- I_n , o Investimento Total no período n , $n \in \mathbb{N}_0$.

Este modelo afirma que o Rendimento Nacional no período n obtém-se, somando o Consumo Privado com o Investimento Total no período n . Podemos assim escrever:

$$Y_n = C_n + I_n, \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (3.41)$$

Além disso, este modelo assume que o Consumo Privado no período $n + 1$ é proporcional ao Rendimento Nacional obtido no período n . Representemos por a o valor da *propensão marginal do consumo*. Temos:

$$C_{n+1} = aY_n, \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (3.42)$$

As equações (3.41) e (3.42) constituem a parte do “multiplicador” do modelo.

O modelo também afirma que o investimento no período $n + 1$ é função linear da variação do consumo no período anterior. Logo, existem $c, b \in \mathbb{R}$ que verificam:

$$I_{n+1} = c(C_{n+1} - C_n) + b, \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (3.43)$$

A constante c designa-se por *coeficiente de aceleração* e a constante b é o valor do *Investimento autónomo*. O valor $c(C_{n+1} - C_n)$ representa o *Investimento induzido*. A equação (3.43) constitui a parte do “acelerador” do modelo, permitindo-nos concluir que o investimento induzido depende da variação do consumo.

Como as equações (3.41), (3.42) e (3.43) são válidas para $n \in \mathbb{N}_0$, poderemos escrever:

$$Y_{n+2} = C_{n+2} + I_{n+2}, \quad (3.44)$$

$$C_{n+2} = aY_{n+1}, \quad (3.45)$$

$$I_{n+2} = c(C_{n+2} - C_{n+1}) + b. \quad (3.46)$$

Substituindo (3.42) e (3.45) na equação (3.46), vem:

$$I_{n+2} = ac(Y_{n+1} - Y_n) + b. \quad (3.47)$$

Por substituição de (3.47) e de (3.45) na equação (3.44), temos:

$$Y_{n+2} = aY_{n+1} + ac(Y_{n+1} - Y_n) + b \Leftrightarrow Y_{n+2} = a(1 + c)Y_{n+1} - acY_n + b. \quad (3.48)$$

A equação (3.48) é uma equação às diferenças de segunda ordem linear com coeficientes constantes completa. Para determinarmos a sua solução geral, temos de somar uma solução particular de (3.48) com a solução geral da equação homogénea que lhe está associada, sendo esta última:

$$Y_{n+2} = a(1 + c)Y_{n+1} - acY_n. \quad (3.49)$$

Por (3.38) temos que, se $1 - a(1 + c) + ac$ for não nulo, ou seja, se $1 - a$ for diferente de zero, então $Y_{p,n} = \frac{b}{1 - a}$ é uma solução particular de (3.48). Se $1 - a = 0$ e $2 - a - ac \neq 0$, por

(3.39), temos que a solução particular de (3.48) é $Y_{p,n} = \frac{b}{2-a-ac}n$, $n \in \mathbb{N}_0$. No caso em que $1-a=0$ e $2-a-ac=0$, uma solução particular de (3.48) será $Y_{p,n} = \frac{b}{2}n^2$, $n \in \mathbb{N}_0$, pelo que foi referido em (3.40).

Resta-nos descobrir a solução geral da equação homogénea associada a (3.48). Descubramos as raízes do polinómio caraterístico de (3.49):

$$r^2 - a(1+c)r + ac = 0 \Leftrightarrow r = \frac{a(1+c) \pm \sqrt{a^2(1+c)^2 - 4ac}}{2}. \quad (3.50)$$

Pelo teorema 3.6 (página 19) verificamos que a solução geral de (3.49) e as raízes de (3.50) dependem do sinal de $(a^2(1+c)^2 - 4ac)$. Apresentamos em seguida um caso particular, retirado de [19]. Consideremos um modelo económico em equilíbrio num determinado período, tomando como valor inicial para as três variáveis do modelo, o zero. Temos: $Y_0 = 0$, $I_0 = 0$ e $C_0 = 0$. Suponhamos que o Investimento autónomo é 100, que a propensão marginal para o consumo é 0,8 e que o coeficiente de aceleração é 3. Descubramos o modelo que traduz o Rendimento Nacional, Y_n . Usando (3.48), vem:

$$Y_{n+2} = 3,2Y_{n+1} - 2,4Y_n + 100. \quad (3.51)$$

A equação homogénea associada a (3.51) é $Y_{n+2} = 3,2Y_{n+1} - 2,4Y_n$ e o polinómio caraterístico associado a esta equação é $r^2 - 3,2r + 2,4$, cujas raízes são $r = 1,2$ e $r = 2$.

Como o valor a da propensão marginal para o consumo é diferente de zero, temos que, uma solução particular de (3.51) é $Y_{p,n} = \frac{100}{1-0,8} = 500$.

Assim, pelos teoremas 3.5 e 3.6, concluímos que a solução geral de (3.51) é:

$$Y_n = c_1 \times 1,2^n + c_2 \times 2^n + 500, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (3.52)$$

Para o nosso modelo, sabemos que $Y_0 = 0$, $I_0 = 0$ e $C_0 = 0$. Logo, usando (3.42), vem $C_1 = 0$. Por outro lado, usando (3.43), concluímos que $I_1 = 100$. Assim, usando (3.41) concluímos que $Y_1 = C_1 + I_1 = 100$. Os valores $Y_0 = 0$ e $Y_1 = 100$ permitem-nos descobrir os valores de c_1 e de c_2 na equação (3.52). Temos então, $c_1 = -750$ e $c_2 = 250$.

Assim, o modelo que traduz o Rendimento Nacional nas condições referidas é:

$$Y_n = -750 \times 1,2^n + 250 \times 2^n + 500, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Capítulo 4

O problema da ruína do jogador

Neste capítulo, faremos uma síntese histórica relativa à evolução dos jogos ditos de azar e a sua estreita relação com a origem das Probabilidades. Além disso, falaremos de alguns problemas históricos do Cálculo das Probabilidades, problemas esses, relacionados muitas vezes com jogos de dados ou de cartas e que permitiram a génese e o desenvolvimento da Teoria das Probabilidades.

Um desses problemas foi o *Problema da Ruína do Jogador*, proposto pela primeira vez por Blaise Pascal a Fermat, por volta de 1654. Apresentaremos as primeiras versões deste problema e os métodos de resolução que, Fermat, Pascal e Huygens poderão ter seguido, já que, embora se saiba que estes matemáticos chegaram à solução exata deste problema, não existem documentos que apresentem a sua resolução completa.

Determinaremos soluções exatas do problema da ruína do jogador com recurso à modelação através de equações às diferenças e faremos um estudo de outras probabilidades que lhe possam ser associadas. Estudaremos, por exemplo, o caso em que uma das fortunas é ilimitada, a probabilidade de um jogo nunca terminar ou o efeito que o valor do montante inicial pode provocar na probabilidade de um determinado jogador vencer um jogo da ruína.

4.1 Os jogos de azar, a origem das Probabilidades e o problema da ruína do jogador

Nas escavações em túmulos pré-históricos é comum encontrar junto às ossadas, pequenas quantidades de pedras de diferentes cores que poderiam servir como moeda, para contar ou até serem as peças de um jogo de azar. Usualmente, são também encontrados astrágalos de animais, ossos que ligam os pés aos tornozelos. Supõe-se que estes ossos teriam a mesma finalidade das pedras coloridas que são encontradas. No entanto, relativamente às civilizações babilónica, grega, egípcia ou romana, as finalidades da utilização dos astrágalos não são uma mera conjectura, estão devidamente documentadas. Estes povos usavam o osso como uma forma primitiva de dado em muitos dos seus jogos. Aliás, os primeiros dados de forma cúbica que foram encontrados, foram feitos mais tarde, a partir de ossos de animais [14].

Os jogos faziam parte da vida quotidiana das civilizações referidas, servindo para a ocupação de tempos livres e entretenimento. No início da era cristã, o uso de jogos de tabuleiro, de dados, de astrágalos ou de outras peças era vulgar. A ideia de contagem estava firmemente estabelecida mas não a ideia de conceito de número, como a conhecemos hoje, muito menos, a noção do acaso e de aleatoriedade [14, p.12].

Os resultados desses jogos eram atribuídos aos deuses e, muitas vezes, os instrumentos dos jogos de azar serviam também para rituais de adivinhação. Tal facto, fez surgir a necessidade de listar todos os possíveis resultados que surgem, por exemplo, quando se lançam simultaneamente três dados e de associar a cada um desses resultados, uma determinada profecia. No entanto, Cícero (106 a.C.-43 a.C.), na sua obra *De Divinatione* começa a questionar se os resultados de um jogo de azar ou de um ritual de adivinhação, serão mesmo influenciados pelos deuses ou serão apenas fruto do acaso. David [14], citando Cícero, refere:

Nothing is so unpredictable as a throw of the dice, and yet every man who plays often will at some time or other make a venus-cast: now and then indeed he will make it twice and even thrice in succession. Are we going to be so feeble-minded then as to aver that such a thing happened by the personal intervention of Venus rather than by pure luck? [14, p.25]

Com a queda do Império Romano do Ocidente e o desenvolvimento do Cristianismo, o conceito do acaso foi fortemente rejeitado na Europa, pois tudo era controlado por Deus.

A Idade Média correspondeu a um período de estagnação em termos de desenvolvimento matemático na Europa Ocidental, e a um forte período de desenvolvimento na cultura Árabe. Não existem registos de métodos probabilistas durante a Idade Média e a Igreja era contra os jogos de azar porque os associava aos rituais pagãos de adivinhação.

Em 960 d.C., o Bispo Wibold de Cambrai, enumerou corretamente os 56 resultados possíveis, a menos de uma permutação, aquando do lançamento de 3 dados cúbicos numerados de 1 a 6, e no poema em latim, presumivelmente do século XIII, *De Vetula*, são listados os 216 resultados possíveis dessa mesma experiência aleatória [21, p.33].

Em 1350 d.C., surgiu mais um instrumento que permitiu o desenvolvimento, tanto dos jogos de azar como dos rituais de adivinhação, o baralho de cartas, basta pensarmos na sua utilização nos nossos dias, em jogos do quotidiano e na cartomancia. No entanto, os jogos predominantes continuavam a ser os jogos de dados e são esses os jogos que estão associados ao aparecimento dos primeiros métodos probabilistas.

O florescimento dos jogos de azar durante os séculos XV e XVI fez com que os matemáticos começassem a pensar na noção do acaso e na sua possibilidade de matematização. Assim, em 1526, surge o primeiro texto sobre esta temática, *Liber de Ludo Aleae*, escrito por Girolamo Cardano (1501-1576). No entanto, esta obra só seria publicada pela primeira vez em 1663. Nesse livro, o autor que era um inveterado jogador, tece considerações morais e apresenta alguns resultados teóricos sobre os jogos de dados e dá conselhos práticos aos possíveis jogadores. A teoria é apresentada com base em exemplos, e as soluções dos problemas são obtidas pelo método de tentativa e erro, sendo referidas tanto as respostas certas como as incorretas. Existem, no entanto, alguns problemas que não apresentam uma solução correta [21, p.38].

Galileu Galilei (1564-1642) escreveu *Sopra le Scoperte dei Dadi*, um texto em que o matemático, físico e astrónomo, justifica o facto de ser mais provável obter a soma 10 do que a soma 9, quando se efetua a adição dos pontos das faces que ficam voltadas para cima, ao serem lançados três dados cúbicos numerados de 1 a 6. Este texto foi escrito entre 1613 e 1623 e pretendeu dar resposta a um problema que lhe tinha sido colocado por um amigo, que tinha verificado que existiam tantas maneiras de obter a soma 9 como as de obter a soma 10, utilizando três números de 1 a 6. No entanto, ao lançar três dados, esse amigo verificava que a soma 10 saía mais vezes do que a soma 9. O trabalho de Galileu só foi publicado em 1718 e nele, o autor lista os 216 casos possíveis e mostra que 27 desses casos perfazem a soma 10

e apenas 25 deles totalizam um valor de soma igual a 9.

A origem real da Teoria das Probabilidades está relacionada com a correspondência, em 1654, entre Blaise Pascal (1623-1662) e Pierre de Fermat (1601-1665), impulsionada pelos problemas propostos por Antoine Gombaud, também conhecido por Cavaleiro De Méré, famoso jogador profissional da época. As sete cartas conhecidas, que compõem a correspondência entre estes dois matemáticos, contêm essencialmente informações acerca daquele que é conhecido como o *problema da divisão da aposta*, ou o *problema dos pontos*, proposto por Méré. No problema são referidos dois jogadores que possuem cada um 32 pistolas e que jogam um determinado jogo, no qual é declarado vencedor aquele que primeiro perfizer 3 pontos, ficando nesse caso, o jogador vencedor com o total de 64 pistolas. Pretende-se descobrir a maneira como se deve repartir de forma equitativa as pistolas, caso o jogo, por alguma razão, tenha de terminar antes que qualquer um dos jogadores tenha obtido os 3 pontos. A solução do referido problema, bem como dois resultados mais gerais, podem ser encontradas em Todhunter [47, p.9-10].

Nestas cartas entre Pascal e Fermat, que só viriam a ser publicadas em 1679, encontramos também referências ao que hoje conhecemos como *Triângulo de Pascal* e ao que atualmente chamamos de *Cálculo Combinatório*. Em 1654, Pascal escreveu *Traité du triangle arithmétique*, o tratado que apresentava as principais propriedades do *Triângulo de Pascal* mas que só viria a ser publicado em 1665.

Pascal e Fermat trocaram também informações acerca de um problema que passou a ser conhecido como o *problema da ruína do jogador*. Na carta que Carcavi (1600-1684) dirige a Huygens (1629-1695), em 28 de Setembro de 1656, este matemático refere um problema que Pascal teria enviado a Fermat e que dizia ser mais difícil que todos os que já lhe havia colocado.

O problema é o seguinte: dois jogadores, A e B , efetuam um jogo lançando três dados (sendo o dado lançado por uma terceira pessoa). O jogador A obterá um ponto se perfizer uma soma de 11 pontos no lançamento dos 3 dados e se o seu parceiro B não tiver quaisquer pontos. Caso o jogador A obtenha uma soma de 11 pontos no lançamento dos dados e o seu adversário tiver uma pontuação não nula, o jogador A não verá a sua pontuação aumentar mas será subtraído um ponto ao jogador B . O jogador B verá a sua pontuação aumentar em 1 unidade se a soma do lançamento dos 3 dados perfizer 14 e se o seu adversário, A , não tiver pontuação. Caso o jogador B obtenha 14 pontos e o jogador A tenha um valor não nulo

de pontuação, então o jogador B continuará com a mesma pontuação e ao jogador A será subtraído um ponto. Vencerá o jogador que obtiver 12 pontos e pretendia-se descobrir a razão entre o número de hipóteses do jogador A e o número de hipóteses do jogador B vencer o jogo.

Por exemplo, se o jogador A tiver 5 pontos e o jogador B tiver 6 pontos e se, ao serem lançados os três dados se obtiver a soma de 11 pontos, então, o jogador A continuará com 5 pontos e o jogador B passará a ter 5 pontos. No caso do jogador A ter 0 pontos e o jogador B tiver 6 pontos e se a soma obtida no lançamento dos três dados for 14, então, o jogador A continuará com 0 pontos e o jogador B passará a ter 7 pontos.

Carcavi refere que Pascal duvidava que Fermat conseguisse obter uma solução mas Fermat ter-lhe-á enviado uma resposta rapidamente, tendo os dois matemáticos chegado a uma solução correta usando métodos diferentes [8, p.13].

Na carta que Huygens escreve a Carcavi em 12 de Outubro de 1656, Huygens refere um problema equivalente ao que lhe havia sido referido por Carcavi, mas que este considera mais simples de compreender. Assim, a proposta de Huygens, refere que ambos os jogadores continuariam a efetuar partidas com três dados e a somar os números das faces que ficaram voltadas para cima. O jogador A ganharia um ponto sempre que obtivesse a soma de 11 pontos, ao lançar os 3 dados, e o jogador B obteria um ponto ao obter uma soma de 14 pontos. O vencedor será o jogador que obtenha uma vantagem de 12 pontos sobre o seu adversário. Nesta carta, Huygens apresenta também a solução do problema mas afirma que a demonstração é um pouco longa para ser apresentada naquela missiva.

O primeiro livro publicado sobre Cálculo de Probabilidades, *De Ratiociniis in Ludo Aleae*, surgiu em 1657, de Christiaan Huygens. No final desta obra, o autor apresenta 5 problemas para o leitor resolver, sendo um deles, o problema da ruína do jogador. No entanto, Huygens não fez qualquer referência a Pascal, o que fez com que a autoria deste problema estivesse muitos anos relacionada com Huygens e não com o seu autor verdadeiro, Blaise Pascal. O verdadeiro autor só seria revelado em 1888, com a publicação da correspondência de Huygens. No entanto, a publicação desta correspondência aconteceu depois da publicação de dois livros, que foram (e são) obras fundamentais da História das Probabilidades, *Histoire du calcul des probabilités depuis ses origines jusqu'à nos jours*, por Charles Gouraud em 1848 e *History of the Mathematical Theory of Probability from the Time of Pascal to that of Laplace* por Todhunter em 1865, o que contribuiu para que o nome de Pascal continuasse isolado do

problema da ruína do jogador [15, p.13-14].

Hald [21] apresenta o problema, como foi proposto por Huygens, sendo esta versão diferente das duas já referenciadas:

A and B each having 12 counters play with tree dice on the condition that if 11 points are thrown, A gives a counter to B and if 14 points are thrown, B gives a counter to A and that he wins the play who first has all the counters. Here it is found that the number of chances of A to that of B is 244 140 625 to 282 429 536 481. [21, p.76]

Verificamos assim que nesta versão⁽¹⁾, os jogadores começam o jogo com 12 pontos cada e que ganharão um ponto do seu adversário quando perfizerem a soma de 11 ou 14 pontos e que o jogo terminará quando um deles ficar sem pontos, quando ficar na ruína.

Huygens não apresenta a resolução do problema no seu livro, indica a solução e deixa a demonstração ao cuidado do leitor. Também não existem dados acerca da forma como Pascal e Fermat conseguiram resolver este problema, só sabemos, pela correspondência de Carcavi e Huygens, que utilizaram métodos de resolução diferentes. No entanto, Edwards [15], afirma que, a forma como Fermat e Pascal resolveram o problema da divisão da aposta, na sua correspondência em 1654, poderá dar-nos indicações acerca dos seus métodos de resolução do problema da ruína do jogador. Seguiremos de uma forma muito próxima o artigo de Edwards [15], para apresentar as possíveis resoluções de Pascal, Fermat e Huygens.

Pascal introduziu as equações às diferenças como processo de resolução de um problema de Probabilidades e deve ter sido esse, um dos seus processos de resolução do problema da ruína do jogador. Pascal deve ter utilizado o valor esperado de ganho⁽²⁾ do jogo para resolver o problema da ruína do jogador, tal como fez com o problema da divisão da aposta. Consideremos o problema inicial proposto por Blaise Pascal e designemos por $E(a, b)$, o valor esperado de ganho do jogador A , sabendo que o jogador A tem a pontos e o seu adversário tem b pontos e representaremos por (a, b) a pontuação dos jogadores A e B nessas condições.

⁽¹⁾ Note-se que nesta versão, o jogador referenciado por A , obtém pontuação se a soma dos pontos dos 3 dados for 14. No entanto, sem perda de generalidade e tal como foi referido nas outras duas versões, iremos referenciar por A o jogador que obterá pontuação se a soma dos pontos dos 3 dados for 11.

⁽²⁾ O valor esperado de Pascal era restrito aos ganhos, isto é, igual ao produto da probabilidade do jogador vencer o jogo pelo valor do montante em jogo.

Designa-se por p , a probabilidade do jogador A vencer uma partida e por q , a probabilidade do jogador B vencer essa mesma partida. Suponhamos, por conveniência⁽³⁾, que o total em jogo é 1. Tem-se:

$$E(a, b) = pE(a + 1, b) + qE(a, b + 1), \quad (4.1)$$

com,

$$E(a, b) = \begin{cases} E(a - b, 0) & \text{se } a \geq b \\ E(0, b - a) & \text{se } a < b \end{cases}, \quad E(12, 0) = 1, \quad E(0, 12) = 0. \quad (4.2)$$

Se o jogador A , por exemplo, conseguir obter uma vantagem de 23 pontos sobre o seu adversário, de certeza que ganhará o jogo, pois esse é o número de pontos necessário para passar do resultado que lhe é mais desfavorável (sem o jogo ter terminado), $(0, 11)$, para uma situação em que é o vencedor do jogo, $(12, 0)$. Dado um determinado resultado, (a, b) , a vantagem de pontos que o jogador A precisa de ter sobre o seu adversário para vencer o jogo, depende dos pontos que tem e dos pontos que o jogador B possui. Assim, para o resultado (a, b) , o jogador A precisaria de obter uma vantagem de $b + 12 - a$ pontos para conseguir vencer o jogo, sem que antes o jogador B consiga obter uma vantagem de $a + 12 - b$ pontos. Por exemplo, o valor esperado de ganho do jogador A quando tem 5 pontos e o seu adversário tem 6 pontos, $E(5, 6)$, é igual ao valor esperado de ganho do jogador A , sempre que o jogador A tem menos um ponto que o seu adversário B . Tem-se, por exemplo, $E(5, 6) = E(6, 7) = E(3, 4)$.

De uma forma geral, com $a, b, f \in \{0, 1, 2, \dots, 12\}$, temos:

$$E(a, b) = E(a + f, b + f), \quad 0 < |f - a| \leq 12 \quad \text{e} \quad 0 < |f - b| \leq 12. \quad (4.3)$$

Assim, para determinarmos os valores de $E(a, b)$, com $a, b \in \{0, 1, 2, \dots, 12\}$, basta determinarmos os valores esperados dos 25 jogos cujos resultados são $(0, 0); (0, 1); (0, 2); \dots; (0, 12)$ ou $(1, 0); (2, 0); \dots; (12, 0)$, pois neste conjunto de jogos estão representados todas as diferenças possíveis entre as pontuações dos jogadores A e B .

Limitemos então os nossos resultados aos 25 que acabámos de listar e definamos por E_c , o valor esperado de ganho do jogador A sabendo que ao jogador B , lhe faltam c pontos para vencer o jogo. Temos:

$$\begin{aligned} E(0, 12) &= E_0; \quad E(0, 11) = E_1; \quad \dots, \quad E(0, 0) = E_{12}; \\ E(1, 0) &= E_{13}; \quad E(2, 0) = E_{14}; \quad \dots; \quad E(12, 0) = E_{24}. \end{aligned}$$

⁽³⁾ Neste caso particular, o valor esperado de ganho do jogador A é igual à probabilidade de ser o vencedor do jogo.

Utilizando (4.1), Pascal terá escrito 25 equações com 25 variáveis e a resolução do problema da ruína do jogador passava por descobrir a solução de E_{12} , pois ambos os jogadores começavam o jogo com 0 pontos. Temos então:

$$\begin{aligned} E_0 = 0, \quad E_1 &= pE_2 + qE_0, \\ E_2 &= pE_3 + qE_1, \dots, E_{23} = pE_{24} + qE_{22}, \quad E_{24} = 1. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Pascal não conhecia os métodos para resolver uma equação às diferenças de segunda ordem linear homogénea, por isso, Edwards [15], crê que este matemático deve ter utilizado um método similar ao que utilizou para somar potências de inteiros, e que é possível encontrar em *Traité du triangle arithmétique*. Para isso, as 25 equações apresentadas em (4.4) são substituídas por outras equações equivalentes, de tal forma que, quando forem somadas, membro a membro, alguns dos seus termos se anularão. Para tal, como $p + q = 1$, Pascal terá substituído nas equações (4.4), E_1 por $pE_1 + qE_1$, E_2 por $pE_2 + qE_2$ e assim sucessivamente e terá reordenado essas equações, ficando com:

$$\begin{aligned} pE_2 - pE_1 &= qE_1 - qE_0, \quad pE_3 - pE_2 = qE_2 - qE_1, \\ pE_4 - pE_3 &= qE_3 - qE_2, \quad \dots, \quad pE_m - pE_{m-1} = qE_{m-1} - qE_{m-2}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Ao somarmos as equações (4.5), membro a membro, teremos uma equação às diferenças de primeira ordem homogénea:

$$pE_m - pE_1 = qE_{m-1}. \quad (4.6)$$

A equação (4.6) pode ser resolvida iterativamente:

$$\begin{aligned} E_m &= \frac{q}{p}E_{m-1} + E_1 \\ &= \left[\left(\frac{q}{p}\right)^{m-1} + \left(\frac{q}{p}\right)^{m-2} + \dots + \left(\frac{q}{p}\right)^2 + \frac{q}{p} + 1 \right] E_1 \\ &= \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^m}{1 - \frac{q}{p}} E_1. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Por $E_{24} = 1$ vem:

$$1 = \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{24}}{1 - \frac{q}{p}} E_1 \Leftrightarrow E_1 = \frac{1 - \frac{q}{p}}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{24}}, \quad (4.8)$$

e teremos,

$$E_m = \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^m}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{24}}, \quad m \in \{0, 1, 2, \dots, 24\}. \quad (4.9)$$

Respondendo à questão colocada por Pascal, temos que, a razão entre o número de hipóteses do jogador A e o número de hipóteses do jogador B ganhar o jogo é:

$$\frac{E_{12}}{1 - E_{12}} = \frac{\frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{12}}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{24}}}{1 - \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{12}}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{24}}} = \frac{\frac{1}{1 + \left(\frac{q}{p}\right)^{12}}}{1 - \frac{1}{1 + \left(\frac{q}{p}\right)^{12}}} = \frac{p^{12}}{q^{12}}. \quad (4.10)$$

Ao lançarmos 3 dados, existem 27 formas diferentes de obtermos a soma 11 e existem 15 maneiras diferentes de obtermos a soma 14. A solução do problema da ruína do jogador, apresentada por Pascal, revela o facto do matemático não ter simplificado a fração $\frac{27}{15}$, tem-se:

$$\frac{150\ 094\ 635\ 296\ 999\ 122}{129\ 746\ 337\ 890\ 625} = \frac{27^{12}}{15^{12}}. \quad (4.11)$$

A complexidade do método utilizado por Pascal poderá ter levado a que este suspeitasse que Fermat não conseguiria obter uma solução para o Problema que lhe havia proposto. No entanto, poderá também ter ofuscado uma busca por uma resolução mais simples, como aquela que Fermat deve ter encontrado.

A correspondência entre Carcavi e Huygens informa-nos que Fermat seguiu outro caminho. Tal como fez com o Problema dos Pontos, Fermat deve ter começado por pensar no número máximo de partidas necessário para que o jogo termine e deve ter descoberto que o jogo poderia prosseguir indefinidamente. Em seguida, deve ter analisado o número mínimo de partidas necessário para apurar um jogador e verificado que esse valor era 12. A probabilidade do jogador A vencer 12 partidas consecutivas é p^{12} e a probabilidade do jogador B ganhar 12 partidas consecutivas é q^{12} . Logo, nesse caso, a razão entre o número de hipóteses de A vencer e o número de hipóteses de B ganhar o jogo é $\frac{p^{12}}{q^{12}}$. O jogo mais curto seguinte demora 14 partidas, um jogador vence 13 delas e o outro apenas uma delas. Neste caso, o

valor da razão que se pretende calcular é:

$$\frac{12p^{13}q}{12pq^{13}} = \frac{p^{12}}{q^{12}}.$$

Fermat deve ter observado que, qualquer que seja o número m de partidas que se considere até que um dos jogadores ganhe o jogo, este número tem de ser par e o número de jogos que existem com esse número de partidas m em que vence o jogador A é igual ao número de jogos com m partidas em que o vencedor é o jogador B . Logo, a razão entre o número de hipóteses de A vencer e o número de hipóteses de B ganhar o jogo poderia ser escrita como,

$$\frac{p^{12+\frac{m-12}{2}} q^{\frac{m-12}{2}}}{q^{12+\frac{m-12}{2}} p^{\frac{m-12}{2}}} = \frac{p^{12}}{q^{12}}. \quad (4.12)$$

Substituindo $\frac{p}{q}$ por $\frac{9}{5}$ e possivelmente utilizando logaritmos, Fermat conseguiu achar a solução do problema da ruína do jogador, tal como lhe havia sido proposto por Pascal.

Como referimos, Huygens, no seu livro *De Ratiociniis in Ludo Aleae*, deixa ao cuidado do leitor a resolução da sua versão do problema da ruína do jogador, apresentando-lhe apenas o resultado final. Na carta que Huygens escreveu a Carcavi em 12 de Outubro de 1656, este matemático refere apenas que usou álgebra e o método do valor esperado para resolver o problema, referindo, no entanto, que Blaise Pascal não simplificou a fração $\frac{27}{15}$ e apresenta soluções de problemas similares, em que a razão $\frac{9}{5}$ é substituída por $\frac{13}{10}$ ou por $\frac{17}{13}$, ou em que o vencedor é o jogador que obtiver 10 pontos de avanço.

Em 1676, Huygens descreve um método de resolução do problema, numa folha cujo título pode ser traduzido para “O último problema proposto em De ratiociniis; proposto há algum tempo por Pascal”. Huygens considera a sua primeira versão do problema, aquela que não foi publicada, em que o vencedor é o jogador que obtém um avanço de 12 pontos sobre o seu adversário. Para resolver o problema, começa por resolver um idêntico, em que o vencedor é aquele que obtém um avanço de dois pontos. Para tal, Huygens apresenta 5 equações correspondentes ao problema, idênticas às que apresentámos em (4.5), considerando:

$$E(0, 2) = E_0; E(0, 1) = E_1; E(0, 0) = E_2; E(1, 0) = E_3; E(2, 0) = E_4.$$

O objetivo é descobrir o valor de E_2 e Huygens descobre que a solução do problema, considerando um avanço de dois pontos é $\frac{p^2}{q^2}$. De referir, que é nesta resolução que encontramos o primeiro registo da resolução de um problema utilizando um *diagrama em árvore*.

Em seguida, Huygens procura a solução para o problema em que o vencedor é aquele que consegue ter um avanço de 4 pontos sobre o seu adversário. Conclui que, para o avanço de 4 pontos a solução do problema será o quadrado da solução encontrada para um avanço de dois pontos, ou seja, $\frac{(p^2)^2}{(q^2)^2} = \frac{p^4}{q^4}$. Os motivos que levaram Huygens a tirar esta conclusão não são claros, pois o matemático não apresenta uma explicação. De forma análoga, Huygens refere que a solução do problema para um avanço de 8 pontos será o quadrado da solução obtida para um avanço de 4 pontos, ou seja, será, $\frac{p^8}{q^8}$. Assim, para encontrar a solução do problema da ruína do jogador, tal e qual, como havia sido proposto, com o vencedor a ser o jogador que consiga obter um avanço de 12 pontos, basta encontrar a solução do problema para um avanço de 3 pontos e elevá-la à quarta. Huygens consegue concluir que a solução do problema para um avanço de três pontos é $\frac{p^3}{q^3}$ e logo, a solução para uma avanço de seis pontos é $(p^3q^{-3})^2 = p^6q^{-6}$ e, a solução para o problema original é $(p^6q^{-6})^2 = p^{12}q^{-12}$. Além disso, Huygens conclui que para um avanço de n pontos, a solução do problema será p^nq^{-n} .

Entre os textos escritos por Huygens, foi possível reconhecer, pelo seu tipo de letra, uma solução de Johannes Hudde (1628-1704), do problema da ruína do jogador, em que este matemático resolve por substituição as equações (4.5), para os casos em que os jogadores começam com 1, 2 e 3 pontos cada. Jakob Bernoulli (1654-1705) escreveu *Ars Conjectandi* entre 1684 e 1689, obra que só viria a ser publicada em 1713, oito anos após a sua morte. Nesta obra, Bernoulli apresenta a solução de Hudde, para os casos em que os jogadores têm 2 ou 3 pontos e generaliza o problema para um avanço de n pontos, apresentando a solução p^nq^{-n} , afirmando que a sua prova poderá ser feita por indução matemática, mas não a apresentando ao leitor. Esta generalização é inclusivamente justificada de forma errada, pois Bernoulli confunde a probabilidade de ganhar o jogo, com a probabilidade de ganhar o jogo no n -ésimo lançamento dos dados. Bernoulli apresenta também uma solução do problema da ruína do jogador, no caso em que o jogador começa com m pontos e o jogador B começa com n pontos:

$$\frac{p^n(p^m - q^m)}{q^m(p^n - q^n)}. \quad (4.13)$$

Bernoulli não apresenta a demonstração deste resultado em *Ars Conjectandi*, deixando-a ao cuidado do leitor. Não se sabe quem foi o primeiro matemático a ter chegado a esta generalização, se Jakob Bernoulli, se Abraham de Moivre (1667-1754). Nicholas Bernoulli, sobrinho de Jakob Bernoulli, e que preparou *Ars Conjectandi* para ser publicado, refere este resultado numa carta de 1711, dirigida a Montmort (1678-1719). No entanto, este resultado foi publicado pela primeira vez em 1712, no tratado *De Mensura Sortis*, de De Moivre [15].

Thatcher [46], explica a demonstração apresentada por De Moivre e refere que esta prova, apesar de ser muito mais engenhosa e curta, é preterida em relação à resolução do problema da ruína do jogador que utiliza equações às diferenças. Iremos basearmo-nos em Thatcher [46] e em Hald [21], para apresentarmos a solução de De Moivre.

Imaginemos que o jogador A tem uma pilha de m moedas e que o jogador B possui uma pilha de n moedas. Vamos supor que cada moeda dos jogadores tem um determinado valor. Assim, a moeda do fundo da pilha do jogador A vale $\frac{q}{p}$, a moeda seguinte vale $\frac{q^2}{p^2}$ e, assim sucessivamente, até chegarmos à moeda do topo, com um valor de $\frac{q^m}{p^m}$. A moeda do topo da pilha do jogador B vale $\frac{q^{m+1}}{p^{m+1}}$, a segunda moeda a contar do topo tem um valor de $\frac{q^{m+2}}{p^{m+2}}$ e assim sucessivamente, até chegarmos à moeda do fundo da pilha do jogador B que tem um valor de $\frac{q^{m+n}}{p^{m+n}}$.

Em cada partida, um jogador apostará a moeda do topo da sua pilha podendo ocorrer dois acontecimentos: perde a partida e a sua pilha passará a ter menos uma moeda ou, ganha a partida e a moeda do seu adversário, passando a estar no topo da sua pilha a moeda que acabou de ganhar. Repare-se que na primeira partida, o jogador A apostará a sua moeda que tem o valor $\frac{q^m}{p^m}$ e o seu adversário apostará a moeda que tem o valor $\frac{q^{m+1}}{p^{m+1}}$. Se o jogador A vencer, na partida seguinte usará a moeda de valor $\frac{q^{m+1}}{p^{m+1}}$ e o jogador B , usará a moeda de valor $\frac{q^{m+2}}{p^{m+2}}$. Caso o jogador A perca a primeira partida, na segunda partida usará a moeda de valor $\frac{q^{m-1}}{p^{m-1}}$ e o seu adversário apostará a moeda de valor $\frac{q^m}{p^m}$. Em qualquer partida, serão apostadas duas moedas cuja numeração é consecutiva na ordem que foi estabelecida para as duas pilhas. Mais, se numa partida o jogador A apostar uma moeda de valor $\frac{q^x}{p^x}$ então o jogador B apostará a moeda de valor $\frac{q^{x+1}}{p^{x+1}}$.

Assim, podemos concluir que o valor esperado de ganho do jogador A em cada partida é $p\frac{q^{x+1}}{p^{x+1}} - q\frac{q^x}{p^x} = 0$. De forma análoga, se conclui que o valor esperado de ganho do jogador B em cada partida também é nulo. Como o valor esperado de ganho do jogador A é igual ao valor esperado de ganho do jogador B em cada partida, então o valor esperado de ganho do jogo é igual para ambos os jogadores. Representando por \mathbb{P}_A , a probabilidade do jogador A vencer o jogo e por \mathbb{P}_B , a probabilidade do jogador B ganhar o jogo, temos:

$$\mathbb{P}_A \left[\left(\frac{q}{p}\right)^{m+1} + \cdots + \left(\frac{q}{p}\right)^{m+n} \right] = \mathbb{P}_B \left[\left(\frac{q}{p}\right) + \cdots + \left(\frac{q}{p}\right)^m \right]. \quad (4.14)$$

Assumindo que $\mathbb{P}_A + \mathbb{P}_B = 1$, vem:

$$\mathbb{P}_A = \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^m}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{m+n}}. \quad (4.15)$$

Nicolas Struyck (1687-1769) publicou em 1716, *Calculation of the Chances in Play, by means of Arithmetic and Algebra, together with a Treatise on Lotteries and Interest*. Neste livro, Struyck apresenta soluções para os 5 problemas propostos por Huygens em *De Ratiociniis in Ludo Aleae* e também demonstra alguns resultados, que constituem generalizações dos 5 problemas referenciados. Assim, Struyck é o primeiro matemático a publicar uma prova completa baseada nas equações às diferenças, da generalização do problema da ruína do jogador, podendo os 2 jogadores possuir inicialmente quaisquer quantias de dinheiro, iguais ou diferentes. Apresentamos a solução de Struyck referida por Hald [21, p.203]. Esta solução é muito similar à possível resolução de Pascal, referida por Edwards [15] e já apresentada na página 36 do presente trabalho.

Suponhamos então que o jogador possui m moedas e que o jogador B tem n moedas inicialmente. Designemos por $e(x)$ o valor esperado de ganho do jogador A quando tem x moedas, por p a probabilidade do jogador A vencer uma partida e por q a probabilidade do jogador B ganhar uma partida. Temos $e(0) = 0$ e novamente por conveniência (tal como na solução de Pascal), Struyck considerou $e(m+n) = 1$. Podemos escrever a seguinte equação às diferenças linear de segunda ordem com coeficientes constantes:

$$e(x) = pe(x+1) + qe(x-1), \quad x = 1, 2, \dots, m+n. \quad (4.16)$$

A equação (4.16) pode ser escrita na forma:

$$pe(x+1) = (p+q)e(x) - qe(x-1). \quad (4.17)$$

Dividindo ambos os membros de (4.17) por p ($p \neq 0$), teremos:

$$e(x+1) - e(x) = \frac{q}{p} [e(x) - e(x-1)]. \quad (4.18)$$

Desenvolvendo iterativamente o segundo membro de (4.18), vem:

$$e(x+1) - e(x) = \left(\frac{q}{p}\right)^x e(1). \quad (4.19)$$

Utilizando (4.19) e por

$$e(m) = [e(m) - e(m-1)] + [e(m-1) - e(m-2)] + \dots + [e(1) - e(0)],$$

temos que a probabilidade do jogador A vencer o jogo, dada a sua quantia inicial m de moedas, $e(m)$, é:

$$e(m) = \sum_{x=0}^{m-1} \left[\left(\frac{q}{p} \right)^x e(1) \right] = \frac{\left[1 - \left(\frac{q}{p} \right)^m \right] e(1)}{1 - \frac{q}{p}}. \quad (4.20)$$

Utilizando (4.20) e por $e(m+n) = 1$, teremos:

$$e(1) = \frac{1 - \frac{q}{p}}{1 - \left(\frac{q}{p} \right)^{m+n}} \quad \text{e} \quad e(m) = \frac{1 - \left(\frac{q}{p} \right)^m}{1 - \left(\frac{q}{p} \right)^{m+n}}. \quad (4.21)$$

Hald [21] refere que Nicholas Bernoulli numa carta a Montmort, em Fevereiro de 1711, determina a probabilidade de um jogador vencer o jogo associado ao problema da ruína do jogador ao fim de n jogos e resolve o problema publicado por Huygens, fazendo tender o valor de n para infinito. De referir, que o cálculo da probabilidade do jogo associado ao problema da ruína do jogador terminar em exactamente n partidas deu origem a outro grande problema da História das Probabilidades, o *Problema da Duração do Jogo*.

4.2 Modelação do problema da ruína do jogador

Na secção anterior vimos várias versões do problema da ruína do jogador e algumas formas de o resolver. A solução do problema da ruína do jogador pode também ser calculada utilizando equações às diferenças lineares de segunda ordem com coeficiente constantes. Na elaboração da presente secção baseámo-nos em [18] e [33].

Suponhamos então que dois jogadores, A e B , têm uma certa quantidade de dinheiro, que pode ou não ser igual, e que jogam um jogo dividido em partidas. Em cada partida, o jogador A ganha com probabilidade p , recebendo um euro do jogador B , ou perde com probabilidade $q = 1 - p$, pagando um euro ao jogador B . O jogo terminará quando um dos jogadores ficar sem dinheiro. Pretende-se determinar a probabilidade de cada jogador ganhar o jogo.

Consideremos que \mathbb{P}_a representa a probabilidade do jogador A ganhar o jogo tendo $a \in \mathbb{N}$ e que b representa o montante em euros em posse do jogador B . Pelas condições já enunciadas, o jogo terminará quando um dos jogadores tiver $n = a + b$ euros. Obviamente, se $p = 0$ ter-se-á $\mathbb{P}_a = 0$, $a \in \mathbb{N}$ e se $q = 0$, teremos $\mathbb{P}_a = 1$, $a \in \mathbb{N}$. Suponhamos então que $p \neq 0$ e $q \neq 0$. Se o jogador A tiver $a \in \mathbb{N}$ e jogar uma partida, podem ocorrer dois acontecimentos distintos:

- ganha a partida em causa, com uma probabilidade p e fica com $(a + 1)\epsilon$ ou,
- perde-a, com uma probabilidade $q = 1 - p$ e fica com $(a - 1)\epsilon$.

Estes dois acontecimentos são disjuntos e, recorrendo ao Teorema da Probabilidade Total, temos:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_a &= \mathbb{P}[\text{ganhar o jogo tendo } a \text{ euros e ganhar a próxima partida}] \\ &\quad + \mathbb{P}[\text{ganhar o jogo tendo } a \text{ euros e perder a próxima partida}] = \\ &= \mathbb{P}[\text{ganhar o jogo tendo } a \text{ euros} | \text{ganhar a próxima partida}] \times \\ &\quad \mathbb{P}[\text{ganhar a próxima partida}] + \\ &\quad \mathbb{P}[\text{ganhar o jogo tendo } a \text{ euros} | \text{perder a próxima partida}] \times \\ &\quad \mathbb{P}[\text{perder a próxima partida}]. \end{aligned}$$

Esta equação pode ser escrita na forma:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_a &= p \mathbb{P}_{a+1} + q \mathbb{P}_{a-1} \Leftrightarrow \\ \mathbb{P}_{a+1} &= \frac{1}{p} \mathbb{P}_a - \frac{q}{p} \mathbb{P}_{a-1}, \quad 0 < a < n, \quad 0 < p < 1. \end{aligned} \quad (4.22)$$

A equação (4.22) é uma equação às diferenças linear de segunda ordem homogénea com coeficientes constantes. Para encontrarmos a solução da equação (4.22), temos que descobrir as raízes r do polinómio característico associado a essa equação:

$$r^2 - \frac{1}{p}r + \frac{q}{p} = 0 \Leftrightarrow pr^2 - r + q = 0.$$

Temos então:

$$\begin{aligned} r &= \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4pq}}{2p} = \frac{(p + q) \pm \sqrt{(p + q)^2 - 4pq}}{2p} \\ &= \frac{(p + q) \pm \sqrt{(p - q)^2}}{2p} = \frac{(p + q) \pm |p - q|}{2p}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

No caso em que $p \neq q$, o polinómio característico associado a (4.22) admite duas raízes reais, $r = 1$ e $r = \frac{q}{p}$. Pelo teorema 3.6 (na página 19), temos que a solução geral de (4.22) é:

$$\mathbb{P}_a = c_1 \times 1^a + c_2 \times \left(\frac{q}{p}\right)^a = c_1 + c_2 \times \left(\frac{q}{p}\right)^a, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq a \leq n. \quad (4.24)$$

Pelas condições definidas no nosso problema, sabemos que se o jogador A não tiver dinheiro após um certo número de partidas jogadas, isso significa que o jogo já terminou e que

o jogador A perdeu o jogo. Temos então que, $\mathbb{P}_0 = 0$. Se após um certo número de partidas, o jogador A tiver uma quantidade de dinheiro igual à soma do seu dinheiro inicial com o dinheiro do seu adversário, tal significa que o jogo acabou e que o jogador A venceu o jogo. Logo, $\mathbb{P}_n = 1$. As condições $\mathbb{P}_0 = 0$ e $\mathbb{P}_n = 1$ são chamadas *condições de fronteira* do nosso problema e, conjuntamente com a solução geral (4.24), permitem-nos descobrir a sua solução particular. Temos assim, para o caso em que $p \neq q$:

$$\begin{cases} \mathbb{P}_0 = 0 \\ \mathbb{P}_n = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 \times \left(\frac{q}{p}\right)^0 = 0 \\ c_1 + c_2 \times \left(\frac{q}{p}\right)^n = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = -\frac{1}{-1 + \left(\frac{q}{p}\right)^n} \\ c_2 = \frac{1}{-1 + \left(\frac{q}{p}\right)^n} \end{cases}.$$

Substituindo os valores de c_1 e de c_2 em (4.24), e lembrando que $n = a + b$, vem:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_a &= -\frac{1}{-1 + \left(\frac{q}{p}\right)^n} + \frac{1}{-1 + \left(\frac{q}{p}\right)^n} \times \left(\frac{q}{p}\right)^a = \frac{-1 + \left(\frac{q}{p}\right)^a}{-1 + \left(\frac{q}{p}\right)^n} \\ &= \frac{q^a p^b - p^n}{q^n - p^n}, \quad 0 \leq a \leq n. \end{aligned} \quad (4.25)$$

No caso em que $p = q$, por (4.23), o polinómio caraterístico associado a (4.22), admite uma raiz dupla, $r = 1$. Assim, pelo teorema 3.6, temos que a solução geral de (4.22) é:

$$\mathbb{P}_a = c_1 \times 1^a + ac_2 \times 1^a = c_1 + ac_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq a \leq n. \quad (4.26)$$

Utilizando as condições de fronteira, $\mathbb{P}_0 = 0$ e $\mathbb{P}_n = 1$, podemos determinar o valor de c_1 e de c_2 :

$$\begin{cases} \mathbb{P}_0 = 0 \\ \mathbb{P}_n = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_1 + nc_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = \frac{1}{n} \end{cases}.$$

Logo, para $p = q$ e por (4.26), vem:

$$\mathbb{P}_a = \frac{a}{n}, \quad 0 \leq a \leq n. \quad (4.27)$$

Resumindo, considerando $p \neq 0$ e $q \neq 0$, temos com $n = a + b$:

$$\mathbb{P}_a = \begin{cases} \frac{a}{a+b} & \text{se } p = \frac{1}{2} \\ \frac{q^a p^b - p^n}{q^n - p^n} & \text{se } p \neq \frac{1}{2} \end{cases}, \quad 0 \leq a \leq n. \quad (4.28)$$

De forma análoga, poderíamos determinar a probabilidade, \mathbb{P}_b , do jogador B vencer o jogo tendo b euros, e viria:

$$\mathbb{P}_b = \begin{cases} \frac{b}{a+b} & \text{se } q = \frac{1}{2} \\ \frac{p^b q^a - q^n}{p^n - q^n} & \text{se } q \neq \frac{1}{2} \end{cases}, \quad 0 \leq a \leq n. \quad (4.29)$$

4.2.1 Probabilidade do jogo da ruína nunca acabar

Os resultados (4.28) e (4.29) permitem-nos concluir que a probabilidade do jogo continuar empatado (sem um vencedor) para sempre é 0, pois em qualquer jogo, um dos jogadores, A ou B , é vencedor e, como tal, o jogo terminará com a ruína de um desses jogadores. De facto, se $p = 0,5$ teremos:

$$\mathbb{P}_a + \mathbb{P}_b = \frac{b}{a+b} + \frac{a}{a+b} = 1. \quad (4.30)$$

Se considerarmos $p \neq 0,5$, virá:

$$\mathbb{P}_a + \mathbb{P}_b = \frac{q^a p^b - p^n}{q^n - p^n} + \frac{p^b q^a - q^n}{p^n - q^n} = 1. \quad (4.31)$$

Concluimos assim, que em qualquer jogo e para qualquer valor de p , um dos jogadores, A ou B , vencerá com probabilidade igual a um. Notemos, contudo, que é possível identificar sequências nas quais o jogo nunca termina, por exemplo, a sequência

$$ABABABAB\dots,$$

onde A significa que a partida foi ganha pelo jogador A e B significa que o jogador A perdeu a partida. Além desta, muitas outras sequências são possíveis identificar, nas quais o jogo não terminará. Assim sendo, qual será a probabilidade de o jogo nunca terminar?

Seja \mathbb{Q}_a a probabilidade de o jogo durar indefinidamente quando o jogador A tem a euros. Se $p = 0$ (ou $q = 0$) naturalmente o jogo durará a (ou b) partidas e logo, $\mathbb{Q}_a = 0$. Consideremos, então, $p \neq 0$ e $p \neq 1$. Nestas condições \mathbb{Q}_a pode ser modelado pela equação:

$$\mathbb{Q}_a = p\mathbb{Q}_{a+1} + q\mathbb{Q}_{a-1}, \quad 0 < a < n, \quad (4.32)$$

onde as condições de fronteira são $\mathbb{Q}_0 = \mathbb{Q}_n = 0$. Notemos que a equação acima é igual à equação (4.22), utilizada para modelar a probabilidade de o jogador A ganhar o jogo (\mathbb{P}_a), contudo, as condições de fronteira são distintas. Neste caso, a solução será

$$\mathbb{Q}_a = 0, \quad 0 \leq a \leq n, \quad p \in [0, 1]. \quad (4.33)$$

Deste modo concluímos que a probabilidade de o jogo durar para sempre é nula (apesar de existirem muitas sequências possíveis onde tal acontece).

4.2.2 Caso em que o jogador B tem uma fortuna ilimitada

Analisemos agora o que acontece à probabilidade do jogador A vencer o jogo se o seu parceiro B tiver uma fortuna ilimitada ($b \rightarrow +\infty$). Neste caso, teremos então⁽⁴⁾

$$\mathbb{P}_a = \begin{cases} 0 & \text{se } p \leq \frac{1}{2} \\ 1 - \left(\frac{q}{p}\right)^a & \text{se } p > \frac{1}{2} \end{cases}, \quad 0 \leq a \leq n, \quad (4.34)$$

isto é, o jogador A irá à falência com probabilidade 1, se $p \leq \frac{1}{2}$. Se $p > \frac{1}{2}$, o jogador A continuará a jogar indefinidamente, sem perder, com probabilidade $1 - \left(\frac{q}{p}\right)^a$ e irá à falência com probabilidade $\left(\frac{q}{p}\right)^a$. Na tabela 4.1 encontramos alguns valores de \mathbb{P}_a para diferentes valores de a e de p .

p	.501	.505	.51	.525	.55	.60	.75
$a = 1$.004	.020	.039	.095	.182	.333	.667
$a = 10$.039	.181	.330	.632	.866	.983	1.000
$a = 20$.077	.323	.551	.865	.982	1.000	1.000
$a = 100$.323	.865	.982	1.000	1.000	1.000	1.000

Tabela 4.1: Probabilidades de o jogo durar para sempre em função de a e p , quando B tem uma fortuna ilimitada ($b \rightarrow +\infty$)

4.2.3 Valor esperado de ganho

O resultado (4.28) permite-nos verificar em que condições o jogo da ruína é *justo* ou *equilibrado*, ou seja, se o valor esperado de ganho do jogo é nulo. Designemos então por $E(G)$ o valor esperado de ganho do jogo para o jogador A e por $E(Gp)$ o valor esperado de

⁽⁴⁾ As equações às diferenças que nos permitiram obter (4.22) já não são válidas, pois uma das condições de fronteira foi retirada e, como tal, a solução pode não ser única.

ganho em cada partida para o mesmo jogador A . Notemos que, uma vez que em cada partida o jogador A ganha um euro com probabilidade p e perde um euro com probabilidade $q = 1 - p$, o valor esperado de ganho do jogador A em cada partida é $E(Gp) = p - q = 2p - 1$. Se considerarmos $p = q$, verifica-se facilmente que o valor esperado de ganho de uma partida é zero e, nesse caso, cada partida do jogo da ruína é justa. Analisemos se o jogo será justo nestas condições. Podem ocorrer duas situações, o jogador A poderá ganhar b euros do seu adversário com uma probabilidade $\frac{a}{a+b}$ ou, perder a euros com probabilidade $\frac{b}{a+b}$. Assim, o jogo é justo, pois o valor esperado de ganho do jogo é, independentemente dos valores de a e b , dado por

$$E(G) = \frac{a}{a+b}b - \frac{b}{a+b}a = 0.$$

Concluimos assim que, se cada partida do jogo da ruína for equilibrada, o facto de um jogador possuir muito mais dinheiro do que o outro não tornará o jogo da ruína injusto, pois o valor esperado de ganho de cada jogador continua a ser nulo.

Consideremos agora $p \neq q$. Neste caso, cada partida do jogo da ruína não é justa pois o valor esperado de ganho do jogador A não é nulo, sendo positivo se $p > q$ e negativo se $p < q$. O valor esperado de ganho do jogo para o jogador A é, neste caso, dado por:

$$E(G) = b \frac{q^a p^b - p^n}{q^n - p^n} - a \frac{p^b q^a - q^n}{p^n - q^n} = \frac{bp^b(q^a - p^a) - aq^a(q^b - p^b)}{q^n - p^n}. \quad (4.35)$$

Por outro lado, o valor esperado do ganho do jogo é igual à soma do valor esperado do ganho de cada partida onde o número de termos (isto é, o número de partidas) é uma variável aleatória. Assim sendo, o valor esperado do ganho de um jogo terá o mesmo sinal que o valor esperado do ganho de uma partida (uma vez que este é igual em todas as partidas). Desta forma, $E(G) = E(Gp) \times \mathbb{E}_a$, onde \mathbb{E}_a é o valor esperado de partidas até o jogo acabar quando o jogador A tem $a \in$ (ver fórmula (4.48), deduzida na próxima secção, na página 56). De facto,

utilizando (4.35) teremos⁽⁵⁾:

$$\begin{aligned}
 E(G) &= \frac{(n-a)p^b(q^a - p^a) - aq^a(q^b - p^b)}{q^n - p^n} = \frac{np^b(q^a - p^a)}{q^n - p^n} - a \\
 &= (2p-1) \times \left[\frac{n}{2p-1} \frac{p^b(q^a - p^a)}{q^n - p^n} - \frac{a}{2p-1} \right] \\
 &= (2p-1) \times \left(\frac{a}{1-2p} - \frac{n}{1-2p} \left[\frac{\left(\frac{q}{p}\right)^a - 1}{\left(\frac{q}{p}\right)^n - 1} \right] \right) \\
 &= E(Gp) \times \mathbb{E}_a.
 \end{aligned} \tag{4.36}$$

Logo, como $\mathbb{E}_a > 0$ para $0 < a < n$, $E(G)$ terá o mesmo sinal que $E(Gp)$. Como estamos a supor $p \neq \frac{1}{2}$ temos $E(G) \neq 0$. Concluimos assim que, se cada partida do jogo da ruína do jogador não for justa então o jogo também não será justo.

Consideremos, sem perda de generalidade, o caso em que $p > q$ e os dois jogadores possuem a mesma quantia inicial de dinheiro ($a = b$). Temos então, por (4.35):

$$\begin{aligned}
 E(G) &= \frac{ap^a(q^a - p^a) - aq^a(q^a - p^a)}{q^n - p^n} = \frac{-a(p^a - q^a)^2}{q^{2a} - p^{2a}} \\
 &= \frac{a(p^a - q^a)^2}{(p^a - q^a)(p^a + q^a)} = \frac{a(p^a - q^a)}{p^a + q^a} > 0.
 \end{aligned} \tag{4.37}$$

O resultado (4.37) permite-nos igualmente concluir que, se as partidas do jogo não forem justas e ambos os jogadores possuírem a mesma quantia de dinheiro inicial, o valor esperado de ganho do jogo será positivo para o jogador que possuir uma maior probabilidade de vencer uma partida do jogo. Resta saber o que deve fazer um jogador quando está num jogo em que as partidas não lhe são favoráveis.

4.2.4 Efeito da alteração do montante apostado por partida

Pestana & Velosa [33, p.279] efetuaram um estudo acerca do efeito no jogo da ruína causado pela mudança da aposta em cada partida de meio euro ao invés do euro que inicialmente considerámos. Vamos supor que cada partida do jogo é desfavorável ao jogador A , ou seja, $p < q$. Designemos por \mathbb{P}_a^* a probabilidade do jogador A vencer o jogo da ruína quando possui a euros e ele e o seu adversário apostam 50 cêntimos em cada partida. Continuamos a supor

⁽⁵⁾ Na secção seguinte, provaremos que $\mathbb{E}_a = \frac{a}{1-2p} - \frac{n}{1-2p} \left[\frac{\left(\frac{q}{p}\right)^a - 1}{\left(\frac{q}{p}\right)^n - 1} \right]$, quando $p \neq q$.

que o jogador A tem a euros inicialmente e que a quantia inicial do jogador B é de b euros, ou seja, o jogador A está a jogar com $2a$ moedas de 50 cêntimos e o jogador B com $2b$ moedas de 50 cêntimos. Nestas condições podemos escrever a seguinte equação às diferenças linear de segunda ordem homogénea com coeficientes constantes:

$$\mathbb{P}_a^* = p \mathbb{P}_{a+0,5}^* + q \mathbb{P}_{a-0,5}^*, \quad a = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots, a + b - \frac{1}{2}. \quad (4.38)$$

As condições de fronteira são $\mathbb{P}_0^* = 0$ e $\mathbb{P}_{a+b}^* = 1$.

A equação (4.38) pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{a+0,5}^* &= \frac{1}{p} \mathbb{P}_a^* - \frac{q}{p} \mathbb{P}_{a-0,5}^* \Leftrightarrow \\ \mathbb{P}_{\frac{2a+1}{2}}^* &= \frac{1}{p} \mathbb{P}_{\frac{2a}{2}}^* - \frac{q}{p} \mathbb{P}_{\frac{2a-1}{2}}^*. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Podemos então considerar $\mathbb{P}_a^* = \mathbb{P}_{2a}$ e teremos:

$$\mathbb{P}_{2a+1} = \frac{1}{p} \mathbb{P}_{2a} - \frac{q}{p} \mathbb{P}_{2a-1}, \quad 2a = 1, 2, 3, \dots, a + b - 1.$$

As condições de fronteira são $\mathbb{P}_0 = \mathbb{P}_0^* = 0$ e $\mathbb{P}_{2a+2b} = \mathbb{P}_{a+b}^* = 1$. Utilizando, (4.28) temos que a probabilidade do jogador A vencer o jogo nas condições referidas é:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_a^* = \mathbb{P}_{2a} &= \frac{q^{2a} p^{2b} - p^{2n}}{q^{2n} - p^{2n}} = \frac{q^a p^b + p^n}{q^n + p^n} \times \frac{q^a p^b - p^n}{q^n - p^n} \\ &= \frac{q^a p^b + p^n}{q^n + p^n} \times \mathbb{P}_a < \mathbb{P}_a, \end{aligned} \quad (4.40)$$

pois $q^a p^b < q^a q^b = q^n$ quando $p < q$. O resultado (4.40) permite-nos concluir que quando uma partida lhe é desfavorável, se o jogador apostar menos dinheiro em cada partida, isso fará diminuir a probabilidade de ele vencer o jogo⁽⁶⁾. Utilizando raciocínio análogo, no caso em que $p > q$, a conclusão seria $\mathbb{P}_a^* > \mathbb{P}_a$ sendo, neste caso, vantajoso para o jogador A diminuir o montante apostado em cada partida. No caso $p = q$, uma vez que, por (4.28), $\mathbb{P}_a = \frac{a}{a+b}$, temos $\mathbb{P}_a^* = \mathbb{P}_a$, ou seja, é indiferente o montante apostado em cada partida.

Exemplo 4.2.1. Roleta americana e roleta europeia

Um dos jogos de azar presentes nos casinos é a roleta. O jogo consiste em lançar uma bola numa roleta que está dividida num certo número de secções numeradas e coloridas de vermelho, preto ou verde. A roleta europeia contém 36 secções pretas ou vermelhas numeradas de

⁽⁶⁾ Apesar de a análise efetuada ter-se restringido a utilização de apostas de 50 cêntimos, prova-se que a conclusão é válida para qualquer valor inferior a um euro.

1 a 36 e uma secção verde com o número 0. A roleta americana contém mais uma secção verde numerada com 00. O jogador poderá fazer diferentes tipos de apostas, sendo estas feitas numa mesa que contém os números da roleta, estando os números de 1 a 36 distribuídos em 3 colunas e 12 linhas. O jogador poderá apostar em números isolados ou escolher conjuntos pré-definidos de números, por exemplo, os números de uma das três colunas, os números pares ou os números coloridos a vermelho. Se o jogador conseguir acertar no número que escolheu receberá um prémio correspondente ao tipo de aposta que efetuou. Por exemplo, se apostou apenas num número e ele saiu na roleta, ficará com o dinheiro que apostou e receberá mais 35 vezes o dinheiro que apostou; se apostar num número par (o zero não é contado) e a bola cair numa secção com um número nestas condições, receberá uma quantia de dinheiro igual ao que apostou e manterá a quantia que apostou. Qualquer que seja o tipo de aposta que efetue o jogo nunca é justo, sendo sempre favorável ao casino, basta verificar que, por exemplo, no caso de uma aposta de x euros num único número na roleta europeia, o valor esperado de ganho é $\frac{1}{37} \times 35x + \frac{36}{37} \times (-x) = -\frac{x}{37}$. Na roleta americana, o jogo é ainda mais desfavorável ao jogador e no caso de uma aposta de um euro num só número o valor esperado de ganho é $-\frac{x}{19}$.

Suponhamos que um jogador decide ir ao casino jogar na roleta com 100 euros e que pretende fazê-lo até ficar arruinado ou até ganhar 100 euros. O jogo é favorável ao casino logo, conforme previamente concluímos, é mais vantajoso ao jogador efetuar uma única aposta de 100 euros. Nesse caso, se apostar, por exemplo, nos números pares, a probabilidade de vencer a aposta é de $\frac{18}{37} \approx 0,4864$ na roleta europeia e de $\frac{18}{38} \approx 0,4737$ na roleta americana. O seu valor esperado de ganho será $-\frac{100}{37} \approx -2,70\text{€}$ na roleta europeia e será $-\frac{100}{19} \approx -5,26\text{€}$ na roleta americana. Na tabela 4.2 apresentamos as probabilidades, \mathbb{P}_{100} , do jogador ganhar os 100 euros que pretende e os valores esperados de ganho, $E(G)$, para diferentes valores de apostas, apostando nos números pares nas roletas europeia e americana, considerando uma quantia inicial de 100 euros. Constatamos que à medida que o valor de cada aposta aumenta, a probabilidade de ganhar 100 euros vai aumentando, bem como o valor esperado de ganho de jogo. Além disso, verifica-se que na roleta americana, o jogo é sempre mais favorável ao casino, independentemente dos valores de cada aposta, do que na roleta europeia.

Valor de cada aposta em euros	Roleta europeia		Roleta americana	
	\mathbb{P}_{100}	$E(G)$	\mathbb{P}_{100}	$E(G)$
1	0.00446	-99.11	0.00003	-99.99
2	0.06278	-87.44	0.00512	-98.97
5	0.25325	-49.35	0.10840	-78.32
10	0.36803	-26.39	0.25853	-48.29
25	0.44614	-10.77	0.39617	-20.77
50	0.47299	-5.40	0.44751	-10.50
100	0.48649	-2.70	0.47368	-5.26

Tabela 4.2: Probabilidade de ganhar 100 euros (5 casas decimais) e valor esperado de ganho (2 casas decimais)

4.2.5 Sensibilidade de \mathbb{P}_a em função de a , b e p

Analisemos agora a sensibilidade da probabilidade \mathbb{P}_a relativamente à probabilidade p de vencer cada partida e à quantidade de dinheiro que possui inicialmente. Começemos por supor que ambos os jogadores têm igual probabilidade de vencer uma partida. Neste caso, temos $p = 0,5$ e verifica-se que se o jogador A tiver $a\epsilon$ e quiser ganhar $b\epsilon$ antes de ficar arruinado, então ele será vencedor com probabilidade igual a $\frac{a}{a+b}$. Iremos determinar a probabilidade do jogador vencer o jogo, consoante o dinheiro que ele e o seu adversário possuírem. Utilizando (4.28) verifica-se facilmente, que no caso em que os jogadores têm igual quantia inicial de dinheiro a probabilidade de vencerem o jogo é $0,5$. Neste caso, a probabilidade do jogador A vencer o jogo é inferior a 50%, se a quantia inicial do seu adversário for superior à sua quantia inicial e, se suposermos que o jogador B é infinitamente rico, ou seja, se considerarmos o valor de b a tender para infinito, verificamos que a probabilidade do jogador A ganhar o jogo tende para zero. Assim, se ambos os jogadores tiverem igual probabilidade de ganhar uma partida, terá maior probabilidade de vencer o jogo, o jogador que possuir mais dinheiro inicialmente. Por exemplo, se o jogador A possuir 20ϵ e o seu adversário tiver 10ϵ , a probabilidade do jogador A vencer o jogo é $\frac{2}{3}$. Se o jogador A tiver 25ϵ e o seu adversário possuir 5ϵ então a probabilidade do jogador A vencer o jogo aumentará para $\frac{5}{6}$. Na Figura 4.1, podemos ver as trajetórias de alguns jogos possíveis para diferentes quantias iniciais dos dois jogadores com $p = 0,5$. Estas trajetórias foram obtidas com o *software* R, utilizando o programa que se

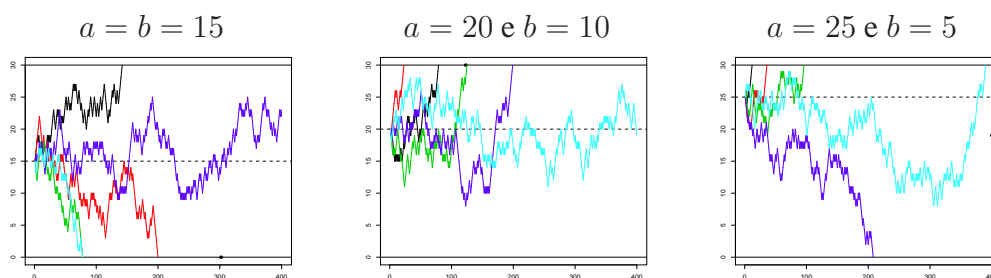


Figura 4.1: Simulação do jogo para diferentes valores de a e de b ($p = 0.5$)

encontra no anexo A.1 (ou uma sua variação). Notemos que se trata de um passeio aleatório com uma dimensão, onde em cada iteração, ou seja, em cada partida, o valor da fortuna do jogador A aumenta uma unidade com probabilidade p , ou diminui uma unidade, com probabilidade $q = 1 - p$. Podemos igualmente visualizar as linhas de fronteira (linhas horizontais nas quais o jogo termina) que correspondem a $a = 0$ (o jogador A faliu) e $a = n$ (o jogador B faliu), bem como a tendência esperada do montante detido pelo jogador A , representado a tracejado. Nesta situação em que $p = q$, estamos perante um jogo justo e, como tal, o ganho esperado em cada partida é nulo e logo, é expectável que a fortuna se mantenha.

Analisemos agora o caso em que ambos os jogadores possuem uma certa quantia inicial de dinheiro (que pode ser ou não igual) e a probabilidade de vencerem uma partida é diferente. Na tabela 4.3, podemos observar diferentes valores de \mathbb{P}_a , para diferentes valores de p , de a ou de b .

p	.499	.495	.49	.475	.45	.40	.25
$a = 100, b = 10$.890	.796	.666	.368	.134	.017	2×10^{-5}
$a = 20, b = 10$.653	.598	.528	.335	.132	.017	2×10^{-5}
$a = b = 10$.490	.450	.401	.269	.119	.017	2×10^{-5}
$a = b = 100$.401	.119	.018	5×10^{-5}	2×10^{-9}	2×10^{-18}	2×10^{-48}
$a = 10, b = 20$.320	.269	.212	.090	.016	2×10^{-4}	3×10^{-10}
$a = 10, b = 100$.074	.028	.006	3×10^{-5}	2×10^{-9}	2×10^{-18}	2×10^{-48}

Tabela 4.3: Valores de \mathbb{P}_A em função de a , b e p

Por leitura da tabela 4.3, podemos verificar que uma pequena diferença do valor de p pode provocar uma grande diferença no valor de \mathbb{P}_a . Por exemplo, se $a = b = 10$, a alteração do valor de p de 0,499 para 0,4 faz com que o jogador A passe de uma probabilidade de apro-

ximadamente 0,490 para uma probabilidade de aproximadamente 0,017 de ganhar o jogo. Constatamos também que, se ambos os jogadores tiverem a mesma quantia inicial, o jogo será tanto mais desfavorável ao jogador A , quanto maior for a quantidade de dinheiro que cada um tem. Por exemplo, se $a = b = 10$ e $p = 0,495$ temos $\mathbb{P}_a \approx 0,450$ mas se aumentarmos a quantia inicial dos jogadores A e B para 100 euros e mantivermos o valor de p , o valor de \mathbb{P}_a decrescerá para aproximadamente 0,119.

Na Figura 4.2, podemos observar alguns jogos com $p \neq q$ (obtidos com o programa incluído no anexo A.1). Notemos que nestes casos a tendência de fortuna do jogador A (a tracejado) já não é constante, sendo crescente se $p > 0,5$ ($p > q$) e decrescente se $p < q$ pois, conforme analisámos previamente, se $p > 0,5$ a fortuna do jogador A tende a crescer ($E(Gp) > 0$) e se $p < 0,5$ a fortuna do jogador A tenderá a diminuir ($E(Gp) < 0$).

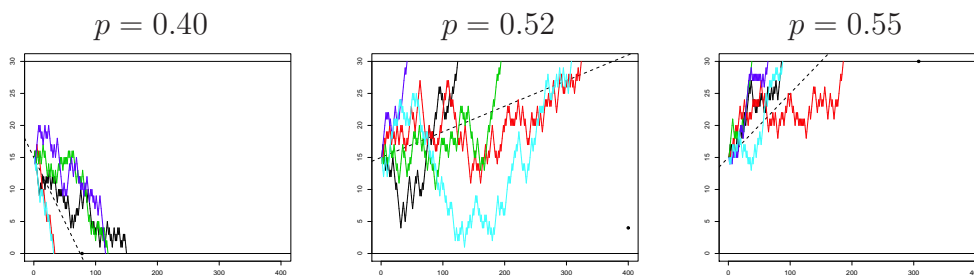


Figura 4.2: Simulação do jogo para diferentes valores de p ($a = b = 15$)

Se $p < q$, a probabilidade do jogador A vencer o jogo é muito pequena⁽⁷⁾ e mesmo que a sua quantia inicial seja muito elevada relativamente ao seu parceiro B , tal não fará que o jogo tenda para o seu lado. De facto, por (4.25) vimos que:

$$\mathbb{P}_a = \frac{-1 + \left(\frac{q}{p}\right)^a}{-1 + \left(\frac{q}{p}\right)^n}, \quad 0 \leq a \leq n. \quad (4.41)$$

Se supusermos $p < 0,5$, então o numerador e o denominador de (4.41) são positivos e, como $\left(\frac{q}{p}\right)^a \leq \left(\frac{q}{p}\right)^n$, o valor de \mathbb{P}_a será inferior a 1 (o que é natural, uma vez ser uma probabilidade) e será igual a 1 se $a = n$. Assim, se adicionarmos uma unidade ao numerador

⁽⁷⁾ Excepto nos casos em que $p \approx 0,5$ e b assume um valor baixo.

e ao denominador de (4.41) teremos uma fração com maior valor⁽⁸⁾, ou seja, temos:

$$\mathbb{P}_a < \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^a}{\left(\frac{q}{p}\right)^n} = \left(\frac{p}{q}\right)^b. \quad (4.42)$$

A equação (4.42) permite-nos concluir que se a probabilidade do jogador A ganhar uma partida for inferior a $\frac{1}{2}$, então a probabilidade de ele obter mais $b\epsilon$ do que o seu capital inicial, antes de ficar arruinado, é inferior a $\left(\frac{p}{q}\right)^b$. Repare-se que este limite superior não depende do capital inicial do jogador A . Por exemplo, se o valor de p for 0,4 e se o jogador A possuir um milhão de euros, a probabilidade de ele obter mais 10 euros antes de ficar arruinado, é inferior a $\left(\frac{4}{5}\right)^{10} \approx 0,01734$.

4.3 Modelação da duração do jogo da ruína

Na elaboração da presente secção baseámo-nos em [18]. Representemos por \mathbb{E}_a o número esperado de partidas até o jogo acabar quando o jogador A tem $a\epsilon$. Após a realização de uma partida, o número esperado de partidas até o jogo acabar decresceu uma unidade, em relação ao número esperado antes de se ter efetuado a referida partida. Se o valor de p for zero, a probabilidade do jogador A vencer o jogo é nula e o jogo terminará quando o jogador B receber o dinheiro do seu adversário, ou seja, ao fim de a partidas. Neste caso, teremos $\mathbb{E}_a = a$. Se suposermos $q = 0$, o jogo acabará ao fim de b partidas, quando o jogador A tiver recebido o dinheiro do seu adversário. Teremos então $\mathbb{E}_a = b$.

Consideremos então que $q \neq 0$ e $p \neq 0$. Ao jogar uma partida, podem ocorrer dois acontecimentos, ou o jogador A vence a partida com probabilidade p e passa a ter $(a + 1)\epsilon$ e, nesse caso, o número esperado que queremos determinar é o valor de \mathbb{E}_{a+1} ; ou, perde essa partida com probabilidade $q = 1 - p$, passando a ter $(a - 1)\epsilon$. Nesse caso, espera-se que o jogo dure \mathbb{E}_{a-1} partidas. Como os acontecimentos que acabámos de referir são disjuntos, temos que o número esperado de partidas \mathbb{E}_a pode ser modelado pela seguinte equação às diferenças

⁽⁸⁾ Se $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ e $\frac{a_1}{a_2} \leq 1$ então $\frac{a_1}{a_2} \leq \frac{a_1+1}{a_2+1}$.

linear de segunda ordem completa com coeficientes constantes:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_a &= p \mathbb{E}_{a+1} + q \mathbb{E}_{a-1} + 1 \Leftrightarrow \\ \mathbb{E}_{a+1} &= \frac{1}{p} \mathbb{E}_a - \frac{q}{p} \mathbb{E}_{a-1} - \frac{1}{p}, \quad 0 < a < n. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Se, após uma partida, o jogador A ficar com 0ϵ ou com $n\epsilon$ isso significa, respetivamente, que ele perdeu ou ganhou o jogo e que este acabou. Logo, nestas condições, o número esperado de partidas é nulo. Temos, então, como condições de fronteira:

$$\mathbb{E}_0 = \mathbb{E}_n = 0.$$

Para descobrirmos a solução de (4.43) teremos de determinar uma sua solução particular e adicionar-lhe a solução geral da equação homogénea que lhe está associada. Começemos por obter uma solução particular de (4.43). Para isso, em primeiro lugar, iremos verificar se existe alguma sucessão constante que seja solução de (4.43). Por $q = 1 - p$, vem

$$1 - \frac{1}{p} - \left(-\frac{q}{p}\right) = \frac{p - 1 + q}{p} = 0.$$

Por (3.38), na página 25, temos que a equação (4.43) não admite nenhuma sucessão constante como solução. Assim, teremos de procurar soluções da forma aP , com $P \in \mathbb{R}$. Supondo que os jogadores não têm igual probabilidade de vencer uma partida, teremos $p \neq q$ (ou $p \neq 0, 5$) e logo, $2 - \frac{1}{p} \neq 0$. Por (3.39), na página 26, permite-nos concluir que $P = \frac{-\frac{1}{p}}{2 - \frac{1}{p}} = \frac{1}{1 - 2p}$ e que $\frac{a}{1 - 2p}$ é uma solução particular de (4.43). Nesta situação, a equação homogénea que está associada a (4.43) é equivalente à equação que modela a probabilidade do jogador A ganhar no problema da ruína do jogador quando $p \neq q$ (equação (4.22)) e, como vimos, as soluções do polinómio caraterístico que lhe está associado são 1 e $\frac{q}{p}$. Assim, considerando $p \neq q$ a solução de (4.43) é:

$$\mathbb{E}_a = c_1 + c_2 \times \left(\frac{q}{p}\right)^a + \frac{a}{1 - 2p}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq a \leq n. \quad (4.44)$$

As condições de fronteira permitem-nos determinar c_1 e c_2 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{E}_0 = 0 \\ \mathbb{E}_n = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 + c_2 \times \left(\frac{q}{p}\right)^n + \frac{n}{1 - 2p} = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} c_1 = \frac{\frac{n}{1 - 2p}}{\left(\frac{q}{p}\right)^n - 1} \\ c_2 = \frac{-\frac{n}{1 - 2p}}{\left(\frac{q}{p}\right)^n - 1} \end{array} \right.$$

Substituindo em (4.45) vem, para $p \neq q$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_a &= -\frac{\frac{n}{1-2p}}{\left(\frac{q}{p}\right)^n - 1} + \frac{\frac{n}{1-2p}}{\left(\frac{q}{p}\right)^n - 1} \times \left(\frac{q}{p}\right)^a + \frac{a}{1-2p} \\ &= \frac{a}{1-2p} - \frac{n}{1-2p} \left[\frac{\left(\frac{q}{p}\right)^a - 1}{\left(\frac{q}{p}\right)^n - 1} \right], \quad 0 \leq a \leq n. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Consideremos agora que $p = q$. Neste caso, como $p = 0,5$ vem $1 - 2p = 0$ e por (3.39) não existe nenhuma solução particular de (4.43) da forma Pa , com $P \in \mathbb{R}$. Procuremos soluções da forma Pa^2 , com $P \in \mathbb{R}$. O resultado (3.40), na página 26, permite-nos descobrir uma solução particular de (4.43):

$$\frac{-p^{-1}}{2}a^2 = -\frac{1}{2p}a^2 = -a^2, \quad 0 < a < n.$$

Neste caso, o polinómio caraterístico da equação homogénea associada à equação (4.43) tem uma raiz dupla igual a 1. Assim, para $p = q$, a solução geral de (4.43) é:

$$\mathbb{E}_a = c_1 + ac_2 - a^2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq a \leq n. \quad (4.46)$$

Por $\mathbb{E}_0 = 0$ e $\mathbb{E}_n = 0$ vem:

$$\begin{cases} \mathbb{E}_0 = 0 \\ \mathbb{E}_n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_1 + nc_2 - n^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = n \end{cases}.$$

Substituindo em (4.46), vem para $p = q$:

$$\mathbb{E}_a = an - a^2 = a(a + b) - a^2 = ab, \quad 0 \leq a \leq n. \quad (4.47)$$

Em resumo, considerando $p \neq 0$ e $q \neq 0$, temos:

$$\mathbb{E}_a = \begin{cases} ab & \text{se } p = \frac{1}{2} \\ \frac{a}{1-2p} - \frac{n}{1-2p} \left[\frac{\left(\frac{q}{p}\right)^a - 1}{\left(\frac{q}{p}\right)^n - 1} \right] & \text{se } p \neq \frac{1}{2} \end{cases}. \quad (4.48)$$

Se $p = \frac{1}{2}$, o resultado (4.48) permite-nos concluir que o número esperado de partidas do jogo é diretamente proporcional à quantia inicial de dinheiro que cada jogador possui. Por exemplo,

se $a = b = 15$ então o número esperado de partidas do jogo é 225, mas se duplicarmos a quantia inicial a do jogador A para 30, o número esperado de partidas duplicará para 450.

Consideremos agora o caso em que cada partida do jogo não é favorável ao jogador A , ou seja, $p < \frac{1}{2}$. Isso significa que $\left(\frac{q}{p}\right)^n \geq \left(\frac{q}{p}\right)^a > 1$ e que $1 - 2p > 0$, logo,

$$\frac{n}{1 - 2p} \left[\frac{\left(\frac{q}{p}\right)^a - 1}{\left(\frac{q}{p}\right)^n - 1} \right] > 0.$$

Como tal, utilizando (4.48), concluímos que $\mathbb{E}_a < \frac{a}{1-2p}$. Isso significa que, quando o jogo é desfavorável ao jogador A e ele possui a euros, o valor esperado de partidas do jogo será no máximo igual a $\frac{a}{1-2p}$. Como estamos a considerar $p < \frac{1}{2}$, o valor esperado de ganho em cada partida, $2p - 1$, será negativo, ou seja, espera-se que em média o jogador A perca $1 - 2p$ euros. Como o jogador A possui inicialmente a euros e o jogo acaba quando ele fica sem dinheiro, percebe-se que o jogo acabará em cerca de $\frac{a}{1-2p}$ partidas. Por outro lado, também sabemos que o jogo da ruína terminará se o jogador A conseguir ganhar o dinheiro do seu adversário. Suponhamos que a fortuna do jogador B é infinita, ou seja, que o jogo da ruína só terminará se o jogador A ficar na ruína. Neste caso, se considerarmos o valor de b a tender para infinito, o valor de n também tenderá para infinito e o valor esperado do número de partidas \mathbb{E}_a tenderá para $\frac{a}{1-2p}$. Assim, se $p < \frac{1}{2}$, quanto maior o valor da quantia inicial do jogador B ou menor for o valor de p , mais próximo de $\frac{a}{1-2p}$ será o número esperado de partidas a realizar. Na tabela 4.4 apresentamos o valor de \mathbb{E}_a para alguns valores de a , b e p .

	$a = 10$			$a = 100$	
	$p = 0.49$	$p = 0.45$	$p = 0.4$	$p = 0.49$	$p = 0.45$
$b = 5$	51.3	49.9	40.3	716.3	615
$b = 10$	98.7	76.3	48.3	133.5	852.1
$b = 15$	142.2	89.3	49.7	1870.9	943.3
$b = 40$	307.6	99.9	50	3607.7	999.5
$b = 100$	466.4	100	50	4820.2	1000
$b \rightarrow \infty$	500	100	50	5000	1000

Tabela 4.4: Valores de \mathbb{E}_a (1 casa decimal) em função de a , b e p

Por observação da tabela 4.4 verificamos que, se supusermos $p < \frac{1}{2}$ e mantivermos constante o valor de a , o valor de \mathbb{E}_a aumenta, à medida que aumentamos o valor de b . Se con-

tinuarmos a considerar $p < \frac{1}{2}$ e fixarmos o valor da quantia inicial b do jogador B , o valor esperado de partidas aumentará se o valor da quantia inicial a do jogador A for aumentado, pois apesar de a probabilidade do jogador A vencer o jogo ser muito pequena, se possuir mais dinheiro terão de ser realizadas mais partidas até este jogador estar arruinado. Além disso, se fixarmos os valores das quantias iniciais dos dois jogadores e formos aumentando o valor p do jogador A vencer uma partida, fazendo-o tender para $\frac{1}{2}$, verificamos que o número esperado de partidas aumentará, já que o facto dos dois jogadores ficarem com probabilidades muito próximas de ganhar uma partida fará com que as trajetórias de jogo possam sofrer mais *reviravoltas*.

Notemos que se $p \geq \frac{1}{2}$ e fizermos $b \rightarrow +\infty$ então $\mathbb{E}_a \rightarrow +\infty$, pois nestes casos existirá uma probabilidade não nula de o jogo durar para sempre.

Capítulo 5

Simulação

Conforme ficou demonstrado no capítulo anterior, é possível determinar soluções exatas do problema da ruína do jogador recorrendo, por exemplo, às equações às diferenças. As soluções obtidas, por esse modo, permitiram-nos obter características importantes relacionados com o referido problema. No entanto, o recurso à tecnologia, nomeadamente a utilização de *software* que possibilite a realização de *simulações* probabilísticas utilizando o método de Monte Carlo, permite-nos uma outra visualização dessas mesmas características ou mesmo a compreensão de certas propriedades, que possam ser de mais difícil apreensão por via analítica.

Assim, neste capítulo faremos uma breve descrição do método de simulação de Monte Carlo e descreveremos a sua importância em Probabilidades. Descreveremos também os principais teoremas de convergência que estão na origem da simulação probabilística e que estabelecem o elo de ligação entre a Estatística e as Probabilidades e usaremos a simulação de Monte Carlo (através do programa R) e o problema da ruína do jogador para os *ilustrar*.

A definição frequentista de probabilidade é um conteúdo lecionado pela primeira vez no terceiro ciclo do ensino básico, nomeadamente, no nono ano de escolaridade. Como tal, os alunos do ensino não superior, apesar de não possuírem todas as ferramentas teóricas que lhes permitam obter uma solução exata do problema da ruína do jogador, poderão obter uma solução aproximada e compreender as suas principais características recorrendo à simulação. É neste contexto, que neste capítulo falaremos da importância da simulação no ensino das probabilidades e apresentaremos metodologias para a obtenção de soluções aproximadas do problema da ruína do jogador recorrendo à simulação, através da construção de simuladores

do problema da ruína em *Microsoft Excel* e com o *software R*. Faremos também uma análise do currículo da disciplina de matemática do ensino não superior, procurando enquadrar o problema da ruína do jogador nesses anos de escolaridade.

5.1 Simulação de Monte Carlo

A realização de um elevado número de vezes de uma certa experiência aleatória e a determinação da frequência relativa de determinado acontecimento, com o objetivo de determinar um valor aproximado da probabilidade desse acontecimento, pode ser encontrada de uma forma isolada nos séculos XVIII ou XIX.

A origem do uso da *simulação* nas ciências depende da definição que se dá ao conceito. Assim, se considerarmos como *simulação*, o uso de uma ferramenta que nos permita gerar dados aleatórios ou pseudoaleatórios⁽¹⁾, com vista à visualização empírica de um determinado teorema matemático, podemos situar a sua origem no século XVIII. De facto, Buffon (1701-1788) efetuou 2048 conjuntos de lançamentos de moedas, nos meados do século XVIII, para obter uma resposta ao paradoxo de São Petersburgo⁽²⁾, obtendo no entanto, uma resposta incorreta, pois concluiu que o jogador deveria apostar 5 moedas [42].

Outro problema que suscitou a curiosidade dos matemáticos para a sua verificação empírica foi o *problema das agulhas de Buffon*⁽³⁾. Por exemplo, Asaph Hall (1829-1907) publicou em 1893, o artigo *On an Experimental Determination of Pi*, em que apresenta uma solução recorrendo à realização da experiência 590 vezes. No entanto, Stigler [42] refere que outros

⁽¹⁾ Os números pseudoaleatórios são gerados a partir de algoritmos conhecidos, como tal, conhecido o número inicial e o algoritmo utilizado, é possível determinar quais são os números que irão ser gerados. Daí, a sua designação de números *pseudoaleatórios*.

⁽²⁾ O problema de São Petersburgo foi proposto por Nicolas Bernoulli (1687-1759) e “resolvido” por Daniel Bernoulli (1700-1782). O problema consiste em determinar qual a quantia que um jogador deve apostar de forma a que o seguinte jogo seja justo: o jogador lança sucessivamente uma moeda ao ar até obter cara e se sair cara apenas no n -ésimo lançamento, receberá um prémio de 2^n moedas. Notemos que o valor esperado de ganho é $\frac{1}{2} \times 2^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 2^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n \times 2^n + \dots = 1 + 1 + 1 + \dots$.

⁽³⁾ Problema proposto pelo Conde de Buffon (1701-1788) em 1777, e que consiste em determinar a probabilidade de uma agulha cair numa linha, num chão que se encontra dividido por um certo número de linhas igualmente espaçadas. Uma vez que a solução do problema é uma função de π , obtendo-se um valor próximo da probabilidade (repetindo inúmeras vezes a experiência) pode-se obter um valor próximo de π .

cientistas tais como, o astrónomo Rudolf Wolf (1816-1893) ou os matemáticos Augustus De Morgan (1806-1871) e Mario Lazzarini também realizaram a experiência. Os valores obtidos por Mario Lazzarini, para a aproximação de π no seu artigo *Un'applicazione del calcolo della Probabilità alla ricerca sperimentale di un valore approssimato de π* , foram depois várias vezes contestados por estarem muito próximos do valor real de π , pois Lazzarini obteve um valor aproximado de 3,1415929 com 3408 lançamentos.

Stigler [42] refere que se usarmos outra definição de *simulação*, e considerarmos que o seu objetivo deve ser aprender mais sobre um determinado processo que se está a estudar, então a origem da sua utilização será reportada apenas no último quarto do século XVIII. Declara também que a sua origem é muitas vezes reportada a William Gosset (1876-1937), mais conhecido por *Student*, com o seu artigo *The Probably Error of a Mean*, que foi publicado em 1908. Neste artigo, Gosset afirma ter gerado 750 amostras de dimensão 4, começando por registar 3000 observações, fruto da escolha aleatória de cartões que possuíam as medidas antropométricas do dedo médio de 3000 criminosos, juntando-as depois em grupos de 4. Gosset usou este método para efetuar o estudo da distribuição t e da distribuição do coeficiente de correlação. No entanto, Stigler [42] refere três matemáticos que publicaram artigos em data anterior a 1908, e que revelam evidências de recurso à simulação: Erastus De Forest (1834-1888) que descreve, no seu artigo de 1876 *Interpolation and adjustment of Series*, a forma como utilizou 100 cartões que retirava de uma caixa, para estudar o alisamento de séries temporais; George Darwin (1845-1912) que utilizou uma roleta para obter dados, também para o estudo do alisamento de séries temporais, processo esse descrito no seu artigo de 1877, *On fallible measures of variable quantities, and on the treatment of meteorological observations*; Francis Galton (1822-1911), que criou 3 dados cúbicos especiais numerados com 4 números ou com 4 conjuntos de sinais aritméticos em cada face (um número ou um conjunto de sinais em cada aresta), sendo possível encontrar no seu artigo de 1890, *Dice for stastical experiments*, a forma como esses dados cúbicos especiais podem gerar dados aleatórios úteis a diversos estudos estatísticos.

A *simulação* consiste num processo artificial que imita o comportamento de um fenómeno aleatório, permitindo-nos obter uma descrição aproximada das suas características. Apesar de haver registos de utilização da simulação nos séculos XVIII e XIX, esta começou a ser mais utilizada a partir da década de 40 do século XX, devido ao aparecimento do *método de simulação de Monte Carlo* e ao surgimento dos computadores eletrónicos. Aliás, a importância

de tal método para a matemática e outras ciências, faz com que o termo *simulação de Monte Carlo* seja muitas vezes referido apenas por *simulação*. Com a simulação de Monte Carlo começou-se a resolver, usando métodos probabilistas, problemas cuja resolução teórica era difícil, morosa ou cuja experimentação real estava condicionada por aspetos económicos, temporais ou espaciais.

Em 1944, Stanislaw Ulam (1909-1984) e John Von Neumann (1903-1957) eram dois dos matemáticos que faziam parte do projeto norte-americano *Manhattan*, que procurava construir a bomba atómica. Metropolis [29] refere que foi John Von Neumann que teve a ideia de utilizar o primeiro computador eletrónico construído, o ENIAC, que havia sido concebido pelos cientistas norte-americanos John Mauchly e John Eckert, em 1945, para resolver problemas relacionados com a construção da bomba atómica. O método de simulação de Monte Carlo foi desenvolvido por Stanislaw Ulam para estudar o coeficiente de difusão dos neutrões dos átomos de Urânio e pôde ser implementado com os meios computacionais do ENIAC. Metropolis [29] afirma que Stanislaw Ulam ouviu falar dos primeiros resultados obtidos com o ENIAC e ter-se-á lembrado das técnicas estatísticas de amostragem e do facto de terem sido rejeitadas muitas vezes, devido à morosidade e complexidade dos cálculos que lhes estavam associados, tendo visto no novo computador uma forma de *ressuscitar* essas técnicas, tal facto, fê-lo discutir essa ideia com Neumann.

Em 1949, Stanislaw Ulam e o físico Nicholas Metropolis (1915-1999) publicaram na revista *Journal of the American Statistical Association* o primeiro artigo sobre o método de simulação de Monte Carlo, *the Monte Carlo method* [48]. O nome deste método foi proposto por Metropolis e deve-se ao facto de estarem a trabalhar em projetos secretos, daí necessitarem de um nome enigmático, e também devido ao facto de serem afeccionados de jogos como a roleta e o póquer e Monte Carlo ser, naquela época, uma das capitais mundiais do jogo (Stanislaw Ulam tinha um tio que pedia constantemente dinheiro aos seus parentes, dizendo que precisava de ir para Monte Carlo). No entanto [29] afirma que Enrico Fermi (1901-1954) já tinha desenvolvido de forma independente, o método de Monte Carlo quinze anos antes, mas não publicou nenhum artigo sobre o tema.

A simulação de Monte Carlo consiste num processo de simulação computacional que usa números pseudoaleatórios e verifica que proporção desses números verifica uma ou mais propriedades. Na base da simulação está o *teorema da transformação uniformizante*, que de seguida apresentamos:

Teorema 5.1. Para qualquer variável aleatória contínua X , com função de distribuição F_X , a variável aleatória $Y = F_X(X)$ tem distribuição uniforme no intervalo $[0, 1]$, i.e.,

$$Y = F_X(X) \sim U(0, 1),$$

logo, $F_X^{-1}(Y)$ terá a mesma distribuição que a variável aleatória X .

Assim, o método consiste em gerar números pseudoaleatórios pertencentes ao intervalo $[0, 1]$, e depois transformá-los através da aplicação da função inversa da função de distribuição da variável aleatória que se pretende simular. No entanto, esta tarefa pode ser dificultada pelo facto de certas funções de distribuição F_X não estarem definidas de forma explícita (e consequentemente, a sua inversa também não está definida de forma explícita), não possuírem inversa (caso das variáveis discretas) ou mesmo possuindo inversa, esta seja difícil de determinar. Quando tais situações ocorrem é necessário recorrer a funções inversas generalizadas ou a métodos numéricos para descobrir os seus valores aproximados e, para tal, os meios tecnológicos são novamente uma mais-valia.

5.2 Simulação e o problema da ruína do jogador

As equações às diferenças permitiram-nos obter a solução exata do problema da ruína do jogador, como vimos no capítulo anterior. Utilizando a simulação de Monte Carlo, podemos igualmente obter resultados aproximados das características do problema da ruína do jogador. Aliás, a simulação permite-nos, em alguns casos, obter resultados que se tornavam muito morosos ou mesmo impossíveis, se os procurássemos obter por via analítica. Assim, nesta secção iremos apresentar alguns resultados de convergência estocástica, como a Lei dos Grandes Números ou o Teorema Limite Central e relacioná-los com o problema da ruína do jogador. As simulações que apresentaremos foram efetuadas com o *software* R e os programas que permitem essas simulações encontram-se no Apêndice A do presente trabalho. Na elaboração desta secção e para a construção dos programas em R baseámo-nos em [7], [10], [13], [24], [36], [37], [38] e [49].

Seja X uma variável aleatória com função de distribuição F_X , valor esperado μ e variância σ^2 . Sejam X_1, \dots, X_n n réplicas independentes de X , i.e. n variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas a X . Sejam x_1, \dots, x_n uma concretização de X_1, \dots, X_n .

Os teoremas de convergência asseguram-nos, sob determinadas condições, que, para uma dimensão n elevada, podemos através de x_1, \dots, x_n inferir ou obter valores aproximados para algumas características de X , razão pela qual, os resultados assintóticos são fundamentais como elo de ligação entre a Probabilidade e a Estatística.

O primeiro resultado de convergência foi demonstrado por Jakob Bernoulli (1654-1705), tendo sido publicada, em 1713, na sua obra póstuma *Ars Conjectandi*. Devido à sua importância, Bernoulli chamou-lhe *Teorema de Ouro*, sendo mais tarde designada por *Lei dos Grandes Números* por Poisson (1781-1840), em 1837, em contrapartida à sua Lei dos Pequenos Números (convergência, quando $n \rightarrow +\infty$, da distribuição binomial para a Poisson para valores de $p \approx 0$). Utilizando notação atual, considerando X uma prova de Bernoulli com probabilidade de sucesso p ($X \sim \text{Ber}(p)$), teremos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|\hat{p}_n - p| < \varepsilon) = 1, \forall \varepsilon > 0, \quad (5.1)$$

onde $\hat{p}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ representa a proporção amostral. Desta forma, a proporção amostral converge em probabilidade para a respetiva probabilidade. Este resultado foi consecutivamente generalizado por diversos autores, entre os quais se destacam Poisson, Chebycheff (1821-1894), Markov (1856-1922), Kolmogoroff (1903-1987), entre outros. Khintchine (1894-1959), em 1928, considerando μ finito, demonstra que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|\bar{X}_n - \mu| < \varepsilon) = 1, \forall \varepsilon > 0, \quad (5.2)$$

onde $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ representa a média amostral. Temos, neste resultado, a convergência em probabilidade da média amostral para a média populacional. A versão forte da Lei dos Grandes Números surge com Borel (1871-1956), em 1909, restrita a provas de Bernoulli. Kolmogoroff, em 1928, supondo μ finito, conclui que

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \bar{X}_n = \mu\right) = 1. \quad (5.3)$$

A Lei Forte dos Grandes Números está na origem de um outro resultado importante na Teoria da Probabilidade, a Lei do Logaritmo Iterado. Sendo um resultado de Hausdorff (1868-1942), de 1914, a sua forma usual é devida a Khintchine que, em 1924, considerando variância finita deduz

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{|\bar{X}_n - \mu| \sqrt{n}}{\sqrt{\ln(\ln(n))}} = \sqrt{2} \sigma\right) = 1. \quad (5.4)$$

Intuitivamente, a Lei do Logaritmo Iterado estabelece que a sequência estocástica \bar{X}_n flutua dentro dos limites $\mu \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{2 \ln(\ln(n))}$. Nos seguintes gráficos é ilustrada a Lei dos Grandes

Números e a Lei do Logaritmo Iterado (os limites definidos nesta lei estão representados a vermelho nos gráficos). Na Figura 5.1 é analisada a evolução da proporção amostral de jogos ganhos por A (programa para *software* R incluído no anexo A.2) e na Figura 5.2 a evolução do número médio de partidas até um jogo terminar (programa para *software* R incluído no anexo A.3). A linha horizontal representa o valor teórico obtido pelas equações às diferenças (4.28) e (4.48).

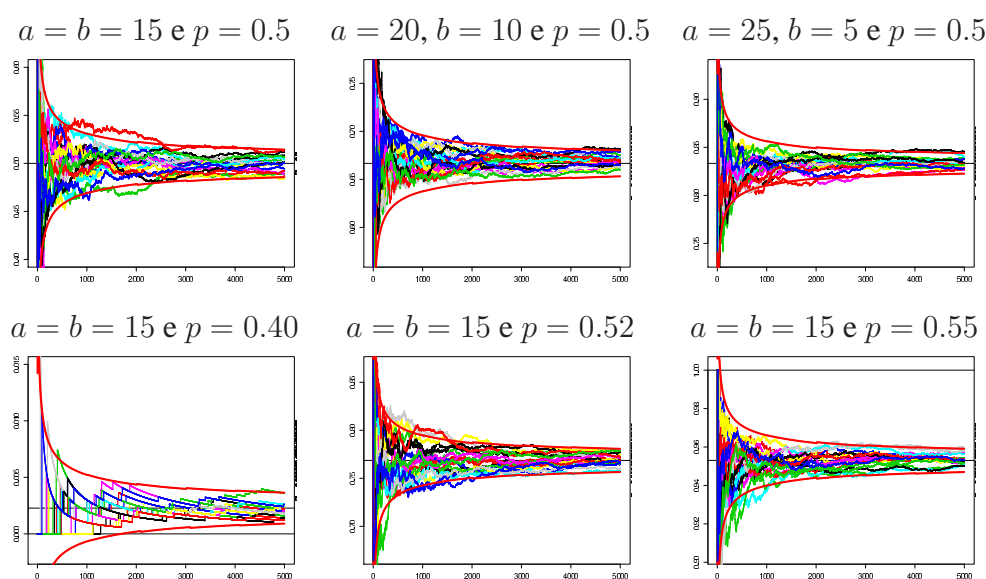


Figura 5.1: 20 réplicas da evolução da proporção amostral durante 5000 jogos

O Teorema Limite Central é, muito provavelmente, o resultado de convergência mais famoso na Teoria da Probabilidade, pela controvérsia que gerou nos séculos XVIII e XIX, bem como pelo papel preponderante que assume na Teoria da Probabilidade, razão pela qual Pólya (1887-1985), em 1920, o denominou por Teorema Limite Central. A primeira versão deste teorema foi obtido por de Moivre (1667-1754), em 1738, restrito a provas de Bernoulli, usualmente denominado de Teorema Limite Central de Moivre-Laplace. Desta forma, considerando $X \sim \text{Ber}(p)$, obtemos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left(\frac{\hat{p}_n - p}{\sqrt{p(1-p)}} \sqrt{n} \leq \varepsilon \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\varepsilon} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \Phi(\varepsilon), \quad (5.5)$$

onde Φ representa a função de distribuição de uma variável gaussiana standard. Este resultado tornou-se mais conhecido após os trabalhos de Laplace (1749-1827) e de Gauss (1777-1855). A Figura 5.3 (programa em R incluído no anexo A.4) compara as frequências, observadas

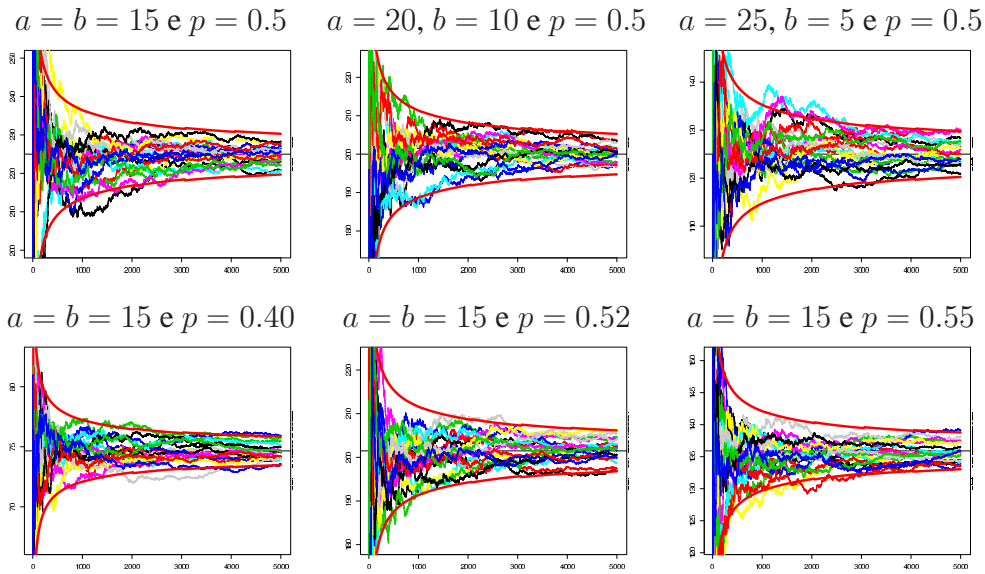


Figura 5.2: 20 réplicas da evolução da duração média do jogo durante 5000 jogos

em 10000 réplicas, da proporção de jogos ganhos pelo jogador A em n jogos, com a curva gaussiana.

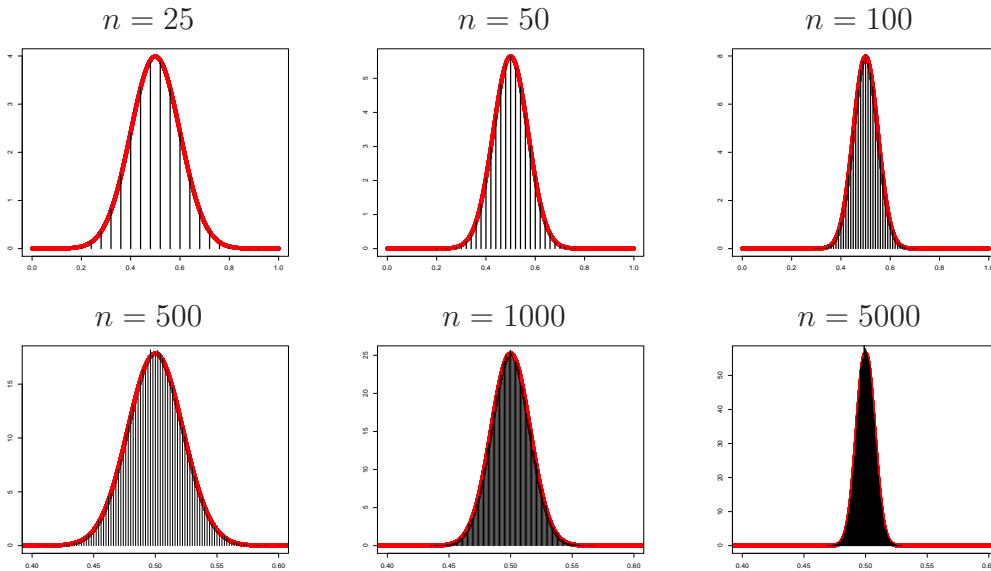


Figura 5.3: Distribuição da proporção amostral de n jogos com $a = b = 15$ e $p = 0.5$

Atualmente, existem diversas versões do Teorema Limite Central, na mais usualmente utilizada supõe-se variância finita, obtendo-se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left(\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \sqrt{n} \leq \varepsilon \right) = \Phi(\varepsilon) \quad \text{ou} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} F_{\bar{X}_n}(x) = \Phi \left(\sqrt{n} \frac{x - \mu}{\sigma} \right). \quad (5.6)$$

Temos, neste teorema, a convergência em distribuição da média amostral para a distribuição gaussiana. A Figura 5.4 ilustra⁽⁴⁾ o Teorema Limite Central (programa em R incluído no anexo A.5), analisando a média da duração de n jogos, em 10000 réplicas, onde se pode observar que, à medida que n aumenta, o histograma dos valores observados de \overline{X}_n aproxima-se da curva gaussiana.

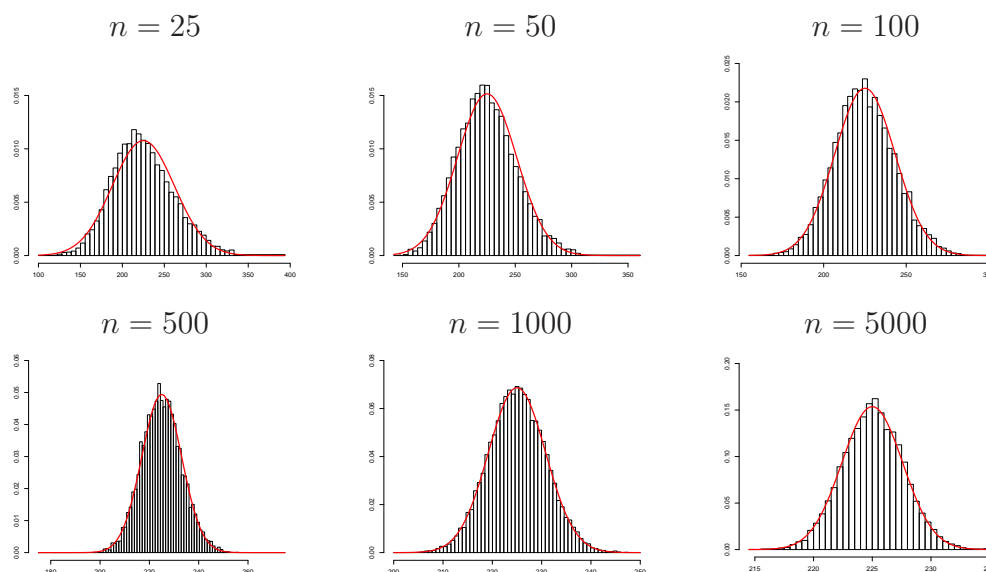


Figura 5.4: Distribuição da média amostral da duração de n jogos ($a = b = 15, p = 0.5$)

A ponte de ligação entre a probabilidade e as regularidades empíricas é a relação entre a função de distribuição teórica $F_X(x)$ e a função de distribuição empírica $\widehat{F}_n(x)$ definida por

$$\widehat{F}_n(x) = \frac{\#\{x_i \leq x\}}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{]-\infty, x]}(x_i), \quad (5.7)$$

onde \mathbb{I} representa a função indicatriz. As várias facetas de inferência estatística podem ser interpretadas, direta ou indiretamente, pela relação entre a função de distribuição empírica e a função de distribuição teórica, quer seja a estimação, quer sejam testes de hipóteses; sendo os resultados que ligam $\widehat{F}_n(x)$ com $F_X(x)$ fundamentais. Se considerarmos a distância definida

⁽⁴⁾ Nestes gráficos, para analisar a aproximação do histograma à densidade da gaussiana, é importante a amplitude utilizada na definição das classes. Contudo, uma vez não ser nosso objetivo efetuar uma análise detalhada sobre esta convergência, não iremos desenvolver esta ideia mas salientamos que a definição da amplitude é importante quando utilizamos um histograma na estimação de uma densidade. Mais informação pode ser obtida em [45].

por $\Delta_n = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \widehat{F}_n(x) - F_x(x) \right|$, então o Teorema de Glivenko-Cantelli garante

$$\mathbb{P} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \Delta_n = 0 \right) = 1, \quad (5.8)$$

certificando a convergência de $\widehat{F}_n(x)$ para $F_x(x)$.

Se representarmos por $F_a(x)$ a probabilidade de, no máximo, um jogo durar x partidas até terminar quando o jogador A detém $a \in$, então, consultando Feller [18] ou Takacs [44], temos que o valor da probabilidade $F_a(x)$ é dado por:

$$F_a(x) = 1 - \frac{(4pq)^{\frac{x+1}{2}}}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\cos^x \frac{k\pi}{n} \sin \frac{k\pi}{n}}{1 - 2\sqrt{pq} \cos \frac{k\pi}{n}} \left[\left(\frac{p}{q} \right)^{\frac{a}{2}} \sin \frac{ka\pi}{n} + \left(\frac{q}{p} \right)^{\frac{b}{2}} \sin \frac{kb\pi}{n} \right]. \quad (5.9)$$

Na Figura 5.5 comparamos a função de distribuição empírica (programa em R incluído no anexo A.6) para diversos valores de n com a função de distribuição teórica $F_a(x)$, onde se ilustra a aproximação entre $\widehat{F}_n(x)$ e $F_a(x)$ com o aumento de n . A visualização do Teorema

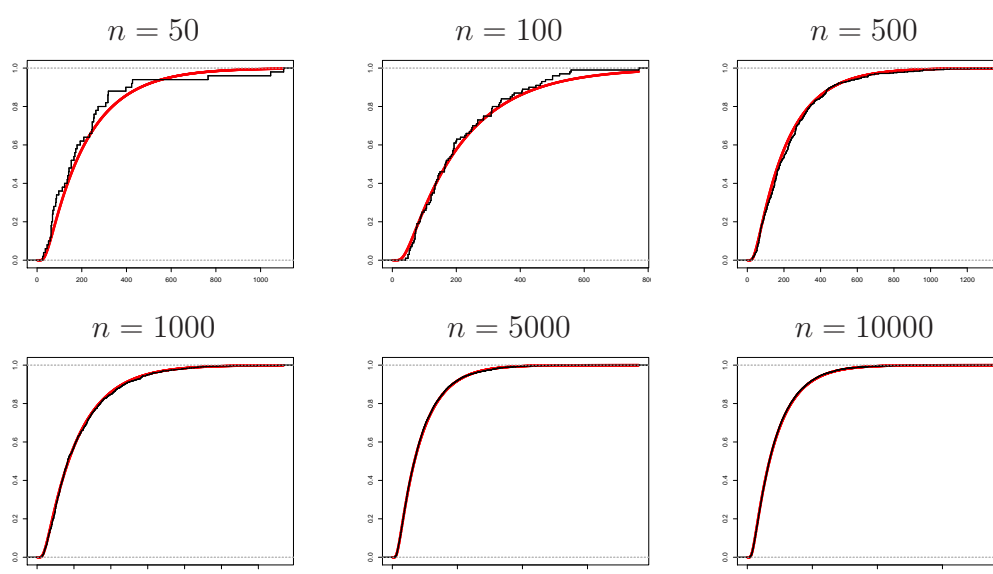


Figura 5.5: Função de distribuição empírica da duração do jogo com $a = b = 15$ e $p = 0.5$

Limite Central pode ser igualmente efetuada recorrendo ao Teorema de Glivenko-Cantelli, comparando a função de distribuição empírica da proporção amostral (Figura 5.6) ou a função de distribuição empírica da média amostral (Figura 5.7) com a função de distribuição da gaussiana (programas em R incluídos nos anexos A.7 e A.8), tendo sido utilizadas as mesmas simulações que, respetivamente, nos gráficos da Figura 5.3 e Figura 5.4.

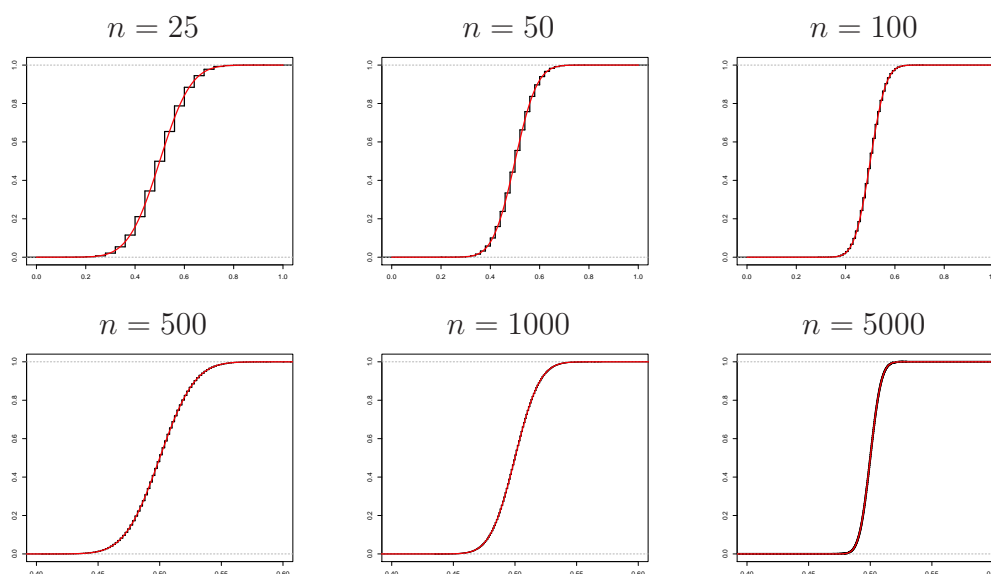


Figura 5.6: Distribuição da proporção amostral em n jogos com $a = b = 15$ e $p = 0.5$

5.3 Simulação e o Ensino das Probabilidades

As Probabilidades são uma das partes da Matemática em que os professores do ensino não superior sentem mais dificuldades em leccionar. Essas dificuldades provêm de interpretações erradas de conceitos probabilísticos, originadas muitas vezes por uma disparidade entre a intuição e o verdadeiro significado concetual do que se está a estudar. Esta disparidade é partilhada por docentes e alunos. A simulação poderá ajudar, discentes e docentes, a observar resultados sobre uma determinada experiência simulada e a obter informação sobre a situação real, contribuindo assim para um aclarar de conceções que poderiam não ser corretas [5].

A tecnologia influencia o modo como a matemática é ensinada e a forma como os alunos vêem a matemática. O recurso a programas que permitem a modelação e a simulação de problemas possibilita aos alunos estudar diversos tipos de distribuições de probabilidades. A tecnologia permite também esbater fronteiras artificiais entre tópicos como a análise, a álgebra e a análise de dados, fazendo com que os alunos possam utilizar as ideias sobre uma determinada área para melhor compreenderem outra área da matemática [30].

Os programas, que permitem a simulação de problemas probabilísticos, constituem uma ferramenta educacional que permite aos estudantes modelar e experimentar fenómenos aleatórios, possibilitando-lhes uma outra realidade e interpretação da teoria frequencista da probabilidade que dificilmente seria possível sem o uso de tais ferramentas, pois os fenómenos

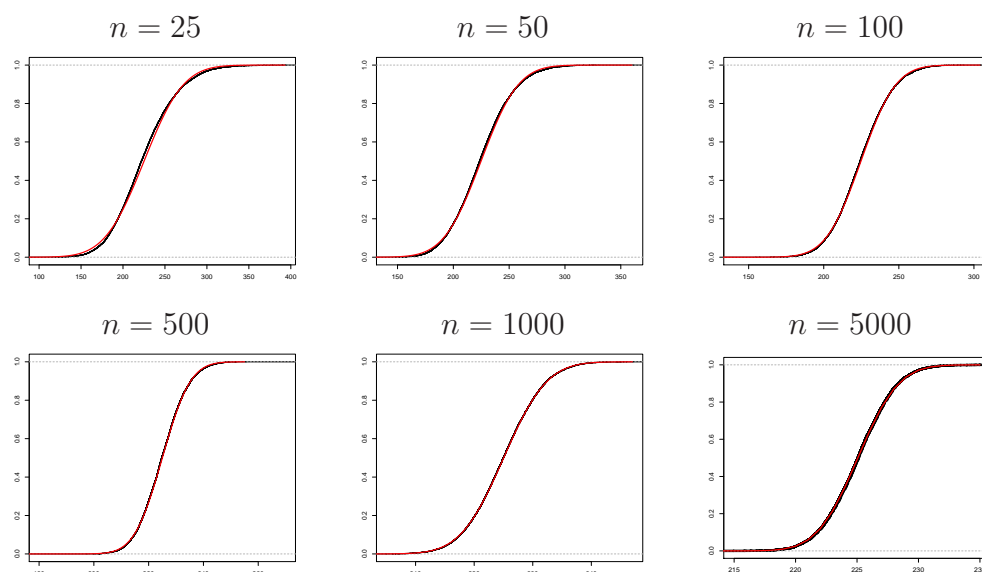


Figura 5.7: Distribuição da média amostral da duração de n jogos ($a = b = 15, p = 0.5$)

aleatórios possuem por vezes características temporais ou espaciais que condicionam a real concretização de experimentação. A simulação permite também aos alunos reconhecer as diferenças entre a definição clássica e a definição frequentista de probabilidade [5].

A importância da simulação no ensino das probabilidades não impede a existência de algumas condicionantes ou de alguns cuidados que se devem ter, quando se usa esta ferramenta. Por exemplo, é frequente os alunos demonstrarem alguma resistência em usar a simulação nos casos em que sentem ser possível obter o valor da probabilidade usando o cálculo formal e também é usual não aceitarem dados de simulações que não foram realizadas pessoalmente por eles. O trabalho com simulação em computadores implica sempre que o professor verifique que efetivamente os alunos sabem trabalhar com o *software* em causa e que faça compreender aos seus alunos a diferença entre o valor aproximado que a simulação proporciona e o seu verdadeiro valor teórico [11].

No final de uma tarefa realizada com recurso à simulação com meios informáticos, devem ser sempre confrontados os resultados aproximados da simulação com os valores reais obtidos pelo cálculo formal. A simulação embora nos forneça uma solução aproximada do problema, não nos dá a razão porque é válida, e por tanto, peca por não ter valor explicativo, sendo necessário o cálculo formal de probabilidades [4].

Batanero, Godino & Roa [6] afirmam que os livros escolares e os documentos oficiais de apoio à implementação do currículo escrito são muitas vezes limitados, não oferecendo o

apoio necessário aos professores, para que possam colmatar as dificuldades relacionadas com o ensino das Probabilidades e da Estatística. Os livros escolares apresentam muitas vezes uma visão limitada das Probabilidades, focando apenas a definição clássica de Probabilidade, ou seja, o cálculo de probabilidades utilizando a Lei de Laplace.

No entanto, queremos realçar o facto de que, em Portugal nos últimos anos, com a implementação de novos programas de matemática tanto ao nível do ensino secundário como ao nível do ensino básico, se ter vindo a assistir a um relevar no currículo escrito de conteúdos relacionados com Estatística e com Probabilidades, bem como a uma necessidade de abordar esses temas de forma diferente. Assim, surgiram diversos documentos que visam auxiliar os professores no ensino da Estatística e das Probabilidades. No final da década de 90 do século passado, foram editadas brochuras que visavam apoiar os professores, na implementação dos novos programas de matemática do ensino secundário, em 1998. Entre essas brochuras, referimos a brochura de apoio ao ensino da Estatística no 10.º ano [25] e a brochura de apoio ao ensino das Probabilidades no 12.º ano [26], que apresentam os conceitos a lecionar, sugestões metodológicas e exemplos de exercícios. Em 2004, com a nova estruturação do ensino secundário e a criação das disciplinas de Matemática A, Matemática B e Matemática Aplicada às Ciências Sociais, a Estatística e as Probabilidades ganharam maior peso. Esse realce é mais notado no currículo dos estudantes de Humanidades, que passaram a ter mais contacto, na disciplina de Matemática Aplicada às Ciências Sociais, com conteúdos relacionados com a inferência estatística ou probabilidade condicionada, por exemplo. Os professores e alunos têm atualmente acesso a muitos sítios na internet que apresentam *applets* que possibilitam a simulação de diversas experiências aleatórias. O sítio português, <http://www.alea.pt/>, é um exemplo desse tipo de recursos que está ao dispor de alunos e docentes. Salientamos também o facto de este sítio ser rico em materiais de apoio aos professores, quer de Estatística, quer de Probabilidades, apresentando dossiês temáticos de apoio aos temas lecionados no ensino não superior e tarefas a realizar com os alunos destes níveis de ensino. Alguns desses dossiês permitem ao professor aprender a usar programas como o *MS Excel* ou o *R* para realizar tarefas relacionadas com as unidades temáticas já referidas, pois o docente poderá sempre optar por não utilizar *applets* construídos por outros para realizar simulações, mas antes utilizar *software* apropriado para as efetuar. A preocupação pelo ensino das Probabilidades e Estatística no ensino básico também é salientada no livro *Matemática na educação básica* [1] de 1999. Os autores referem que o ensino destes conteúdos só passou a ser integrado no ensino básico, com a implementação do programa de matemática do ensino básico de 1991. Os autores

salientam também que:

Apesar dos fenómenos aleatórios estarem presentes na sociedade, a escola orientou tradicionalmente o pensamento para explicações deterministas. Há necessidade de dar aos alunos uma visão mais equilibrada e menos determinista e, nesse sentido, desenvolver o pensamento estatístico e probabilístico ao longo da escolaridade constitui um aspeto importante da formação que a escola deve proporcionar. [1, p.94]

A importância da tecnologia no ensino destes conteúdos é reforçada:

As tecnologias atuais, nomeadamente a calculadora e o computador, trazem novas possibilidades para a aprendizagem da estatística e das probabilidades, em especial, ao permitirem trabalhar com dados reais e fazer simulações. As capacidades destas tecnologias na organização e visualização de dados e na execução de cálculos, assim como o retorno quase imediato dos efeitos das decisões tomadas, tornam possível uma ênfase na compreensão e exploração de conceitos, na interpretação de informação e na avaliação de argumentos. [1, p.95]

O *Programa de Matemática do Ensino Básico* [34], de 2007, veio dar ainda mais força ao ensino da Estatística e das Probabilidades no ensino básico. Além disso, ao nível do ensino básico, poderemos encontrar na brochura *Organização e tratamento de dados* [27], tarefas diversas sobre Probabilidades e Estatística, direcionadas aos alunos do 1.º ao 9.º anos de escolaridade e, o que pensamos ser mais importante, o esclarecimento dos conceitos relacionados com estes temas. Nessa brochura, é também realçada a importância da simulação no ensino das probabilidades e a necessidade de usar *software* ou meios tecnológicos, para que não seja apenas apresentada a definição clássica das probabilidades. É também explicado a forma de as realizar com o programa *MS Excel*.

Os alunos aprendem a noção frequentista de probabilidade no terceiro ciclo, usualmente no nono ano de escolaridade. O *Programa de Matemática do Ensino Básico* [34] refere que, no terceiro ciclo, os alunos devem compreender e usar a frequência relativa para estimar a probabilidade e que as tarefas e recursos relacionados com o tema, organização e tratamento de dados, devem relacionar os temas em estudo com assuntos de outras disciplinas ou com interesses dos alunos, promovendo uma atitude crítica e usando, sempre que possível, recursos

tecnológicos. No final do terceiro ciclo, os alunos devem ter a noção de experiência aleatória e calcular a probabilidade de um acontecimento, usando a definição frequentista de probabilidade ou a Lei de Laplace. As *Metas de Aprendizagem* [28] para a disciplina de Matemática do 3.º ciclo referem como meta intermédia do 9.º ano, que o aluno deve estimar a probabilidade de um acontecimento usando a frequência relativa.

A relevância do uso da tecnologia para o estudo de fenómenos probabilísticos também pode ser encontrado nos programas das diferentes disciplinas de Matemática que existem atualmente, a partir do 10.º ano de escolaridade. Assim, os alunos que frequentam cursos de carácter geral e que têm a disciplina *Matemática A* no seu desenho curricular, aprenderão conteúdos relacionados com Probabilidades no 12.º ano. Os conteúdos lecionados no 12.º ano em *Matemática A* incluem: definição clássica e frequentista de probabilidade, análise combinatória, probabilidade condicionada, axiomática das probabilidades, variáveis aleatórias, modelo Normal, modelo Binomial, triângulo de Pascal e binómio de Newton. O *Programa de Matemática A do 12.º ano* refere:

Experiências que permitam tirar partido de materiais lúdicos e de simulações com a calculadora contribuirão para esclarecer conceitos através da experimentação e para dinamizar discussões de tipo científico, bem como para incentivar o trabalho cooperativo. A simulação e o jogo ajudam a construir adequadamente o espaço dos resultados e a encontrar valores experimentais para a probabilidade de acontecimentos que estão a ser estudados. [40, p.2]

Os alunos que aprendem *Matemática B* sofrem, tal como os seus colegas de *Matemática A*, um hiato de três anos, relativamente aos conteúdos relacionados com Probabilidades, entre o 9.º e o 12.º anos. Os conteúdos lecionados em *Matemática B* são em menor número e são menos aprofundados do que em *Matemática A*. Assim, o *Programa de Matemática B do 12.º ano* [41] afirma que os alunos devem reconhecer as vantagens em encontrar modelos matemáticos apropriados para estudar fenómenos aleatórios, construir modelos de probabilidade em situações simples e usá-los para calcular a probabilidade de alguns acontecimentos e apreender as propriedades básicas das distribuições de probabilidade. A importância da simulação e da tecnologia no ensino desta unidade temática é também realçado:

A base da aprendizagem deve estar na experimentação – recorrendo a materiais manipuláveis ou simulações – e na resolução de problemas. Ao modelarem

situações, os estudantes são conduzidos a construir o espaço de resultados de uma experiência aleatória e a definir acontecimentos. Os estudantes poderão usar simulações para construir empiricamente distribuições de probabilidades e utilizar a noção frequentista de probabilidade comparando resultados de simulações para prever valores da probabilidade de um acontecimento. [41, p.3]

Geralmente no 11.º ano (o ano de ensino destes conteúdos depende do facto dos alunos terem a disciplina 2 ou 3 anos e de a iniciarem no 10.º ou 11.º anos), os alunos de *Matemática Aplicada às Ciências Sociais* aprendem conteúdos relacionados com probabilidade condicionada, teorema de Bayes, modelo normal ou independência de acontecimentos. A análise combinatória não é abordada. Os alunos destes cursos aprendem também conteúdos relativos à inferência estatística, aprendendo, por exemplo, o teorema limite central e a construir intervalos de confiança para a média ou para a proporção. A modelação matemática assume uma grande importância no *Programa de Matemática Aplicada às Ciências Sociais* [39], bem como o uso da tecnologia para construir esses mesmos modelos. É referido que o uso de tecnologia facilita uma participação ativa do estudante na sua aprendizagem. A importância da simulação em ambiente informático é também valorizada:

O computador, pelas suas potencialidades, nomeadamente nos domínios do tratamento dos dados e da representação gráfica de funções e da simulação, permite actividades não só de exploração e pesquisa como de recuperação e desenvolvimento, pelo que constitui um valioso apoio a estudantes e professores. Programas de Cálculo Numérico e Estatístico, particularmente uma Folha de Cálculo, de Gráficos e Simulação, fornecem diferentes tipos de perspectivas tanto a professores como a estudantes. [39, p.11]

Acreditamos assim ser importante proporcionar aos alunos, momentos que lhes permitam a realização de simulações probabilísticas com os meios tecnológicos adequados e os façam compreender a sua importância e o seu uso, tanto em Matemática como nas outras Ciências. Tais momentos permitir-lhes-ão uma melhor apreensão da definição frequentista de probabilidade. No entanto, como já foi referido, deve ser salientado o facto de que os valores que foram obtidos com a simulação são aproximados e os discentes devem ser confrontados, sempre que possível, com a solução exata obtida pelo cálculo formal. Tal conduta, fará com que os alunos consigam compreender mais facilmente as duas definições de probabilidade que são

ensinadas até ao 12.º ano: a definição frequencista e a definição clássica de probabilidade.

5.4 Simulação e o problema da ruína do jogador: uma proposta de implementação no ensino secundário.

A análise que efetuámos ao currículo da disciplina de matemática ao nível do ensino não superior, relativamente aos conteúdos de probabilidades, conjuntamente com o estudo que foi feito acerca do problema da ruína do jogador, tanto ao nível histórico como ao nível das diversas abordagens de resolução permite-nos concluir que, recorrendo à simulação probabilista, os alunos do nono ao décimo segundo ano de escolaridade possuem as ferramentas matemáticas necessárias para apreensão de muitas das características do problema da ruína do jogador e poderão determinar valores aproximados das suas soluções, recorrendo à folha de cálculo *Microsoft Excel* ou ao *software R*. Além disso, os alunos destes níveis de ensino, apesar de não possuírem bases teóricas que lhes permitam a dedução da probabilidade do jogador A vencer o jogo, \mathbb{P}_a , apresentada em (4.28) na página 44, possuem conhecimentos ao nível das funções que lhes permitem determinar o valor real dessa probabilidade se lhes for dado a conhecer a solução (4.28). No entanto, os alunos só tomam conhecimento das funções definidas por ramos no décimo ano de escolaridade e, por isso, a solução (4.28) teria de ser apresentada com uma estrutura diferente para alunos do nono ano. Assim, os alunos destes anos de escolaridade poderão contrapor as soluções aproximadas que a simulação com *Microsoft Excel* ou *software R* com a solução obtida de forma analítica, como Countinho [11] refere. Apesar dos alunos do nono ao décimo primeiro anos poderem compreender a maioria das características do problema da ruína do jogador, pensamos que todas as vertentes do problema serão melhor apreendidas pelos alunos do 12.º ano de matemática A ou matemática B, recorrendo à simulação.

Com vista à realização de simulações relacionadas com o problema da ruína do jogador elaborámos 3 programas em *Visual Basic* para serem utilizados em *Microsoft Excel*. Estes programas podem ser consultados no Anexo 2 e para a sua construção baseámo-nos em [3], [9], [23] e [32].

O programa indicado no Anexo B.1 pergunta ao aluno qual é a probabilidade do jogador A vencer uma partida, quanto é que cada jogador A e B irá apostar e qual é o número máximo de

partidas que poderão realizar (o programa precisa de uma condição de paragem) e depois gera números pseudoaleatórios não inferiores a 0 e não superiores a 1 e, com base nesses números, irá gerar um jogo da ruína (se o número aleatório for inferior à probabilidade indicada, o jogador *A* ganha um euro do seu adversário e, se for superior à probabilidade indicada, perderá um euro para o seu adversário). Podemos ver um exemplo de um jogo gerado com esse programa na Figura 5.8.

	Dinheiro do jogador A		
n.º aleatório	3		
0,509013407	2		
0,405421683	3		
0,760948628	2		
0,708367809	1		
0,5045225	0		

Figura 5.8: Simulação de um jogo da Ruína em Excel, $a = b = 3$ e $p = 0,5$

Construímos um segundo programa em *Visual Basic* (Anexo B.2) que questiona o aluno quantas réplicas do jogo da ruína pretende simular, qual o valor da probabilidade do jogador *A* vencer cada partida, quais os valores que cada um dos jogadores pretende apostar e quantas partidas poderão efetuar em cada jogo. Em seguida, surgirá a simulação de todas as réplicas que o aluno indicou (de forma análoga ao da Figura 5.8), aparecendo ao cimo o vencedor de cada jogo e o número de partidas realizadas conforme a Figura 5.9. Além disso, o programa determina a proporção de jogos em que o jogador *A* foi vencedor, perdeu ou que permanecem inacabados ao fim do número máximo das partidas indicadas pelo aluno. O programa determina também o número médio de partidas realizadas.

No terceiro programa (anexo B.3), pretendemos que os alunos analisem jogos com tipos de apostas diferentes, para isso, o aluno indicará os dados já referidos para o segundo programa e terá de indicar dois tipos de apostas, desde que os valores das apostas sejam divisores daquilo que cada um dos jogadores apostou.

Estes programas para *Microsoft Excel* permitem ao aluno obter um valor aproximado da probabilidade de um jogador vencer o jogo da ruína e um valor aproximado da sua duração, podendo analisar os efeitos da variação do tipo de apostas, dos montantes a apostar ou da probabilidade de vencer uma partida, havendo no entanto, a necessidade de se restringir o jogo a um determinado número máximo de partidas. No entanto, não permitem a simulação de um

Simulação

Vencedor?	B	A	A	B	B		
N.º partidas jogadas?	2	2	8	6	6		
Prob. de A vencer 1 partida = 0,5							
Quantia inicial de A = 2						5 jogos	2 vitórias
Quantia inicial de B = 2							%vitórias= 40
Total em jogo = 4	2	2	2	2	2		
0,12067335	1	3	3	3	3		
0,687330091	0	4	2	2	2		
0,434972568			3	1	3		
0,803679961			2	2	2		
0,893040393			3	1	1		
0,557135442			2	0	0		
0,597439447			3				
0,02065917			4				

Figura 5.9: Simulação de cinco jogos da Ruína em Excel

Vencedor da partida=	A	B	B	B	A	A		
N.º partidas realizadas=	12	56	7	10	18	14		
Prob. do jogador A vencer 1 partida = 0,5								
N.º máximo de partidas a realizar=120								
Quantias iniciais: A = 3 B = 4								
Valor do 1.º tipo de aposta (a vermelho) = 1								
Valor do 2.º tipo de aposta (a preto) = 0,5								
Total em jogo = 7								
n.º aleatório	3	3	3	3	3	3		
0,926909074	4	2,5	2	2,5	4	2,5		
0,128590762	5	3	3	2	3	3		
0,73719985	4	3,5	2	1,5	4	2,5		
0,001330099	5	4	3	2	5	3		

Figura 5.10: Simulação de três jogos da Ruína em Excel com 2 tipos diferentes de apostas

número muito elevado de jogos e, por isso, devem ser complementados com os programas realizados para o *software* R destinados aos alunos (anexos A.1, A.9, A.10, A.11 e A.12), que permitem uma visualização gráfica dos jogos ou a simulação de um número muito maior de jogos da ruína de uma forma mais rápida.

Assim, acreditamos que os programas que construímos poderão ser aplicados ao nível do ensino não superior, principalmente ao nível do décimo segundo ano, permitindo a compreensão do problema da ruína do jogador e das suas propriedades e o estabelecer da ligação entre a definição frequencista e a definição clássica de probabilidade. O problema da ruína do jogador permite também uma valorização do ensino da História da Matemática, servindo de fio condutor para o ensino da origem da Teoria das Probabilidades. Assim, e a título de exemplo, construímos uma tarefa em que são utilizados os simuladores probabilistas já referidos (para Excel e para R), com vista ao estudo do problema da ruína do

jogador, permitindo explorar todas as potencialidades que acabámos de referir, essa tarefa encontra-se no anexo C. Os simuladores e a tarefa criada podem também ser acedidos em <https://sites.google.com/site/problemadaruina>.

A primeira parte da tarefa apresenta um resumo da origem do problema da ruína do jogador. A segunda parte da tarefa começa por intercalar questões que devem ser realizadas em Excel com perguntas que devem ser realizadas em R e pressupõe-se que os alunos conhecem as instruções básicas dos dois programas. O objetivo dessas primeiras questões é dar a conhecer os simuladores em R e em Excel. Em seguida, os alunos deverão determinar soluções aproximadas da probabilidade de um jogador vencer um jogo da ruína (sob certas condições indicadas) e do número médio de partidas de duração do jogo, usando os dois simuladores (R e Excel), sendo depois, apresentado ao aluno a probabilidade de um jogador vencer um jogo da ruína (apresentado em (4.28), página 44) e a duração esperada de um jogo da ruína (apresentada em (4.48), na página 56) quando um jogador tem a euros, sendo-lhes pedido que confrontem as respostas às suas questões com as que obterão utilizando os referidos resultados teóricos. Além disso, pretende-se que os alunos compreendam a Lei dos Grandes Números, referente à proporção de jogos ganhos, através da utilização do simulador cujo programa se encontra no anexo A.9. A tarefa continua com questões que visam conduzir o aluno à descoberta de algumas características referentes ao jogo da ruína. Por exemplo, pretende-se que o aluno perceba que se ambos os jogadores possuírem probabilidades iguais de vencerem uma partida, o jogo será mais favorável ao jogador que possuir mais dinheiro e que perceba que pequenas variações na probabilidade de um jogador vencer uma partida, podem provocar grandes variações na probabilidade de vencer um jogo da ruína. Pretende-se também que os alunos percebam que um jogo da ruína, que é desfavorável a um jogador numa partida, terá uma grande probabilidade de conduzir o jogador à ruína, independentemente do dinheiro que possua, devendo nesse caso, o jogador optar por realizar a maior aposta possível. Note-se que, a partir do momento em que estão familiarizados com os dois tipos de simuladores (R ou Excel), os alunos poderão optar por aquele que lhes parecer mais prático, sendo-lhes pedido que confrontem os valores aproximados obtidos com esses simuladores com os valores que obtiveram utilizando os resultados (4.28) e (4.48).

Capítulo 6

Conclusão

A origem do problema da ruína do jogador, as suas diversas versões e possíveis resoluções estão ligadas de forma muito próxima com a evolução do conhecimento matemático ocorrido nos últimos séculos. O seu estudo e a riqueza do problema permitem obter um retrato do desenvolvimento da teoria das probabilidades, tendo o referido problema servido de base para o surgimento de outro grande problema das probabilidades, o problema da duração do jogo. As possíveis soluções de Huygens, Fermat ou Pascal e a engenhosa solução de De Moivre relembram-nos o grau de complexidade das ferramentas que estes matemáticos possuíam para resolver estas questões, apesar da teoria das probabilidades estar no seu início, sendo uma delas as equações às diferenças.

O estudo das equações às diferenças neste trabalho permitiu-nos descobrir as suas variadas aplicações, em Economia, no cálculo de juros, amortizações ou na construção de modelos económicos complexos; em Biologia, na conceção de modelos populacionais; em Matemática, em probabilidades ou na resolução de problemas como a Torre de Hanói e a sucessão de Fibonacci.

O problema da ruína do jogador permitiu também a perceção de características que podem ser adaptadas a muitos jogos de azar atuais, como a roleta americana, contribuindo para a compreensão de quão pouco justos esses jogos são, pois conduzem na maioria das vezes esses jogadores à ruína.

A evolução da tecnologia permite novas abordagens a problemas antigos, que não tinham solução ou tinham soluções complexas. Foi a construção do primeiro computador, o ENIAC, que fez Stanislaw Ulam, no final da década de 40 do século XX, lembrar-se de processos

estocásticos que haviam sido esquecidos devido à sua morosidade ou complexidade de cálculos, levando-o à criação do método de simulação de Monte Carlo, pois havia finalmente uma ferramenta para estes serem concretizados de forma mais prática.

O computador e as novas tecnologias constituem ferramentas que permitem aos professores apresentarem aos seus alunos, soluções de problemas, mais ou menos antigos, que de outra forma seriam difíceis ou impossíveis de apresentar. As simulações que efetuámos com o programa R, permitiram-nos uma compreensão de alguns resultados importantes da convergência estocástica como a Lei do Logaritmo Iterado. Acreditamos que as simulações (mais simples) que construímos para o *software* R (anexos A.1, A.9, A.10, A.11 e A.12), e as que concebemos para serem usadas em Excel (anexos B.1, B.2 e B.3), poderão servir para que os alunos do ensino secundário consigam apreender as características do problema da ruína do jogador, nomeadamente os alunos do décimo segundo ano, dado ser neste ano letivo que a maioria dos alunos (Matemática A e B) aprofundam os seus conhecimentos em probabilidades. Pensamos também que a construção de tarefas (como a que apresentamos no anexo C) que dão a conhecer a História da Matemática aos alunos, fazendo-os perceber da importância desta ciência e também do facto de que aquilo que estudam não é de todo um saber *recente*, fará com que estes tenham uma visão da matemática diferente e mais alargada. Além disso, pensamos que a tarefa e os programas que construímos servirão para que se saliente a importância da tecnologia na matemática e, em particular, da simulação nas probabilidades.

Pensamos que as dificuldades sentidas pelos alunos no estudo das probabilidades e pelos professores no seu ensino, referidas por Batanero, Godino & Cañizares [5], e que levam muitas vezes ao desinteresse pelo seu estudo, poderão ser colmatadas se o seu ensino não se limitar apenas à definição clássica de probabilidade ou à aplicação de fórmulas decoradas. Nesse sentido, nos últimos anos, os programas de matemática do ensino básico e secundário têm alertado para a importância (e necessidade) do uso da tecnologia em matemática e da simulação nas probabilidades, tendo sido construídos diversos recursos, como brochuras de apoio, para que os docentes ultrapassem as suas dificuldades. Resta-nos esperar que essa mudança seja efetiva. A realização do presente trabalho incrementou o nosso interesse pelo estudo das probabilidades e da história da matemática, tendo contribuído para uma visão mais alargada da utilização da tecnologia em matemática e em meio escolar e, enquanto docente do ensino não superior, pensamos ter contribuído para o ultrapassar de algumas dificuldades que poderíamos sentir no ensino destes conteúdos.

Bibliografia

- [1] Abrantes, P., Serrazina, L., Oliveira, I. (1999). *A Matemática na educação básica*. Ministério da educação, Departamento da Educação Básica.
- [2] Agarwal, R. P. (1992). *Difference equations and inequalities: theory, methods and applications*. Marcel Dekker, New York.
- [3] Azul, A. (2005). *Bases de Programação II*, Porto Editora.
- [4] Batanero, C. (2003). La Simulación como Instrumento de Modelización en Probabilidad, *Revista Educación y Pedagogía*, Medellín: Universidad de Antioquia, Facultad de Educación, Vol. XV, n.º 35, pp. 39–54.
- [5] Batanero, C., Godino. J. D. & Cañizares, M. J. (2005). Simulation as a tool to train Pre-service School Teachers. *Proceedings of First ICMI African Regional Conference*. ICMI, Johannesburg.
- [6] Batanero, C., Godino. J. D. & Roa, R. (2004). Training Teachers To Teach Probability, *Journal of Statistics Education*, vol. 12, n.º 1 (disponível em <http://www.amstat.org/publications/jse/v12n1/batanero.html>).
- [7] Campos, P. & Sousa, R. (2009). *Dossier XIV Estatística com R Uma Iniciação para o Ensino Básico e Secundário* (disponível em <http://www.alea.pt/html/statofic/html/dossier/doc/dossier14.pdf>).
- [8] Huygens (1656). Correspondence of Huygens Regarding Games of Chance – Extracted from Volumes I and II of the oeuvres completes of Christiaan Huygens. (disponível em <http://www.cs.xu.edu/math/Sources/Huygens/sources/correspondenceof1656.pdf>).
- [9] Carvalho, A. (2005). *Programação com Excel para Economia & Gestão*, FCA.

- [10] Cohen, J. & Cohen, Y. (2008). *Statistics and Data with R - An applied approach through examples*. John Wiley & Sons.
- [11] Countinho, C. (2001). *Introduction aux situations aléatoires des le Collège: de la modélisation à la simulation d'expériences de Bernoulli dans l'environnement informatique Cabri-géométre-II*. Tesis Doctoral. Universidad de Grenoble. (disponível em <http://www-diam.imag.fr/ThesesIAM/thesCiledaC.PDF>).
- [12] Cull, P., Flahive, M., Robson, R. (2000). *Difference Equations: From Rabbits to Chaos*. Springer, New York.
- [13] Dalgaard, P. (2002). *Introductory Statistics with R*, Springer, New York.
- [14] David, F. N. (1962). *Games, Gods and Gambling: a History of Probability and Statistical Ideas*, Charles Griffin & Co., London.
- [15] Edwards (1983). Pascal's Problem: The 'Gambler's Ruin', *International Statistical Review* 51 n.º 1, pp. 73–79.
- [16] Elaydi, S. (1996). *An Introduction to Difference Equations*, Springer-Verlag, New York.
- [17] Epp, S. (1990) *Discrete mathematics with applications*, Wadsworth Publishing Company, California.
- [18] Feller, W. (1967). *Introduction to Probability Theory*, vol.1, John Wiley & Sons, pp. 342–362.
- [19] Ferreira, M. A. & Menezes, R. (1992). *Equações com diferenças*, edições sílabo, Lisboa.
- [20] Gouraud, C. (1848). *Histoire des Calculs des Probabilités Depuis ses Origines Jusqu'à nos Jours*, Librairie D. Auguste Durand, Paris.
- [21] Hald, A. (2003). *History of Probability and Statistics and their Applications Before 1750*, John Wiley & Sons, New Jersey.
- [22] Kelley, W. & Peterson, A. (2001). *Difference Equations: An Introduction with Applications*, Academic Press.
- [23] Loureiro, H. (2007). *Visual Basic.Net 2005 - Curso Completo*, FCA.

- [24] Maindonald, J. & Braun, J. (2003). *Data Analysis and Graphics Using R - An Example-based Approach*, Cambridge University Press.
- [25] Martins, M. E. G. , Monteiro, C., Viana, J. P. e Turkman, M. A. (1997). *Estatística: Matemática - 10.º ano de escolaridade*. Ministério da Educação, Departamento do Ensino Secundário (disponível em <http://area.dgcidc.min-edu.pt/mat-no-sec/brochuras.htm>).
- [26] Martins, M. E. G. , Monteiro, C., Viana, J. P. e Turkman, M. A. (1999). *Probabilidades e Combinatória: Matemática - 12.º ano de escolaridade*. Ministério da Educação, Departamento do Ensino Secundário (disponível em <http://area.dgcidc.min-edu.pt/mat-no-sec/brochuras.htm>).
- [27] Martins, M. E. G. & Ponte, J. P. (2010). *Organização e tratamento de dados*, Ministério da Educação, Direção Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular (disponível em http://area.dgcidc.min-edu.pt/materiais_NPMEB/matematicaOTD_Final.pdf).
- [28] ME-DGIDC (2010). *Metas de Aprendizagem para o Ensino Básico*, Ministério da Educação, Direção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular (disponível em <http://www.metasdeaprendizagem.min-edu.pt>).
- [29] Metropolis, N. The Beginning of the Monte Carlo Method. *Los Alamos Science*, n.º 15, pp. 125-130.
- [30] NCTM (2007). *Princípios e normas para a Matemática escolar*. NCTM/APM, Lisboa.
- [31] Nicolau, J. (2003). Equações diferenciais & equações às diferenças, Instituto Superior de Economia e Gestão da Universidade Técnico da Lisboa (disponível em http://pascal.iseg.utl.pt/~nicolau/myHP/ED_2.pdf).
- [32] Peres, P. (2011). *Excel Avançado*, 3.ª edição. Edições Sílabo.
- [33] Pestana, D. D. & Velosa, S. F. (2009). *Introdução à Probabilidade e à Estatística*, Vol. 1, 3.ª ed., Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa (pp. 276 – 280).
- [34] Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H., Brenda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M. E., Oliveira, P. (2007) *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Ministério da Educação, Direção Geral de Desenvolvimento Curricular, Lisboa.

- [35] Rosen, K. (2007). *Discrete Mathematics and its applications*. 6th ed. Mc Graw Hill
- [36] Ross, S. M. (2006). *Simulation*, 4th edition, Elsevier Academic Press.
- [37] Rubinstein, R. Y. (2008) *Simulation and the Monte Carlo method*, 2nd ed, John Wiley & Sons.
- [38] Santos R. (2008). *Probabilidade Circa 1914 e a Construção de Pacheco d' Amorim*, Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa.
- [39] Silva, J. C., Martins, M. E. G., Martins, A. A., Loura, L. C. C. (2001) *Programa de Matemática Aplicada às Ciências Sociais*. Ministério da Educação, Departamento do Ensino Secundário, Lisboa.
- [40] Silva, J. C., Fonseca, M. G. , Martins, A. A., Fonseca, C. M. C., Lopes, I. M. C. (2002) *Programa de Matemática A do 12.º ano*. Ministério da Educação, Departamento do Ensino Secundário, Lisboa.
- [41] Silva, J. C., Fonseca, M. G. , Martins, A. A., Lopes, I. M. C. (2002). *Programa de Matemática B do 12.º ano*. Ministério da Educação, Departamento do Ensino Secundário, Lisboa.
- [42] Stigler, S. M. (1991). Stochastic Simulation in the Nineteenth Century, *Statistical Science* 6, n.º 1, pp. 89-97.
- [43] Sydsaeter, K. & Hammond, P. (1996). *Matemáticas para el analisis economico*, Prentice Hall, Madrid.
- [44] Takacs, J. (1969). On the Classical Ruin Problem, *Journal of the American Statistical Association*. 64, pp. 889-906.
- [45] Tenreiro, C. (2010). Uma introdução à estimação não-paramétrica de densidade, Mini-curso, *XVIII Congresso Anual da Sociedade Portuguesa de Estatística*.
- [46] Thatcher, A. R. (1957). Studies in the history of probability and statistics: VI. A note on the early solutions of the problem of the duration of play, *Biometrika* 44, n. 3-4, pp. 515–518.
- [47] Todhunter, I. (1865). *A History of the Mathematical Theory of Probability from the Time of Pascal to that of Laplace*, Cambridge, London (Reimpressão de 2010 da Bibliolife).

- [48] Ulam, S., Metropolis, N. (1949). The Monte Carlo method, *Journal of the American Statistical Association* Vol. 44, No. 247. (Sep., 1949), pp. 335-341.
- [49] Venables, W. & Smith, D. *An Introduction to R - Notes on R: A Programming Environment for Data Analysis and Graphics* (disponível em <http://cran.r-project.org/doc/manuals/R-intro.pdf>)
- [50] Villate, J. (2009). *Equações diferenciais e equações de diferenças*, Faculdade de Engenharia da Faculdade do Porto (disponível em <http://villate.org/doc/eqdiferenciais/eqdiferenciais.pdf>).

Apêndice A

Programas construídos para o software R

Nestes programas, o utilizador deve substituir as variáveis neles incluídas, tais como o número de réplicas a realizar ou as quantias iniciais de cada jogador, pelos valores que pretende simular.

A.1 Programa para representar graficamente vários jogos da ruína

```
# A - Dinheiro do jogador A?
```

```
A=25
```

```
# Dinheiro do jogador B?
```

```
B=5
```

```
# p - Probabilidade de o jogador A ganhar cada partida?
```

```
p=0.50
```

```
# jogosmax - Número máximo de partidas a simular?
```

```
jogosmax=400
```

```
# nrun - Número de réplicas?
```

```
nrun=5
```

```
x=1; y=A
```

```
plot(x, y, type="b", xlab="Número de partidas", ylab="Dinheiro do Jogador A", pch=20,  
cex=1.25, main = "Jogo da Ruína do Jogador", xlim=c(1,jogosmax), ylim=c(0,A+B))
```

```
abline(A, 2*p-1, lwd =2, lty=2); abline(h=0); abline(h=A+B)
for (irun in 1:nrun) {
  x=1; y=A
  while (0<y & y<A+B & x<jogosmax){
    x=x+1; y0=y; y=y+2*rbinom(1,1,p)-1
    segments(x-1, y0, x, y, col=irun, lwd =2)}}
```

A.2 Programa para a Lei dos Grandes Números e Lei do Logaritmo Iterado para a proporção de jogos ganhos

```
# A - Dinheiro do jogador A?
A=15
# Dinheiro do jogador B?
B=15
# p - Probabilidade de o jogador A ganhar cada partida?
p=0.55
# jogosmax - Número máximo de jogos a simular?
jogosmax=100000
# nrun - Número de réplicas?
nrun=5000
# series - Número de séries?
series=20
```

```
if (p==0.5) {c=A/(A+B)} else {c=(((1-p)/p)^ A-1)/(((1-p)/p)^ (A+B)-1)}
x <- seq(3, nrun, length=nrun)
li <- c-sqrt(2*c*(1-c)*log(log(x))/x)
ls <- c+sqrt(2*c*(1-c)*log(log(x))/x)
plot(0, 0, type="b", xlab="", ylab="Proporção de jogos ganhos por A", pch=5,
cex=0.25, main = "Ruína do Jogador", xlim=c(10,nrun), ylim=c(c-0.1,c+0.1))
abline(h=c); abline(h=0); abline(h=1)
lines(x, li, lty=1, col=2, lwd =3)
```

```
lines(x, ls, lty=1, col=2, lwd =3)
for (srun in 1:series) {
  PVA=0; VA=0; VB=0; E=0
  mtext(paste("P = ", c), side=4, line=0)
  for (irun in 1:nrun) {
    y=A; x=0
    while (0<y & y<A+B & x<jogosmax){x=x+1
      y=y+2*rbinom(1,1,p)-1}
    if (y<1) {VB=VB+1} else if (y>A+B-1) {VA=VA+1} else {E=E+1}
    PVA0=PVA; PVA=VA/(irun-E)
    segments(irun-1, PVA0, irun, PVA, col=srun, lwd =3)}}
x <- seq(3, nrun, length=nrun)
li <- c-sqrt(2*c*(1-c)*log(log(x))/x)
ls <- c+sqrt(2*c*(1-c)*log(log(x))/x)
lines(x, li, lty=1, col=2, lwd=5)
lines(x, ls, lty=1, col=2, lwd=5)
```

A.3 Programa para a Lei dos Grandes Números e Lei do Logaritmo Iterado para o número de jogos realizados

```
# A - Dinheiro do jogador A?
A=15
# Dinheiro do jogador B?
B=15
# p - Probabilidade de o jogador A ganhar cada partida?
p=0.55
# nrun - Número de réplicas?
nrun=5000
# series - Número de séries?
series=20
```

```

if (p==0.5) {c=A*B} else {c=(A/(1-2*p)-((A+B)/(1-2*p))*((((1-p)/p) ^ A)-1)/((((1-p)/p) ^
(A+B))-1))}
plot(0, 0, type="b", xlab=" ", ylab="Número médio de partidas por jogo", pch=5,
cex=0.25, main = "Ruína do Jogador", xlim=c(30,nrun), ylim=c(c-15,c+15))
abline(h=c)
for (srun in 1:series) {
  DM=0; VA=0; VB=0; D=rep(0,nrun)
  mtext(paste("E(D) = ", c), side=4, line=0)
  for (irun in 1:nrun) {
    y=A; x=0
    while (0<y & y<A+B){x=x+1
      y=y+2*rbinom(1,1,p)-1}
    if (y<1) {VB=VB+1} else {VA=VA+1}
    D[irun]=x; DM0=DM; DM=(DM0*(irun-1)+x)/irun
    segments(irun-1, DM0, irun, DM, col=srun, lwd =3)}}
x <- seq(3, nrun, length=nrun)
li <- c-sqrt(2*var(D)*log(log(x))/x)
ls <- c+sqrt(2*var(D)*log(log(x))/x)
lines(x,li ,lty=1, col=2, lwd =6)
lines(x,ls ,lty=1, col=2, lwd =6)

```

A.4 Programa para a distribuição da proporção amostral - Teorema Limite Central

```

# A - Dinheiro do jogador A?
A=15
# Dinheiro do jogador B?
B=15
# p - Probabilidade de o jogador A ganhar cada partida?
p=0.5
# nrun - Número de réplicas?
nrun=50

```

```
# series - Número de séries?
series=10000

if (p==0.5) {c=A/(A+B)} else {c=(((1-p)/p) ^ A-1)/(((1-p)/p) ^ (A+B)-1)}
DM=rep(0,series)
for (srun in 1:series) {
  PVA=0; VA=0; VB=0; D=rep(0,nrun)
  for (irun in 1:nrun) {
    y=A; x=0
    while (0<y & y<A+B){x=x+1
      y=y+2*rbinom(1,1,p)-1}
    if (y<1) {VB=VB+1} else {VA=VA+1}}
  DM[srun]=(VA/(VA+VB))}
mean(DM)
.Table <- table(DM)
.Table = dnorm(c, mean=c, sd=sqrt(c*(1-c)/nrun))*Table/max(.Table)
x<-seq(0,1,0.001)
plot(.Table, ylim=c(0,1.1*max(.Table)), xlim=c(min(DM),max(DM)))
curve(dnorm(x, mean=c, sd=sqrt(c*(1-c)/nrun)), add=T, lty=1, col=2, lwd =5)
points(.Table, pch=16, lwd=3)
```

A.5 Programa para a distribuição da média amostral - Teorema Limite Central

```
# A - Dinheiro do jogador A?
A=15
# Dinheiro do jogador B?
B=15
# p - Probabilidade de o jogador A ganhar cada partida?
p=0.5
# nrun - Número de réplicas?
```

```

nrun=50
# series - Número de séries?
series=5000

if (p==0.5) {c=A*B} else {c=(A/(1-2*p)-((A+B)/(1-2*p))*(((1-p)/p) ^ A)-1)/(((1-p)/p) ^
(A+B)-1))}
DM=rep(0,series)
for (srun in 1:series) {D=rep(0,nrun)
  for (irun in 1:nrun) {
    y=A; x=0
    while (0<y & y<A+B){x=x+1
      y=y+2*rbinom(1,1,p)-1}
    D[irun]=x}
  DM[srun]=mean(D)}
mean(DM)
Classes=25
hist(DM, prob=TRUE, xlab=" ", ylab=" ", pch=5, cex=0.25, main = "Histograma
da média da duração do jogo", breaks=Classes, ylim=c(0, 1.1*dnorm(c, mean=c,
sd=sqrt(var(DM))))))
curve(dnorm(x, mean=c, sd=sqrt(var(DM))), add=T, lty=1, col=2, lwd =3)

```

A.6 Programa para a Função de distribuição empírica da duração do jogo - Teorema Glivenko-Cantelli

```

# A - Dinheiro do jogador A?
A=15
# Dinheiro do jogador B?
B=15
# p - Probabilidade de o jogador A ganhar cada partida?
p=0.5
# nrun - Número de réplicas?

```

```
nrun=100
```

```
D=rep(0,nrun)
for (irun in 1:nrun) {
  y=A; x=0
  while (0<y & y<A+B){x=x+1
    y=y+2*rbinom(1,1,p)-1}
  D[irun]=x}
# Criar função de distribuição teórica
maximo=max(D); S=rep(0,maximo); S[0]=0
for (srun in 1:maximo) {limitesoma=A+B-1
  Somar=rep(0,limitesoma)
  for (s2run in 1:limitesoma)
    {Somar[s2run] = (((cos(s2run*pi/(A+B)))^ (srun))*sin(s2run*pi/(A+B)))/(1-
2*sqrt(p*(1-p))*cos(s2run*pi/(A+B)))) * (((p/(1-p)) ^ (A/2))*sin(A*s2run*pi/(A+B))+(((1-
p)/(p)) ^ (B/2))*sin(B*s2run*pi/(A+B)))}
  S[srun] = 1-(((4*p*(1-p)) ^ ((srun+1)/2))/(A+B))*sum(Somar)}
plot(ecdf(D), do.points=FALSE, verticals=TRUE, xlab="Número de partidas até o
jogo terminar", ylab="", pch=20, cex=1.25, main = "", xlim=c(0,maximo))
for (srun in 2:maximo) {segments(srun-1, S[srun-1], srun, S[srun],lty=1, col=2, lwd
=6)}
lines(ecdf(D), do.points=FALSE, verticals=TRUE, lwd =3)
```

A.7 Programa para a distribuição da proporção amostral - Teorema Glivenko-Cantelli

```
# A - Dinheiro do jogador A?
A=15
# Dinheiro do jogador B?
B=15
# p - Probabilidade de o jogador A ganhar cada partida?
```

```
p=0.5
# nrun - Número de réplicas?
nrun=500
# series - Número de séries?
series=1000
```

```
if (p==0.5) {c=A/(A+B)} else {c=(((1-p)/p) ^ A-1)/(((1-p)/p) ^ (A+B)-1)}
DM=rep(0,series)
for (srun in 1:series) {VA=0; VB=0
  for (irun in 1:nrun) {y=A
    while (0<y & y<A+B){y=y+2*rbinom(1,1,p)-1}
    if (y<1) {VB=VB+1} else {VA=VA+1}}
  DM[srun]=(VA/(VA+VB))}
plot(ecdf(DM), do.points=FALSE, verticals=TRUE, xlab=" ", ylab=" ", pch=20,
cex=1.25, main = " ", xlim=c(min(DM),max(DM)), lwd =5)
x<-seq(0,1,0.001)
lines(x, pnorm(x, mean=c, sd=sqrt(c*(1-c)/nrun)), lty=1, col=2, lwd =3)
```

A.8 Programa para a distribuição da média amostral da duração de n jogos - Teorema Glivenko-Cantelli

```
# A - Dinheiro do jogador A?
A=5
# Dinheiro do jogador B?
B=5
# p - Probabilidade de o jogador A ganhar cada partida?
p=0.5
# nrun - Número de réplicas?
nrun=50
# series - Número de séries?
series=500
```

```

if (p==0.5) {c=A*B} else
  {c=(A/(1-2*p)-((A+B)/(1-2*p))*((((1-p)/p) ^ A)-1)/((((1-p)/p) ^ (A+B))-1))}
DM=rep(0,series)
for (srun in 1:series) {D=rep(0,nrun)
  for (irun in 1:nrun) {
    y=A; x=0
    while (0<y & y<A+B){x=x+1
      y=y+2*rbinom(1,1,p)-1}
    D[irun]=x}
  DM[srun]=mean(D)}
plot(ecdf(DM), do.points=FALSE, verticals=TRUE, xlab=" ", ylab=" ", pch=20,
cex=1.25, main = "", xlim=c(min(DM),max(DM)), lwd =5)
x<-seq(0, max(DM), 1)
lines(x, pnorm(x, mean=mean(DM), sd=sqrt(var(DM))), lty=1, col=2, lwd =3)

```

A.9 Programa para a Lei dos Grandes Números para a proporção de jogos ganhos - versão para alunos

```

# A - Dinheiro do jogador A?
A=15
# Dinheiro do jogador B?
B=15
# p - Probabilidade de o jogador A ganhar cada partida?
p=0.55
# jogosmax - Número máximo de jogos a simular?
jogosmax=100000
# nrun - Número de réplicas?
nrun=5000
# series - Número de séries?
series=20

```

```
if (p==0.5) {c=A/(A+B)} else {c=(((1-p)/p)^ A-1)/(((1-p)/p)^ (A+B)-1)}
x <- seq(3, nrun, length=nrn)
plot(0, 0, type="b", xlab="", ylab="Proporção de jogos ganhos por A", pch=5,
cex=0.25, main = "Ruína do Jogador", xlim=c(10, nrun), ylim=c(c-0.05, c+0.05))
abline(h=c); abline(h=0); abline(h=1)
for (srun in 1:series) {PVA=0; VA=0; VB=0; E=0
  mtext(paste("P = ", c), side=4, line=0)
  for (irun in 1:nrn) {y=A; x=0
    while (0<y & y<A+B & x<jogosmax){x=x+1
      y=y+2*rbinom(1,1,p)-1}
    if (y<1) {VB=VB+1} else if (y>A+B-1) {VA=VA+1} else {E=E+1}
    PVA0=PVA; PVA=VA/(irun-E)
    segments(irun-1, PVA0, irun, PVA, col=srun, lwd =3)}}}
```

A.10 Programa para a proporção de jogos ganhos - versão para alunos - apresentação de tabelas de valores.

```
# A - Dinheiro do jogador A?
A=15
# Dinheiro do jogador B?
B=15
# p - Probabilidade de o jogador A ganhar cada partida?
p=0.5
# jogosmax - Número máximo de jogos a simular?
jogosmax=100000
# nrun - Número de réplicas?
nrun=5000
```

```
VA=0; VB=0; E=0; PVAevol=rep(0, nrun)
for (irun in 1:nrun) {y=A; x=0
```

```
while (0<y & y<A+B & x<jogosmax){x=x+1
  y=y+2*rbinom(1,1,p)-1}
if (y<1) {VB=VB+1} else if (y>A+B-1) {VA=VA+1} else {E=E+1}
PVAevol[irun]=(VA/(irun-E))}
PVAevol
```

A.11 Programa para a duração média do jogos - versão para alunos - apresentação de tabelas de valores.

```
# A - Dinheiro do jogador A?
A=10
# Dinheiro do jogador B?
B=10
# p - Probabilidade de o jogador A ganhar cada partida?
p=0.50
# nrun - Número de réplicas?
nrun=1000

-----

DM=0; VA=0; VB=0;
D=rep(0,nrun); DMedia=rep(0,nrun)
for (irun in 1:nrun) {y=A; x=0
  while (0<y & y<A+B){x=x+1
    y=y+2*rbinom(1,1,p)-1}
  if (y<1) {VB=VB+1} else {VA=VA+1}
  D[irun]=x; DM=(DM*(irun-1)+x)/irun; DMedia[irun]=DM}
D
DMedia
```

A.12 Programa para a proporção de jogos ganhos para outro tipo de apostas - versão para alunos - apresentação de tabelas de valores.

```
# A - Dinheiro do jogador A?  
A=15  
# Dinheiro do jogador B?  
B=15  
# p - Probabilidade de o jogador A ganhar cada partida?  
p=0.5  
# jogosmax - Número máximo de jogos a simular?  
jogosmax=100000  
# nrun - Número de réplicas?  
nrun=5000  
#aposta - valores a apostar? Introduza valores que sejam divisores das quantias dos jogadores.  
aposta=0.5
```

```
PVA=0; VA=0; VB=0; E=0; PVAevolu=rep(0,nrun)  
for (irun in 1:nrun) {y=A; x=0  
  while (0<y & y<A+B & x<jogosmax){x=x+1  
    y=y+2*aposta*rbinom(1,1,p)-aposta}  
  if (y<1) {VB=VB+1} else if (y>A+B-1) {VA=VA+1} else {E=E+1}  
  PVA=VA/(irun-E); PVAevolu[irun]=PVA}  
PVAevolu
```

Apêndice B

Programas construídos em Visual Basic para Excel

B.1 Programa para efetuar a simulação de um jogo da ruína em Excel

```
Sub Simulaumjogo()
```

```
Dim c As Integer, p As Double, a As Double, b As Double, Nmax As Integer, contador  
As Integer
```

```
Cells.Clear
```

```
p = Application.InputBox("Indique a probabilidade do jogador A vencer uma  
partida:", "Probabilidade do jogador A vencer uma partida", , , , , 1)
```

```
While ((p < 0) Or (p > 1))
```

```
p = Application.InputBox("A probabilidade não deve ser superior a 1 nem inferior a  
0! Digite novamente o valor da probabilidade:", "Probabilidade do jogador A vencer  
uma partida", , , , , 1)
```

```
Wend
```

```
a = Application.InputBox("Indique o dinheiro do jogador A", "DINHEIRO DO  
JOGADOR A", , , , , 1)
```

```
auxa = 100 * a
```

```
While (auxa Mod 100 <> 0)
a = Application.InputBox("O valor a apostar deve ser um número inteiro! Digite novamente a quantia do jogador A:", "DINHEIRO DO JOGADOR A", , , , , 1)
auxa = 100 * a
Wend
```

```
b = Application.InputBox("Indique o dinheiro do jogador B", "DINHEIRO DO JOGADOR B", , , , , 1)
auxb = 100 * b
While ((auxb Mod 100 <> 0) Or b < 0)
b = Application.InputBox("O valor a apostar deve ser um número inteiro! Digite novamente a quantia do jogador A:", "DINHEIRO DO JOGADOR B", , , , , 1)
auxb = 100 * b
Wend
```

```
Nmax = Application.InputBox("Número máximo de partidas a realizar", "Número máximo de partidas ", , , , , 1)
auxNmax = 100 * Nmax
While ((auxNmax Mod 100 <> 0) Or Nmax < 0)
Nmax = Application.InputBox("O número máximo deve ser um número inteiro positivo! Digite novamente:", "Número máximo de partidas ", , , , , 1)
auxNmax = 100 * Nmax
Wend
```

```
N = a + b
Range("B1").Value = "Dinheiro do jogador A"
Range("A2").Value = "n.º aleatório"
Range("B2").Value = a
contador = 0
Range("F14").Value = "Ninguém venceu ao fim de"
```

```
For c = 3 To Nmax + 2
```

```
If ((Cells(c - 1, 2).Value < N) And (Cells(c - 1, 2).Value > 0))  
Then  
Cells(c, 1).Value = "=Rand()"  
contador = contador + 1  
Else  
Cells(c, 1).Value = " "  
End If
```

```
probabilidade = Cells(c, 1).Value
```

```
If (probabilidade > p And (Cells(c - 1, 2).Value < N  
And Cells(c - 1, 2).Value > 0))  
Then  
Cells(c, 2).Value = Cells(c - 1, 2).Value - 1  
End If
```

```
If ((Cells(c - 1, 2).Value = N))  
Then  
Cells(c, 2).Value = " "  
Range("F14").Value = "Jogador A venceu ao fim de"  
End If
```

```
If ((Cells(c - 1, 2).Value = "Ganhou A" Or  
Cells(c - 1, 2).Value = "Ganhou B"  
Or Cells(c - 1, 2).Value = " "))  
Then  
Cells(c, 2).Value = " "  
End If
```

```
If ((Cells(c - 1, 2).Value = 0))  
Then  
Cells(c, 2).Value = " "  
Range("F14").Value = "Jogador B venceu ao fim de"
```

End If

```
If (probabilidade <= p And (Cells(c - 1, 2).Value < N  
And Cells(c - 1, 2).Value > 0))  
Then  
Cells(c, 2).Value = Cells(c - 1, 2).Value + 1  
End If
```

Next c

```
Range("F10").Value = "Probabilidade de A vencer uma partida=" & p  
Range("F11").Value = "Quantia inicial do jogador A=" & a  
Range("F12").Value = "Quantia inicial do jogador B=" & b  
Range("F13").Value = "Quantia em jogo=" & N  
Range("F15").Value = contador & " partidas."
```

B.2 Programa para efetuar a simulação de vários jogos da ruína em Excel

```
Sub SimularVariosJogos()
```

```
Dim NumSim As Double, c As Integer, p As Double, a As Double, b As Double, Nmax  
As Double, contador As Integer, m As Integer, j As Integer
```

```
Cells.Clear
```

```
p = Application.InputBox("Indique a probabilidade do jogador A vencer uma  
partida:", "Probabilidade do jogador A vencer uma partida", , , , , 1)
```

```
While ((p < 0) Or (p > 1))
```

```
p = Application.InputBox("A probabilidade não deve ser superior a 1 nem inferior a  
0! Digite novamente o valor da probabilidade:", "Probabilidade do jogador A vencer  
uma partida", , , , , 1)
```

```
Wend
```

```
a = Application.InputBox("Indique o dinheiro do jogador A", "DINHEIRO DO JOGADOR A", , , , , 1)
```

```
auxa = 100 * a
```

```
While (auxa Mod 100 <> 0)
```

```
a = Application.InputBox("O valor a apostar deve ser um número inteiro! Digite novamente a quantia do jogador A:", "DINHEIRO DO JOGADOR A", , , , , 1)
```

```
auxa = 100 * a
```

```
Wend
```

```
b = Application.InputBox("Indique o dinheiro do jogador B", "DINHEIRO DO JOGADOR B", , , , , 1)
```

```
auxb = 100 * b
```

```
While ((auxb Mod 100 <> 0) Or b < 0)
```

```
b = Application.InputBox("O valor a apostar deve ser um número inteiro! Digite novamente a quantia do jogador A:", "DINHEIRO DO JOGADOR B", , , , , 1)
```

```
auxb = 100 * b
```

```
Wend
```

```
Nmax = Application.InputBox("Número máximo de partidas a realizar", "Número máximo de partidas ", , , , , 1)
```

```
auxNmax = 100 * Nmax
```

```
While ((auxNmax Mod 100 <> 0) Or Nmax < 0)
```

```
Nmax = Application.InputBox("O número máximo deve ser um número inteiro positivo! Digite novamente:", "Número máximo de partidas ", , , , , 1)
```

```
auxNmax = 100 * Nmax
```

```
Wend
```

```
NumSim = Application.InputBox("Número de simulações do jogo", "Número de simulações ", , , , , 1)
```

```
auxNumSim = 100 * NumSim
```

```
While ((auxNumSim Mod 100 <> 0) Or NumSim < 0)
```

```
NumSim = Application.InputBox("O número de simulações deve ser um número
```

inteiro positivo! Digite novamente:", "Número máximo de partidas ", , , , , 1)

auxNumSim = 100 * NumSim

Wend

N = a + b

Range("A3").Value = "Prob. de A vencer 1 partida =" & p

Cells(1, 1).Value = "Vencedor?"

Cells(2, 1).Value = "N.º partidas jogadas?"

Range("A4").Value = "Quantia inicial de A =" & a

Range("A5").Value = "Quantia inicial de B =" & b

Range("A6").Value = "Total em jogo =" & N

For r = 2 To NumSim + 1

 contador = 0

 Cells(1, r).Value = "1"

 Cells(6, r).Value = a

 Cells(2, r).Value = Nmax

 For c = 7 To Nmax + 2

 If ((Cells(c - 1, r).Value < N)

 And (Cells(c - 1, r).Value > 0))

 Then

 contador = contador + 1

 Cells(c, 1).Value = "=Rand()"

 Else

 Cells(c, 1).Value = "=Rand()"

 End If

 probabilidade = Cells(c, 1).Value

 If (probabilidade > p And

```
(Cells(c - 1, r).Value < N And  
Cells(c - 1, r).Value > 0))  
Then  
Cells(c, r).Value = Cells(c - 1, r).Value - 1  
End If
```

```
If ((Cells(c - 1, r).Value = N))  
Then  
Cells(1, r).Value = "A"  
Cells(2, r).Value = contador  
End If
```

```
If ((Cells(c - 1, r).Value = N Or  
Cells(c - 1, r).Value = 0 Or  
Cells(c - 1, r).Value = " "))  
Then  
Cells(c, r).Value = " "  
End If
```

```
If ((Cells(c - 1, r).Value = 0))  
Then  
Cells(1, r).Value = "B"  
Cells(2, r).Value = contador  
End If
```

```
If (probabilidade <= p And  
(Cells(c - 1, r).Value < N And  
Cells(c - 1, r).Value > 0))  
Then  
Cells(c, r).Value = Cells(c - 1, r).Value + 1  
End If
```

Next c

Next r

contavitorias = 0

containacabados = 0

contaderrotas = 0

contapartidas = 0

For j = 2 To NumSim + 1

 If Cells(1, j).Value = "A"

 Then

 contavitorias = contavitorias + 1

 End If

 If Cells(1, j).Value = "I"

 Then

 containacabados = containacabados + 1

 End If

 If Cells(1, j).Value = "B"

 Then

 contaderrotas = contaderrotas + 1

 End If

 contapartidas = contapartidas + Cells(2, j).Value

Next j

Range("G4").Value = NumSim & " jogos"

Range("H4").Value = contavitorias & " vitórias"

Range("H5").Value = "%vitórias=" & Round(contavitorias / NumSim * 100, 2)

Range("I4").Value = containacabados & " inacabados"

```
Range("I5").Value = "%inacabados= " & Round(containacabados / NumSim *  
100, 2)  
Range("J4").Value = contaderrotas & " derrotas"  
Range("J5").Value = "%derrotas= " & Round(contaderrotas / NumSim * 100, 2)  
Range("K4").Value = contapartidas & " partidas"  
Range("K5").Value = "média.partidas= " & Round(contapartidas / NumSim, 2)
```

B.3 Programa para efetuar a simulação de vários jogos da ruína em Excel com dois tipos de apostas diferentes

```
Sub SimularJogosApostasDiferentes()
```

```
Dim NumSim As Integer, c As Integer, p As Double, a As Double, b As Double, Nmax  
As Double, contador As Integer, m As Integer, j As Integer, apostas As Double,  
aposta2 As Double
```

```
Cells.Clear
```

```
p = Application.InputBox("Indique a probabilidade do jogador A vencer uma  
partida:", "Probabilidade do jogador A vencer uma partida", , , , , 1)
```

```
While ((p < 0) Or (p > 1))
```

```
p = Application.InputBox("A probabilidade não deve ser superior a 1 nem inferior a  
0! Digite novamente o valor da probabilidade:", "Probabilidade do jogador A vencer  
uma partida", , , , , 1)
```

```
Wend
```

```
a = Application.InputBox("Indique o dinheiro do jogador A", "DINHEIRO DO  
JOGADOR A", , , , , 1)
```

```
auxa = 100 * a
```

```
While (auxa Mod 100 <> 0)
```

```
a = Application.InputBox("O valor a apostar deve ser um número inteiro! Digite  
novamente a quantia do jogador A:", "DINHEIRO DO JOGADOR A", , , , , 1)
```

```
auxa = 100 * a
```

```
Wend
```

```
b = Application.InputBox("Indique o dinheiro do jogador B", "DINHEIRO DO JOGADOR B", , , , , 1)
```

```
auxb = 100 * b
```

```
While ((auxb Mod 100 <> 0) Or b < 0)
```

```
b = Application.InputBox("O valor a apostar deve ser um número inteiro! Digite novamente a quantia do jogador A:", "DINHEIRO DO JOGADOR B", , , , , 1)
```

```
auxb = 100 * b
```

```
Wend
```

```
Nmax = Application.InputBox("Número máximo de partidas a realizar", "Número máximo de partidas ", , , , , 1)
```

```
auxNmax = 100 * Nmax
```

```
While ((auxNmax Mod 100 <> 0) Or Nmax < 0)
```

```
Nmax = Application.InputBox("O número máximo deve ser um número inteiro positivo! Digite novamente:", "Número máximo de partidas ", , , , , 1)
```

```
auxNmax = 100 * Nmax
```

```
Wend
```

```
Resposta = MsgBox("Os valores a apostar devem ser divisores de " & a & " e de " & b)
```

```
apostas = Application.InputBox("Valor do 1.º tipo de aposta?", "Total a apostar no 1.º tipo de jogo", , , , , 1)
```

```
aposta2 = Application.InputBox("Valor do 2.º tipo de aposta?", "Total a apostar no 2.º tipo de jogo", , , , , 1)
```

```
NumSim = Application.InputBox("Número de simulações de cada tipo de jogo:", "Número de simulações ", , , , , 1)
```

```
auxNumSim = 100 * NumSim
```

```
While ((auxNumSim Mod 100 <> 0) Or NumSim < 0)
```

```
NumSim = Application.InputBox("O número de simulações deve ser um número inteiro positivo! Digite novamente:", "Número máximo de partidas ", , , , , 1)
```

```
auxNumSim = 100 * NumSim
```

```
Wend
```

```
N = a + b
```

```
Range("A3").Value = "Prob. do jogador A vencer 1 partida = " & p
```

```
Cells(1, 1).Value = "Vencedor da partida= "
```

```
Cells(2, 1).Value = "N.º partidas realizadas= "
```

```
Range("A4").Value = "N.º máximo de partidas a realizar=" & Nmax
```

```
Range("A5").Value = "Quantias iniciais:A = " & a & " " & "B = " & b
```

```
Range("A6").Value = "Valor do 1.º tipo de aposta(a vermelho)= " & apostas
```

```
Range("A7").Value = "Valor do 2.º tipo de aposta (a preto)= " & aposta2
```

```
Range("A8").Value = "Total em jogo = " & N
```

```
Range("A11").Value = "n.º aleatório"
```

```
For r = 1 To NumSim
```

```
    contador = 0
```

```
    Cells(1, 2 * r).Value = "E"
```

```
    Cells(1, 2 * r).Font.ColorIndex = 3 'Red
```

```
    Cells(12, 2 * r).Value = a
```

```
    Cells(12, 2 * r).Font.ColorIndex = 3 'Red
```

```
    Cells(2, 2 * r).Value = Nmax
```

```
    For c = 13 To Nmax + 13
```

```
        If ((Cells(c - 1, 2 * r).Value < N)
```

```
            And (Cells(c - 1, 2 * r).Value > 0))
```

```
            Then
```

```
                contador = contador + 1
```

```
                Cells(c, 1).Value = "=Rand()"
```

```
            Else
```

```
                Cells(c, 1).Value = " "
```

```
            End If
```

```
probabilidade = Cells(c, 1).Value
If (probabilidade > p And
(Cells(c - 1, 2 * r).Value < N And
Cells(c - 1, 2 * r).Value > 0))
Then
Cells(c, 2 * r).Value = Cells(c - 1, 2 * r).Value - apostas
Cells(c, 2 * r).Font.ColorIndex = 3 'Red
End If
```

```
If ((Cells(c - 1, 2 * r).Value = N))
Then
Cells(1, 2 * r).Value = "A"
Cells(1, 2 * r).Font.ColorIndex = 3 'Red
Cells(2, 2 * r).Value = contador
Cells(2, 2 * r).Font.ColorIndex = 3 'Red
End If
```

```
If ((Cells(c - 1, 2 * r).Value = N Or
Cells(c - 1, 2 * r).Value = 0 Or
Cells(c - 1, 2 * r).Value = ""))
Then
Cells(c, 2 * r).Value = ""
End If
```

```
If ((Cells(c - 1, 2 * r).Value = 0))
Then
Cells(1, 2 * r).Value = "B"
Cells(1, 2 * r).Font.ColorIndex = 3 'Red
Cells(2, 2 * r).Value = contador
Cells(2, 2 * r).Font.ColorIndex = 3 'Red
End If
```

```
If (probabilidade <= p And  
    (Cells(c - 1, 2 * r).Value < N And  
    Cells(c - 1, 2 * r).Value > 0))  
    Then  
        Cells(c, 2 * r).Value = Cells(c - 1, 2 * r).Value + apostas  
        Cells(c, 2 * r).Font.ColorIndex = 3 'Red  
    End If
```

```
Next c
```

```
Next r
```

```
contavitorias = 0  
contaempates = 0  
contaderrotas = 0  
contapartidas = 0
```

```
For j = 1 To NumSim + 1
```

```
    If Cells(1, 2 * j).Value = "A"  
        Then  
            contavitorias = contavitorias + 1  
        End If
```

```
    If Cells(1, 2 * j).Value = "E"  
        Then  
            contaempates = contaempates + 1  
        End If
```

```
    If Cells(1, 2 * j).Value = "B" Then  
        contaderrotas = contaderrotas + 1  
    End If
```

```
contapartidas = contapartidas + Cells(2, 2 * j).Value
```

```
Next j
```

```
Range("D4").Value = NumSim & " jogos 1.º tipo"
```

```
Range("F4").Value = contavitorias & " vitórias"
```

```
Range("F5").Value = "%vitórias=" & Round(contavitorias / NumSim * 100, 2)
```

```
Range("H4").Value = contaempates & " empates"
```

```
Range("H5").Value = "%empates=" & Round(contaempates / NumSim * 100,
```

```
2)
```

```
Range("J4").Value = contaderrotas & " derrotas"
```

```
Range("J5").Value = "%derrotas=" & Round(contaderrotas / NumSim * 100, 2)
```

```
Range("K4").Value = contapartidas & " partidas"
```

```
Range("K5").Value = "média.partidas=" & Round(contapartidas / NumSim, 2)
```

```
For r = 1 To NumSim
```

```
    contador = 0
```

```
    Cells(1, 2 * r + 1).Value = "E"
```

```
    Cells(12, 2 * r + 1).Value = a
```

```
    Cells(2, 2 * r + 1).Value = Nmax
```

```
    For c = 13 To Nmax + 13
```

```
        If ((Cells(c - 1, 2 * r + 1).Value < N) And
```

```
            (Cells(c - 1, 2 * r + 1).Value > 0))
```

```
        Then
```

```
            contador = contador + 1
```

```
            Cells(c, 1).Value = "=Rand()"
```

```
        Else
```

```
            Cells(c, 1).Value = " "
```

```
        End If
```

```
probabilidade = Cells(c, 1).Value
```

```
If (probabilidade > p And  
(Cells(c - 1, 2 * r + 1).Value < N And  
Cells(c - 1, 2 * r + 1).Value > 0))  
Then  
Cells(c, 2 * r + 1).Value = Cells(c - 1, 2 * r + 1).Value - aposta2
```

```
End If
```

```
If ((Cells(c - 1, 2 * r + 1).Value = N))  
Then  
Cells(1, 2 * r + 1).Value = "A"  
Cells(2, 2 * r + 1).Value = contador  
End If
```

```
If ((Cells(c - 1, 2 * r + 1).Value = N Or  
Cells(c - 1, 2 * r + 1).Value = 0 Or  
Cells(c - 1, 2 * r + 1).Value = " "))  
Then  
Cells(c, 2 * r + 1).Value = " "  
End If
```

```
If ((Cells(c - 1, 2 * r + 1).Value = 0))  
Then  
Cells(1, 2 * r + 1).Value = "B"  
Cells(2, 2 * r + 1).Value = contador  
End If
```

```
If (probabilidade <= p And  
(Cells(c - 1, 2 * r + 1).Value < N And  
Cells(c - 1, 2 * r + 1).Value > 0))  
Then
```

```
Cells(c, 2 * r + 1).Value = Cells(c - 1, 2 * r + 1).Value + aposta2  
End If
```

```
Next c
```

```
Next r
```

```
contavit = 0
```

```
contaempat = 0
```

```
contaderrot = 0
```

```
contapart = 0
```

```
For j = 1 To NumSim
```

```
    If Cells(1, 2 * j + 1).Value = "A"
```

```
    Then
```

```
        contavit = contavit + 1
```

```
    End If
```

```
    If Cells(1, 2 * j + 1).Value = "E" Then
```

```
        contaempat = contaempat + 1
```

```
    End If
```

```
    If Cells(1, 2 * j + 1).Value = "B" Then
```

```
        contaderrot = contaderrot + 1
```

```
    End If
```

```
    contapart = contapart + Cells(2, 2 * j + 1).Value
```

```
Next j
```

```
Range("D6").Value = NumSim & " jogos do 2.º tipo"
```

```
Range("F6").Value = contavit & " vitórias"
```

Range("F7").Value = "%vitórias=" & Round(contavit / NumSim * 100, 2)

Range("H6").Value = contaempat & " empates"

Range("H7").Value = "%empates=" & Round(contaempat / NumSim * 100, 2)

Range("J6").Value = contaderrot & " derrotas"

Range("J7").Value = "%derrotas=" & Round(contaderrot / NumSim * 100, 2)

Range("K6").Value = contapart & " partidas"

Range("K7").Value = "média.partidas=" & Round(contapart / NumSim, 2)

Apêndice C

Exemplo de tarefa

C.1 Um pouco de história das probabilidades

A origem da teoria das probabilidades está relacionada com a correspondência, em 1654, entre Blaise Pascal (1623-1662) e Pierre de Fermat (1601-1665), impulsionada pelos problemas propostos por Antoine Gombaud, também conhecido por Cavaleiro De Méré, famoso jogador profissional da época. As sete cartas conhecidas, que compõem a correspondência entre estes dois matemáticos, contêm essencialmente informações acerca daquele que é conhecido como o *problema da divisão da aposta*. No problema são referidos dois jogadores que possuem cada um 32 pistolas (dinheiro da época) e que jogam um determinado jogo, no qual é declarado vencedor aquele que primeiro perfizer 3 pontos, ficando nesse caso, o jogador vencedor com o total de 64 pistolas. Pretende-se descobrir a maneira como se deve repartir de forma equitativa as pistolas, caso o jogo, por alguma razão, tenha de terminar antes que qualquer um dos jogadores tenha obtido os 3 pontos.

Nestas cartas entre Pascal e Fermat, que só viriam a ser publicadas em 1679, encontramos também referências ao que hoje conhecemos como *Triângulo de Pascal* e ao que atualmente chamamos de *Cálculo Combinatório*. Em 1654, Pascal escreveu *Traité du triangle arithmétique*, o tratado que apresentava as principais propriedades do *Triângulo de Pascal* mas que só viria a ser publicado em 1665.

Pascal e Fermat trocaram também informações acerca de um problema que passou a ser conhecido como o *Problema da Ruína do Jogador*.

O problema é o seguinte: dois jogadores, A e B , efetuam um jogo lançando três dados. O

jogador A obterá um ponto se perfizer uma soma de 11 pontos no lançamento dos 3 dados e se o seu parceiro B não tiver quaisquer pontos. Caso o jogador A obtenha uma soma de 11 pontos no lançamento dos dados e o seu adversário tiver uma pontuação não nula, o jogador A não verá a sua pontuação aumentar mas será subtraído um ponto ao jogador B . O jogador B verá a sua pontuação aumentar em 1 unidade se a soma do lançamento dos 3 dados perfizer 14 e se o seu adversário, A , não tiver pontuação. Caso o jogador B obtenha 14 pontos e o jogador A tenha um valor não nulo de pontuação, então o jogador B continuará com a mesma pontuação e ao jogador A será subtraído um ponto. Vencerá o jogador que obtiver 12 pontos e pretendia-se descobrir a razão entre o número de hipóteses do jogador A e o número de hipóteses do jogador B vencer o jogo.

Por exemplo, se o jogador A tiver 5 pontos e o jogador B tiver 6 pontos e se, ao serem lançados os três dados se obtiver a soma de 11 pontos, então, o jogador A continuará com 5 pontos e o jogador B passará a ter 5 pontos. No caso do jogador A ter 0 pontos e o jogador B tiver 6 pontos e se a soma obtida no lançamento dos três dados for 14, então, o jogador A continuará com 0 pontos e o jogador B passará a ter 7 pontos.

A autoria do problema da ruína do jogador foi, no entanto, atribuída durante muitos séculos ao matemático holandês Christiaan Huygens pois o primeiro livro publicado sobre Cálculo de Probabilidades, *De Ratiociniis in Ludo Aleae*, é da sua autoria e surgiu em 1657. No final desta obra, o autor apresenta 5 problemas para o leitor resolver, sendo um deles, o problema da ruína do jogador (numa versão um pouco diferente da que foi apresentada por Pascal). No entanto, Huygens não fez qualquer referência a Pascal, o que fez com que a autoria deste problema estivesse muitos anos relacionada com Huygens e não com o seu autor verdadeiro, Blaise Pascal. O verdadeiro autor só seria revelado em 1888, com a publicação da correspondência de Huygens. No entanto, a publicação desta correspondência aconteceu depois da publicação de dois livros, que foram (e são) obras fundamentais da História das Probabilidades, *Histoire du calcul des probabilités depuis ses origines jusqu'à nos jours*, por Charles Gouraud em 1848 e *History of the Mathematical Theory of Probability from the Time of Pascal to that of Laplace* por Todhunter em 1865, o que contribuiu para que o nome de Pascal continuasse isolado do problema da ruína do jogador [15, p.13-14].

Huygens não apresenta a resolução do problema no seu livro, indica a solução e deixa a demonstração ao cuidado do leitor. Também não existem dados acerca da forma como Pascal e Fermat conseguiram resolver este problema, só sabemos, pela correspondência de Carcavi e

Huygens, que utilizaram métodos de resolução diferentes.

C.2 O problema da ruína do jogador

Atualmente existem muitas versões do problema da ruína do jogador. Podemos imaginar, por exemplo, que dois jogadores, A e B , têm uma certa quantidade de dinheiro, que pode ou não ser igual, e que jogam um jogo dividido em partidas. O jogador A possui a euros e o jogador B possui b euros inicialmente. Em cada partida, o jogador A ganha com probabilidade p , recebendo um euro do jogador B , e perde com probabilidade $q = 1 - p$, pagando um euro ao jogador B . O jogo terminará, quando um dos jogadores ficar sem dinheiro. Pretende-se determinar a probabilidade de tal acontecer.

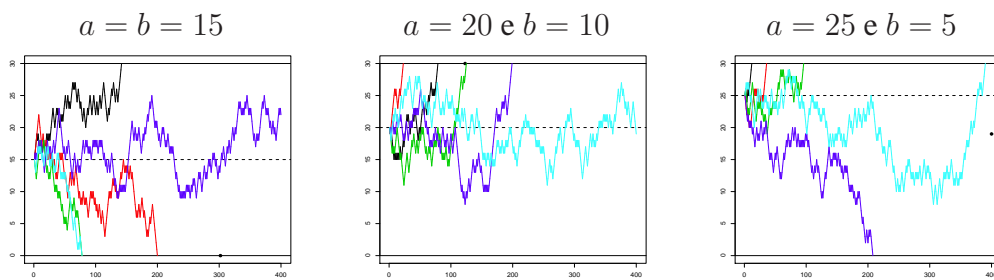


Figura C.1: Simulação do jogo para diferentes valores de a e de b ($p = 0,5$)

Na Figura C.1, podemos ver as trajetórias de alguns jogos possíveis para diferentes quantias iniciais dos dois jogadores com $p = 0,5$.

1. Supõe que dois jogadores A e B realizam um jogo da ruína e que ambos possuem inicialmente 4 euros. Supõe também que ambos possuem igual probabilidade de vencerem uma partida. Por exemplo, a sequência que representa a quantia do jogador A após cada partida realizada:

$$5, 4, 3, 2, 3, 4, 5, 4, 5, 4, 3, 2, 3, 2, 1, 0$$

pode representar um jogo da ruína nas condições referidas. Neste caso, o jogador A perdeu porque ficou sem dinheiro.

- (a) Através da escrita de uma sequência de números, dá o exemplo de um jogo da ruína nas condições atrás referidas que seja constituído por 10 partidas e em que o jogador A seja o vencedor.

- (b) Dá o exemplo de um jogo da ruína que ao fim de 14 partidas ainda não tenha um vencedor definido.
- (c) É possível aos jogadores preverem quantas partidas irão realizar? Justifica.
- (d) Qual será o número máximo de partidas que poderão realizar?
2. O programa R⁽¹⁾ permite-nos obter representações gráficas do problema da ruína do jogador e além disso, efetuar simulações de uma forma mais rápida (comparativamente com o Excel) quando trabalhamos com valores elevados. Abre o programa R e o *script* *simula_jogos_da_ruina*⁽²⁾, muda as variáveis para os valores que pretendes (só deves mudar os programas na parte inicial da declaração de variáveis) e observa os gráficos que obtens. Escolhe um dos gráficos e faz uma breve caracterização desse jogo. Para facilitar essa caracterização, podes pedir para ser construído apenas um jogo (considera $nrun = 1$) e considerar as quantias iniciais dos dois jogadores baixas, por exemplo $a = b = 4$. Poderás ter de ajustar o número de partidas de forma a visualizares mais facilmente o jogo.
3. No *Microsoft Excel* abre o ficheiro *Simulação_Jogo_Ruina_Excel* (cada um dos 3 livros apresenta um simulador diferente para o jogo da ruína) e escolhe o livro *Simular1jogo*⁽³⁾. Esta folha de cálculo permitir-te-á simular um jogo da ruína com apostas unitárias. Para isso, clica no botão de simulação e escolhe as quantias iniciais de cada jogador, a probabilidade do jogador *A* vencer uma partida e o número máximo de partidas a realizar. Surgirá à esquerda uma lista de números (pseudo)aleatórios entre 0 e 1. Se o número à esquerda for inferior à probabilidade que indicaste, o jogador *A* ganha um euro, caso contrário perderá um euro para o seu adversário. Começa por utilizar o simulador para gerares alguns jogos da ruína com as condições que quiseres. Deves escolher um número máximo de partidas adequado, de forma a que seja muito pouco provável que ao fim desse número de partidas não se consiga saber quem é o vencedor.

⁽¹⁾ Pressupomos que os alunos já tomaram contato com as instruções básicas deste programa.

⁽²⁾ Neste trabalho, o programa deste *script* encontra-se no anexo A.1. Aos alunos, ser-lhes-ão facultados os ficheiros com os programas necessários.

⁽³⁾ Neste trabalho, a programação correspondente encontra-se no anexo B.1. Aos alunos será facultada a folha de cálculo com os 3 simuladores.

Imagina que as quantias iniciais dos jogadores A e B são iguais a 5 e que a probabilidade do jogador A vencer uma partida é 0,7. Ao ser usado o simulador Simula1jogo (com um máximo de 20 partidas) obtiveram-se os seguintes 20 números aleatórios (com aproximação às centésimas):

0.38, 0.78, 0.52, 0.91, 0.21, 0.14, 0.01, 0.09, 0.96, 0.99,
0.45, 0.67, 0.74, 0.61, 0.33, 0.31, 0.92, 0.18, 0.23, 0.74.

Quem venceu o jogo? O jogo permanece inacabado ao fim de 20 partidas? Justifica.

Para resolveres as questões seguintes deves realizar um número elevado de simulações, por exemplo, 1600 (400 de cada vez).

4. Escolhe agora o livro SimularNjogos⁽⁴⁾.

(a) Considera que as quantias iniciais dos dois jogadores são iguais (por exemplo $a = b = 4$) e que se vão mantendo ao longo das diversas simulações que fores efetuando. Descobre um valor aproximado da probabilidade do jogador A vencer um jogo da ruína e do número médio de partidas de duração do jogo, ao considerarmos a probabilidade de ganhar uma partida igual a 0,5.

(b) Investiga o que acontece à probabilidade do jogador A vencer o jogo da ruína e ao número médio de partidas de duração do jogo, à medida que formos aumentando a quantia inicial do jogador B , considerando que o valor da probabilidade de cada um dos jogadores ganhar uma partida é 0,5 e que a quantia inicial do jogador A se mantém constante. (Podes por exemplo, começar por considerar $a = 4$ e $b = 7$ e depois considerares $a = 4$ e $b = 10$).

5. A probabilidade \mathbb{P}_a do jogador A vencer o jogo da ruína pode ser determinada, utilizando:

$$\mathbb{P}_a = \begin{cases} \frac{a}{a+b} & \text{se } p = \frac{1}{2} \\ \frac{q^a p^b - p^n}{q^n - p^n} & \text{se } p \neq \frac{1}{2} \end{cases}, \quad 0 \leq a \leq n. \quad (\text{C.1})$$

⁽⁴⁾ Neste trabalho, o programa em R encontra-se no anexo B.2.

A duração esperada (ou média) do jogo da ruína pode ser calculada, utilizando:

$$\mathbb{E}_a = \begin{cases} ab & \text{se } p = \frac{1}{2} \\ \frac{a}{1-2p} - \frac{n}{1-2p} \left[\frac{\left(\frac{q}{p}\right)^a - 1}{\left(\frac{q}{p}\right)^n - 1} \right] & \text{se } p \neq \frac{1}{2} \end{cases}, \quad 0 \leq a \leq n. \quad (\text{C.2})$$

- (a) Utiliza as equações C.1 e C.2 para determinar a probabilidade do jogador A vencer o jogo e o número médio de partidas de duração do jogo, considerando $p = 0,5$ e $a = b$. Compara o resultado com a tua resposta à questão 4a. O que concluis?
 - (b) Utiliza as equações C.1 e C.2 para determinar a probabilidade do jogador A vencer o jogo e o número médio de partidas de duração do jogo, considerando os valores que utilizaste na questão 4b. Compara o resultado com a tua resposta a essa questão.
 - (c) Abre o programa R e o *script* `Lei_Grandes_Numeros_Proporcao`⁽⁵⁾, efetua as mudanças de variáveis que quiseses (podes usar, por exemplo, os valores das questões 4a e 4b) e corre o *script* referido. No gráfico, à direita, surgirá o valor da probabilidade do jogador A vencer um jogo para os valores das variáveis que declaraste, usando a equação C.1. Cada um dos gráficos apresentados representa a evolução da proporção de jogos ganhos pelo jogador A , à medida que o número de jogos realizados vai aumentando. O que observas?
 - (d) Determina o valor esperado de ganho do jogador A para $p = 0,5$ e $a = b = 4$.
 - (e) Utilizando a equação C.1, indica, explicando o teu raciocínio, qual dos jogadores, A ou B , possui uma maior probabilidade de vencer um jogo da ruína, em função do dinheiro que possuem inicialmente (considerando $p = 0,5$).
6. Vamos agora investigar o que acontece à probabilidade do jogador A vencer o jogo da ruína e ao número médio de partidas de duração do jogo, se a probabilidade de vencer uma partida não for igual para os dois jogadores.
- (a) Considera $a = b = 4$. Usando o simulador `SimularNjogos` determina um valor aproximado da probabilidade do jogador A vencer um jogo e do número médio de partidas de duração do jogo para $p = 0,48$, $p = 0,45$ e $p = 0,40$.

⁽⁵⁾ Neste trabalho, o programa em R correspondente encontra-se no anexo A.9.

- (b) No programa R, abre o *script* `proporcao_jogos_ganhos`⁽⁶⁾. Este programa apresenta-te uma tabela com a proporção de jogos ganhos pelo jogador A , à medida que o número de jogos realizados vai aumentando, em função das quantias iniciais dos jogadores e da probabilidade do jogador A vencer uma partida. Utiliza este simulador para obteres valores aproximados da probabilidade do jogador A vencer um jogo para $p = 0,48$, $p = 0,45$ e $p = 0,40$, considerando $a = b = 4$.
- (c) Ainda no programa R, abre o *script* `duracao_esperada_jogo`⁽⁷⁾. Este programa apresenta-te uma tabela com a duração (n.º de partidas realizadas) de cada um dos jogos realizados e uma tabela que apresenta o número médio de partidas de duração do jogo, à medida que o número de jogos realizados vai aumentando, em função das quantias iniciais dos jogadores e da probabilidade do jogador A vencer uma partida. Utiliza este simulador para obteres valores aproximados do número médio de partidas de duração do jogo para $p = 0,48$, $p = 0,45$ e $p = 0,40$, considerando $a = b = 4$.
- (d) Utilizando a equação C.1 determina os valores das probabilidades referidas na questão 6a e compara-as com os valores que obtiveste nas questões 6a e 6b.
- (e) Utilizando a equação C.2 determina o número médio de partidas de duração do jogo para os valores referidos na questão 6a e compara-os com os valores que obtiveste nas questões 6a e 6c .
- (f) Se os valores a e b forem iguais, o que acontece à probabilidade do jogador A vencer o jogo se a probabilidade dos dois jogadores ganharem uma partida for diferente? Justifica a tua resposta indicando outros valores de p que te ajudem a corroborar as tuas afirmações (podes manter $a = b = 4$).
7. Imagina que o jogador A tem muito dinheiro mas que cada partida lhe é desfavorável ($p < 0,5$), será que a probabilidade de vencer um jogo da ruína será superior a 50%? Iremos utilizar os simuladores apresentados e C.1 para responder a esta questão.
- (a) Considera, por exemplo, $b = 10$ e $a = 100$. Utilizando a equação C.1, determina a probabilidade do jogador A vencer o jogo para dois diferentes valores de p .

⁽⁶⁾ Neste trabalho, o programa em R encontra-se no anexo A.10.

⁽⁷⁾ Neste trabalho, o programa em R encontra-se no anexo A.11.

- (b) Considera, por exemplo, $b = 10$ e $a = 1000$. Utilizando a equação C.1, determina a probabilidade do jogador A vencer o jogo para dois diferentes valores de p .
- (c) Com base nas duas questões anteriores, e utilizando o simulador SimularNjogos (Excel) ou o simulador `proporcao_jogos_ganhos` (programa R) para testares outros valores de p e de a , mantendo $b = 10$, indica o que conclus.
8. Um dos jogos de azar presentes nos casinos é a roleta. O jogo consiste em lançar uma bola numa roleta que está dividida num certo número de secções numeradas e coloridas de vermelho, preto ou verde. A roleta europeia contém 36 secções pretas ou vermelhas numeradas de 1 a 36 e uma secção verde com o número 0. A roleta americana contém mais uma secção verde numerada com 00. O jogador poderá fazer diferentes tipos de apostas, sendo estas feitas numa mesa que contém os números da roleta, estando os números de 1 a 36 distribuídos em 3 colunas e 12 linhas. O jogador poderá apostar em números isolados ou escolher conjuntos pré-definidos de números, por exemplo, os números de uma das três colunas, os números pares ou os números coloridos a vermelho. Se o jogador conseguir acertar no número que escolheu receberá um prémio correspondente ao tipo de aposta que efetuou. Por exemplo, se apostou apenas num número e ele saiu na roleta, ficará com o dinheiro que apostou e receberá mais 35 vezes o dinheiro que apostou; se apostar num número par (o zero não é contado) e a bola cair numa secção com um número nestas condições, receberá uma quantia de dinheiro igual ao que apostou e manterá a quantia que apostou.
- (a) Qual é a probabilidade de obter número par para cada um dos tipos de roletas (o 0 e o 00 não contam como números pares)?
- (b) Qual das roletas será mais vantajosa para os jogadores? Justifica.
- (c) O Miguel possui 10 euros e pretende apostar, um euro de cada vez, nos números pares até ganhar mais 10 euros ou perder todo o seu dinheiro (o que equivale a jogar um jogo da ruína contra um jogador que tem 10 euros). Utilizando o simulador SimulaNjogos determina um valor aproximado da probabilidade do Miguel ganhar mais 10 euros, jogando na roleta americana (poderás optar pelo simulador do programa R, `proporcao_jogos_ganhos`).
- (d) Determina o valor referente à questão 8c utilizando a equação C.1 e compara-o com a resposta anterior.

- (e) Determina o valor esperado de ganho do Miguel na roleta americana e na roleta europeia. O jogo é justo? Justifica.
- (f) No Excel, utiliza o simulador `duas_apostas`⁽⁸⁾ e determina um valor aproximado da probabilidade do Miguel ganhar mais 10 euros na roleta americana, fazendo apostas de 1 euro e de 5 euros (poderás optar pelo simulador do programa R, `proporcao_apostas_diferentes`⁽⁹⁾).
- (g) Utiliza a equação C.1 e determina a probabilidade do Miguel ganhar mais 10 euros na roleta americana, efetuando apostas de 0.50, 1, 2, 4, 5 e 10 euros. O que conclus?

⁽⁸⁾ Neste trabalho, o programa em R encontra-se no anexo B.3.

⁽⁹⁾ Neste trabalho, o programa em R encontra-se no anexo A.12.