escola superior de educação e ciências sociais
instituto politécnico de leiria

escola superior de tecnologia e gestão
instituto politécnico de leiria

Margarida Maria de Almeida Ferreira Santos

Relatório de Mestrado

O *GEOGEBRA* NO ESTUDO DOS TRIÂNGULOS E QUADRILÁTEROS: UMA EXPERIÊNCIA NO 7.º ANO DE ESCOLARIDADE

Mestrado em Educação e Tecnologia em Matemática

Relatório realizado sob a orientação de

Professor Doutor Hugo Alexandre Lopes Menino

Professora Doutora Rita Alexandra Cainço Dias Cadima

Leiria, 2012

IPL
escola superior de educação e ciências sociais
instituto politécnico de leiria

IPL
escola superior de tecnologia e gestão
instituto politécnico de leiria

o júri

Presidente

Doutor/a ______________________________________

Doutor/a ______________________________________

Doutor/a ______________________________________

Doutor/a ______________________________________

Doutor/a ______________________________________

Agradecimentos

Ao Professor Doutor Hugo Menino e à Professora Doutora Rita Cadima, meus orientadores, pelas suas sugestões, comentários e excelentes críticas. Estou-lhes particularmente grata pela sua disponibilidade e compreensão, bem como pelo incentivo que me deram.

Aos meus alunos da turma B do 7.º ano de escolaridade, ano letivo 2010/2011, por toda a cooperação e entusiasmo manifestado.

À Núria, minha filha, e ao Rui, meu marido, por todo o apoio, compreensão e incentivo.

À minha família, em particular aos meus pais, por nunca duvidarem das minhas capacidades.

À Professora Doutora Ana Paula Canavarro e ao Professor Doutor Rui Santos pela sua disponibilidade.

À Doroteia Pimparel, ao Carlos Leão, ao João Cardoso, à Glória Rodrigues, à Sandra Silva, à Adelaide Botas, à Amélia Nunes e à Cristina Cunha pela ajuda que me deram.

Resumo

Este estudo, realizado no âmbito do Mestrado em Educação e Tecnologia em Matemática, debruça-se sobre a implementação de uma sequência de tarefas, com recurso ao *GeoGebra*, no estudo do tópico "Triângulos e quadriláteros", no 7.º ano de escolaridade. Em particular, pretendia-se investigar os desafios que emergem na prática letiva quando se aplicam tarefas envolvendo a utilização do *GeoGebra* e que visão têm os alunos da utilização de tarefas com recurso a este *software,* na aprendizagem da geometria.

Trata-se de uma investigação sobre a prática, de natureza qualitativa e interpretativa. Os intervenientes foram os 24 alunos de uma turma da investigadora, que assume neste estudo o duplo papel de professora e de investigadora. A recolha de dados baseou-se nas produções dos alunos, ao longo da aplicação da sequência de tarefas, e no diário de bordo da investigadora.

A análise dos dados revelou que é fácil a adaptação dos alunos ao ambiente de trabalho do *GeoGebra* e que a sua utilização auxilia a aprendizagem da geometria, na medida em que facilita o estabelecimento de conjeturas, bem como a compreensão das propriedades e dos conceitos geométricos. Neste tipo de atividades, regista-se uma forte solicitação do professor, mesmo que as tarefas contenham a informação necessária à sua consecução.

Palavras-chave

Aprendizagem da geometria; *GeoGebra*; Conjeturar; Demonstrar.

Abstract

This study about the MSc on Mathematics Education and Technology deals with the accomplishment of a sequence of tasks, using the GeoGebra on the topic "Triangles and quadrilaterals", for the students attending the 7th Grade. This study allows us to investigate the challenges coming up in teaching practice when using GeoGebra skills and the awareness of the students ability when training with this software by learning geometry.

It's about a research work on the quality and skillful performance. Twenty four students took part in this study supervised by the teacher and researcher. The data were based on the students' projects as they were accomplishing a sequence of tasks, and on the researcher´s notes.

Analyzing the data, the researcher came to the conclusion that the students easily adapted themselves to the GeoGebra skills and that it's a great help when learning geometry. It allows to make assumptions and understand geometric properties and concepts. The teacher's support was constantly asked by performing those kinds of tasks even when the students were given all the necessary information.

Keywords

Geometry learning, GeoGebra, Conjecture, Proof.

Índice

Índice de Quadros

Índice de Figuras

Índice de gráficos

Índice de Anexos

1. Introdução

O presente estudo é uma investigação sobre a prática profissional da investigadora, desenvolvido no âmbito do Mestrado em Educação e Tecnologia em Matemática. Procura estudar os desafios e as potencialidades de utilização de uma sequência de tarefas, com recurso ao *GeoGebra*, para a aprendizagem da geometria, quer do ponto de vista do professor, quer do ponto de vista dos alunos. A sequência de tarefas foi aplicada para lecionação do tópico “Triângulos e quadriláteros”, no 7.º ano de escolaridade, pretendendo envolver os alunos no estabelecimento de conjeturas, bem como na sua demonstração.

1.1. Pertinência do tema

Em Portugal, nos últimos anos, a geometria tem vindo a recuperar o seu papel no ensino da matemática. No Programa de Matemática do Ensino Básico (PMEB) (ME-DGIDC, 2007), a geometria é apontada como um dos quatro temas a abordar ao longo dos três ciclos do Ensino Básico e tem como principal propósito o desenvolvimento do sentido espacial dos alunos.

No âmbito do tema geometria, para os alunos do 3.º ciclo, compreender a noção de demonstração e ser capazes de fazer raciocínios dedutivos é um dos objetivos gerais de aprendizagem definido no PMEB (ME-DGIDC, 2007). Por um lado, este documento, refere que no final do 3º ciclo os alunos devem estar aptos a distinguir o raciocínio indutivo do raciocínio dedutivo e a reconhecer diferentes métodos de demonstração. Também devem familiarizar-se com o processo de demonstração matemática, demonstrando propriedades e relações em atividades de investigação. Devem, ainda, recorrer a *software* de geometria dinâmica, em especial na realização de tarefas exploratórias e de investigação. Por outro lado, da análise efetuada aos resultados do *Estudo Pisa 2006*, concluiu-se que os alunos portugueses demonstram mais dificuldades na competência “utilização de evidência científica”, obtendo nela os níveis de desempenho mais baixos (GAVE, 2007). Uma das orientações metodológicas importantes do PMEB (ME-DGIDC, 2007) é a exploração de conexões, porque os alunos devem conseguir compreender como os conhecimentos matemáticos se relacionam entre si, e devem ser capazes de usar a linguagem numérica e algébrica na resolução de problemas geométricos, em contextos diversificados. Assim, proporcionar aos alunos situações de aprendizagem significativas, que permitam a concretização destas orientações metodológicas, constituiu-se para a investigadora como um grande desafio na sua atividade docente.

O interesse da investigadora pelo tema deste estudo não é recente. Terminou a sua licenciatura em Ensino da Matemática, no final da década de 80, e desde então tem sido uma docente envolvida nas questões educativas do Agrupamento de Escolas onde, desde essa altura, exerce a sua atividade profissional. Desempenhou várias funções de coordenação educativa e, no que respeita ao ensino de matemática, já lecionou todos os anos do Ensino Secundário, assim como todos os do terceiro ciclo do Ensino Básico. Nestes anos de atividade, participou nas ações promovidas para a implementação dos programas e, para além das sessões de formação/acompanhamento em que participou, efetuou várias ações de formação, das quais destaca as realizadas no âmbito das tecnologias de informação, por ser uma área em constante desenvolvimento e mudança e também por ser do seu agrado pessoal.

Como coordenadora do Plano da Matemática I (2006/2009) do Agrupamento de Escolas e, desde o ano letivo 2009/2010, como coordenadora do Plano da Matemática II, a investigadora tem participado nas reuniões mensais de coordenadores do Plano da Matemática II e do Novo Programa de Matemática do Ensino Básico. Nestas reuniões foi-lhe sempre fornecida informação sobre o trabalho que estava a ser desenvolvido em Portugal, pelos grupos de trabalho responsáveis pela fase de experimentação do programa. O PMEB (ME-DGIDC, 2007) é um documento que, desde a sua publicação, se constituiu para a professora investigadora como um grande desafio, nomeadamente no que concerne a proporcionar aos alunos experiências de aprendizagem significativas que lhes permitam alcançar os objetivos nele definidos. Foi este desafio, associado ao gosto pessoal da investigadora pela utilização das novas tecnologias no ensino da matemática, que conduziram à sua inscrição neste Mestrado.

Para além dos fatores anteriormente mencionados, como o desafio em que se constituiu para a investigadora o PMEB (ME-DGIDC, 2007) e o seu interesse pela utilização das novas tecnologias no ensino da matemática, a sua apetência particular pela geometria e pelo seu ensino, bem como os novos desafios pessoais e profissionais resultantes da frequência deste curso de Mestrado, justificam a sua opção pelo estudo. A escolha do tópico, "Triângulos e quadriláteros", resultou de vários fatores: o primeiro, já apontado anteriormente, o agrado da investigadora pela geometria e pelo seu ensino; o segundo, o facto de ser um tópico do 7.º ano de escolaridade, único ano de escolaridade do 3.º ciclo onde estava a ser implementado o PMEB (ME-DGIDC, 2007), no ano letivo 2010/2011; terceiro, por permitir proporcionar aos alunos experiências significativas envolvendo a formulação de conjeturas e a sua demonstração; quarto, por propiciar a utilização de um *software* de geometria dinâmica na realização de tarefas exploratórias e de investigação, quando existem vários estudos nacionais e internacionais (Candeias, 2010; De Villers, 1999; Ferreira, 2005; Lopes, 2010; Machado, 2006; Raposo, 2009; Trindade, 2010) que apontam para a existência de vantagens significativas na aprendizagem da geometria, quando utilizado este tipo de tarefas, com recurso a *softwares* de geometria dinâmica.

O *GeoGebra* é um *software* de geometria dinâmica, livre e gratuito, com grandes potencialidades. Como tal, na perspetiva da investigadora, constituiu-se como um bom elemento de estudo no ensino e aprendizagem da geometria, em particular, e no ensino e aprendizagem da matemática, em geral.

1.2. Problemática e objetivos

No quadro atual, onde os resultados obtidos pelos alunos portugueses em provas internacionais apontam para a necessidade de melhoria da competência "utilização de evidência científica" (GAVE, 2007) e as orientações programáticas nacionais (ME-DGIDC, 2007) para a necessidade de proporcionar aos alunos experiências de aprendizagem que lhes permitam a familiarização com o processo de demonstração matemática, e o recurso a *software* de geometria dinâmica, este trabalho de investigação poderá dar o seu contributo para o estudo desta problemática. O estudo, no âmbito do ensino e aprendizagem da matemática, dá especial relevância à utilização de um *software* de geometria dinâmica, o *GeoGebra*, na resolução de uma sequência de tarefas, construída para lecionação do tópico curricular "Triângulos e quadriláteros", do 3.º ciclo do Ensino Básico. Parte do princípio que a realização desta sequência de tarefas, com recurso ao *GeoGebra*, poderá contribuir para uma imagem mais positiva da geometria por parte dos alunos e, além disso, proporcionar ao professor a criação de situações de aprendizagem onde os alunos possam desenvolver as suas capacidades, nomeadamente as de estabelecer conjeturas e de efetuar demonstrações.

Tendo em conta as ideias explicitadas anteriormente, o objetivo do estudo é o seguinte: adaptar e experimentar uma sequência de tarefas para lecionação do tópico "Triângulos e quadriláteros", com recurso ao *GeoGebra*.

No âmbito desta problemática geral, foram formuladas as seguintes questões:

1. Que desafios emergem na prática letiva quando se aplicam tarefas envolvendo a utilização do *GeoGebra*?
2. Que visão têm os alunos da utilização de tarefas com recurso ao *GeoGebra*, em geometria?

Como tal, pretende-se analisar o trabalho desenvolvido pelos alunos, de uma turma do 7.º ano de escolaridade, durante a aplicação de uma sequência de treze tarefas (Anexos 4 a 16), com recurso ao *GeoGebra*, no ensino da geometria. Pretende-se, igualmente, identificar os desafios com que se depara o professor, em sala de aula, durante a implementação.

2. Fundamentação teórica

A revisão da literatura foi fundamental para a tomada de decisões ao longo do estudo. Assim, neste capítulo, apresenta-se alguma da literatura considerada essencial ao seu desenvolvimento. No primeiro ponto, referem-se as mudanças introduzidas nos últimos anos no ensino e aprendizagem da geometria. O segundo ponto, centra-se na questão da conjetura e da demonstração no ensino e aprendizagem. Por fim, no terceiro ponto, indicam-se os motivos que justificam a utilização de *software* de geometria dinâmica no ensino e aprendizagem da geometria, apresentando-se uma descrição mais detalhada de um deles, o *GeoGebra*, bem como alguns estudos já realizados nesse âmbito.

2.1. O ensino da Geometria

A sociedade atual depara-se com mudanças constantes, resultantes dos progressos científicos e tecnológicos, pelo que os seus indivíduos, além de adquirirem conhecimentos, devem ser capazes de os mobilizar em novas situações. Assim sendo, torna-se necessário encontrar meios que desenvolvam esta competência. A matemática é uma área do saber que pode auxiliar o seu desenvolvimento e, em particular, a geometria por proporcionar a resolução de problemas em contextos diversos.

Na opinião de Ponte (2003), com o movimento da Matemática Moderna, desencadeado especialmente na década de 60, os currículos sofreram profundas alterações. Foram eliminadas matérias tradicionais e inseridas novas. Em especial, foi introduzida uma nova abordagem da matemática e uma nova linguagem pautada pelo simbolismo da lógica e da teoria dos conjuntos.

Segundo Veloso (1998), quando as ideias do movimento da Matemática Moderna foram generalizadas ao ensino preparatório e ao curso geral unificado, o ensino da matemática em Portugal entrou numa fase de profunda degradação. Na opinião do autor, a situação da geometria ainda foi mais grave, devido a uma conjugação de vários fatores:

> ● a ausência de lugar para a geometria no edifício bourbakista da matemática, a não ser como subproduto ou "parente pobre" da álgebra linear; o próprio relevo que muito justamente a M. M. [Matemática Moderna] queria atribuir às transformações geométricas perdeu-se com a abordagem formal, como aplicações, que foi adoptada, fazendo tábua rasa do seu eminente carácter intuitivo;
>
> ● as actividades interessantes da geometria – como as construções geométricas – foram a certa altura transferidas para a Educação Visual, onde são encaradas naturalmente sem qualquer perspectiva matemática, pelos respectivos professores, e sem que em geral exista qualquer trabalho interdisciplinar com a Matemática;
>
> ● o estatuto menor da visualização na actividade matemática dos alunos e no eixo central da aprendizagem da Matemática – aritmética → álgebra → análise;

● a memória de uma experiência negativa que muitos professores guardavam do ensino axiomático da geometria, tornando desejável um papel reduzido da geometria no currículo de Matemática. (p. 22).

A geometria viu reduzido o seu papel na formação matemática dos alunos, em consequência da introdução das ideias do Movimento da Matemática Moderna no currículo de Matemática, opinião também partilhada por Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999). Segundo estes autores, a geometria tendia a ser vista como um ramo da álgebra linear, sem grande interesse para o prosseguimento de estudos, tendo praticamente desaparecido do Ensino Básico os aspetos da geometria ligados à observação, à experimentação e à construção.

Nos anos 70, os alunos mostravam-se cada vez mais desmotivados com a matemática, não entendiam os novos símbolos e os resultados nos exames pioraram, tendo-se erguido um forte clamor contra este movimento em diversos países (Ponte, 2003). Hans Freudenthal foi, na opinião de Veloso (1998), a personalidade de maior relevo no regresso da geometria, como tema fundamental, à matemática escolar. Na opinião de Freudenthal (1973, citado por Veloso, 1998) a geometria terá falhado, não por não ser suficientemente dedutiva, mas porque a dedução não foi ensinada como reinvenção, mas sim imposta aos alunos. A tradução para Inglês da obra dos seus discípulos Dina e Pierre van Hiele, foi decisiva na divulgação das suas ideias na América do Norte, ainda que por vezes reduzidas a uma visão pouco flexível do modelo dos "níveis de compreensão em geometria" (Veloso, 1998).

A necessidade de encontrar resposta para as dificuldades sentidas pelos alunos na aprendizagem da geometria conduziu ao estabelecimento dos níveis de van Hiele. O modelo van Hiele identifica cinco níveis de compreensão na aprendizagem da geometria: "visualização", "análise", "dedução informal", "dedução formal" e "rigor" (ver Figura 1).

Nível 0 (nível básico): **Visualização**
Neste nível inicial, os alunos estão conscientes do espaço apenas como alguma coisa que existe em torno deles. Os conceitos geométricos são vistos como entidades totais e não como tendo atributos ou características.[...]
Nível 1: **Análise**
Começa uma análise dos conceitos geométricos. Por exemplo, através de observação e experimentação os alunos começam a discernir as características das figuras. [...]
Nível 2: **Dedução Informal**
Os alunos são capazes de estabelecer relações entre propriedades relativas a uma figura (por exemplo, num quadrilátero, se os lados opostos são paralelos então os ângulos opostos são iguais) ou entre figuras (um quadrado é um rectângulo porque tem todas as propriedades de um rectângulo). [...]
Nível 3: **Dedução Formal**
Neste nível, o significado da dedução, como modo de estabelecer a teoria da geometria no interior de um sistema axiomático, é compreendido. A relação entre os termos indefinidos, os axiomas, postulados, definições, teoremas e a demonstração, bem como o papel de cada um, são compreendidos.
Nível 4: **Rigor**
O aluno é capaz de trabalhar em diversos sistemas axiomáticos e assim as geometrias não-euclidianas podem ser estudadas, e sistemas diferentes podem ser comparados. A geometria é vista como uma abstracção.

Fonte: Veloso (1998, p. 28)

Figura 1 – Os níveis de van Hiele

Os alunos estão num destes níveis de compreensão e, com um ensino adequado à sua situação, podem progredir sequencialmente para os outros níveis superiores. Um ensino apropriado a um nível superior ao do aluno pode, na opinião dos autores do modelo, impedir a progressão do aluno na sua compreensão da geometria (Veloso, 1998).

Também, a publicação das *Normas para o Currículo*, em 1989, pelo National Council of Theachers of Mathematics (NCTM), se constituiu como marco fundamental na recuperação da geometria como tema importante da matemática escolar (Veloso, 1998). Para este autor, a importância do documento advém do facto de concentrar todo um movimento de rejeição da situação em que se encontrava o ensino da matemática depois dos anos do movimento da Matemática Moderna. Por exemplo, nesse documento (NCTM, 1989-1991) é referido que, do 5.º ao 8.º ano de escolaridade, o estudo da geometria, a uma, duas ou três dimensões, deve ocorrer em situações diversificadas que permitam, entre outras potencialidades, que os alunos identifiquem, descrevam e comparem figuras geométricas. Também deve possibilitar que os alunos explorem transformações geométricas e que usem modelos geométricos na resolução de problemas.

Portugal não foi exceção e participou tanto no movimento da Matemática Moderna, como no que se lhe seguiu, apesar, de na opinião de Veloso (1998), as ideias descritas anteriormente, de Freudenthal e dos van Hiele, não terem tido grande efeito até à reforma introduzida nos programas, no início da década de 90. A esta reforma seguiram-se estudos de vários investigadores que se debruçaram sobre o processo de implementação dos programas de Matemática, em 1991 e em 1993, respetivamente, no Ensino Básico e no Ensino Secundário. Segundo Ponte (2003), para o Ensino Secundário, após diversas ações, como protestos de professores de todo o país e a publicação de circulares com orientações, decorreu um novo processo de revisão curricular. Segundo este autor, o programa resultante deste processo, publicado em 1997, foi acompanhado de várias ações que visaram apoiar a sua aplicação, como a criação de uma comissão de acompanhamento, um corpo de professores acompanhantes e diversas ações de formação. Para o Ensino Básico, iniciou-se em 1996 um movimento de renovação curricular com a "Reflexão participada sobre os currículos", continuado pelo "Projecto de gestão flexível" e que culminou com a publicação do Currículo Nacional do Ensino Básico, em 2001, coordenado por Paulo Abrantes (Ponte, 2003). Na opinião deste autor, todos os estudos e ações que decorreram da implementação destes programas tiveram o mérito de estabilizar a situação no Ensino Secundário, mas o mesmo não foi conseguido no Ensino Básico.

No Currículo Nacional do Ensino Básico (ME - DEB, 2001), são definidas as competências que todos os alunos devem desenvolver nos diferentes domínios da matemática ao longo de todos os ciclos do Ensino Básico, em particular no domínio da geometria, das grandezas e da medida. Estas devem abarcar os seguintes aspetos:

> ● Aptidão para realizar construções geométricas e para reconhecer e analisar propriedades de figuras geométricas, nomeadamente recorrendo a materiais manipuláveis e a *software* geométrico;
>
> ● A aptidão para utilizar a visualização e o raciocínio espacial na análise de situações e na resolução de problemas em geometria e em outras áreas da matemática;
>
> ● A compreensão dos conceitos de comprimento e perímetro, área, volume e amplitude, assim como a aptidão para utilizar conhecimentos sobre estes conceitos na resolução e formulação de problemas;

● A aptidão para efectuar medições e estimativas em situações diversas, bem como a compreensão do sistema internacional de unidades;

● A predisposição para procurar e explorar padrões geométricos e o gosto por investigar propriedades e relações geométricas;

● A aptidão para formular argumentos válidos recorrendo à visualização e ao raciocínio espacial, explicitando-os em linguagem corrente;

● A sensibilidade para apreciar a geometria no mundo real e o reconhecimento e a utilização de ideias geométricas em diversas situações, nomeadamente na comunicação. (p. 62).

Alves (2007), considera que, mesmo com a publicação do Currículo Nacional do Ensino Básico (ME - DEB, 2001), a situação da Matemática no Ensino Básico não foi discutida como a do Ensino Secundário, nomeadamente no que respeita aos reajustes do programa, em 2003/2004 e em 2004/2005. Para Carvalho e Silva (2003, citado por Alves, 2007), no que respeita ao Ensino Básico, as práticas de ensino evidenciavam o predomínio da álgebra e do cálculo, enquanto a geometria, as aplicações e modelação da matemática, a comunicação e o uso da tecnologia eram relegadas para um plano inferior. Em sua opinião, os alunos transitavam para o Ensino Secundário com enormes lacunas na área da resolução de problemas e uma parte significativa, quando terminava o Ensino Básico, apresentava um grande desânimo em relação à matemática, não compreendendo a razão da sua existência.

Como resultado do trabalho destes e de outros investigadores em educação surgiu, em 2007, o PMEB (ME-DGIDC, 2007), implementado em 2010/2011, pela primeira vez em todo o país, no 1º, 3º, 5º e 7º ano de escolaridade. Este documento é um reajustamento do Programa de Matemática para o Ensino Básico, datado de 1990 para o 1.º ciclo e de 1991 para o 2.º e 3.º ciclos, e as modificações curriculares introduzidas no Programa de Matemática para o Ensino Básico pela publicação, em 2001, do Currículo Nacional do Ensino Básico foram, entre outras, algumas das razões que justificaram esta revisão (ME-DGIDC, 2007).

A geometria é um dos quatro temas do PMEB (ME-DGIDC, 2007) e está presente nos três ciclos do Ensino Básico. Este documento introduziu algumas alterações no estudo da geometria, sendo que uma das mais significativas é que as transformações geométricas começam por ser estudadas no 1.º ciclo, inicialmente de forma intuitiva, introduzindo-se posteriormente, de forma crescente, a sua formalização. Neste documento são fornecidas, para os três ciclos de ensino, indicações metodológicas extremamente importantes que auxiliam o professor na orientação da aprendizagem dos alunos. Por exemplo, no 1.º ciclo, é referido que deve ser privilegiada a exploração, a manipulação e a experimentação no ensino e na aprendizagem da geometria, devendo ser utilizados objetos do mundo real, assim como materiais específicos, de forma a desenvolver o sentido espacial dos alunos (ME-DGIDC, 2007). Estas orientações mantêm-se para os ciclos seguintes, com as devidas adaptações, no sentido de se conseguir um aprofundamento desta capacidade.

No PMEB (ME-DGIDC, 2007), a referência às tarefas e aos recursos a utilizar no ensino da geometria auxilia o professor na preparação das atividades letivas. A título de exemplo, quando para o tema geometria do 3.º ciclo se aponta que, em especial nas tarefas exploratórias e de investigação, os alunos devem poder utilizar *software* de geometria dinâmica, não deixa dúvidas de que para a aprendizagem da geometria o professor deve propor situações de aprendizagem que envolvam tarefas exploratórias e de investigação, com recurso a *software* de geometria dinâmica. Também, quando nas indicações metodológicas do PMEB (ME-DGIDC, 2007) para o terceiro ciclo, se menciona a importância de proporcionar aos alunos um tempo adequado para a realização de experiências, a elaboração de estratégias, a formulação de conjeturas e a descrição e justificação de processos, tanto na resolução de problemas, como na realização de tarefas exploratórias e de investigação, confere ao professor a obrigação de propor aos seus alunos tarefas coerentes com este tipo de atividades matemáticas.

2.2. Conjeturar e demonstrar em Geometria

Num mundo em constante mudança, a compreensão dos conceitos é cada vez mais importante para possibilitar a resolução de problemas em situações novas. Segundo o NCTM (2007), é a associação entre o conhecimento dos factos, o domínio dos procedimentos e a compreensão dos conceitos que transforma estes três componentes em meios poderosos. O tipo de tarefas que os professores propõem aos alunos desempenha um papel fundamental na sua aprendizagem. Tarefas desafiantes e criteriosamente selecionadas poderão auxiliar na compreensão das ideias matemáticas.

Para compreender a matemática é essencial que se seja capaz de raciocinar; o raciocínio matemático deve ser desenvolvido através de uma utilização consistente, em contextos diversos. O raciocínio e a demonstração são aspetos fundamentais da matemática, pelo que as crianças deverão ser auxiliadas a compreender, desde as suas primeiras experiências matemáticas, que as afirmações deverão ser sempre justificadas (NCTM, 2007).

Como a prática da matemática está relacionada com a descoberta e a conjetura, uma suposição informada, constitui uma importante via para a descoberta, os alunos devem ser ajudados, desde o 1.º ciclo, a formular, aperfeiçoar e testar conjeturas. Esta ajuda pode ser conseguida com a introdução de pequenas alterações no modo como as tarefas são apresentadas aos alunos (NCTM, 2007). “Em vez de dizer ‘Demonstra que a média dos valores de um conjunto de dados duplica, quando cada um desses valores é duplicado’, o professor poderá perguntar ‘Suponhamos que todos os valores de uma amostra são duplicados. Que alteração, se existir alguma, vai haver na média da amostra? Porquê?’” (NCTM, 2007, p. 62).

Ao mesmo tempo que formulam e investigam conjeturas, os alunos deverão responder à questão *Por que é que isto resulta?*. A clara e correta comunicação de ideias matemáticas, adequada ao nível de ensino dos alunos, é mais importante do que a forma específica como efetuam uma justificação, ou demonstração matemática (NCTM, 2007).

Do 6.º ao 8.º ano, “os alunos deverão ter uma prática diversa e frequente com o raciocínio matemático, à medida que:

- analisam padrões e estruturas para a identificação de regularidades;
- formulam generalizações e conjecturas sobre regularidades observadas;
- validam conjecturas;
- constroem e avaliam argumentos matemáticos.” (NCTM, 2007, p. 310).

A geometria constitui-se como “um contexto natural para o desenvolvimento das capacidades de raciocínio e de argumentação dos alunos” (NCTM, 2007, p. 44). No PMEB (ME-DGIDC, 2007), pode ainda ler-se que um primeiro contacto com o raciocínio geométrico dedutivo pode ser conseguido quando os alunos elaboram justificações, produzindo pequenas cadeias dedutivas.

Experimentar, explorar, conjeturar e provar são atividades essenciais para a compreensão da matemática. Para Junqueira e Valente (1997), uma das caraterísticas centrais da atividade matemática, e talvez a que melhor a diferencia da atividade científica noutras disciplinas, é a formulação de conjeturas e a sua demonstração. Porém, investigar, conjeturar e provar são atividades que alunos, e muitos professores, não apreciam e onde revelam muitas dificuldades. A responsabilidade por esta realidade reside, fundamentalmente, na forma como, durante largos anos, foi abordada a demonstração no ensino, onde os alunos tinham que reproduzir demonstrações carregadas de um rigor e de um formalismo que o seu nível de desenvolvimento não permitia compreender (Junqueira & Valente, 1997).

Oliveira (2002) refere que Pólya reconhece a não existência de um método para ensinar a conjeturar e que esta é uma atividade algo difícil de ensinar. Boavida (2001), debruçando-se sobre o ensino da demonstração, considera que conjeturar e demonstrar são duas atividades entrelaçadas. Atividades como explorar, investigar, generalizar, conjeturar e argumentar estão, na sua opinião, interligadas com a atividade de demonstrar.

Distinguir termos como argumentação, prova e demonstração poderá ter um valor relativo quando se pensa no processo de ensino aprendizagem (Brocardo, 2001). A autora refere que quando se defende que a demonstração, ou prova matemática, deve ser trabalhada no currículo de matemática, não se pode pensar que esse trabalho só pode ser feito quando a maturidade e conhecimento dos alunos lhes permitir perceber e usar o raciocínio dedutivo. Mediante isso, partilha “a opinião de Knuth e Elliot (1998) de que o foco, ao nível do ensino da matemática, se deve deslocar do conceito de provas/demonstrações rigorosas, para um conceito de prova/demonstração como argumento convincente.” (p. 118). Partilhando da opinião de Brocardo (2001), utilizar-se-ão neste trabalho indistintamente as palavras prova e demonstração, por se considerar que ambas dizem respeito a um raciocínio justificativo de um determinado processo ou conclusão que, no contexto de ensino em que foi desenvolvido, pode ser encarado como convincente e rigoroso.

Também para Rodrigues (2008), a demonstração no contexto educativo pode assumir um formato distinto do que carateriza uma demonstração desenvolvida por matemáticos. Deverá, no entanto, satisfazer algumas condições:

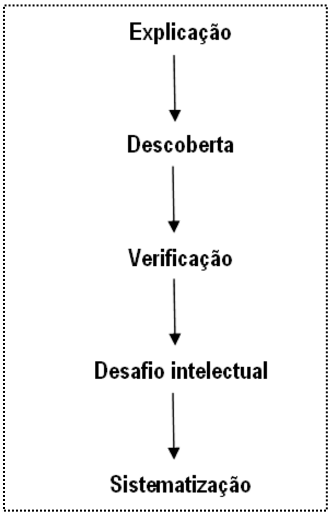
- generalidade (não basta comprovar empiricamente alguns, ou até muitos casos particulares; a comprovação deverá aplicar-se a todos os casos possíveis)
- dedução lógica (feita a partir de resultados conhecidos anteriormente) (p. 240).

A aprendizagem da demonstração é, na perspetiva de Boavida (2001), feita por etapas ao longo de um percurso que proporcione o encontro de sentido nesta aprendizagem. Exemplos de atividades relevantes que podem auxiliar os alunos a percorrer com sucesso essas etapas são:

> a realização de experiências e a análise de casos particulares, a procura de invariantes com vista à generalização, a formulação e exploração de conjecturas, a compreensão de que não basta que um resultado seja válido para alguns casos para que se considere válido para todos, a análise de exemplos e contra-exemplos, a re-visitação de conjecturas formuladas para analisar se se mantêm noutros contextos e as tentativas de avaliação e validação das conjecturas que se produzem (p. 15).

Para Machado (2006), uma vez presente a demonstração na aula de Matemática ela pode cumprir várias funções em simultâneo. Das quatro funções da demonstração por si analisadas, de verificação/convencimento, explicação, desafio intelectual e comunicação, e apesar de reconhecer que todas elas podem estar presentes na sala de aula, considera que as mais pertinentes são as funções de verificação/convencimento e explicação. Todavia, reconhece a importância das outras duas, uma vez que no contexto de sala de aula é igualmente pertinente que os alunos comuniquem as conjeturas que formulam e que partilhem os seus processos de refutação, ou de demonstração. No que concerne à função de desafio intelectual, considera que a demonstração poderá constituir-se como um desafio para os alunos, dependendo das suas caraterísticas pessoais e da forma como possa surgir junto deles.

No trabalho com um ambiente de geometria dinâmica, a convicção de que a prova é feita essencialmente para remover a dúvida pode torná-la obsoleta. Quando os alunos investigam uma conjetura geométrica, recorrendo a *software* de geometria dinâmica, sentem pouca necessidade de proceder à sua verificação, pois o *software* tem um forte poder de convencimento (De Villers, 1996b). Porém, De Villers (1999) propõe que se introduza a demonstração usando a sua função de explicação (ver Figura 2), por ter constatado que, perante a utilização do *Geometer's Sketchpad*, solicitar a um aluno a explicação de um determinado resultado é encarado pelo aluno como um desafio, tornando-se mais motivador do que a solicitação da sua verificação. O autor também propõe que a função de descoberta seja introduzida logo de início, devendo dar-se atenção aos aspetos da comunicação, negociando e clarificando critérios para a aceitação de uma evidência. Na conceção deste autor, a função de verificação deve ser reservada para resultados onde os alunos manifestem, de facto, dúvidas quanto à sua veracidade. No seu entender, a demonstração pode não ser encarada por todos os alunos como um desafio intelectual, mas conseguem entender que o pode ser para outros. Quanto à função de sistematização, ela só é sentida por indivíduos num estádio avançado da prática da demonstração, pelo que deve ser evitada na fase inicial dos cursos.



Fonte: De Villers (1999, p. 35)

Figura 2 – Esquema de introdução das funções da demonstração no ensino da Matemática

Segundo Hanna (2000, citada por Rodrigues, 2008) as principais funções da demonstração na sala de aula são as de verificação e de explicação. Rodrigues (2008) menciona que é à função de explicação que a referida autora atribui principal importância e que a sua opinião é partilhada por outros autores, como por exemplo Hersch (1993; 1997). Nesta perspetiva, a principal função da demonstração na sala de aula é a de contribuir para o desenvolvimento da compreensão matemática. Assim, na opinião de Hanna (2000, citada por Rodrigues, 2008), encontrar formas de ensinar a demonstração com esta finalidade constitui-se como um dos maiores desafios dos educadores matemáticos. Numa dessas formas inclui o uso de *software* de geometria dinâmica, por possibilitar novas abordagens do ensino da demonstração. Dada a importância das demonstrações explicativas, e uma vez que em geometria a maior parte das demonstrações são desta natureza, a autora considera que a geometria é o domínio da matemática mais favorável à realização deste tipo de demonstração.

Também na opinião do NCTM (2007), a geometria possibilita a criação de ambientes propícios ao desenvolvimento das capacidades de raciocínio e de argumentação dos alunos. As orientações curriculares do PMEB (ME-DGIDC, 2007), relativas ao ensino da geometria no 3.º ciclo, sugerem que deve ser dada ao aluno a possibilidade de explorar os conceitos e propriedades geométricos, tanto no plano, como no espaço, numa lógica de resolução de problemas. Recomenda-se também que aos alunos deve ser proporcionado “um tempo apropriado para realizar experiências, elaborar estratégias, formular conjecturas, descrever processos, e justificá-los com rigor progressivo.” (ME-DGIDC, 2007, p. 51).

2.3. A utilização de *software* de geometria dinâmica no ensino da Geometria

Ensinar matemática, e em particular geometria, não é transferir conhecimento do professor para o aluno, mas antes proporcionar-lhe situações de aprendizagem, onde ele seja elemento ativo na construção dos seus saberes. Esta necessidade de proporcionar aos alunos uma aprendizagem mais significativa remete para a indispensável experimentação de modelos diferentes no ensino e aprendizagem da geometria.

O desenvolvimento de programas informáticos trouxe grandes alterações ao ensino e aprendizagem da matemática e a geometria é uma das áreas onde essas mudanças se fizeram sentir. A sua utilização veio possibilitar aos alunos a realização de explorações muito difíceis, ou mesmo impossíveis, de conseguir com os instrumentos tradicionais, utilizados no estudo desta área da matemática. De entre estes programas informáticos, destacam-se os de geometria dinâmica, por serem ferramentas computacionais geradoras de uma nova abordagem no ensino e aprendizagem da geometria. Estes têm despertado o interesse de professores e alunos, por possibilitarem a realização de transformações dinâmicas que permitem gerar e manipular diversos exemplos, e contraexemplos, essenciais para a compreensão de determinadas propriedades geométricas. Há mesmo quem tenha afirmado que a geometria dinâmica salvou o currículo de geometria nos Estados Unidos (De Villers, 1996a).

Num ambiente de geometria dinâmica, as construções geométricas são efetuadas, e modificadas, em tempo real, consoante as necessidades do utilizador, que pode tentar compreender quais as caraterísticas que se mantêm invariantes, ou que se modificam, opinião também partilhada por Ponte, Oliveira e Candeias (2009). Para estes autores, os ambientes de geometria dinâmica permitem construir os objetos básicos da geometria euclidiana e, a partir deles, novos objetos satisfazendo determinadas relações. Além do rigor das construções, possibilitam ao utilizador a modificação de figuras, por arrastamento de um ou mais dos elementos que estão na base da sua construção, observando as propriedades que deixam de se verificar e as que permanecem invariantes.

As orientações recentes para o ensino da matemática continuam a apontar para a utilização de meios tecnológicos. Segundo o NCTM (2007), o uso de tecnologias no ensino melhora a aprendizagem, apoia um ensino mais eficaz e influencia a matemática que é ensinada. Estas poderão servir de apoio às investigações efetuadas pelos alunos em qualquer área, incluindo a geometria, e devem ser usadas para estimular a compreensão e a intuição.

O uso de tecnologia no ensino melhora a aprendizagem por facilitar o envolvimento do aluno com ideias matemáticas abstratas, por possibilitar a aquisição de conhecimentos matemáticos, que poderão auxiliar alguns alunos na superação de dificuldades em procedimentos básicos, por permitir aumentar o envolvimento do aluno em desafios matemáticos e por ser uma opção para o professor quando necessita de adaptar o ensino às caraterísticas individuais dos alunos, nomeadamente aos que revelam dificuldades de atenção/concentração e/ou de organização (NCTM, 2007).

As tecnologias apoiam um ensino mais eficaz por permitirem que o professor melhore as oportunidades de aprendizagem dos seus alunos, selecionando ou criando tarefas que permitam tirar proveito da tecnologia. São também uma mais-valia para a avaliação, pois permitem a análise dos processos utilizados durante as investigações matemáticas realizadas pelos alunos (NCTM, 2007).

A matemática que é ensinada é influenciada pela tecnologia porque, por exemplo, utilizando um programa de geometria dinâmica, os alunos mais novos poderão começar a realizar algumas investigações, nomeadamente ao nível das transformações geométricas (NCTM, 2007). Bravo (2005), considera fundamental a utilização de um ambiente de geometria dinâmica, como o *Geometer's*

Sketchpad, mesmo por alunos do 1.º ciclo, pelo menos com os do 4.º ano de escolaridade, por contribuir para uma visão diferente e mais rica da geometria. Em sua opinião, apesar dos problemas de vária ordem que possam surgir com a sua utilização, possibilita que os "alunos contactem, desde cedo, com novas exigências tanto ao nível do pensamento lógico, como da justificação" (p. 150). Esta visão do autor, acerca da utilização de um ambiente de geometria dinâmica, por parte de alunos do 1.º ciclo, vai ao encontro das recomendações do NCTM (2007) quando refere que, nos primeiros anos de escolaridade, os alunos devem desenvolver a capacidade de visualização, mediante a realização de experiências concretas, utilizando diversos objetos geométricos e através das tecnologias que permitam manipular objetos bi e tridimensionais.

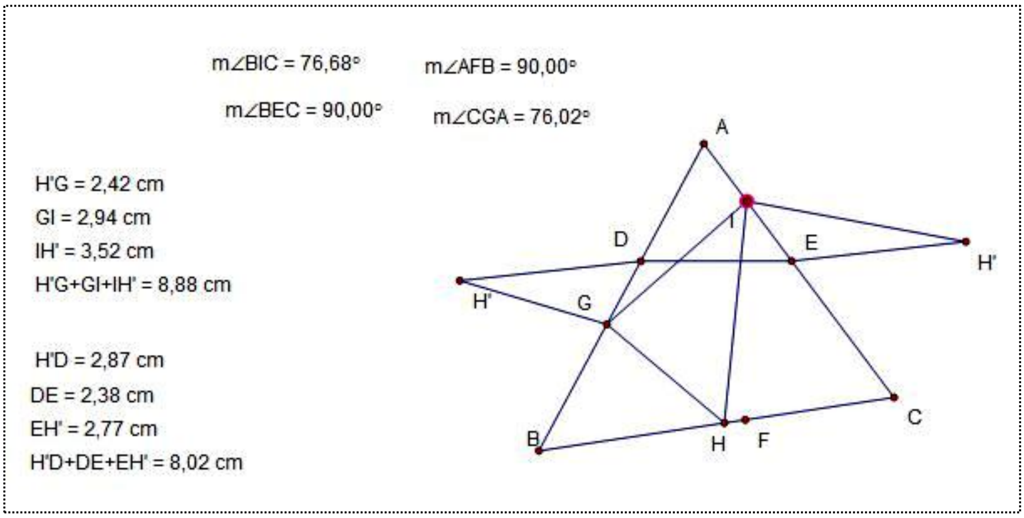
O NCTM (2007) aponta o computador como um recurso a utilizar no ensino da geometria desde o Pré-Escolar ao 12.º ano. Do Pré-Escolar ao 2.º ano é feita referência à utilização de programas informáticos interativos, pela diversidade de atividades que proporcionam, onde os alunos podem compor e decompor figuras. Do 3.º ao 5.º anos, do 6.º ao 8.º anos e do 9.º ao 12.º anos é feita referência à utilização de programas de geometria dinâmica, por serem ambientes onde os alunos podem explorar relações e formular e testar conjeturas. Além destas potencialidades, De Villers (1996a) considera que os *softwares* de geometria dinâmica são também meios poderosos que, para além de facilitarem a verificação de conjeturas, possibilitam a construção de contraexemplos para conjeturas falsas.

As indicações metodológicas do PMEB (ME-DGIDC, 2007), relativas à utilização do computador no ensino do tema geometria, também vão ao encontro das orientações do NCTM (2007). Para o 1.º ciclo do Ensino Básico, no que respeita ao tema geometria e medida, o computador é indicado como um recurso que permite explorações que podem enriquecer as aprendizagens realizadas no âmbito deste tema, nomeadamente através de *applets* que permitem a realização de jogos e outras atividades de natureza interativa. No 2.º ciclo do Ensino Básico, as orientações programáticas contemplam a recomendação de utilização dos *applets* e dos programas de geometria dinâmica, em virtude destes favorecerem a compreensão dos conceitos e das relações geométricas. Quanto ao 3.º ciclo do Ensino Básico, é indicado o recurso a *software* de geometria dinâmica por parte dos alunos, especialmente na realização de tarefas exploratórias e de investigação.

Estas orientações para o ensino da matemática lançam grandes desafios aos professores, na medida em que estes sentem necessidade de proporcionar aos seus alunos tarefas que tornem mais significativa a sua aprendizagem, devendo para tal fazer uso dos *softwares* de geometria dinâmica, tal como é recomendado. Atividades bem concebidas, que proporcionem aos alunos o trabalho com modelos, que lhes permitam realizar experiências interativas, que possibilitem a criação de muitos exemplos como forma de explorar conjeturas, mesmo tendo consciência de que apesar de muitos, não são suficientes para construírem uma demonstração, facilitam a construção do pensamento geométrico em todos os níveis de ensino. Ferreira (2005), constatou que a manipulação de objetos dinâmicos facilitou a descoberta das propriedades e das relações geométricas e desenvolveu a autonomia e as conceções dos alunos acerca da demonstração. Todavia, houve uma forte solicitação da investigadora e da professora por parte dos alunos, apesar de elas terem tentado reduzir a sua intervenção.

A utilização pelos alunos de *software* de geometria dinâmica contribui para o processo de ensino e aprendizagem, na medida em que melhoram o seu empenho, a sua concentração e mostram-se mais motivados para a realização das aprendizagens. Os alunos revelam facilidade de manipulação dos recursos informáticos e a aprendizagem centra-se nas ferramentas de que o aluno dispõe, e não no discurso do professor (Trindade, 2010).

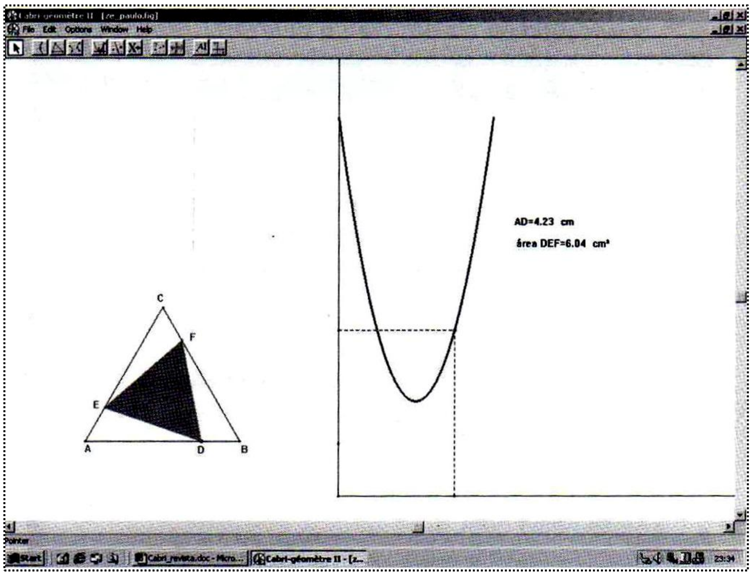
Atualmente existem vários *software*s de geometria dinâmica: o *Cabri-Géomètre*, o *Geometer's Sketchpad*, o *Cinderella* e o *GeoGebra*, entre outros. O *Geometer's Sketchpad*, primeira versão, foi publicado em 1991 e resultou do Visual Geometry Project, dirigido por Eugene Klotz e Doris Schattschneider. Este projeto foi desenvolvido em contacto com escolas, pois tinha como objetivo a renovação do Ensino Básico e Secundário. Como tal, adapta-se bem a estes níveis de ensino e aos cursos de formação dos respetivos professores; possibilita a construção e exploração de figuras que podem ser manipuladas de forma interativa, mas que conservam as propriedades matemáticas que estão na base da sua construção (Veloso, 2002). O *Sketchpad* permite-nos, por exemplo, proceder à exploração geométrica da propriedade "O triângulo órtico é o triângulo de perímetro mínimo que pode ser inscrito no triângulo ABC" (ver Figura 3).



Fonte: Elaboração própria

Figura 3 – Figura construída para explorar a propriedade geométrica "O triângulo órtico é o triângulo de perímetro mínimo que pode ser inscrito no triângulo ABC"

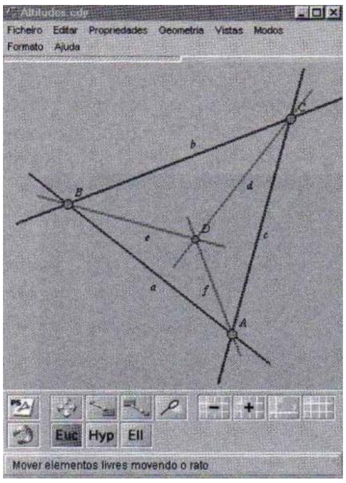
O *Cabri-Géomètre* é um programa da autoria de Jean-Marie Laborde e Franck Bellemain. A sua primeira versão, para computadores Macintosh, foi apresentada em 1987, e foi sofrendo algumas adaptações até que em 1998 apareceu a versão Windows. Trabalha-se com o *Cabri* da mesma forma que se trabalha utilizando apenas régua e compasso. Apresenta uma zona de desenho, um menu e uma barra de botões, que permitem aceder à maior parte dos comandos. Por exemplo, permite resolver problemas recorrendo a representações gráficas (ver Figura 4) e permite animações múltiplas, se forem animados vários objetos em simultâneo (Silveira, 2002).



Fonte: Silveira, 2002, p. 36

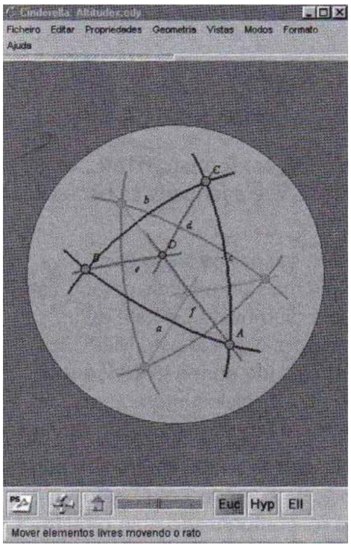
Figura 4 - Construção geométrica para resolução de um problema, com recurso à representação gráfica

Da autoria de J. Richter-Gebert e U. H. Kortenkamp, o *Cinderella* é um programa de grande qualidade para investigar construções geométricas. Nos momentos iniciais de utilização, apresenta um conjunto de botões cujas imagens são bastante sugestivas e que permitem intuir com facilidade as suas funções. O *Cinderella* tem a capacidade de apresentar, em simultâneo, uma figura geométrica, como um triângulo, na geometria euclidiana (ver Figura 5), na geometria esférica (ver Figura 6) e na geometria hiperbólica (ver Figura 7), onde as transformações efetuadas numa delas são imediatamente atualizadas nas outras (Silva, 2002).



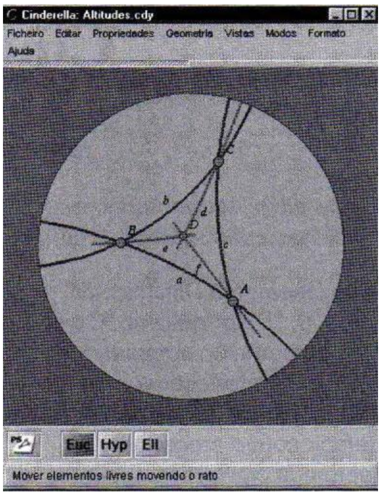
Fonte: Silva, 2002, p. 42

Figura 5 – Um triângulo e as suas alturas na janela da geometria euclidiana



Fonte: Silva, 2002, p. 42

Figura 6 – Um triângulo e as suas alturas na janela esférica



Fonte: Silva, 2002, p. 42

Figura 7 – Um triângulo e as suas alturas na janela hiperbólica

O *GeoGebra* é um *software* de geometria dinâmica gratuito e de fácil acesso aos alunos. Estas caraterísticas, juntamente com o facto de ser em português, de estar pré-instalado na escola e também por ser um recurso recente que tem tido boa aceitação por parte de alunos, justificam a opção pela sua utilização neste estudo. Assim sendo, o mesmo será objeto de uma análise mais detalhada na secção seguinte.

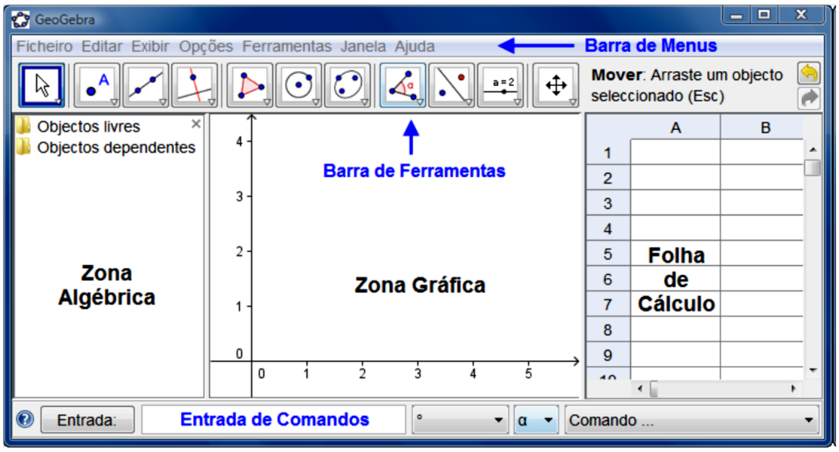
2.3.1. *GeoGebra*, um programa de geometria dinâmica

O *GeoGebra*, criado em 2001, é um *software* de geometria dinâmica relativamente recente. Descrito como um *software* de matemática dinâmica que junta geometria, álgebra e cálculo, foi desenvolvido por Markus Hohenwarter e uma equipa internacional de programadores, para aprender e ensinar matemática nas escolas (Hohenwarter &, Hohenwarter, 2009). Seguidamente, apresenta-se uma breve descrição do mesmo, bem como alguns dos estudos já realizados no âmbito da sua utilização didática.

Breve descrição

O *GeoGebra* é um *software* que pode ser utilizado livremente por professores e alunos. Escrito em Java, permite a exportação para páginas *Web* (html) e para *PSTricks*, funciona em ambientes *Windows*, *LINUX* e *Macintosh* (Felício & Guizzo, 2009).

Adequado aos vários níveis de ensino, o *GeoGebra* permite ensinar geometria, álgebra e cálculo. O menu *Ajuda* permite-nos aceder rapidamente a *GeoGebraWiki* onde se encontra informação útil, disponível em várias línguas. O ambiente de trabalho do *GeoGebra* permite-nos visualizar em simultâneo três janelas: a zona algébrica, a zona gráfica e uma folha de cálculo (ver Figura 8).



Fonte: Hohenwarter & Hohenwarter (2009)

Figura 8 – Vista do ambiente de trabalho do *GeoGebra*

No ambiente de trabalho do *GeoGebra* visualizam-se ferramentas com imagens sugestivas das suas funções, mas nem todas essas ferramentas estão visíveis em simultâneo. No decurso de um trabalho, a ferramenta que normalmente aparece visível é a última a ter sido utilizada. Clicando na seta do canto inferir direito de uma das ferramentas do ambiente de trabalho, aparece indicada a sua função e tornam-se visíveis as ferramentas que lhe estão associadas. Por exemplo, clicando na seta do botão , correspondente a “Recta perpendicular”, aparecem as ferramentas “Recta paralela”, “Mediatriz”, “Bissectriz”, “Tangentes”, “Recta polar ou diametral”, “Recta de regressão” e “Locus” (ver Figura 9).

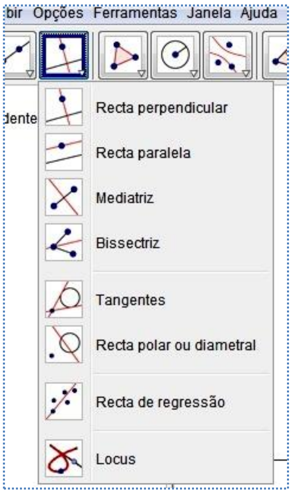
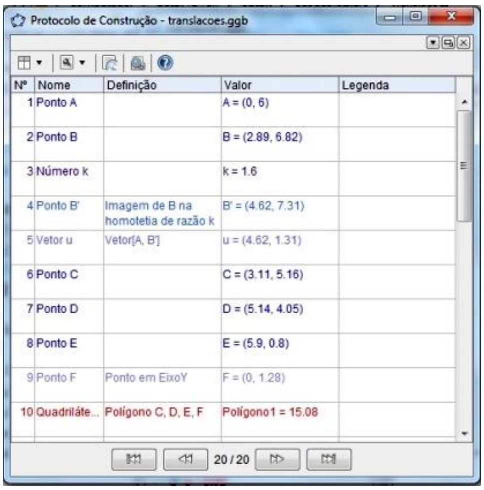


Figura 9 – Vista das ferramentas a que dá acesso o botão  do *GeoGebra*

A possibilidade de visualização, em simultâneo, das três janelas, a algébrica, a geométrica e a folha de cálculo, contribui para que o *GeoGebra* apresente a grande vantagem de fornecer, ao mesmo tempo, três representações de um mesmo objeto. Como todas as representações estão ligadas, as modificações produzidas numa delas, são atualizadas automaticamente nas outras (Hohenwarter & Hohenwarter, 2009).

O *GeoGebra* como ferramenta para ensinar e aprender matemática permite a personalização do interface do utilizador, modificar propriedades dos objetos e usar o menu de contexto (Hohenwarter & Hohenwarter, 2009). A interface pode ser personalizada usando o menu “Exibir” que permite visualizar ou esconder, por exemplo, os eixos coordenados, a zona algébrica, a folha de cálculo, a barra de comandos e o protocolo de construção. A opção “Protocolo de construção” (ver Figura 10) permite visualizar, imprimir e editar as informações de todos os objetos representados na área de trabalho, assim como a sua exportação para a Web. O Menu de contexto permite alterar rapidamente o comportamento ou as propriedades de um objeto. Para lhe aceder, basta clicar no objeto com o botão direito do rato.


Protocolo de Construção - translacoes.ggb

Nº	Nome	Definição	Valor	Legenda
1	Ponto A		A = (0, 6)	
2	Ponto B		B = (2.89, 6.82)	
3	Número k		k = 1.6	
4	Ponto B'	Imagem de B na homotetia de razão k	B' = (4.62, 7.31)	
5	Vetor u	Vetor[A, B']	u = (4.62, 1.31)	
6	Ponto C		C = (3.11, 5.16)	
7	Ponto D		D = (5.14, 4.05)	
8	Ponto E		E = (5.9, 0.8)	
9	Ponto F	Ponto em EixoY	F = (0, 1.28)	
10	Quadriláte...	Polígono C, D, E, F	Polígono1 = 15.08	

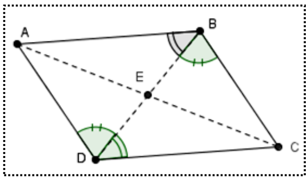
20 / 20

Fonte: Elaboração própria

Figura 10 – Exemplo de um protocolo de construção dos elementos do *GeoGebra*

No manual do *GeoGebra*, que pode ser consultado em www.geogebra.org/help/docupt_PT.pdf, encontra-se a explicação de todas as suas funcionalidades. Este *software* permite realizar construções com pontos, segmentos, linhas, vetores, secções cónicas e também pode ser feito o estudo de funções. Vejamos alguns exemplos:

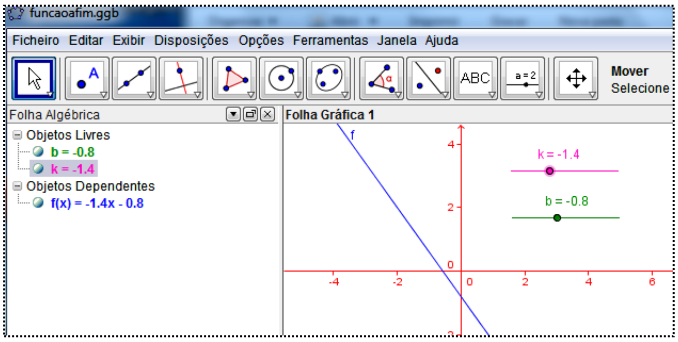
▪ figuras geométricas (ver Figura 11);



Fonte: Elaboração própria

Figura 11 – Exemplo de uma figura geométrica construída com o *software GeoGebra*

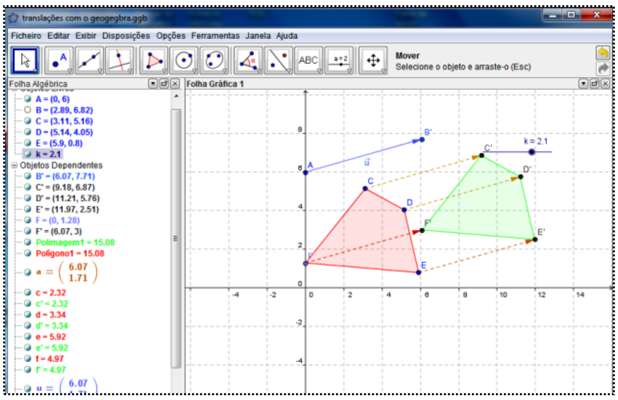
▪ funções (ver Figura 12);



Fonte: Elaboração própria

Figura 12 – Exemplo de uma construção executada com o *software GeoGebra* para estudar as funções lineares

▪ transformações geométricas (ver Figura 13).



Fonte: Elaboração própria

Figura 13 – Exemplo de uma construção executada com o *software GeoGebra* para estudar as propriedades das translações

Estudos empíricos

O *GeoGebra* é um software de geometria dinâmica, relativamente recente, que tem suscitado o interesse de vários investigadores em educação. Raposo (2009), no estudo "O Trabalho Colaborativo em Plataforma LMS (*Moodle*) e a Aprendizagem Matemática", concluiu que a dinâmica proporcionada pelo *GeoGebra* foi essencial no estudo e visualização das propriedades geométricas em estudo. Para além de possibilitar que os alunos trabalhassem fora da sala de aula, registando na plataforma (*Moodle*) as suas conclusões, também lhes possibilitou a utilização dessas conclusões como revisões de matéria dada. Possibilitou-lhes ainda voltar atrás e rever conteúdos, comparando-os com os comentários dos colegas.

Candeias (2010), num estudo realizado sobre a aprendizagem das funções no 8.º ano, com o auxílio do *software GeoGebra,* concluiu que a utilização do *software*, constitui-se como um fator motivador para as aulas de matemática. Todavia, esta autora refere que a utilização de tecnologias ficou aquém do esperado, pois, sempre que puderam, os alunos preferiram utilizar processos de raciocínio numérico.

Lopes (2010), num estudo onde construiu e aplicou uma sequência didática para o ensino da trigonometria usando o *software GeoGebra*, identificou vantagens para os alunos e para os professores, assim como problemas de ordem prática. No que respeita aos alunos, as vantagens identificadas foram: a possibilidade de exploração visual das figuras construídas; a facilidade de construção de figuras recorrendo ao *software*; a possibilidade de alterar graficamente os dados, mantendo as caraterísticas da construção; e o aumento do poder de argumentação, resultante da possibilidade de efetuar sucessivos testes. No que concerne aos professores, as vantagens identificadas pela investigadora foram: o *software* ser livre para download e acessível a qualquer utilizador; a facilidade de adequação de qualquer atividade de diferentes conteúdos matemáticos ao *software*; o protocolo de construção permitir a visualização do modo como os alunos construíram as figuras; e o facto de o *software* poder ser instalado em qualquer sistema operativo. Quanto aos problemas identificados, estes dizem respeito a questões de natureza logística das escolas e à necessidade de cursos de atualização de professores.

3. Metodologia

Neste capítulo, descrevem-se as opções metodológicas, fazendo-se uma referência teórica à investigação qualitativa e dando-se particular destaque à investigação sobre a prática. Apresenta-se, de seguida, uma breve descrição dos participantes do estudo e dos procedimentos seguidos. Referem-se, ainda, os instrumentos e o modo como foram recolhidos os dados, assim como, a forma como estes foram tratados.

3.1. Opções metodológicas

Neste estudo optou-se pela utilização de uma metodologia predominantemente qualitativa, de cariz interpretativo, uma vez que não se pretende efetuar generalizações, mas compreender os fenómenos no contexto em que são observados. Dado que o objetivo do estudo é adaptar e experimentar uma sequência de tarefas para lecionação do tópico "Triângulos e quadriláteros", com recurso ao *GeoGebra*, não se pretendendo efetuar generalizações, mas sim compreender as potencialidades da sequência de tarefas, optou-se pela realização de uma investigação sobre a prática, por permitir ao professor a análise de questões que emergem durante a prática letiva. Para além de realizar o seu trabalho, o professor tem ainda a possibilidade de se observar a si próprio e de se tornar mais reflexivo. Assim sendo, o investigador assume neste estudo um duplo papel, o de professor e o de investigador, papel que, na opinião de Mckernan (1996, citado por Serrazina e Oliveira, 2001), tem grande importância na investigação educacional, sendo que esta não será reconhecida como conhecimento válido da prática se os professores não sustentarem a compreensão dos seus problemas do dia-a-dia. Serrazina e Oliveira (2001) corroboram esta opinião salientando o interesse da investigação das aulas e que a mesma seja feita por professores, na medida que são estes que dispõem das melhores condições para colocar questões respeitantes à aprendizagem, para recolher os dados, interpretá-los e tomar decisões relativamente ao ensino.

A investigação qualitativa, de acordo com Bogdan e Biklen (1994), apresenta cinco caraterísticas. A primeira é que o ambiente natural se constitui como fonte direta dos dados, sendo o investigador o principal elemento de recolha desses mesmos dados. A segunda assenta no facto de que os dados são de natureza descritiva, tornando-se a palavra escrita bastante importante no seu registo e estes só podem ser compreendidos no seu contexto. A terceira é que o investigador se preocupa com os processos, em detrimento dos resultados ou produtos. A quarta é que a análise dos dados se processa de forma indutiva, não se recolhendo dados com o objetivo de confirmar ou estabelecer hipóteses previamente estabelecidas, mas sim para compreender as que emergem no decurso da investigação. Por último, a quinta é que o investigador se interessa, particularmente, por compreender a perspetiva dos participantes. Estes autores consideram que nem todas as investigações consideradas qualitativas têm de apresentar estas cinco caraterísticas com a mesma expressividade, podendo mesmo algumas não estar presentes.

Neste trabalho estão presentes as cinco caraterísticas essenciais da investigação qualitativa, apontadas por Bogdan e Biklen (1994). Com os dados recolhidos, pretende-se apreender a importância da experiência vivida pelos participantes, no contexto de utilização do *GeoGebra,* com o objetivo de, eventualmente, poder contribuir para a melhoria da prática. Não se pretende testar quaisquer hipóteses previamente definidas, nem efetuar generalizações. A teoria é do tipo interpretativo, na medida em que não é anterior aos dados, mas surge desses mesmos dados (Coutinho, 2011).

Ao longo dos tempos têm sido apontadas várias críticas a este tipo de investigação, pelo que, discutir a validade do estudo é uma questão de primordial importância quando se realiza investigação qualitativa. Assim, Carmo e Ferreira (1998), salientam que neste tipo de investigação se deve tentar que os dados recolhidos reproduzam fielmente as ações dos indivíduos.

Na investigação sobre a prática podem existir dois tipos principais de objetivos. Por um lado, a investigação pode visar a alteração de algum aspeto da prática, uma vez reconhecida essa necessidade de mudança, por outro, a investigação pode pretender compreender a natureza dos problemas que afetam essa mesma prática, com vista à definição de uma estratégia de ação (Ponte, 2002). Para Richardson (1994, citado em Ponte, 2002) a investigação sobre a prática não tem como propósito a obtenção de generalizações relacionadas com a prática educacional, assim como também não pretende encontrar resposta para um dado problema. Os resultados obtidos apenas sugerem novas formas de observar o contexto e o problema e/ou possibilidades de mudança na prática.

As três condições mínimas, estabelecidas por Beillorot (2001, citado por Ponte, 2002), para que uma atividade possa ser considerada de investigação, aplicam-se, segundo Ponte (2002), com as devidas adaptações, à investigação que os professores fazem sobre a sua prática. Para o autor, este tipo de atividade deve produzir novos conhecimentos, ser pautada pelo rigor e ter um caráter público. Estas três caraterísticas são de facto importantes numa investigação e estão ao alcance de um professor que investigue a sua própria prática. A mais difícil de satisfazer é a questão do rigor metodológico, uma vez que é preciso encontrar o ponto de equilíbrio entre os procedimentos formais, caraterísticos da investigação académica, e os informais, próprios da atividade docente. Quanto às outras duas questões, a da produção de novos conhecimentos não é problemática, na medida em que as situações da prática profissional do professor tendem a ser únicas. A questão do caráter público também é de fácil resolução, uma vez que os professores dispõem de meios para divulgar os seus trabalhos como, por exemplo, encontros e revistas de caráter profissional e encontros e revistas de educação (Ponte, 2002).

Existe a tendência de confundir a investigação sobre a prática com a investigação-ação, pelo que se torna necessário esclarecer estes dois termos. Ponte (2002) considera que a investigação-ação tem sempre por finalidade a intervenção imediata e visa atingir determinados fins, pré-estabelecidos à partida. Já a investigação sobre a prática surge dentro da prática, com resultados não previsíveis, e é essencialmente questionante e problematizadora.

3.2. Participantes do estudo

Os participantes do estudo eram alunos da professora/investigadora, pertencentes a uma turma do 7.º ano de escolaridade do Agrupamento de Escolas de Maceira, no ano letivo 2010/2011. A professora/investigadora foi a sua diretora de turma e lecionou-lhes, nesse ano letivo, a disciplina de Matemática, a Área Curricular não Disciplinar de Formação Cívica e um tempo da Área Curricular não Disciplinar de Estudo Acompanhado. Os alunos estavam integrados no Plano da Matemática II, razão pela qual no tempo da Área de Estudo Acompanhado foram desenvolvidas atividades no âmbito da disciplina de Matemática.

A turma era constituída por 27 alunos, 14 raparigas e 13 rapazes. A grande maioria dos alunos apresentava um nível etário em conformidade com o ano de escolaridade que frequentava, com uma média de idades de 12 anos. Tinha 4 alunos a frequentar o 7.º ano de escolaridade pela segunda vez e 4 alunos de Necessidades Educativas Especiais de Caráter Permanente. Os participantes do estudo foram todos os alunos que frequentavam a disciplina de Matemática, 24 no total, em virtude de 3 dos alunos de Necessidades Educativas Especiais de Caráter Permanente não frequentarem a disciplina conjuntamente com a turma.

Uma vez definido o estudo a realizar e tomada a decisão de realização de uma investigação sobre a prática, não houve lugar a uma seleção da turma por parte da investigadora, dado que esta era a sua única turma do 7.º ano de escolaridade.

3.3. Procedimentos

Definido o estudo, a fase seguinte passou por uma auscultação aos alunos da turma e, praticamente, todos se mostraram entusiasmados, embora alguns um pouco incrédulos, com a possibilidade de lhes vir a ser lecionado todo um tópico programático com recurso ao *GeoGebra*. Seguiu-se um pedido de autorização ao Diretor Executivo do Agrupamento de Escolas para a realização do estudo, formalizado e apresentado, posteriormente, ao Conselho Pedagógico do Agrupamento de Escolas (Anexo 1). Neste documento, foi ainda pedida a autorização para alterar a ordem de lecionação do tópico em estudo "Triângulos e quadriláteros", a fim de tornar possível a produção dos instrumentos necessários à recolha de dados, no ano letivo 2010/2011. Concedidas as autorizações solicitadas, impôs-se a necessária informação de todos os Encarregados de Educação dos alunos do 7.º ano do Agrupamento, uma vez que a alteração na ordem de lecionação do tópico foi levada a cabo por todos os docentes do Agrupamento, que lecionavam este ano de escolaridade. Assim, foi elaborada a informação respetiva (Anexo 2).

Seguidamente, iniciou-se a fase de seleção/adaptação da sequência de tarefas, constituída por 13 tarefas (Anexos 4 a 16), cujo processo de construção é descrito no ponto 4 deste trabalho. Uma vez construída a sequência de tarefas foi necessário preparar a sua implementação, concretamente no que respeita à preparação dos recursos materiais, assim como à sua avaliação. Com o apoio de outros profissionais do Agrupamento, nomeadamente os da área das Tecnologias de Informação e Comunicação, procedeu-se à instalação do *software* nos computadores da Escola. Alguns alunos também manifestaram interesse em instalar o *software* nos seus computadores pessoais e, quando solicitaram apoio, foram auxiliados pela investigadora nessa tarefa.

Dada a importância para este estudo dos registos efetuados pelos alunos nos documentos recolhidos pela investigadora, esta elaborou, no final do ano letivo 2010/2011, um pedido dirigido aos Encarregados de Educação dos participantes no estudo (Anexo 3), solicitando autorização para utilizar algumas partes dos seus trabalhos, nesta dissertação. Este pedido foi enviado somente no final do ano letivo, para lhes possibilitar esclarecimentos adicionais na reunião de entrega das avaliações do final do ano letivo, uma vez que a professora investigadora presidia estas reuniões em virtude de também ser a diretora de turma dos participantes no estudo.

Relativamente à avaliação da sequência de tarefas, bem como da sua implementação por parte dos alunos, considerou-se que as questões da Tarefa 13 (Anexo 16) poderiam fornecer informações que complementariam as recolhidas durante a implementação das restantes tarefas. A avaliação das aprendizagens dos alunos foi um outro desafio com que se deparou a investigadora. Com tarefas desta natureza não fazia sentido manter apenas o tipo de avaliação usado até esse momento, onde se incluía a realização dos chamados testes de avaliação. Depois de algumas pesquisas e reflexão, a investigadora optou, com a concordância dos alunos, por atribuir ao seu desempenho nesta sequência de tarefas um peso igual ao de um teste. Para a avaliação foram tidos em conta os parâmetros constantes dos critérios de avaliação aprovados pelo Conselho Pedagógico do Agrupamento de Escolas e que eram passíveis de avaliação mediante observação do desenvolvimento das atividades, nomeadamente a pontualidade e assiduidade, as atitudes cívicas, o cumprimento de normas, as relações interpessoais, a participação, o interesse demonstrado, o material e a organização. Foram ainda avaliadas as produções dos alunos recolhidas pela investigadora, no que concerne ao desenvolvimento da comunicação matemática e da capacidade de mobilização de conhecimentos, parâmetros também contemplados nos critérios de avaliação.

A fase de recolha de dados decorreu de maio a junho de 2011, período em que foi aplicada a sequência de tarefas. Durante esta fase de implementação, a investigadora teve o cuidado de realizar uma síntese (diário de bordo – Anexos 19 a 37), com base nas notas que tomou no decurso de cada aula, o que possibilitou a caraterização do trabalho desenvolvido com a turma.

Uma vez terminada a fase de implementação da sequência de tarefas, iniciou-se uma nova fase do estudo, a da análise dos dados e de redação do relatório final. No Quadro 1 encontram-se descritas as atividades desenvolvidas em cada uma das fases do estudo.

Quadro 1 – Síntese das atividades desenvolvidas ao longo do estudo

Período	Atividades	
janeiro a maio de 2011	Revisão da literatura	- Definição dos objetivos do estudo e das questões de investigação; - Auscultação dos alunos; - Pedido de autorização aos Órgãos de Gestão do Agrupamento de Escolas; - Informação dos Encarregados de Educação; - Seleção/adaptação da sequência de tarefas; - Resolução das questões de natureza logística.
maio a junho de 2011		- Implementação da sequência de tarefas; - Redação do diário de bordo; - Pedido de autorização aos Encarregados de Educação.
julho de 2011 a fevereiro de 2012		- Análise dos dados e redação do relatório do estudo.

3.4. Recolha de dados

Tendo em vista o objetivo do estudo e a necessidade de obter dados que possibilitassem uma resposta para as questões formuladas, optou-se pela utilização de dois instrumentos de recolha de dados, usados habitualmente em investigações de natureza qualitativa: o diário de bordo (Anexos 19 a 37) e as produções dos alunos. Trata-se de um estudo de observação participante, dado que a investigadora também desempenhou o papel de professora, não obstante, esta situação tornou mais difícil a recolha dos dados, uma vez que esta se processou no ambiente natural onde decorreu a ação – a sala de aula e tudo dependeu de si. O diário de bordo (Anexos 19 a 37) foi redigido pela professora, a partir das notas por si tomadas no decurso das aulas de implementação da sequência de tarefas. Contém observações relativas ao ambiente das aulas, registos de momentos das aulas com transcrição de diálogos significativos para o decurso das mesmas, interpretações das situações feitas pela investigadora, notas acerca da gestão do tempo e, também, sobre a comunicação na sala de aula. Em suma, consiste num relato escrito do que a investigadora ouviu, viu, experienciou, pensou e refletiu no decurso das aulas (Bogdan & Biklen, 1994). As produções dos alunos, respostas dadas às questões das tarefas, foram recolhidas antes que tivesse sido efetuada qualquer correção e ou discussão em grande grupo. A finalidade desta ação foi a recolha de produções originais, não sujeitas a qualquer tipo de reformulação, que possibilitassem a obtenção de mais dados relativos às dificuldades por eles evidenciadas, bem como sobre as aprendizagens efetuadas. No início de cada tarefa foi fornecido um exemplar da mesma a cada elemento do par, onde cada um dos alunos registou as conclusões a que ambos chegaram. Foram alertados, frequentemente, para a necessidade de efetuarem os mesmos registos em ambos os documentos, pois no final a professora recolheria apenas um dos exemplares e o outro seria necessário para a apresentação/discussão em grande grupo, bem como para o registo de possíveis alterações.

Como já foi mencionado, neste estudo foram usados dois instrumentos de recolha de dados, todavia, não foi esquecida a tão necessária triangulação de dados em investigações baseadas na observação, uma vez que uma das maiores críticas a este tipo de estudos é que os investigadores se apoiam unicamente nas suas próprias perceções, situação que pode conduzir a enviesamentos (Cardoso, 2010). Assim sendo, a Tarefa 13 (Anexo 16) foi construída para proporcionar a recolha de dados no que concerne à visão dos alunos, acerca da sequência de tarefas e do trabalho desenvolvido.

3.5. Análise de dados

A análise de dados é uma tarefa complexa que, numa investigação qualitativa, "envolve o trabalho com os dados, a sua organização, divisão em unidades manipuláveis, síntese, procura de padrões, descoberta dos aspectos importantes do que deve ser aprendido e a decisão sobre o que vai ser transmitido aos outros." (Bogdan & Biklen, 1994, p. 205).

Num estudo desta natureza, com vinte e quatro participantes e onde foi aplicada uma sequência de treze tarefas (Anexos 4 a 16), foram muitos e diversificados os dados recolhidos. Nesta fase da análise de dados, a investigadora começou por escolher pseudónimos para os participantes no estudo e codificar os grupos de trabalho. A cada um dos grupos foi atribuída uma das seguintes designações: G_1, G_2, …, G_{12}. Uma vez que o diário de bordo (Anexos 19 a 37) já tinha sido redigido durante a fase de recolha de dados, foi necessário reescrevê-lo, de acordo com os pseudónimos. Seguidamente, a investigadora organizou as produções dos alunos por tarefa, de acordo com a codificação atribuída aos diferentes grupos de trabalho.

Para analisar os dados, optou por realizar uma análise de conteúdo, uma vez que esta possibilita a descrição, a inferência e a interpretação dos mesmos (Bardin, 1977, citado por Coutinho, 2011). Para a consecução deste tipo de análise definiram-se sete unidades de análise: comunicação matemática, interação aluno-aluno e aluno-professor, gestão do tempo, conjeturas, demonstrações, necessidade de conjeturar e de demonstrar e autonomia.

4. Preparação da sequência de tarefas

O PMEB (ME-DGIDC, 2007) é um documento que, tal como referido anteriormente, desde a sua publicação se constituiu para a professora investigadora como um grande desafio, nomeadamente no que concerne a proporcionar aos alunos experiências de aprendizagem significativas que lhes permitam alcançar os objetivos nele definidos. Desde a sua publicação, participou em várias reuniões, como coordenadora do Plano da Matemática I e II do Agrupamento de Escolas onde exerce funções; aqui se construíram algumas propostas de tarefas para lecionação deste programa e se analisaram outras que lhes foram disponibilizadas. Nestas reuniões, foi sempre fornecida informação sobre o trabalho que estava a ser desenvolvido em Portugal, pelos grupos de trabalho responsáveis pela fase de experimentação deste programa, assim como acerca de todos os recursos disponibilizados. Todo este trabalho influenciou a sua tomada de decisão no que respeita à investigação a efetuar: experimentar uma sequência de tarefas para lecionação do tópico "Triângulos e quadriláteros", com recurso a um ambiente de geometria dinâmica, a lecionar no 7º ano de escolaridade do 3.º ciclo do Ensino Básico. Optou-se por este tópico por ser, do ponto de vista da investigadora, um dos mais desafiadores a ministrar neste ano de escolaridade, sobretudo, quando se pretende proporcionar aos alunos a utilização de um *software* de geometria dinâmica, na realização de tarefas exploratórias e de investigação.

Nesta fase da investigação, um dos desafios mais significativos com que a investigadora se deparou foi a seleção de tarefas que lhe permitissem proporcionar aos alunos a utilização de um ambiente de geometria de dinâmica e, simultaneamente, lhes proporcionassem a oportunidade de estabelecer conjeturas e de efetuar demonstrações. Da vasta gama de informação consultada encontrou, na área da geometria e referente ao tópico selecionado, "Triângulos e quadriláteros", um conjunto de tarefas que se adaptavam ao tipo de experiência que pretendia propiciar aos alunos. Tratava-se de um conjunto de materiais de apoio ao professor, com tarefas para o 3.º ciclo – 7.º ano, de Ponte, Oliveira e Candeias (2009). Assim, a sequência de tarefas utilizada neste estudo resultou da seleção/adaptação de tarefas dos materiais referidos e da construção de novas tarefas. Algumas destas novas tarefas foram inspiradas em Conceição e Almeida (2010), Costa e Rodrigues (2010) e Passos e Correia (2006).

4.1. Opções gerais

No início da construção desta sequência de tarefas a investigadora deparou-se com várias questões. A primeira dizia respeito ao ambiente de geometria dinâmica que iria utilizar, optou pelo *GeoGebra* por ser um *software* dedicado à aprendizagem da geometria que é livre e gratuito, e que, na sua opinião, é bastante intuitivo.

Uma outra questão com que se deparou logo que iniciou a seleção /adaptação da sequência de tarefas relacionou-se com o tipo de trabalho que iria propor aos alunos neste tópico. Optou por isso pelo trabalho de pares para: 1) permitir a troca de impressões, o esclarecimento de dúvidas e a partilha de informações entre alunos. Em sua opinião, o trabalho em pares poderia constituir-se como uma mais-valia para os alunos com mais dificuldades na disciplina, garantindo-lhes um maior apoio, uma vez que previa vir a ser solicitada, mais vezes que o habitual, por todos os alunos; 2) ser uma modalidade de trabalho que já se tinha revelado profícua na resolução de tarefas dos tópicos programáticos anteriores, com os alunos a trocarem impressões entre si, a produzirem trabalhos de qualidade e a manterem um clima de trabalho propício ao desenvolvimento do ensino/aprendizagem. No entanto, para a última tarefa, a Tarefa 13 (Anexo 16), optou por utilizar uma metodologia de trabalho diferente, o trabalho individual. A opção pelo trabalho individual na última tarefa resultou do facto de, com as informações aí recolhidas poder complementar as que foram por si registadas no diário de bordo, acerca da utilização do ambiente de geometria dinâmica, e, também, analisar as conceções dos alunos relativamente aos constructos teóricos de conjetura e de demonstração.

Visando o desenvolvimento da comunicação matemática, a investigadora decidiu que utilizaria sempre o vocabulário, a notação e simbologia próprias do tema em estudo. Contudo, como ao longo dos últimos anos os seus alunos têm revelado algumas dificuldades iniciais de utilização da linguagem formal da geometria, decidiu não lhes exigir esta utilização numa fase inicial, para não limitar a sua forma de expressão, mas sugerir-lha sempre que se revelasse oportuno, por forma a que interiorizassem a importância da sua utilização. Assim, mesmo que essa apropriação não fosse conseguida na totalidade neste tópico, acabaria, certamente, por sê-lo nos tópicos seguintes relativos ao tema geometria.

A professora investigadora considerou que a decisão anterior está de acordo com as orientações programáticas, onde se refere que "À medida que o trabalho prossegue, o professor tem de fazer sentir a necessidade de uma linguagem partilhada, introduzindo progressivamente as representações matemáticas convencionais" (ME-DGIDC, 2007, p.9). No mesmo documento é igualmente referido que "Os alunos podem sentir a necessidade de representar os objectos e relações matemáticas, começando por desenvolver para isso as suas próprias representações não convencionais" (ME-DGIDC, 2007, p. 9).

Como esta sequência de tarefas foi construída para aplicação no 1.º ano de implementação do PMEB (ME-DGIDC, 2007), ano letivo 2010/2011, período de transição em que este programa ainda não envolvia todos os anos de escolaridade, a professora investigadora, respeitando as orientações emanadas superiormente, introduziu no tópico em estudo, "Triângulos e quadriláteros", os itens recomendados. Por isso, introduziu neste tópico o estudo dos ângulos, amplitude e medição, e ainda a distinção entre ângulos complementares e suplementares, bem como a identificação de ângulos verticalmente opostos e ângulos alternos internos. Para o estudo destes itens foram construídas as Tarefas 1, 2 e 3 (Anexos 4, 5 e 6, respetivamente).

Por fim, ainda na fase inicial da construção desta sequência de tarefas, foi necessário decidir se iria aplicar todas as tarefas apresentadas no conjunto de materiais de apoio ao professor (Ponte, Oliveira, & Candeias, 2009), destinado a um conjunto de 24 tempos letivos, ou se deveria efetuar alguns reajustes. Por um lado, na planificação elaborada pelo seu Grupo Disciplinar estavam previstos 16 tempos para lecionação do tópico em estudo, não tendo a investigadora possibilidades de o aumentar significativamente, sob pena de comprometer significativamente o cumprimento do programa da disciplina de Matemática. Acresceu, ainda, o facto de serem necessários pelo menos três tempos letivos para aplicação das Tarefas 1, 2 e 3 (Anexos 4, 5 e 6, respetivamente), tarefas não pertencentes a este conjunto de materiais de apoio de Ponte, Oliveira e Candeias (2009), mas necessárias neste período de transição, até que a generalização do PMEB (ME-DGIDC, 2007) abarque todos os anos de escolaridade. Por outro lado, os alunos não conheciam o *GeoGebra* e revelavam uma enorme ansiedade sempre que se conversava sobre o assunto. Era previsível que viessem a sentir algumas dificuldades na utilização do mesmo e que o tempo previsto para a realização das tarefas viesse a ser escasso. Após ponderar aturadamente estas condicionantes, a investigadora optou por efetuar alguns reajustes a este conjunto de materiais, que consistiriam na seleção/adaptação de algumas das tarefas deste conjunto de materiais e na construção de novas tarefas que se viessem a revelar necessárias, de modo a que a sequência a aplicar fosse exequível no tempo disponível e permitisse alcançar os objetivos definidos para o tópico em estudo.

4.2. Descrição das tarefas

Esta sequência de tarefas é constituída por treze tarefas. No Quadro 2 apresentam-se algumas das suas caraterísticas, nomeadamente os objetivos, a fonte e os comentários da investigadora.

Quadro 2 – Caraterização das tarefas

Tarefa	Objetivos	Fonte	Comentários da investigadora
1	- Classificar ângulos. - Medir, em graus, a amplitude de um ângulo e construir um ângulo sendo dada a sua amplitude.	Elaboração própria	Tarefa construída para lecionação de um tópico do 2.º ciclo. Tempos letivos previstos: 1
2	- Distinguir ângulos complementares e suplementares e identificar ângulos verticalmente opostos. - Estabelecer relações entre ângulos. - Conhecer e utilizar os elementos base do *GeoGebra*.	Elaboração própria	Tarefa construída para lecionação de um tópico do 2.º ciclo, onde se pretende que os alunos estabeleçam, pela primeira vez, uma conjetura. Tempos letivos previstos: 1
3	- Distinguir ângulos complementares e suplementares e identificar ângulos verticalmente opostos e ângulos alternos internos. - Estabelecer relações entre ângulos. - Conhecer e utilizar os elementos	Elaboração própria	Tarefa construída para lecionação de um tópico do 2.º ciclo, onde se pretende que os alunos estabeleçam, pela segunda vez, uma conjetura.

	base do *GeoGebra*.		Tempos letivos previstos: 1
4	- Conhecer e utilizar os elementos base do *GeoGebra*. - Construir figuras dinâmicas no *GeoGebra*. - Desenvolver a comunicação matemática.	Ponte, Oliveira & Candeias (2009)	Tarefa adaptada para proporcionar os alunos, para além do contacto com mais algumas caraterísticas do *software*, a oportunidade de relembrar a classificação de triângulos e de descrever um procedimento por eles realizado. Tempos letivos previstos: 2
5	- Formular, testar e demonstrar conjeturas relacionadas com os ângulos internos de um triângulo. - Deduzir o valor da soma dos ângulos internos de um triângulo. - Identificar e usar o raciocínio indutivo e o raciocínio dedutivo. - Construir figuras dinâmicas no *GeoGebra*.	Ponte, Oliveira & Candeias (2009)	Tarefa onde os alunos estabelecem uma conjetura e a demonstram respondendo a uma sequência de perguntas, reorganizadas numa pequena demonstração. Tempos letivos previstos: 2
6	- Formular, testar e demonstrar conjeturas relacionadas com os ângulos internos e externos de um triângulo. - Deduzir o valor da soma dos ângulos externos de um triângulo. - Identificar e usar o raciocínio indutivo e o raciocínio dedutivo. - Construir figuras dinâmicas no *GeoGebra*.	Ponte, Oliveira & Candeias (2009)	Tarefa onde os alunos estabelecem duas conjeturas e as demonstram. Para a demonstração da 1.ª apenas se solicita que encontrem uma justificação para a mesma, mas para a 2.ª têm de responder a uma sequência de perguntas, reorganizadas numa pequena demonstração. Tempos letivos previstos: 2
7	- Estabelecer os critérios de congruência de triângulos. - Construir figuras dinâmicas no *GeoGebra*.	Ponte, Oliveira & Candeias (2009)	Tarefa onde os alunos exploram diversas situações de congruência de triângulos, estabelecendo conjeturas. Tempos letivos previstos: 2
8	- Compreender e aplicar os critérios	Ponte,	Tarefa, essencialmente, de

	de congruência de triângulos. - Desenvolver a comunicação matemática, utilizando a notação, simbologia e vocabulário próprios.	Oliveira & Candeias (2009)	aplicação dos conhecimentos adquiridos. Tempos letivos previstos: 2
9	- Compreender o que é uma conjetura. - Construir figuras dinâmicas no *GeoGebra*. - Justificar raciocínios. - Desenvolver a comunicação matemática, utilizando a notação, simbologia e vocabulário próprios.	Ponte, Oliveira & Candeias (2009)	Tarefa onde, pela primeira vez, é organizada uma demonstração num esquema a duas colunas. Tempos letivos previstos: 1
10	- Construir quadriláteros e investigar as suas propriedades. - Utilizar os elementos base do *GeoGebra*. - Desenvolver a autonomia.	Conceição & Almeida (2010)	Tarefa onde é dada total liberdade de ação aos alunos para encontrarem as propriedades dos quadriláteros indicados. Tempos letivos previstos: 1
11	- Construir um paralelogramo, investigar e demonstrar as suas propriedades. - Desenvolver a comunicação matemática, utilizando a notação, simbologia e vocabulário próprios. - Desenvolver a autonomia.	Ponte, Oliveira & Candeias (2009)	Tarefa onde de questão para questão se proporciona maior liberdade de atuação relativamente às demonstrações solicitadas, fornecendo em cada uma menos sugestões que na anterior. Tempos letivos previstos: 2
12	- Utilizar os elementos base do *GeoGebra*. - Descobrir a fórmula da área do paralelogramo.	Elaboração própria	Tarefa construída para promover a descoberta guiada da fórmula de cálculo da área do paralelogramo. Tempos letivos previstos: 1
13	- Descrever a conceção dos conceitos de conjetura e de demonstração. - Refletir sobre a adequação da	Elaboração própria	Tarefa construída para auxiliar os alunos a refletirem sobre a sua aprendizagem.

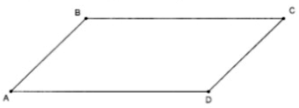
	sequência de tarefas, com recurso ao *GeoGebra*, ao desenvolvimento da aprendizagem.		Tempos letivos previstos: 1

Fonte: Elaboração própria

No Quadro 2 pode verificar-se que uma parte bastante significativa desta sequência de tarefas foi selecionada/adaptada de Ponte, Oliveira e Candeias (2009). A Tarefa 8 (Anexo 11) é a única onde as questões selecionadas não contêm qualquer adaptação feita pela investigadora. Nesta oitava tarefa, o trabalho da investigadora limitou-se à seleção de cinco questões, de entre as dez apresentadas pelos autores. Quanto às restantes, selecionou questões de entre o conjunto apresentado pelos autores mas, quando necessário, acrescentou informação relativa à utilização do *software*. Nestas tarefas, introduziu, por vezes, alterações na estrutura das questões, como por exemplo na questão 1 da Tarefa 4 (Anexo 7). Estas alterações foram mais relevantes na Tarefa 11 (Anexo 14), onde a partir da questão 1 (ver Figura 14) da Tarefa 9 de Ponte, Oliveira e Candeias (2009), a investigadora construiu toda a Tarefa 11 (Anexo 14).

Um paralelogramo é um quadrilátero em que os lados opostos são paralelos.

1. Na figura seguinte representa o paralelogramo ABCD.



Esta definição permite deduzir várias propriedades do paralelogramo, nomeadamente:

(1) Lados opostos num paralelogramo têm o mesmo comprimento;

(2) Ângulos opostos num paralelogramo têm a mesma amplitude;

(3) Ângulos consecutivos num paralelogramo são suplementares;

(4) As diagonais de um paralelogramo bissectam-se mutuamente;

(5) As diagonais de um paralelogramo dividem-no em quatro pares de triângulos congruentes;

(6) O paralelogramo tem uma simetria rotacional de 180°.

Escolhe **duas** das propriedades anteriores e demonstra-as.

Fonte: Ponte, Oliveira & Candeias (2009), p. 91

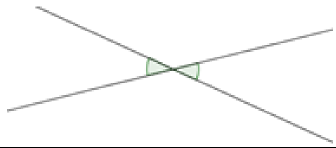
Figura 14- Questão a partir da qual foi construída a Tarefa 11 (Anexo 14)

As restantes tarefas desta sequência foram construídas pela investigadora, para proporcionar aos alunos situações de aprendizagem relativas aos restantes conteúdos programáticos definidos para o tópico “Triângulos e quadriláteros”, no ano letivo 2010/2011, ano de implementação desta sequência de tarefas. Para a construção da Tarefa 10 (Anexo 13) a investigadora inspirou-se em Conceição & Almeida (2010), adaptando uma nota fornecida pelos autores aos docentes que vai ao encontro das orientações fornecidas aos professores pelo NCTM (2007), relativamente ao estudo da geometria do 6.º ao 8.º ano.

Em todas as tarefas da sequência, a investigadora procurou integrar as definições relativas aos conteúdos em estudo, como por exemplo a da Figura 15 (questão 2. da Tarefa 2 (Anexo 5)). Também inseriu, sempre que considerou necessário, notas sobre conteúdos de anos transatos, como por exemplo a da Figura 16 (questão 1. da Tarefa 9 (Anexo 12)).

- Dois ângulos dizem-se **verticalmente opostos** se têm o vértice comum e os lados de cada um estão no prolongamento dos lados do outro.

- Dois ângulos com a mesma amplitude dizem-se **congruentes**.



Fonte: Elaboração própria

Figura 15 – Exemplo da integração das definições relativas aos conteúdos

Recorda:

Quadrilátero é um polígono com quatro lados.

Polígono é o conjunto de pontos do plano limitado por uma linha fechada, formada por segmentos de recta unidos pelas extremidades.

Fonte: Elaboração própria

Figura 16 – Exemplo da integração das notas relativas a conteúdos de anos transatos

4.3. *GeoGebra*

Nesta fase do projeto, a investigadora teve que decidir como iria fornecer aos alunos a informação necessária no que respeita à utilização do *software*, já que os alunos eram inexperientes na utilização do *GeoGebra*, logo necessitaria de lhes indicar os comandos e as ferramentas específicas a utilizar em cada construção geométrica. Escolheu fornecer essas informações ao longo das diferentes tarefas. Por exemplo, colocou sugestões como a que se segue "Determina o perímetro e a área do quadrilátero. Para determinar o perímetro do polígono selecciona o modo ***Distância, comprimento ou perímetro*** e clica de seguida sobre o polígono. Efectua um procedimento análogo para determinar a área do polígono, mas começa por seleccionar o modo ***Área***." (pergunta 1.2. da Tarefa 4 (Anexo 7)), com a indicação dos comandos e dos procedimentos a efetuar para obter o objeto pretendido. Decidiu, ainda, associar a estas indicações imagens resultantes da captura de ecrã do *GeoGebra*, como ilustra a da Figura 17 (pergunta 1.2. da Tarefa 4 (Anexo 7)), sempre que fosse necessário utilizar uma nova ferramenta.

Figura 17 - Imagem exemplificativa da ferramenta a utilizar

Estas decisões foram tomadas com o intuito de rentabilizar o tempo destinado à utilização do *software*, evitando a dispersão dos alunos em sala de aula com a utilização de comandos e procedimentos desnecessários. Estas opções poderiam limitar um pouco o desenvolvimento da autonomia dos alunos, no que respeita à utilização do *software*, mas, por outro lado, fornecer-lhes-iam mais tempo para o desenvolvimento da sua autonomia no que concerne ao estabelecimento de conjeturas. Decidiu, por isso, que ao longo da sequência de tarefas reduziria ao máximo, preferencialmente a uma única vez, as indicações dadas no que respeita aos procedimentos a efetuar para utilizar um determinado comando. Esta última opção teve uma dupla finalidade: 1) promover o desenvolvimento da autonomia dos alunos pois, caso sentissem necessidade, deveriam ser capazes de obter informação nas tarefas anteriores; 2) responsabilizar os alunos pela organização do material fornecido nas aulas, onde, obrigatoriamente, deveriam constar as suas produções, devidamente corrigidas, após a correção/discussão em grande grupo.

4.4. Conjetura e demonstração

As indicações metodológicas do PMEB (ME-DGIDC, 2007), relativas ao ensino da geometria no 3º ciclo, apontam no sentido de que deve ser dada ao aluno a possibilidade de explorar os conceitos e propriedades geométricos, tanto no plano, como no espaço, numa lógica de resolução de problemas. Recomenda-se, também, que aos alunos deve ser proporcionado "um tempo apropriado para realizar experiências, elaborar estratégias, formular conjecturas, descrever processos, e justificá-los com rigor progressivo" (ME-DGIDC, 2007, p. 51). Refletindo estas orientações, a investigadora deparou-se com mais uma questão: "Nesta sequência de tarefas, como proporcionar aos alunos o primeiro contacto com os conceitos de conjetura e de demonstração?".

Relativamente ao modo como iria proporcionar aos alunos o primeiro contacto com o conceito de conjetura, a investigadora decidiu efetuá-lo gradualmente ao longo das tarefas, para lhes facilitar uma melhor apropriação do conceito. Assim, optou por solicitar nas primeiras tarefas, Tarefa 2 (Anexo 5) e Tarefa 3 (Anexo 6), o preenchimento de espaços em branco, como por exemplo na pergunta 3.2. da Tarefa 2 (ver Figura 18), de modo a completarem uma dada conjetura. Nestas duas tarefas não é feita qualquer referência ao termo conjetura, nas seguintes, a investigadora procurou fornecer cada vez menos informação sobre os entes geométricos envolvidos em cada conjetura deixando, progressivamente, a sua formulação a cargo dos alunos. Deste modo, na Tarefa 5 (Anexo 8) apenas é indicada a parte inicial do enunciado da mesma (ver Figura 19). Na tarefa seguinte, a Tarefa 6 (Anexo 9), a formulação das conjeturas é da total responsabilidade dos alunos (ver Figura 20).

3.2.Completa:

Ângulos **verticalmente opostos** ______________ amplitude, logo são ______________.

Fonte: Elaboração própria

Figura 18 – Exemplo dos 1.os contactos com conjeturas

Formula uma conjectura sobre o valor da soma dos ângulos internos em qualquer triângulo.

Num triângulo qualquer ____

____

Fonte: Elaboração própria

Figura 19 – Modo como foi solicitada a conjetura da Tarefa 5 (Anexo 8)

1.4. Estabelece uma conjectura sobre a relação entre a soma das amplitudes de dois ângulos internos de um triângulo e a amplitude de um ângulo externo no vértice oposto.

____

Fonte: Elaboração própria

Figura 20 – Exemplo do modo como foram solicitadas as conjeturas da Tarefa 6 (Anexo 9)

No que respeita ao conceito de demonstração, a investigadora optou pela sua introdução de forma faseada na sequência de tarefas, começou por apresentar uma sequência de perguntas reorganizadas numa pequena demonstração, Tarefas 5 e 6 (Anexos 8 e 9, respetivamente). A palavra demonstração aparece, pela primeira vez, no final da questão 2. da Tarefa 5 (Anexo 8), onde inseriu uma nota de parabéns pela realização da demonstração da conjetura estabelecida. A introdução desta nota, para além de elogiar os alunos pelo seu desempenho, teve, ainda, como finalidade introduzir o termo demonstração, no tópico. Depois, na Tarefa 8 (Anexo 11), preferiu apresentar um conjunto de questões onde nunca utilizou este termo, mas em que os alunos têm de provar propriedades mediante a justificação de afirmações. Seguiu-se a Tarefa 9 (Anexo 12) onde na questão 2. justificou a necessidade de efetuar demonstrações no estudo da geometria. De seguida, ainda nesta Tarefa 9, sugeriu a organização da demonstração, da conjetura estabelecida na questão 1., num esquema a duas colunas. Na Tarefa 11 (Anexo 14) apresentou mais duas questões, questão

2. e questão 4., onde voltou a propor a utilização deste esquema na demonstração das conjeturas estabelecidas na questão 1. e na questão 3., respetivamente. Nestas duas tarefas, Tarefa 9 (Anexo 12) e Tarefa 11 (Anexo 14), a investigadora teve a preocupação de facultar em cada demonstração menos informações do que na anterior (ver Figura 21). Assim, a Tarefa 11 (Anexo 14) termina com um desafio, a questão 5., onde é solicitada a demonstração de uma propriedade, envolvendo os ângulos internos consecutivos de um paralelogramo, sem qualquer informação ou sugestão para a sua consecução.

- Organiza a demonstração num esquema a duas colunas. Na coluna da esquerda regista os vários passos (as afirmações) e na coluna da direita a respectiva justificação. Observa o esquema que se segue

Passo	Justificação
$\angle CAD + \angle ADC + \angle DCA = 180^\circ$	- A soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é igual a 180º.
$\angle CAB + \angle ABC + \angle BCA = 180^\circ$	-
$\angle CAD + \angle ADC + \angle DCA + \angle CAB + \angle ABC + \angle BCA = 360^\circ$	-
$\angle CBA + \angle BAD + \angle ADC + \angle DCB + = 360^\circ$	-

Completa a coluna da direita para concluíres a demonstração da conjectura anterior.

Esquema a duas colunas da questão 2. da tarefa 9 (Anexo 12)

- Organiza a demonstração num esquema a duas colunas.
- Começa por provar que os triângulos ABE e EDC são congruentes e de seguida conclui que $\overline{AE} = \overline{EC}$ e $\overline{DE} = \overline{EB}$.

Passo	Justificação

Esquema a duas colunas da questão 4. da tarefa 11 (Anexo 14)

Fonte: Elaboração própria

Figura 21 – Exemplos de alguns dos esquemas a duas colunas utilizados na sequência

5. Implementação e reflexão sobre a sequência de tarefas

A aplicação desta sequência de tarefas decorreu de 9 de maio a 17 de junho de 2011, perfazendo um total de 25 tempos letivos (unidades de 45 minutos), mais 6 tempos do que o previsto. Neste capítulo, será apresentada uma descrição da sua implementação no que concerne aos desafios e potencialidades, que emergiram da utilização de tarefas envolvendo o *GeoGebra*, e à visão dos alunos sobre a mesma. Será, ainda, apresentada uma reflexão final sobre dos desafios sentidos bem como algumas sugestões de alteração.

5.1. Desafios e potencialidades da utilização de tarefas envolvendo o *GeoGebra*

A utilização de tarefas envolvendo o *GeoGebra* constituiu-se como um grande desafio para a investigadora, nomeadamente no que respeita à comunicação matemática, à interação aluno-aluno e aluno-professor e à gestão do tempo. A falta de experiência, quer dos alunos na utilização do *GeoGebra*, quer da professora investigadora na aplicação de tarefas com recurso a *software* de geometria dinâmica, esteve na base desse desafio. Este foi complementado pela expetativa da professora sobre as potencialidades deste tipo de tarefa relativamente ao desenvolvimento da autonomia, das capacidades dos alunos de conjeturar e de demonstrar, e em que medida as conjeturas criam, ou não, nos alunos, a necessidade de as demonstrar.

5.1.1. Comunicação matemática

Durante a implementação desta sequência de tarefas, a investigadora procurou, sempre que oportuno, formular perguntas que lhe permitissem obter alguma informação por parte dos alunos, não tendo tido grandes dificuldades em lograr respostas. O diálogo seguinte, gerado aquando da resolução da pergunta 1.1. da Tarefa 8 (Anexo 11), é um exemplo desse facto.

> O Manuel começou a assinalar na figura que $AE \equiv DE$, $BE \equiv EC$ e $AB \equiv CD$. Como observei quase todos os pares a efetuarem o mesmo procedimento, dirigi-me ao quadro e perguntei:
> Professora: O que é que vos garante esta igualdade ($AB \equiv CD$)?
> Martim: Ó stora, vê-se.
> Professora: Não pode ser justificado dessa forma. Têm de usar os dados do enunciado e as relações que conseguirem encontrar na figura.
> O Manuel e os colegas mais próximos, que estiveram algum tempo a pensar e a trocar impressões, chamaram-me e o Manuel continuou:
> Manuel: Stora, este ângulo (ângulo BEA) é igual a este (ângulo CED).
> Professora: Porquê?
> Manuel: Porque são ângulos verticalmente opostos.
> Professora. É verdade. Então como utilizam esse facto?
> Manuel: Posso usar este critério (LAL) para concluir isto (a congruência dos dois triângulos).
> Professora: Muito bem. Agora escrevam tudo o que acabas de dizer.

(DB81, Anexo 30)

Nem sempre as respostas dadas pelos alunos foram precisas como na questão referida anteriormente. Por vezes, a professora teve que contrapor às respostas dadas pelos alunos novas questões até que os conceitos estivessem clarificados, como por exemplo na segunda questão desta mesma Tarefa 8 (Anexo 11):

> Professora: O que é o ponto médio de AC ?
> Alunos: Divide o segmento ao meio.
> Nem todos os pares deram a resposta anterior. Outros, como o do Marco e do Timóteo e o do Emanuel e da Maria, responderam “Divide o segmento em duas partes”. Perante esta resposta, desenhei no meu caderno de notas um segmento de reta AB e nele marquei um ponto C a dividir o segmento de reta em duas partes diferentes. De seguida, mostrei-lhes o meu esboço e fazendo-os refletir, perguntei:
> Professora: O ponto C divide o segmento de reta AB em duas partes. C é o ponto médio de AB ?
> Emanuel: Não.
> Professora: Porquê?
> Emanuel: Porque não está no meio.
> Esclarecido este assunto, os dois pares continuaram o seu trabalho.
>
> (DB82, Anexo 31)

Um dos desafios com que a investigadora se deparou diz respeito à formulação de perguntas. Apesar de, sempre que oportuno, ter formulado perguntas que lhe permitiram granjear alguma informação por parte dos alunos, e com elas ter conseguido conduzi-los às conclusões pretendidas, houve um episódio, durante a aplicação da Tarefa 5 (Anexo 8), relacionado com a utilização do *GeoGebra* que a obrigou a significativos momentos de reflexão.

> De repente, novo diálogo.
> Samuel: Ó stora, dá $181°$, mas não tem que dar $180°$?
> Timóteo: A nós deu $179{,}99°$.
> Denise: Tens razão Samuel, já não me lembrava que dá sempre $180°$.
> Emanuel: Então o *GeoGebra* está a medir mal?
> Denise: Só pode ser.
> Professora: Não, as medições que efetuaram estão corretas. Por que será que isto está a acontecer?
> Vários alunos: Não sabemos.
> Professora: Pensem um bocadinho.
> Passado algum tempo, uma vez que não obtive qualquer resposta e os alunos estavam inativos, acabei por lhes dizer: “Usem o menu opções, selecionem um arredondamento diferente e vejam o que acontece”. Inicialmente, não pretendia dar qualquer sugestão nesta pergunta 1.1., mas como verifiquei que já era conhecimento adquirido que a soma dos ângulos internos do triângulo é igual a $180°$, e também porque os alunos estavam a colocar a hipótese de que os resultados obtidos usando o *GeoGebra* estavam incorretos, acabei por lhes dar esta sugestão.
> Os alunos continuaram a resolução da questão e concluíram-na sem mais informações adicionais.
>
> (DB5, Anexo 26)

Tal como atrás referiu, o episódio anterior foi alvo de vários momentos de reflexão por parte da investigadora, na tentativa de encontrar alguma justificação para o facto de não ter conseguido incentivar os alunos a investigarem a situação. Este acontecimento adquiriu maior importância porque não houve voluntários para a correção/discussão da tarefa. Praticamente não existiu discussão final e verificou-se uma redução significativa do entusiasmo da turma na realização das atividades.

> De seguida, às 9 horas e 50 minutos, recolhi as produções dos alunos e deu-se início à correção/discussão da tarefa. Para minha grande surpresa, nenhum dos pares se voluntariou para apresentar o seu trabalho. A correção foi efetuada comigo, a solicitar a alguns pares a leitura das suas respostas, não tendo surgido momentos de discussão significativos nas questões 1. e 2.. Na questão 3., contrariamente às minhas expetativas, também não suscitou discussão a resposta dada pela Marisa, que passo a transcrever:
> Marisa: Não, porque a soma das amplitudes dos ângulos de um triângulo dá sempre $180°$.
> Como nenhum aluno reagiu a esta afirmação, resolvi intervir.
> Professora: Todos estão de acordo com a resposta dada pelas vossas colegas?
> Magda: Nós não.
> Professora: Porquê?
> Magda: Isto é difícil de explicar. Posso ler a nossa resposta?
> Professora: Sim, podes.
> Magda: Não concordamos com a primeira afirmação, porque a soma dos ângulos internos num triângulo é sempre igual a $180°$, não a $179°$. A segunda afirmação está certa porque quando é com o transferidor o método para medir não é rigoroso, podendo conduzir a erro.
> Como não houve reação por parte dos colegas, continuei a intervir.
> Professora: Temos duas opiniões diferentes. O que vos parece?
> A resposta a esta última pergunta foi o silêncio. Assim, tive que efetuar a síntese deste trabalho porque faltava cerca de um minuto para o terminus da aula.
> Nesta tarefa desvaneceu-se o entusiasmo que habitualmente caraterizava a turma.
>
> (DB5, Anexo 26)

Outro episódio, ocorrido posteriormente, que originou, mais uma vez, a reflexão da investigadora sobre este assunto é o que se segue:

> De repente, a Denise perguntou:
> Denise: Ó stora, isto é quase $360°$, mas há aqui umas centésimas a mais.
> Professora: Vê o que podes concluir. Antes disso, se quiseres, arrasta um dos vértices do triângulo e observa o que acontece.
> Martine: Ó stora, isto umas vezes dá $360°$ e noutras não. Porquê?
> Professora: Há muita diferença?
> Martine: Não. É sempre quase $360°$.
> Professora: Por que será que isso acontece?
> Martine: Não sei!
> Denise: Não olhe para mim, porque também não sei!
> Aguardei um pouco para ver se alguém me dava uma resposta, mas tal não aconteceu. Acabei então por recordar aos alunos que na aula anterior tinham discutido este mesmo assunto.
> Martim: Então já sei. É $360°$.
> Professora: Porquê?
> Martim: Por causa dos arredondamentos que o computador faz quando mede.
>
> (DB6, Anexo 27)

Este último excerto do diário de bordo é bastante revelador da importância da falta de discussão, por parte dos alunos, da questão 3. da Tarefa 5 (Anexo 8). É evidente que, como os alunos não se envolveram na discussão, a síntese feita pela professora apenas foi ouvida por uma pequena parte da turma.

As atividades em que os alunos se envolvem em discussão, justificando as suas opiniões, contribuem para que desenvolvam uma linguagem para exprimirem as suas ideias matemáticas e deem mais valor à necessidade de precisão dessa linguagem (NCTM, 2007). Uma das discussões mais ricas, onde foi sentida a necessidade de rigor da linguagem, ocorreu durante a discussão e correção da questão 5. da Tarefa 8 (Anexo 11).

> Na questão 5. o panorama alterou-se, porque não se tratou apenas de gralhas. A resposta apresentada pelo Salvador, para justificar a resposta dada à pergunta "Nas condições da figura, pode concluir-se que os triângulos ABC e DEC são congruentes?", não satisfez a globalidade da turma.
> Salvador: Não, só se sabe dois ângulos ($\angle BAC = \angle CDE$ e $\angle BCA = ECD$) e os lados AC e CE têm o mesmo comprimento, mas não é necessário.
> Denise: Isso não é verdade, os triângulos são congruentes.
> Salvador: Não são, não!
> Martine: Ó stora, os triângulos são congruentes, não são?
> Professora: Já temos duas opiniões diferentes. Vamos analisá-las. Mais alguém quer comentar?
> Manuel: Ó stora, eu também acho que não, porque só se sabe dois ângulos e os lados que têm o mesmo comprimento não são os necessários.
> Professora: Ó Manuel, o que queres dizer com "os lados não são os necessários"?
> Manuel: Quero dizer que não dão para aplicar o critério ALA.
> Professora: Porquê?
> Manuel: Devia ser o AC igual ao CD.
> Professora: Por que é que esses dois lados é que deviam ser congruentes?
> Patrícia: Ó stora, eu acho que sei.
> Professora: Então diz.
> Patrícia: Porque só dá para aplicar o ALA se for com o lado comum aos dois ângulos iguais.
> Professora: Muito bem Patrícia. E agora o que concluímos? Os triângulos não são congruentes, ou não temos dados suficientes para tirar essa conclusão?
> Denise: Está bem stora, já percebi. Não temos dados suficientes para dizer que os triângulos são congruentes.
>
> (DB82, Anexo 31)

A utilização da linguagem matemática formal por parte dos alunos não deve ser imposta precocemente, porque "os alunos precisam de desenvolver um apreço pela necessidade de definições exactas e pelo poder comunicativo dos termos matemáticos convencionais, comunicando, primeiramente, através das suas próprias palavras." (NCTM, 2007, p. 70). A investigadora procurou respeitar o ritmo dos alunos e apenas lhes sugeriu a utilização da linguagem formal quando eles revelaram essa necessidade.

> Começaram novamente a tentar encontrar uma justificação para a pergunta 2.4.. Depois, a Gabriela chamou-me e o Martim disse:
> Martim: Ó stora, este ($\angle ABD$) é igual a este ($\angle BAC$) e este ($\angle CBE$) é igual a este ($\angle ACB$). Está a ver? Os 3 juntos (ângulos DBA, ABC e CBE) fazem $180°$.
> Professora: Está bem. Agora escrevam.
> Gabriela: Mas como? Não sabemos escrever isto.
> Professora: Escrevam exatamente o que acabaram de me dizer. Usem a notação que já conhecem para vos facilitar a escrita.
> Vários foram os pares que me chamaram posteriormente, ou para lhes validar as respostas, ou para verificar se as estavam a registar corretamente.
>
> (DB5, Anexo 26)

O excerto anterior revela que a investigadora, nesta situação concreta, não especificou quais os símbolos a usar na comunicação matemática da resposta. Todavia, outras situações ocorreram durante esta investigação e, por solicitação dos alunos, a investigadora informou-os acerca da notação específica a utilizar.

> De seguida surgiu mais uma pergunta:
> Patrícia: Ó stora, é assim que se representa o ângulo CFB $(\angle CFB)$?
> Professora: Essa notação traduz a medida da amplitude do ângulo CFB, pelo que o mais correto é escrever ângulo CFB.

(DB2, Anexo 20)

Durante a implementação desta sequência de tarefas, houve sempre alunos críticos para com os colegas quando estes não eram rigorosos na comunicação das suas conclusões.

> A questão 2. já suscitou alguma discussão. A justificação apresentada pela Gabriela, "são paralelos porque têm a mesma distância entre eles e têm a mesma amplitude ", foi alvo de críticas. O Valter foi o primeiro a interrompê-la apresentando logo os seus argumentos, mas não foi totalmente convincente. A partir daqui vários pares quiseram apresentar as suas respostas. Em todas elas, a turma colocou objeções, exceto na apresentada pelo António "Sim, os ângulos AHF e EGD são ângulos de lados paralelos, pois a semirreta AH é paralela à GD e os pontos E e F estão na mesma reta".

(DB33, Anexo 23)

A comunicação ocupa um papel fundamental na educação matemática, permite partilhar ideias e clarificar a compreensão da matemática (NCTM, 2007). "O fenómeno comunicação abrange o vasto conjunto de processos interactivos desencadeados na sala de aula, na diversidade dos contextos em que ocorrem, das representações subjacentes e das formas de expressão" (Martinho & Ponte, 2005, p.2).

O professor tem um papel fundamental enquanto facilitador, ou inibidor, de processos comunicativos. De entre as várias funções do professor, que poderão facilitar ou inibir o processo comunicativo, nomeadamente a seleção de tarefas e de materiais, bem como assegurar a criação de um clima de respeito mútuo, as perguntas que faz conferem-lhe o papel dominante na estruturação do discurso (Martinho & Ponte, 2005). Love e Mason (1995, citados por Martinho & Ponte, 2005) distinguem três tipos de perguntas: de focalização, de confirmação e de inquirição. Com as primeiras pretende-se concentrar a atenção do aluno num aspeto específico; com as segundas, procura-se testar conhecimentos, estas induzem respostas imediatas e únicas; as últimas são as que se colocam quando o professor pretende obter alguma informação por parte do aluno (Martinho & Ponte, 2005).

No que se refere à comunicação matemática, durante a implementação desta sequência de tarefas, com recurso ao *GeoGebra*, o maior desafio para a investigadora foi, sem dúvida, a formulação de perguntas. Apesar da sua falta de experiência na aplicação de tarefas desta natureza, procurou formular, sempre que oportuno, perguntas de inquirição, por considerar que estas promovem o desenvolvimento da autonomia dos alunos, na medida em que necessitam de mobilizar conhecimentos para lhes dar resposta; o sucesso desta tarefa esteve patente, na maior parte das situações. Todavia, como já foi referido, em algumas circunstâncias o seu desempenho nesta área não foi o ideal, porque não conseguiu gerar nos alunos a reação pretendida: sentirem necessidade de efetuar experiências com o *software* para encontrarem justificações para determinados acontecimentos.

5.1.2. Interação aluno-aluno e aluno-professor

A interação aluno-aluno e aluno-professor foi uma constante ao longo da implementação da sequência de tarefas. Uma das situações de interação aluno-aluno, ocorrida durante a realização do trabalho de pares, que mais chamou à atenção da investigadora foi a que conduziu ao seguinte registo "Depois, voltei a circular pela sala e observei o Valter muito entusiasmado a explicar, corretamente, as suas opções ao seu par, o Luís." (DB2, Anexo 20). Este foi um momento bastante significativo porque, por um lado, o Valter expôs as suas ideias ao colega com uma enorme alegria e rigor e, por outro lado, o Luís ouviu com tanta atenção que os dois não deram sinais de se terem apercebido da presença da professora.

Um outro momento, igualmente significativo, aconteceu quando o Rui fez uma pergunta à professora e, antes que esta tivesse tempo de responder, o seu colega deu-lhe a resposta, continuando os dois a trabalhar como se o Rui não tivesse solicitado apoio.

> A dada altura o Rui disse "Stora, há aqui um erro" mostrando-me o visor da calculadora onde se podia ler 360.01. Antes de eu ter tido tempo de reagir o Manuel disse "Não há erro nenhum, deve ser dos arredondamentos". Os dois continuaram o seu trabalho como se eu não estivesse por perto, pelo que acabei por não intervir.
>
> (DB9, Anexo 32)

Não menos importantes foram as interações aluno-aluno aquando da discussão das tarefas. Os dois excertos que se seguem, demonstram que quando os alunos se envolveram em discussões, durante a apresentação do trabalho realizado, conseguiram encontrar a resposta correta e o consenso.

> A Catarina e a Magda apresentaram o seu trabalho à turma sem problemas até à 5.ª questão. Nesse momento, quando a Catarina começou a apresentar a definição de triângulos congruentes o Samuel interrompeu-a.
> Samuel: Isso não é nenhuma conjetura.
> Valter: Pois não.
> Catarina: Porquê?
> Samuel: A gente já sabia isso.
> A Catarina continuou a apresentar o resto da resposta do seu grupo e foi de novo interrompida quando disse "Dois triângulos com os ângulos com a mesma amplitude são sempre congruentes".
> Denise: Ó professora, ainda há bocado (referindo-se à pergunta 2.3.) ela disse que não, não foi?
> Catarina: Pois foi. Aqui enganámo-nos.
> Quando este par terminou a sua apresentação, o Valter continuou o diálogo, antes que eu tivesse tido a oportunidade de intervir:
> Valter : Só isso?
> Samuel: Pois é stora. Elas só disseram uma e ainda faltam duas. Disseram uma repetida.
> Magda: Não disse nada.
> Samuel: Disseste sim. A última é a mesma que a primeira.
> Denise: Ó stora, já não estou a perceber. Afinal quantas são?
> Professora: Vamos deixar o Valter ou o Samuel explicarem.

> O Samuel começou a apresentar as suas conjeturas e, à medida que as apresentava, ia indicando em qual das questões da tarefa se tinha baseado.
> Manuel: Ó stora, isto está bem?
> Professora: Sim Manuel, está correto.
>
> (DB72, Anexo 29)

> A questão 2. já suscitou alguma discussão. A justificação apresentada pela Gabriela, "são paralelos porque têm a mesma distância entre eles e têm a mesma amplitude ", foi alvo de críticas. O Valter foi o primeiro a interrompê-la apresentando logo os seus argumentos, mas não foi totalmente convincente. A partir daqui vários pares quiseram apresentar as suas respostas. Em todas elas, a turma colocou objeções, exceto na apresentada pelo António "Sim, os ângulos AHF e EGD são ângulos de lados paralelos, pois a semirreta AH é paralela à GD e os pontos E e F estão na mesma reta".
>
> (DB33, Anexo 23)

A interação aluno-professor também foi uma constante durante a implementação desta sequência de tarefas. Nestas interações, resultantes, muitas vezes, da solicitação dos alunos, a investigadora procurou não dar repostas, mas sim formular perguntas orientadoras que conduzissem os alunos a essas respostas, como evidencia o diálogo que se segue, ocorrido aquando da resolução da questão 4. da Tarefa 8 (Anexo 11).

> Aqui surgiram alguns pedidos de auxílio: o Salvador chamou-me e referiu:
> Salvador: Stora, estes dois lados (apontando para os lados opostos aos ângulos assinalados) são iguais, mas não há mais nada a dizer que sejam iguais.
> Professora: De certeza?
> Salvador: Ah, a circunferência! Estes dois lados (apontando para os raios da circunferência) são iguais.
> Professora: Por que é que esses dois lados são iguais?
> Salvador: Porque são raios da circunferência.
>
> (DB82, Anexo 31)

A interação aluno-professor também ocorreu por iniciativa da professora investigadora, embora em menor número do que a iniciada pelos alunos. Sempre que a professora se apercebeu de que o caminho seguido pelos alunos não lhes permitiria encontrar respostas válidas, quer em relação à utilização do *software*, quer em relação às demonstrações, tomou a palavra para lhes prestar algum esclarecimento, para os alertar para a leitura atenta do enunciado e, inúmeras vezes, para os questionar sobre os procedimentos efetuados.

> O Samuel e o Salvador pertenciam a pares diferentes, mas nesta aula estiveram a trabalhar em mesas contíguas. Para provar a congruência dos triângulos ABE e EDC, estavam a usar as igualdades $\angle AEB = \angle DEC$, $\angle ABE = \angle EDC$ e $\overline{AB} = \overline{DC}$ e o critério ALA.
> Professora: Qual o critério de congruência que estão a usar?
> Salvador: ALA.
> Professora: Por que se escreve o L entre os dois As?
> Samuel: Porque os ângulos têm esse lado em comum.
> Professora: É isso que se verifica com os lados e os ângulos usados na justificação que acabaram de escrever?
> Salvador: Não.
> Samuel: Já sei, são estes dois ângulos (ângulos BAE e ECD) que são iguais.
> Professora: Porquê?

> Simão: Têm os lados paralelos.
> Samuel: Pois, são alternos internos.

(DB112, Anexo 35)

Na interação professor-aluno a investigadora foi bem sucedida em todas as ocasiões, não tendo sentido quaisquer constrangimentos, nem da sua parte, nem da parte dos alunos. Não tem dúvidas em afirmar que, face ao que presenciou durante a implementação desta sequência de tarefas, este trabalho potenciou a interação aluno-aluno e aluno-professor, tendo verificado a existência de um clima de trabalho muito agradável, com alunos a evidenciarem, quase sempre, entusiasmo pelo trabalho que desenvolviam. A exceção, onde sentiu desvanecer significativamente esse entusiasmo, aconteceu durante a resolução da Tarefa 5 (Anexo 8). A única evidência desse facto é a opinião da investigadora registada no diário de bordo.

> Comecei por relembrar a simbologia necessária, não obstante, verifiquei que os alunos responderam à pergunta 2.4., sem que antes tivessem respondido às perguntas 2.1., 2.2. e 2.3.. Questionei-me então se esta tarefa, da forma como estava construída, permitiria atingir, na totalidade, os objetivos definidos. É verdade que depois do diálogo em que os alertei para o facto de que as conclusões tiradas a partir de casos particulares necessitam de ser justificadas, porque podem não ser válidas na generalidade das situações, os alunos tentaram responder às restantes questões. Todavia, nesta segunda questão desapareceu o entusiasmo sempre presente nas atividades desenvolvidas com a turma ao longo do ano letivo. Na tentativa de dar mais algum dinamismo à aula, resolvi intervir.

(DB5, Anexo 26)

Foi referido anteriormente que, durante a aplicação da sequência de tarefas, se registou continuamente a interação aluno-aluno e, também, a interação aluno-professor. Esta última foi menos acentuada do que a primeira, não obstante, na opinião da investigadora ocorreu mais vezes que o desejável, sobretudo no que se refere aos pedidos de esclarecimentos formulados sobre a interpretação de enunciados. Os excertos anteriores do diário de bordo são bastante reveladores destes géneros de interação no ensino/aprendizagem do tópico em estudo, "Triângulos e quadriláteros". Professora e alunos interagiram, criando um clima de trabalho onde os alunos partilharam as suas ideias e procuraram esclarecimentos. Para a criação deste clima de trabalho concorreram, ainda, os materiais utilizados, a modalidade de trabalho selecionada e a boa relação pedagógica, onde os alunos se sentiram à vontade para trocar impressões com o seu par, e por vezes com colegas de outros grupos, e expor as suas dificuldades, as suas ideias, tanto individualmente à professora, como em grande grupo.

5.1.3. Gestão do tempo

Muitas vezes, durante a prática letiva, o professor depara-se com a necessidade de efetuar opções de índole variada e muitas delas estão, direta ou indiretamente, relacionadas com a gestão do tempo de aula. Gerir o tempo durante a aplicação da sequência de tarefas revelou-se uma atividade difícil. As Tarefas 1, 5, 6, 9, 10, 12 e 13 (Anexos 4, 8, 9, 12, 13, 15, e 16, respetivamente) foram aplicadas no tempo previsto, mas para as restantes foi necessário disponibilizar mais tempo do que o inicialmente previsto.

A primeira situação mais complexa, relativa à gestão do tempo, com que a investigadora se deparou, ocorreu durante a aplicação da Tarefa 2 (Anexo 5). No momento em que informou que iria proceder à recolha das produções dos alunos, a turma revelou, de imediato, uma das suas caraterísticas: nunca querer entregar um trabalho sem que estivesse totalmente concluído e correto. O excerto do diário de bordo que se segue é revelador dos motivos pelos quais a investigadora não procedeu de imediato à recolha dos enunciados. Acresce ainda o facto de que o professor não deve ser um entrave para alunos persistentes no estudo da matemática, neste caso particular persistentes na procura da resposta correta mas, pelo contrário, deve contribuir para que potenciem as suas capacidades.

> Eram 9 horas e 10 minutos quando os informei de que iria proceder à recolha dos trabalhos, gerou-se de imediato um grande alvoroço na sala e ouviram-se muitos comentários:
> Denise: Ó stora, ainda não! Ainda não conseguimos acabar!
> Manuel: Ó stora, ainda vamos na 3.1..
> Salvador: Ó stora, mais um bocadinho.
> Estes comentários deixaram-me dois caminhos: recolher de imediato as produções dos alunos e tentar cumprir a planificação prevista, correndo o risco de que se desmotivassem, ou deixá-los terminar a tarefa, uma vez que se mostravam empenhados em concluí-la com sucesso. De facto, ponderando fatores, como as caraterísticas de alguns destes alunos, nomeadamente a Denise, o Salvador, o Manuel, a Martine, a Catarina e a Magda, optei por dar mais algum tempo. Se a opção tivesse sido outra, o mesmo tempo teria sido certamente gasto a tentar refutar os seus argumentos, e a tarefa continuaria a não ser concluída.

(DB2, Anexo 20)

Questões de natureza organizacional da escola também foram responsáveis pela não realização da Tarefa 3 (Anexo 6) no tempo previsto. Foram necessários dois tempos letivos, o dobro do previsto, para a sua realização. A troca involuntária dos computadores portáteis foi a ocorrência mais relevante, porque impossibilitou os pares de acederem às figuras construídas na aula anterior. Para além do tempo gasto para construírem novamente as figuras, ainda se perdeu algum tempo até que os alunos conseguissem controlar as suas emoções face à situação criada.

> Ao iniciarem o trabalho, os grupos aperceberam-se de que não estavam a trabalhar com o computador da aula anterior. Verificámos que havia alguns computadores novos na sala e que a numeração de outros não correspondia à das pastas. Perante esta situação, com um significativo desperdício de tempo, acabei por sugerir que construíssem novamente a figura, pois se tivessem que ir uma vez mais à Biblioteca, para procurar os computadores em falta, perder-se-ia ainda mais tempo. À partida, nem sequer existia a certeza de conseguir fazer este trabalho no tempo destinado à aula, pois os computadores em falta poderiam estar a ser utilizados neste mesmo tempo letivo, por outros alunos, noutras salas de aula.

(DB32, Anexo 22)

A existência de dificuldades de utilização do *software* e de elaboração de justificações, tanto para as conjeturas encontradas, como para as afirmações apresentadas no enunciado, constituíram-se como os maiores obstáculos à execução das tarefas no tempo previsto. Relativamente à utilização do *software*, houve questões onde apenas um dos pares não necessitou de apoio para efetuar as construções pedidas. Os excertos do diário de bordo, relativos à aplicação da Tarefa 7 (Anexo 10) são reveladores desta situação:

> A utilização do *software* para construir o triângulo pedido na pergunta 2.1. revelou-se de elevado grau de dificuldade para os alunos. O tempo de resolução da pergunta excedeu

> largamente o previsto, porque somente um par, o do Valter e do Luís, não necessitou do meu apoio.
>
> (DB71, Anexo 28)

> Verificou-se uma situação muito idêntica à da questão 2. Novamente o tempo de resolução para as perguntas 3.1. e 4.1. excedeu largamente o previsto e o único par que não necessitou de apoio foi o do Valter e do Luís. Todos os outros pares revelaram dificuldades para construir os triângulos solicitados.
>
> (DB72, Anexo 29)

O gasto excessivo de tempo para a construção das figuras não resultou apenas de dificuldades de utilização do *software*, alguns também foram originados pela falta de atenção dos alunos durante a leitura do enunciado.

> O Salvador e a Francisca, assim como a Patrícia e a Marisa, estavam angustiados quando me solicitaram apoio, porque não conseguiam inferir nada. Ao analisar as figuras que os alunos construíram, verifiquei que as retas CD e BD não eram paralelas a AB e AC, respetivamente. Fui ver o que se passava com os outros pares e deparei-me com a mesma situação em mais de 50% dos casos.
> De imediato, chamei a atenção a toda a turma para o facto de no enunciado ser feita a referência ao paralelismo das retas. Perguntei-lhes se tinham tido em consideração essas indicações quando construíram a figura e, na sala, ouviu-se um sonoro "Não!".
>
> (DB42, Anexo 25)

Também as dificuldades dos alunos na elaboração de justificações, tanto para as conjeturas encontradas, como para as afirmações apresentadas no enunciado, originaram à investigadora dificuldades de gestão do tempo. Os dois excertos que se seguem, relativos à questão 2., respetivamente da Tarefa 8 (Anexo 11) e da Tarefa 11 (Anexo 14), evidenciam a existência destas dificuldades:

> A dada altura comecei a sentir alguma angústia, pois os alunos estavam a demorar muito mais tempo que o previsto para a realização da tarefa. Só na pergunta 2.1. demoraram cerca de trinta minutos. No entanto, mantinha-se um fator que, do meu ponto de vista, era bastante positivo, não desistiam e continuavam bastante empenhados.
>
> (DB82, Anexo 31)

> Chegados à justificação do 3.º passo, as dificuldades voltaram a surgir porque tentaram justificá-lo através da conjetura estabelecida em 1.2.. Mais uma vez tive de intervir em cada grupo, alertando-os para o facto. Gastou -se muito tempo à volta desta questão e eram 9 horas e 40 minutos quando alguns dos pares conseguiram terminar a demonstração. A maior parte não conseguiu terminá-la corretamente e já dava sinais de cansaço e desânimo. Assim, decidi não os questionar mais, deixando-os passar à resolução da questão seguinte.
>
> (DB111, Anexo 34)

Perante a dificuldade de conclusão de algumas tarefas no tempo previsto, e com a aproximação do final do ano letivo, a investigadora utilizou, quando oportuno, alguns tempos das aulas de Estudo Acompanhado, atribuídos ao professor de Matemática, no âmbito do Plano da Matemática II, ou, por vezes, uma pequena parte deles, para a discussão, ou, até mesmo, para a realização de tarefas.

Assim, em todas as tarefas os alunos tiveram tempo para apresentar o trabalho por si realizado, tanto nas produções recolhidas pela investigadora, como nas correções/discussões realizadas no final das tarefas.

5.1.4. Conjeturas

Nesta sequência de tarefas, o estabelecimento das conjeturas solicitadas revelou-se de grande facilidade para os alunos. As exceções ocorreram durante a aplicação da Tarefa 7 (Anexo 10) e da Tarefa 11 (Anexo 14). Na questão 5. da Tarefa 7 (Anexo 10), os alunos revelaram, logo de início, muita desorientação. Na opinião da investigadora, a mesma terá surgido da dificuldade de selecionar a informação, obtida nas quatro primeiras questões da tarefa, para o estabelecimento das conjeturas, desconhecendo-se o número de conjeturas que era possível estabelecer. Saliente-se que uma das quatro primeiras questões, a questão 2., não permitia o estabelecimento de qualquer conjetura, situação inédita na sequência de tarefas. Também o facto de as conjeturas terem sido solicitadas apenas no final da tarefa, terá contribuído para esse estado de desorientação dos alunos, uma vez que nas tarefas anteriores, estas tinham sido solicitadas imediatamente a seguir ao estudo dos entes geométricos envolvidos em cada uma.

> **Questão 5.**
> Assim que terminaram a leitura da questão, vários pares começaram a solicitar a minha atenção. Mostraram-se completamente atarantados, sem saberem o que fazer, certamente porque nesta tarefa, ao contrário do que aconteceu nas anteriores, foram solicitadas as conjeturas apenas no final da tarefa. Por isso esclareci:
> Professora: Têm que analisar todo o trabalho realizado na tarefa e as conclusões que tiraram, para poderem estabelecer as conjeturas.
> Samuel: É mais do que uma?
> Professora: Analisem o trabalho realizado. Logo veem o que podem concluir.

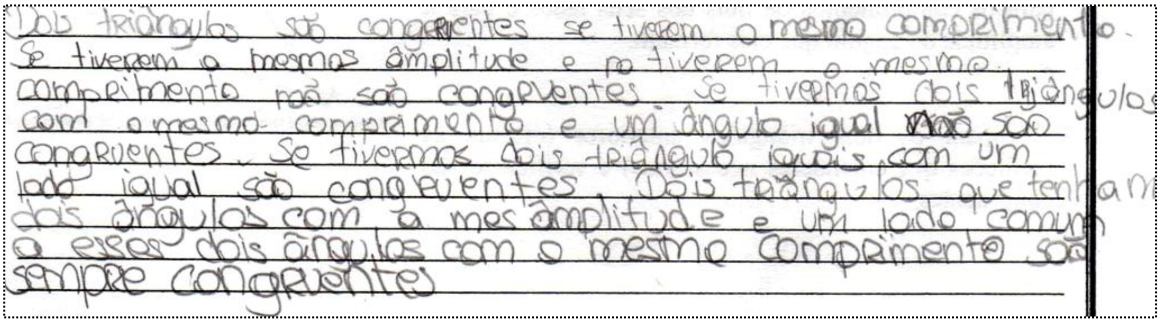
(DB72, Anexo 29)

No que concerne à Tarefa 11 (Anexo 14), a investigadora ficou surpresa quando, no início da sua aplicação, verificou que alguns dos pares, dos mais autónomos até àquela data, não conseguiam estabelecer a primeira conjetura da questão 1.. Durante a interação estabelecida, verificou que a dificuldade resultou apenas da construção incorreta do paralelogramo por parte desses pares.

> A dada altura, dei-me conta de que na pergunta 1.3. havia vários pares a não conseguirem estabelecer a conjetura. Este facto foi inédito nesta sequência de tarefas pois, até ao momento, as dificuldades evidenciadas nunca estiveram relacionadas com o estabelecimento de conjeturas. De seguida, a Denise chamou-me e no diálogo explicou o motivo desta dificuldade:
> Denise: Ó stora, aqui (pergunta 1.3.) nós não conseguimos concluir nada.
> Professora: O vosso quadrilátero é um paralelogramo?
> Denise: Era. Agora já não porque arrastámos os vértices.
> Professora: Cuidado, o quadrilátero deveria manter-se paralelogramo mesmo depois de terem arrastado os vértices. Seguiram as sugestões dadas?
> Denise: Não e agora não conseguimos pô-lo de novo paralelogramo.
> Professora: Parece-me que devem construir novamente o paralelogramo seguindo as indicações dadas no enunciado.

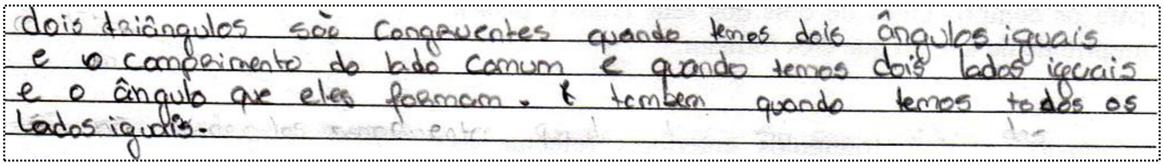
(DB111, Anexo 34)

A análise efetuada, pela investigadora, às produções dos alunos revelou que todas as conjeturas esperadas foram estabelecidas com rigor pela grande maioria dos pares. As exceções dizem respeito à Tarefa 7 (Anexo 10) e à Tarefa 11 (Anexo 14). Na questão 5. da Tarefa 7 (Anexo 10), cinco dos doze pares não estabeleceram nenhum dos critérios de congruência de triângulos. Destes cinco pares, um apresentou a descrição das construções efetuadas, dois apresentaram a definição de triângulos congruentes e os outros dois não apresentaram qualquer resposta. Quanto aos restantes pares (sete), quatro estabeleceram corretamente pelo menos um dos critérios de congruência de triângulos (ver Figura 22) e três apresentaram uma resposta totalmente correta. Uma destas três respostas surpreendeu a investigadora pelo rigor e capacidade de síntese apresentados (ver Figura 23).


Dois triângulos são congruentes se tiverem o mesmo comprimento. Se tiverem o mesmo amplitude e não tiverem o mesmo comprimento não são congruentes. Se tivermos dois triângulos com o mesmo comprimento e um ângulo igual não são congruentes. Se tivermos dois triângulo iguais com um lado igual são congruentes. Dois triângulos que tenham dois ângulos com a mes amplitude e um lado comum a esses dois ângulos com o mesmo comprimento são sempre congruentes

Fonte: Produções dos alunos na Tarefa 7 (Anexo 10)

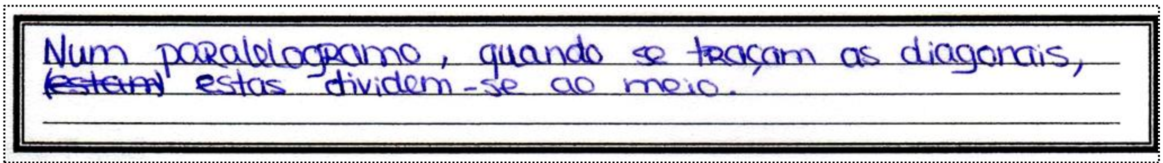
Figura 22 – Exemplo de uma resposta à questão 5. da Tarefa 7 (Anexo 10)


dois triângulos são congruentes quando temos dois ângulos iguais e o comprimento do lado comum e quando temos dois lados iguais e o ângulo que eles formam. E também quando temos todos os lados iguais.

Fonte: Produções dos alunos na Tarefa 7 (Anexo 10)

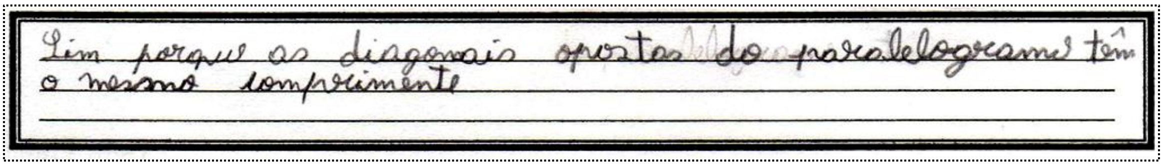
Figura 23 – Exemplo de uma resposta à questão 5. da Tarefa 7 (Anexo 10)

No que respeita à Tarefa 11 (Anexo 14), foi a última das conjeturas, pergunta 3.2., a que não foi corretamente formulada pela maioria dos pares. Três dos pares estabeleceram-na incorretamente, cinco formularam-na de forma correta (ver Figura 24) e os restantes quatro, apesar de se subentender que a conseguiram estabelecer, não foram rigorosos na linguagem (ver Figura 25).


Num paralelogramo, quando se traçam as diagonais, ~~estam~~ estas dividem-se ao meio.

Fonte: Produções dos alunos na Tarefa 11 (Anexo 14)

Figura 24 – Exemplo de uma resposta à pergunta 3.2. da Tarefa 11 (Anexo 14)


Sim porque as diagonais opostas do paralelogramo têm o mesmo comprimento

Fonte: Produções dos alunos na Tarefa 11 (Anexo 14)

Figura 25 – Exemplo de uma resposta à pergunta 3.2. da Tarefa 11 (Anexo 14)

Durante a correção/discussão da Tarefa 7 (Anexo 10), a investigadora verificou que alguns alunos já tinham opinião formada sobre o conceito de conjetura, apesar de na sequência de tarefas os esclarecimentos sobre o mesmo aparecerem somente na Tarefa 9 (Anexo 12). O excerto do diário de bordo que segue evidencia que para o Samuel as conjeturas, a apresentar na questão 5., não podem traduzir conhecimentos adquiridos. Das suas palavras podemos inferir que esperava algo novo.

> A Catarina e a Magda apresentaram o seu trabalho à turma sem problemas até à 5.ª questão. Nesse momento, quando a Catarina começou a apresentar a definição de triângulos congruentes o Samuel interrompeu-a.
> Samuel: Isso não é nenhuma conjetura.
> Valter: Pois não.
> Catarina: Porquê?
> Samuel: A gente já sabia isso.

(DB72, Anexo 29)

Descrever a conceção dos conceitos de conjetura e de demonstração é um dos objetivos da Tarefa 13 (Anexo 16). Analisando as produções dos alunos na questão 2. desta tarefa, a investigadora verificou que 22 dos 24 alunos da turma conseguiram apresentar um exemplo de uma das conjeturas estabelecidas, nesta sequência de tarefas. Embora a conjetura mais referida diga respeito à soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo, também apareceram algumas respeitantes à soma das amplitudes dos ângulos externos de um triângulo; relação entre as amplitudes de dois ângulos internos de um triângulo e a amplitude do ângulo externo no vértice oposto; relação entre os comprimentos dos lados paralelos num paralelogramo e soma dos ângulos internos de um quadrilátero.

Todavia, na mesma questão 2. da Tarefa 13 (Anexo 16) o desempenho dos alunos, no que respeita à formulação da sua noção de conjetura, não foi tão bom como no da apresentação de um exemplo de uma conjetura. Apesar do número de respostas totalmente incorretas ter sido igualmente reduzido, a maioria dos alunos limitou-se a afirmar que uma conjetura é uma conclusão matemática. Porém, outros tentaram apresentar respostas um pouco mais elaboradas. Algumas destas respostas deixaram a investigadora a refletir sobre o que na verdade quereriam transmitir. Em sua opinião, na primeira resposta que a seguir se apresenta (ver Figura 26) o uso do computador está para o aluno profundamente associado ao estabelecimento de conjeturas. Já o autor da segunda resposta (ver Figura 27) evidencia a importância da experimentação para o seu estabelecimento.

Uma conjectura é uma definição de um conceito descoberto no computador, para o papel e chegar a uma conclusão. Por exemplo: "Num paralelogramo os lados paralelos têm o mesmo comprimento."

Fonte: Produções dos alunos na Tarefa 13 (Anexo 16)

Figura 26 – Exemplo do conceito de conjetura apresentado pelos alunos

Uma conjectura e uma conclusão que tiramos ~~do~~ depois de vermos as propriedades de algo por exemplo a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre 180º.

Fonte: Produções dos alunos na Tarefa 13 (Anexo 16)

Figura 27 – Exemplo do conceito de conjetura apresentado pelos alunos

Na opinião da investigadora, face aos resultados obtidos, a aplicação desta sequência de tarefas, com recurso ao *GeoGebra*, contribuiu claramente para a consecução do quinto objetivo geral relativo ao ensino da Matemática, estabelecido no PMEB (ME-DGIDC, 2007), nomeadamente no que concerne à capacidade dos alunos para formular e investigar conjeturas matemáticas. Apesar das dificuldades manifestadas pelos alunos na construção das figuras geométricas, a facilidade com que efetuaram as medições e manusearam os entes geométricos necessários à formulação das conjeturas, potenciou o estabelecimento das mesmas. O apoio da professora só foi solicitado durante a construção das figuras e, para além da fase inicial onde solicitaram a validação das respostas, na aplicação das Tarefas 7 e 11 (Anexos 10 e 14, respetivamente), como foi referido no início deste tópico.

5.1.5. Demonstrações

A realização de demonstrações por parte dos alunos foi, sem dúvida, o maior desafio com que a investigadora e os alunos se deparam durante a aplicação desta sequência de tarefas. A questão 2. da Tarefa 5 (Anexo 8) foi a que revelou maior grau de dificuldade. O facto de os alunos já terem como conhecimento adquirido que a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é $180°$ foi um obstáculo difícil de transpor, tanto para os alunos, como para a investigadora.

> Comecei por relembrar a simbologia necessária, não obstante, verifiquei que os alunos responderam à pergunta 2.4., sem que antes tivessem respondido às perguntas 2.1., 2.2. e 2.3.. Questionei-me então se esta tarefa, da forma como estava construída, permitiria atingir, na totalidade, os objetivos definidos. É verdade que depois do diálogo em que os alertei para o facto de que as conclusões tiradas a partir de casos particulares necessitam de ser justificadas, porque podem não ser válidas na generalidade das situações, os alunos tentaram responder às restantes questões. Todavia, nesta segunda questão desapareceu o entusiasmo sempre presente nas atividades desenvolvidas com a turma ao longo do ano letivo.
>
> (DB5, Anexo 26)

Analisando novamente a tarefa, a investigadora continua a manter a opinião inicial de que está bem construída e é muito importante na lecionação deste tópico. De facto, o mais difícil foi motivar os alunos para a necessidade de justificar conhecimentos adquiridos. Assim, numa futura aplicação desta sequência de tarefas, considera que é necessário motivar os alunos com um diálogo prévio, eventualmente com apresentação de exemplos, acerca da necessidade de demonstrar conjeturas.

Na Tarefa 6 (Anexo 9), os alunos conseguiram apresentar justificações corretas para as conjeturas, quer na pergunta 1.5. (ver Figura 28), quer na questão 3 (ver Figura 29). Na pergunta 1.5. foram apenas quatro os pares que apresentaram respostas totalmente corretas, enquanto na questão 3. foram nove os pares que responderam corretamente. É de salientar que a questão 1. teve um grau de dificuldade mais elevado, evidenciado, durante a aplicação da tarefa, pelos inúmeros pedidos de apoio registados pela professora no diário de bordo.

> Na pergunta 1.5. apareceram inúmeras dificuldades. Uns não conseguiam fazer nada, outros traçavam e mediam os restantes ângulos externos. Depois, começaram os desabafos:
> Denise: Ó stora, não consigo!
> Simão. Ó stora, não conseguimos!
> Martine: Ó stora, o que é para fazer? Como é que isto se faz?
> Professora: Têm que mobilizar os conhecimentos das aulas anteriores.
> Martine: Quais?
> Professora: Não vos vou dizer quais são, mas podemos fazer uma síntese do que já aprenderam.
> Martine: Bora lá stora!
> Professora: O que se lembram de ter aprendido neste tópico?

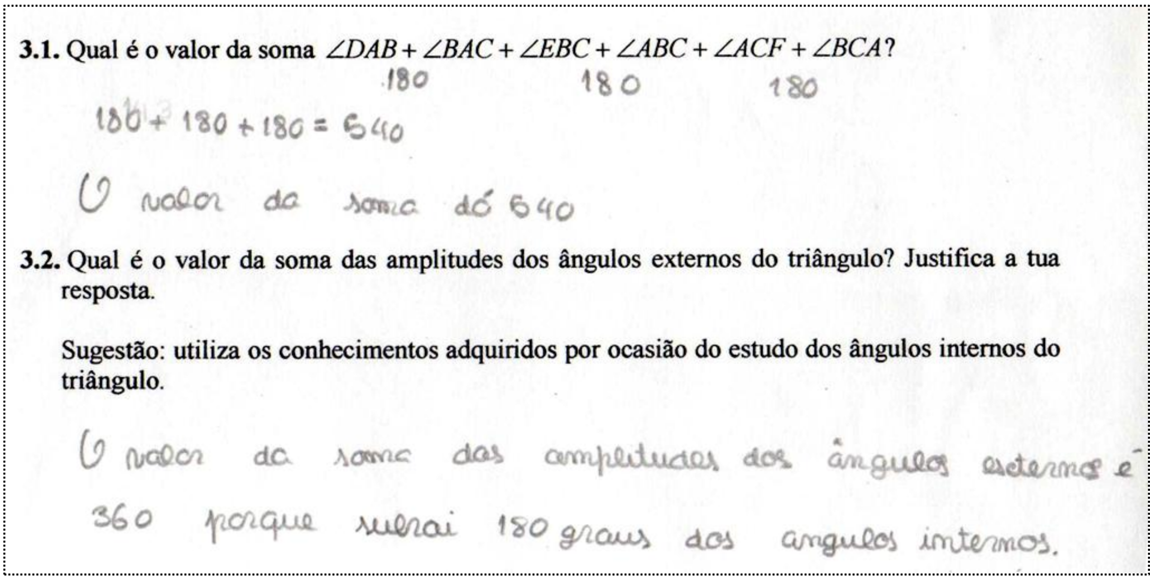
(DB6, Anexo 27)

1.5. Tenta encontrar uma justificação para a conjectura estabelecida anteriormente.

A amplitude do ângulo CAB com o ângulo ACB, com o ângulo CBA dá 180°, o ângulo ABC com o ângulo CBD dá 180°, logo ângulo CAB com o ângulo ACB dá a mesma amplitude que o ângulo CBD.

Fonte: Produções dos alunos na Tarefa 6 (Anexo 9)

Figura 28 – Exemplo de uma resposta dada à pergunta 1.5. da Tarefa 6 (Anexo 9)



3.1. Qual é o valor da soma $\angle DAB + \angle BAC + \angle EBC + \angle ABC + \angle ACF + \angle BCA$?

180 180 180

180 + 180 + 180 = 540

O valor da soma dá 540

3.2. Qual é o valor da soma das amplitudes dos ângulos externos do triângulo? Justifica a tua resposta.

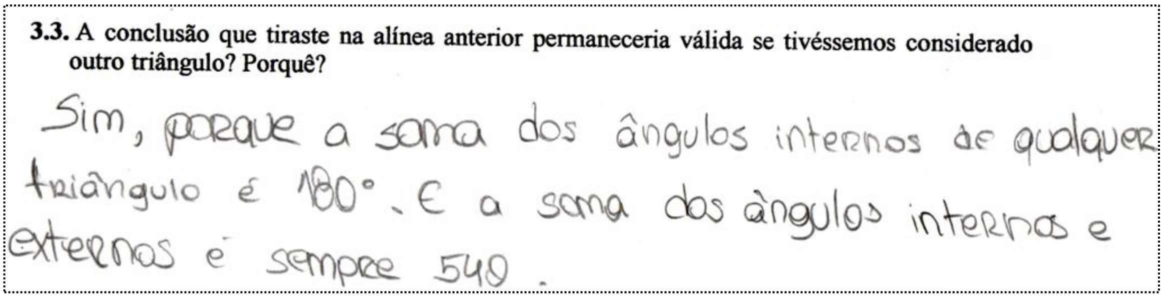
Sugestão: utiliza os conhecimentos adquiridos por ocasião do estudo dos ângulos internos do triângulo.

O valor da soma das amplitudes dos ângulos externos é 360 porque retirei 180 graus dos angulos internos.

Fonte: Produções dos alunos na Tarefa 6 (Anexo 9)

Figura 29 – Exemplo de uma resposta dada às perguntas 3.1. e 3.2. da Tarefa 6 (Anexo 9)

Para a investigadora, surpreendente foi o facto de na pergunta 3.3. desta Tarefa 6 (Anexo 9) alguns pares terem mostrado que conseguiram generalizar a sua conclusão (ver Figura 30). Nem todas as respostas corretas à pergunta apresentaram o mesmo grau de rigor que a da Figura 30, mas continuaram a evidenciar a mesma ideia (ver Figura 31).

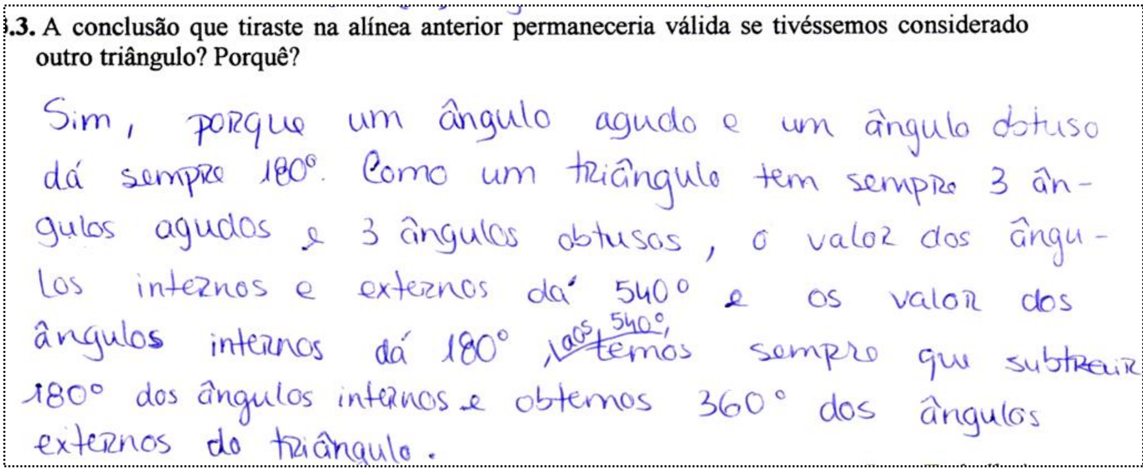


3.3. A conclusão que tiraste na alínea anterior permaneceria válida se tivéssemos considerado outro triângulo? Porquê?

Sim, porque a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é 180°. E a soma dos ângulos internos e externos é sempre 540.

Fonte: Produções dos alunos na Tarefa 6 (Anexo 9)

Figura 30 – Exemplo de uma resposta dada à pergunta 3.3. da Tarefa 6 (Anexo 9)



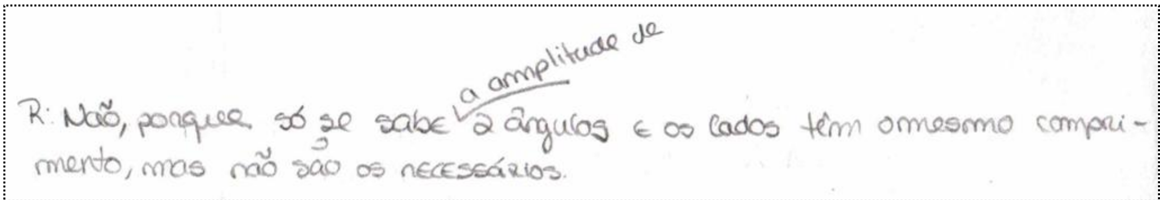
3.3. A conclusão que tiraste na alínea anterior permaneceria válida se tivéssemos considerado outro triângulo? Porquê?

Sim, porque um ângulo agudo e um ângulo obtuso dá sempre 180°. Como um triângulo tem sempre 3 ângulos agudos e 3 ângulos obtusos, o valor dos ângulos internos e externos dá 540° e os valor dos ângulos internos dá 180°, aos 540°, temos sempre que subtrair 180° dos ângulos internos e obtemos 360° dos ângulos externos do triângulo.

Fonte: Produções dos alunos na Tarefa 6 (Anexo 9)

Figura 31 – Exemplo de uma resposta dada à pergunta 3.3. da Tarefa 6 (Anexo 9)

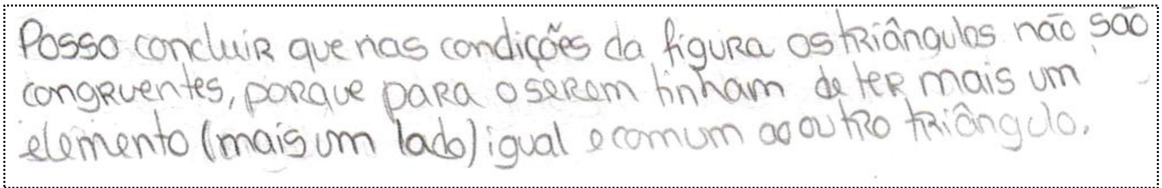
No que respeita à Tarefa 8 (Anexo 11), a análise às produções dos alunos revela que a maioria dos pares apresentou justificações corretas para todas as questões, exceto para a última, a questão 5.. Nesta última questão, foram apenas cinco os pares que lhe responderam corretamente, quatro respostas idênticas à da Figura 32 e uma mais específica, embora com uma incorreção na parte final (ver Figura 33).



R: Não, porque só se sabe a amplitude de 2 ângulos e os lados têm o mesmo comprimento, mas não são os necessários.

Fonte: Produções dos alunos na Tarefa 8 (Anexo 11)

Figura 32 – Exemplo de uma resposta dada à questão 5. da Tarefa 8 (Anexo 11)

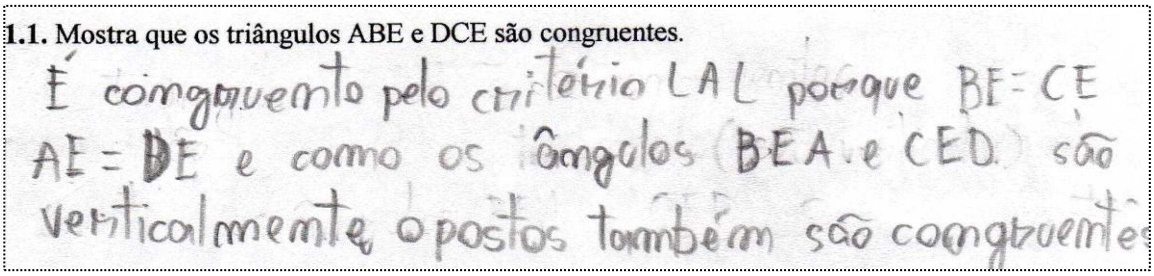


Posso concluir que nas condições da figura os triângulos não são congruentes, porque para o serem tinham de ter mais um elemento (mais um lado) igual e comum ao outro triângulo.

Fonte: Produções dos alunos na Tarefa 8 (Anexo 11)

Figura 33 – Exemplo de uma resposta dada à questão 5. da Tarefa 8 (Anexo 11)

Nas justificações apresentadas para a questão 1. da Tarefa 8 (Anexo 11), na pergunta 1.1. apenas cinco dos doze pares fizeram alusão ao critério de congruência de triângulos (ver Figura 34); os restantes sete pares não lhe efetuaram qualquer referência. Na justificação apresentada, mencionam a congruência dos segmentos de reta AE e DE e dos segmentos de reta BE e CE. Referem ainda, exceto um dos pares, a igualdade da amplitude dos ângulos AEB e DEC, mas poucos referem que esses ângulos são formados pelos lados congruentes do triângulo (ver Figura 35). Na pergunta 1.2. todos os pares, exceto um, usaram a congruência dos triângulos ABE e DEC para justificar a congruência dos segmentos de reta AB e CD (ver Figura 36).

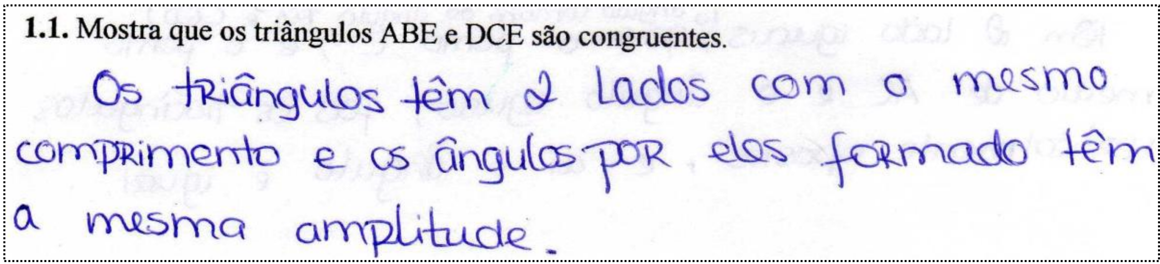


1.1. Mostra que os triângulos ABE e DCE são congruentes.

É congruente pelo critério LAL porque BE = CE AE = DE e como os ângulos (BEA e CED) são verticalmente opostos também são congruentes

Fonte: Produções dos alunos na Tarefa 8 (Anexo 11)

Figura 34 – Exemplo de uma resposta dada à pergunta 1.1. da Tarefa 8 (Anexo 11)

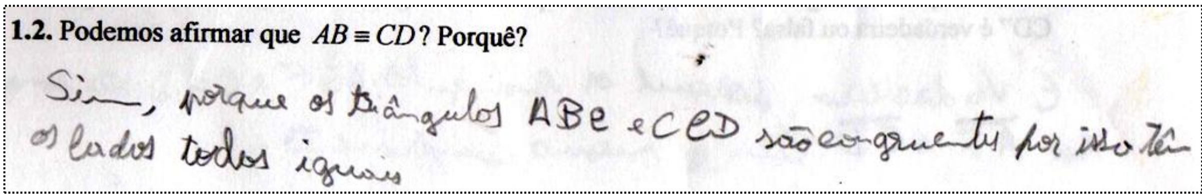


1.1. Mostra que os triângulos ABE e DCE são congruentes.

Os triângulos têm 2 lados com o mesmo comprimento e os ângulos por eles formado têm a mesma amplitude.

Fonte: Produções dos alunos na Tarefa 8 (Anexo 11)

Figura 35 – Exemplo de uma resposta dada à pergunta 1.1. da Tarefa 8 (Anexo 11)



1.2. Podemos afirmar que $AB \equiv CD$? **Porquê?**

Sim, porque os triângulos ABE e CED são congruentes por isso têm os lados todos iguais

Fonte: Produções dos alunos na Tarefa 8 (Anexo 11)

Figura 36 – Exemplo de uma resposta dada à pergunta 1.2. da Tarefa 8 (Anexo 11)

Na questão 2. da Tarefa 8 (Anexo 11), as produções dos alunos na pergunta 2.1. revelam que todos os pares conseguiram compreender quais as congruências entre os entes geométricos que permitem provar a congruência dos triângulos ECD e EAF. Todavia, nem todos foram tão claros na comunicação matemática como o par que apresentou a resposta da Figura 37, apesar do lapso quando efetua a referência ao ângulo ECD. Na questão 2.2., todos os pares afirmaram que a afirmação é verdadeira e apenas um dos pares não conseguiu apresentar uma justificação correta para o facto. Os restantes onze pares referem que a afirmação é verdadeira porque os triângulos ECD e EAF são congruentes, mas apenas três apresentaram uma resposta completa como a da Figura 38.

2.1. O agrimensor concluiu que os triângulos ECD e EAF são congruentes. Esta conclus correcta? Porquê?

Sim, porque o ângulo FAE e o ângulo FCD são iguais, o ângulo FEA e o ângulo DEC são verticalmente opostos e os lados AE = CE ou seja são os lados que os ângulos têm em comum.
São congruentes, porque os triângulos verificam o critério LAL.

Fonte: Produções dos alunos na Tarefa 8 (Anexo 11)

Figura 37 – Exemplo de uma resposta dada à pergunta 2.1. da Tarefa 8 (Anexo 11)

2.2. A afirmação "A largura do rio na zona do ponto A é igual ao comprimento do segmento CD" é verdadeira ou falsa? Porquê?

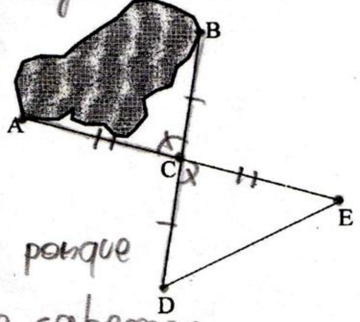
É verdadeiro, porque os triângulos AEF e CED são congruentes logo $\overline{AF}$ e $\overline{CD}$ têm o mesmo comprimento.

Fonte: Produções dos alunos na Tarefa 8 (Anexo 11)

Figura 38 – Exemplo de uma resposta dada à pergunta 2.2. da Tarefa 8 (Anexo 11)

No que respeita à questão 3. da Tarefa 8 (Anexo 11), todos os pares responderam afirmativamente à questão e apenas três desses pares não apresentaram justificações completas. Ao longo das três primeiras questões, pode observar-se nas produções dos alunos que aumentou o número de pares a efetuarem referência ao critério de congruência de triângulos aplicado. Uma das respostas completas que mais surpreendeu a investigadora foi a da Figura 39, pela clareza apresentada na comunicação matemática.

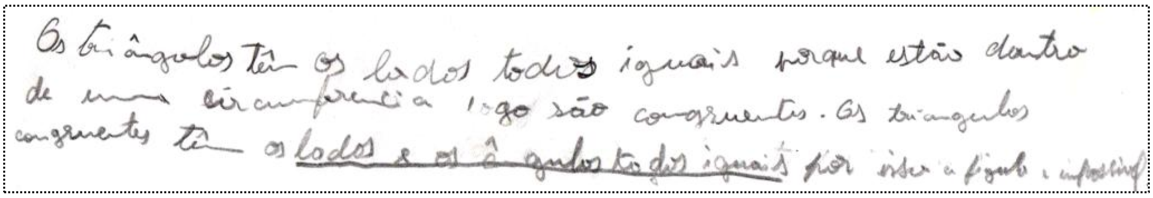
Sim porque os triângulos são congruentes segundo o critério LAL porque o texto permite-nos saber que BC = CD e AC = CE e sabemos que os ângulos ACB e DCE são congruentes porque são verticalmente opostos e se sabemos dois lados e o ângulo por eles formado sabemos que aqueles triângulos são congruentes.



Fonte: Produções dos alunos na Tarefa 8 (Anexo 11)

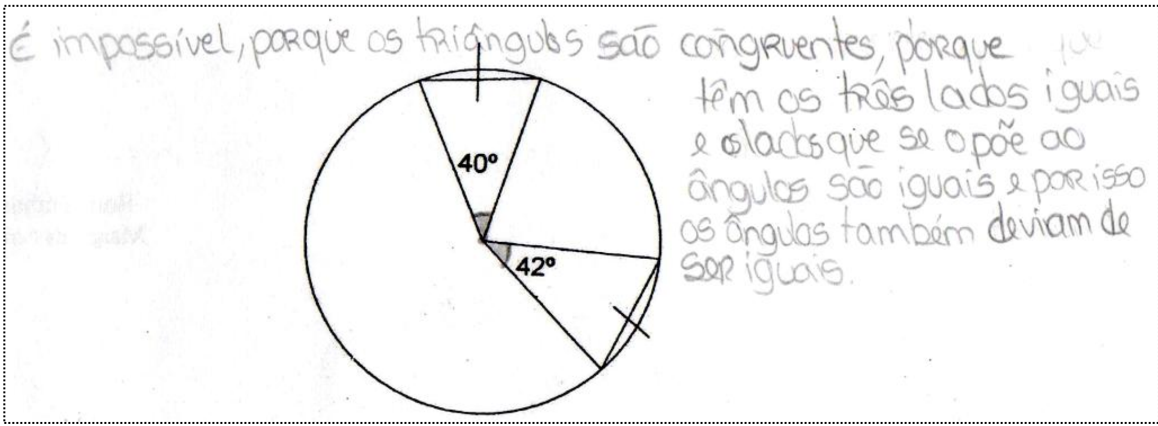
Figura 39 – Exemplo de uma resposta dada à questão 3. da Tarefa 8 (Anexo 11)

Na questão 4. da Tarefa 8 (Anexo 11), o desempenho dos alunos não foi tão bom como nas questões anteriores. Dois dos pares não justificaram a afirmação e das justificações dos restantes, a da Figura 40 é a mais completa. Nas restantes respostas, ou não se encontra a justificação para a congruência de triângulos (ver Figura 41), ou, quando existe, falta a justificação da congruência dos lados (ver Figura 42).



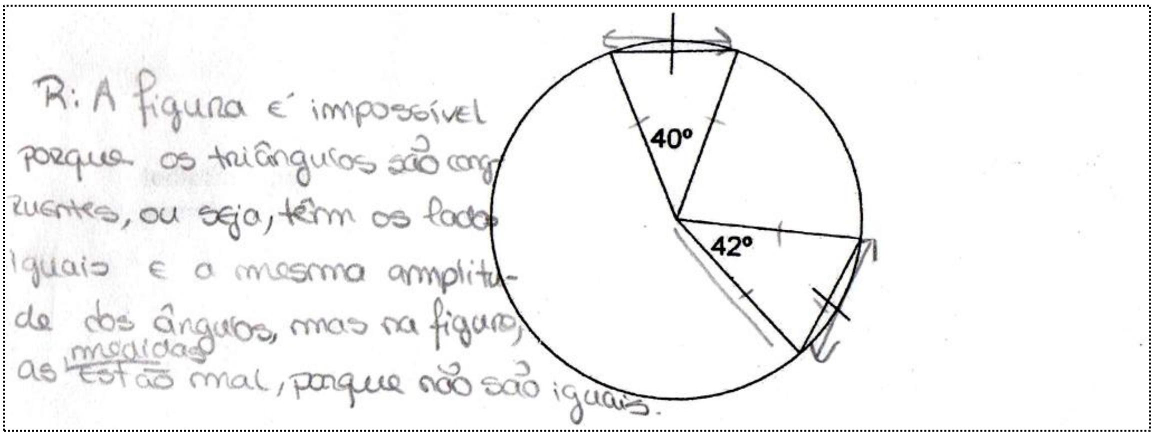
Fonte: Produções dos alunos na Tarefa 8 (Anexo 11)

Figura 40 – Exemplo de uma resposta dada à questão 4. da Tarefa 8 (Anexo 11)



Fonte: Produções dos alunos na Tarefa 8 (Anexo 11)

Figura 41 – Exemplo de uma resposta dada à questão 4. da Tarefa 8 (Anexo 11)



Fonte: Produções dos alunos na Tarefa 8 (Anexo 11)

Figura 42 – Exemplo de uma resposta dada à questão 4. da Tarefa 8 (Anexo 11)

Na Tarefa 9 (Anexo 12) o desempenho dos alunos atingiu um nível de sucesso bastante elevado, com todos os pares a apresentarem justificações com sentido, ainda que, por vezes, careçam de alguma precisão (ver Figura 43).

Passo	Justificação
$\angle CAD + \angle ADC + \angle DCA = 180^{\circ}$	- A soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é igual a 180º.
$\angle CAB + \angle ABC + \angle BCA = 180^{\circ}$	- A soma dos angulos internos de um triângulo é 180º
$\angle CAD + \angle ADC + \angle DCA + \angle CAB + \angle ABC + \angle BCA = 360^{\circ}$	- A soma dos angulos internos de dois triângulos é 360 porque 360 é o dobro de 180
$\angle CBA + \angle BAD + \angle ADC + \angle DCB + = 360^{\circ}$	- O quadrilátero é constituido por dois triângulos logo a soma é 360º.

Fonte: Produções dos alunos na Tarefa 9 (Anexo 12)

Figura 43 – Exemplo de uma resposta à questão 2. da Tarefa 9 (Anexo 12)

Na Tarefa 11 (Anexo 14) o desempenho dos alunos foi mais fraco do que nas tarefas anteriores. Na questão 2. apenas um dos pares apresentou todas as justificações corretas (ver Figura 44). Dos restantes pares, vários foram os que apresentaram apenas a última justificação incompleta, porque não referiram que $\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC$ e $\angle CDA = \angle CDB + \angle BDA$. No entanto, a investigadora considera que o êxito na resolução desta questão foi pouco significativo, porque as produções dos alunos revelam que alguns se perderam. Estes apresentaram, por vezes, justificações que nada têm a ver com os passos indicados (ver Figura 45).

Passo	Justificação
$\angle ABD = \angle BDC$	- Têm a mesma amplitude porque são ângulos alternos internos.
$\angle ADB = \angle DBC$	- Têm a mesma amplitude porque são ângulos alternos internos.
Os triângulos ABD e DBC são congruentes	- Segundo o critério de congruência ALA estes triângulos são congruentes porque sabemos que $\angle ABD = \angle BDC$ e $\angle ADB = \angle DBC$ e o lado DB é comum.
$\overline{AB} = \overline{DC}$ e $\overline{AD} = \overline{BC}$	- Se os triângulos são congruentes estes lados tem de ser iguais.
$\angle BAD = \angle BCD$ e $\angle ABC = \angle CDA$	- $\angle BAD = \angle BCD$ porque os triângulos são congruentes. $\angle ABC = \angle CDA$ porque estes ângulos resultão da soma de dois ângulos dos triângulos congruentes.

2 | Tarefa adaptada de Ponte, Oliveira e Candeias (2009).

Fonte: Produções dos alunos na Tarefa 11 (Anexo 14)

Figura 44 – Exemplo de uma resposta à questão 2. da Tarefa 11 (Anexo 14)

Passo	Justificação
$\angle ABD = \angle BDC$	Porque são ângulos alternos internos
$\angle ADB = \angle DBC$	Porque são ângulos alternos internos
Os triângulos ABD e DBC são congruentes	Porque cada triângulo dá 180º.
$\overline{AB} = \overline{DC}$ e $\overline{AD} = \overline{BC}$	Porque são rectas paralelas
$\angle BAD = \angle BCD$ e $\angle ABC = \angle CDA$	A soma dos ângulos internos é 360º e se uniomos os dois triângulos vai dar um Paralelogramo.

Fonte: Produções dos alunos na Tarefa 11 (Anexo 14)

Figura 45 – Exemplo de uma resposta à questão 2. da Tarefa 11 (Anexo 14)

Perante o exposto anteriormente e confrontando esta análise com o excerto do diário de bordo que se segue, a investigadora considera que esta questão 2. da Tarefa 11 (Anexo 14) carece de reformulação. As duas conjeturas devem ser demonstradas em questões diferentes, para reduzir o seu grau de dificuldade.

> No pequeno período de reflexão que me foi permitido no momento, fiquei com a noção de que esta questão necessita de reformulação; apercebi-me de que nesta fase os alunos ainda não estavam preparados para lidar com a demonstração de duas conjeturas numa mesma pergunta. Esta demonstração não trouxe vantagens significativas em termos de aprendizagem porque, por um lado, foram poucos os pares que a realizaram com sucesso de forma autónoma e, por outro, consumiu muito do tempo da aula no apoio aos alunos, inviabilizando o terminus da tarefa neste bloco letivo.
>
> (DB111, Anexo 34)

Na questão 4. da Tarefa 11 (Anexo 14) o desempenho dos alunos foi melhor do que na questão 2. Quatro dos doze pares apresentaram respostas corretas (ver Figura 46).

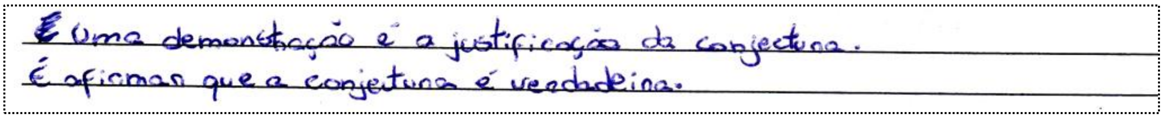
Passo	Justificação
Os triângulos ABE e EDC são congruentes	Num paralelogramo, os lados paralelos têm o mesmo comprimento, então $\overline{AB} = \overline{DC}$. Os ângulos alternos internos têm a mesma amplitude, então <ABE = <EDC e <ECD = <BA[E]. Com o critério de congruência ALA, estes triângulos são congruentes.
$\overline{AE} = \overline{EC}$ e $\overline{DE} = \overline{EB}$	Se os triângulos são congruentes, têm os lados todos iguais.

Fonte: Produções dos alunos na Tarefa 11 (Anexo 14)

Figura 46 – Exemplo de uma resposta à questão 4. da Tarefa 11 (Anexo 14)

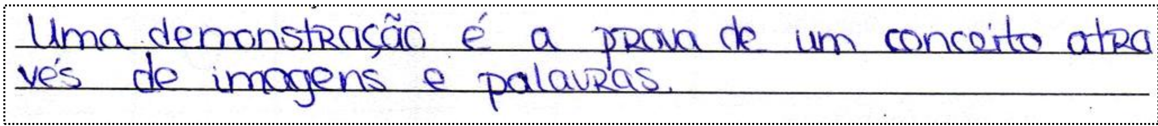
O desempenho dos alunos na questão 3. da Tarefa 13 (Anexo 16), onde, como foi referido anteriormente, descrever a conceção dos conceitos de conjetura e de demonstração é um dos objetivos da tarefa, é revelador, quer das dificuldades dos alunos no que respeita às demonstrações, quer do potencial da sequência de tarefas no desenvolvimento do conceito de demonstração.

Analisando as produções dos alunos nesta questão, verificou-se que a terça parte (8) dos alunos, ou não respondeu à questão, ou apresentou uma resposta sem sentido. Para cerca de outro terço, a atividade de demonstrar aparece associada à atividade de validação das conjeturas (ver Figura 47). Quanto aos restantes, alguns não conseguiram apresentar um sinónimo para o termo demonstração mas, para os outros, este conceito está associado à noção de prova (ver Figura 48), ou de argumentação (ver Figura 49), duas noções que, na opinião de Boavida (2001), se relacionam com o conceito de demonstração, não havendo unanimidade na distinção que é feita entre todas estas ideias.


~~É~~ Uma demonstração é a justificação da conjectura.
É afirmar que a conjetura é verdadeira.

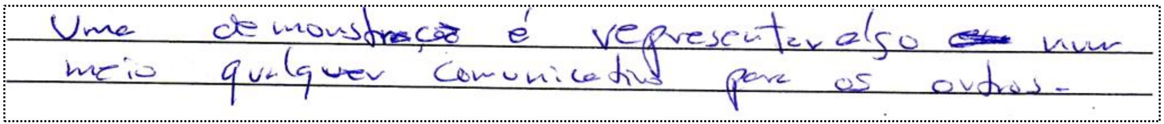
Fonte: Produções dos alunos na Tarefa 13 (Anexo 16)

Figura 47 – Exemplo de uma resposta à questão 3. da Tarefa 13 (Anexo 16)


Uma demonstração é a prova de um conceito atra
vés de imagens e palavras.

Fonte: Produções dos alunos na Tarefa 13 (Anexo 16)

Figura 48 – Exemplo de uma resposta à questão 3. da Tarefa 13 (Anexo 16)


Uma demonstração é representar algo num
meio qualquer comunicativo para os outros.

Fonte: Produções dos alunos na Tarefa 13 (Anexo 16)

Figura 49 – Exemplo de uma resposta à questão 3. da Tarefa 13 (Anexo 16)

Examinadas todas as produções dos alunos no que respeita às justificações e demonstrações efetuadas, sem esquecer que foram recolhidas antes de ter sido efetuada qualquer correção ou discussão em grande grupo, a investigadora considera que a aplicação desta sequência de tarefas também contribuiu para a consecução do quinto objetivo geral relativo ao ensino da Matemática, estabelecido no PMEB (ME-DGIDC, 2007). Apesar de essa contribuição ter sido menos significativa do que no estudo das conjeturas, a elaboração de justificações e a realização de demonstrações possibilitaram aos alunos um primeiro contacto com várias formas de demonstração. Porém, para alguns alunos o trabalho realizado ainda não foi suficiente para os auxiliar na formação de um conceito acerca do termo demonstração.

5.1.6. A necessidade de conjeturar e de demonstrar

A necessidade de conjeturar nunca foi posta em causa pelos alunos durante a aplicação de toda a sequência de tarefas, fizeram-no naturalmente à medida que lhes foram sendo solicitadas, revelando entusiasmo e empenho na resolução dessas questões. Todavia, o mesmo não aconteceu com a necessidade de demonstrar. Mantiveram o empenho, mas em algumas situações perderam o entusiasmo, noutras manifestaram cansaço perante o esforço despendido.

O Salvador, durante a resolução da pergunta 2.4. da Tarefa 4 (Anexo 7), foi o primeiro a dar indicações de que as construções geométricas efetuadas com o *GeoGebra* eram suficientes para tirar conclusões.

> Salvador: Ó stora, isto é um quadrado. Tenho mesmo que verificar?
> Professora: Sim. Quais são as propriedades do quadrado?
> Salvador: Os 4 lados todos iguais.
> Professora: O losango também tem os 4 lados todos iguais!
> Salvador: Ah, pois é! Os ângulos têm que ser retos.

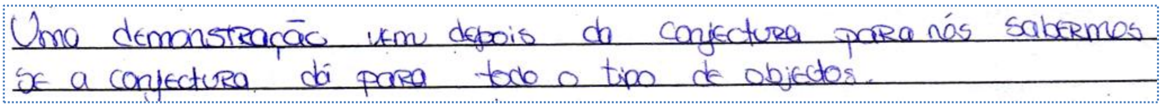
(DB41, Anexo 24)

Apesar do esforço empreendido para efetuar as demonstrações, os alunos nunca manifestaram necessidade da sua realização. Porém, mostraram-se sempre empenhados na sua execução. A investigadora entende que as perguntas que formulou ao longo da sequência de tarefas, assim como a organização das demonstrações num esquema a duas colunas, terão contribuído significativamente para esta postura dos alunos. No que respeita às perguntas, considera que as de focalização e de inquirição que formulou, conduziram os alunos à procura de justificações para algumas das suas afirmações e, noutras situações, fizeram-nos justificar as afirmações efetuadas. O excerto do diário de bordo que se segue legitima esta afirmação. Também a organização das demonstrações num esquema a duas colunas, de algumas das conjeturas formuladas, onde inicialmente se apresentavam os passos e se solicitavam as respetivas justificações, tê-los-á auxiliado na compreensão da necessidade da sua demonstração.

> Professora: O que é que vos garante esta igualdade ($AB \equiv CD$)?
> Martim: Ó stora, vê-se.
> Professora: Não pode ser justificado dessa forma. Têm de usar os dados do enunciado e as relações que conseguirem encontrar na figura.
> O Manuel e os colegas mais próximos, que estiveram algum tempo a pensar e a trocar impressões, chamaram-me e o Manuel continuou:
> Manuel: Stora, este ângulo (ângulo BEA) é igual a este (ângulo CED).
> Professora: Porquê?
> Manuel: Porque são ângulos verticalmente opostos.
> Professora. É verdade. Então como utilizam esse facto?
> Manuel: Posso usar este critério (LAL) para concluir isto (a congruência dos dois triângulos).
> Professora: Muito bem. Agora escrevam tudo o que acabas de dizer.

(DB81, Anexo 30)

A investigadora não tem dúvidas em afirmar que a implementação desta sequência de tarefas, com recurso ao *GeoGebra*, potenciou o desenvolvimento da capacidade de estabelecer conjeturas, bem como a formação desse conceito por parte dos alunos. Com o conceito de demonstração, esse desenvolvimento não foi tão nítido, uma vez que os alunos necessitaram de recorrer frequentemente ao apoio da professora. Todavia, constatou que alguns pares conseguiram efetuar quase todas as demonstrações solicitadas com sucesso, e que desenvolveram substancialmente a sua capacidade de transmitir os raciocínios efetuados, como é visível em algumas das produções apresentadas no item relativo às demonstrações. Também, no que respeita à formação do conceito de demonstração por parte dos alunos, já foi referido que cerca de um terço da turma o associou à necessidade de justificar as conjeturas (ver Figura 50).


Uma demonstração vem depois da conjectura para nós sabermos se a conjectura dá para todo o tipo de objectos.

Fonte: Produções dos alunos na Tarefa 13 (Anexo 16)

Figura 50 – Exemplo de uma resposta à questão 3. da Tarefa 13 (Anexo 16)

5.1.7. Autonomia

Quanto ao desenvolvimento da capacidade de autonomia dos alunos, a investigadora considerou que nesta sequência de tarefas ela se desenvolveu, principalmente, em três domínios: utilização do *software*, estabelecimento de conjeturas e realização de demonstrações. No que respeita à utilização do *software*, essa capacidade foi sendo desenvolvida gradualmente. As maiores dificuldades surgiram na Tarefa 4 (Anexo 7), como era de esperar pela sua natureza e pela falta de experiência dos alunos, e foram-se reduzindo significativamente ao longo da tarefa.

> Distribuído o enunciado da Tarefa 10, os alunos começaram de imediato a construir os quadriláteros sem solicitarem qualquer apoio. Necessitei apenas de auxiliar o Timóteo na construção do paralelogramo porque estava a trabalhar sozinho, dado que o seu colega Marco acabara de sair para ir ao médico.
> A primeira dificuldade surgiu, para a globalidade dos pares, quando terminaram a construção dos quadriláteros.

(DB10, Anexo 33)

Na opinião da investigadora, as dificuldades de utilização do *software*, que surgiram na fase final da aplicação da sequência de tarefas, resultaram da leitura pouco atenta dos enunciados ou, possivelmente, do facto de terem construído as figuras apresentadas sem mesmo terem lido o enunciado.

> Denise: Ó stora, aqui (pergunta 1.3.) nós não conseguimos concluir nada.
> Professora: O vosso quadrilátero é um paralelogramo?
> Denise: Era. Agora já não porque arrastámos os vértices.
> Professora: Cuidado, o quadrilátero deveria manter-se paralelogramo mesmo depois de terem arrastado os vértices. Seguiram as sugestões dadas?
> Denise: Não e agora não conseguimos pô-lo de novo paralelogramo.
> Professora: Parece-me que devem construir novamente o paralelogramo seguindo as indicações dadas no enunciado.
> A seguir, dois outros pares, o Samuel e o Simão e a Gabriela e o Martim chamaram-me pelo mesmo motivo. Optei então por chamar à atenção da turma, para que verificassem se os paralelogramos construídos ainda se mantinham paralelogramos depois de terem arrastado os seus vértices. No entanto, pela reação dos alunos, a situação descrita não se verificou com nenhum outro par.

(DB111, Anexo 34)

A área onde os alunos se tornaram mais autónomos diz respeito ao estabelecimento de conjeturas. Começaram por solicitar o apoio da professora na fase inicial da aplicação da sequência de tarefas, mas apenas para lhes validar as respostas; na Tarefa 7 (Anexo 10) ainda solicitaram o seu apoio, a partir daí não voltaram a fazê-lo. Esta convicção dos alunos sobre a veracidade das conclusões tiradas, veio a revelar-se um grande obstáculo na realização das demonstrações, como é evidenciado pelo excerto do diário de bordo que se segue:

> Nesta tarefa, a maior dificuldade com que me deparei foi conseguir que os alunos aceitassem que na demonstração de uma dada conjetura, esta não poderia ser usada nas justificações dos passos. Vejamos um dos diálogos estabelecidos:
> Denise: Mas não posso porquê? Está aqui (questão 3)!
> Professora: O que aí está é o que concluíram depois de construírem o paralelogramo e de efetuarem medições, mas ainda não provaram essa propriedade. Estão a fazê-lo agora nesta questão.
> António: Também não podemos usar estas (as conjeturas estabelecidas na questão 1.)?
> Professora: Essas podem. Reparem que já as provaram na questão 2.

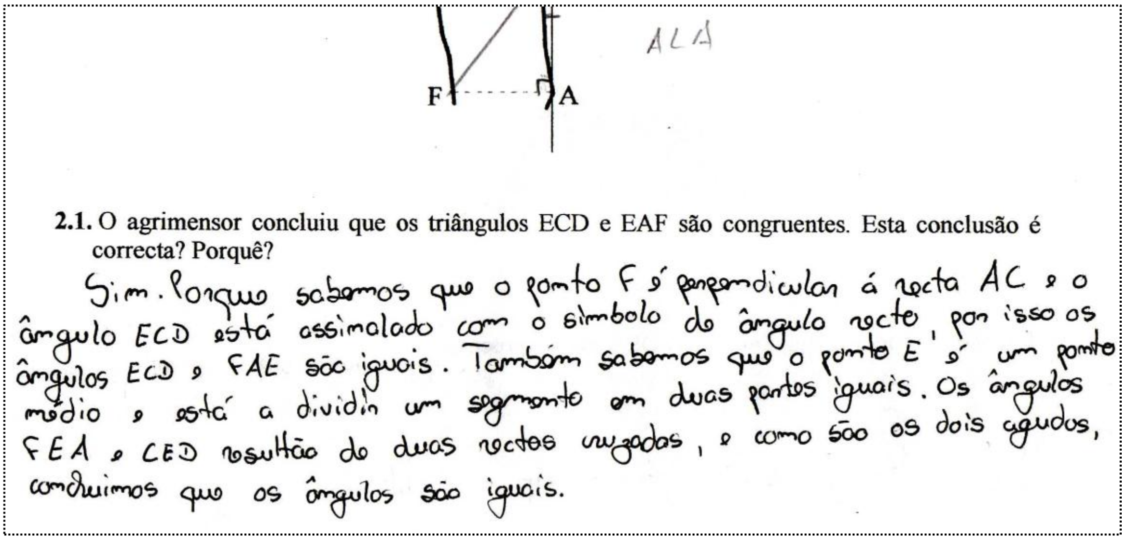
(DB112, Anexo 35)

Realizar demonstrações foi a atividade em que os alunos menos desenvolveram a sua autonomia. A dificuldade referida anteriormente, de quererem usar a conjetura a ser demonstrada na justificação de alguns passos, nunca foi ultrapassada até ao final da aplicação da sequência de tarefas. Todavia, uma outra dificuldade na realização de demonstrações foi sendo superada, a da comunicação matemática dos raciocínios efetuados. Nas primeiras demonstrações, esta foi a mais evidenciada pelos alunos, pois várias vezes responderam à professora investigadora que não conseguiam escrever a resposta dada oralmente.

> De seguida, um outro par deixou-me bastante surpresa. Havia cerca de 20 minutos que o Simão e o Samuel me tinham apresentado, oralmente, uma resposta totalmente correta para a pergunta 2.1. e, nesta ocasião, quando passei junto do par, ainda não a tinham apresentado por escrito. Quando lhes perguntei porque não escreveram a resposta, responderam:
> Samuel: Não conseguimos!
> Professora: Porquê? Onde está a vossa dificuldade?
> Simão: Não sei. Também não sou capaz.
> Professora: Ora digam-me de novo a vossa resposta.
> O Samuel explicou-me novamente, e a resposta continuava a estar absolutamente correta.
> Professora: Está muito bem. Agora só têm de escrever exatamente isso.
> Samuel: Mas como?
> Professora: Será que te estás a referir a novos símbolos?
> Samuel: Sim, não sei como se escreve isto matematicamente.
> Professora: Assim já estou mais descansada. Basta usarem as palavras que utilizaste para exprimires oralmente a tua resposta, mas também podem substituir algumas dessas palavras pelos símbolos matemáticos correspondentes.
> Samuel: E não fica errado?
> Professora: Não, Samuel! Nas justificações matemáticas não temos que usar unicamente a linguagem simbólica. Também podemos usar a linguagem corrente, ou um misto das duas.

(DB82, Anexo 31)

Na opinião da investigadora esta dificuldade, de comunicar matematicamente os raciocínios efetuados numa demonstração, foi ultrapassada pelos alunos com a realização da Tarefa 8 (Anexo 11). A partir daqui não registou pedidos significativos de apoio nesse sentido e as produções dos alunos também evidenciam que essa dificuldade tinha sido ultrapassada. A seguir apresenta-se a resolução do Samuel e do Simão (ver Figura 51), efetuada imediatamente a seguir ao diálogo anterior. Apesar de na resposta nunca referirem o critério de congruência utilizado, este está escrito ao lado da figura e a resposta dada é a justificação para a aplicação desse critério.



2.1. O agrimensor concluiu que os triângulos ECD e EAF são congruentes. Esta conclusão é correcta? Porquê?

Sim. Porque sabemos que o ponto F é perpendicular á recta AC e o ângulo ECD está assimolado com o símbolo do ângulo recto, por isso os ângulos ECD e FAE são iguais. Também sabemos que o ponto E é um ponto médio e está a dividir um segmento em duas partes iguais. Os ângulos FEA e CED resulthão de duas rectas cruzadas, e como são os dois agudos, concluimos que os ângulos são iguais.

Fonte: Produções dos alunos na Tarefa 8 (Anexo 11)

Figura 51 – Resposta dada pelo Samuel e pelo Simão à pergunta 2.1. da Tarefa 8 (Anexo 11)

Sequências de tarefas como esta, onde os alunos têm mais oportunidades para o desenvolvimento da autonomia em vários domínios, trazem problemas ao professor no que respeita ao controlo de alunos que por norma se distraem durante a realização das tarefas. No diário de bordo, a professora tem alguns registos dessas ocorrências envolvendo quatro alunos, menos do que habitualmente se registava nas aulas. Apenas um dos pares manteve essa postura até ao final da aplicação da sequência de tarefas, tendo sido várias vezes descoberto a navegar na Internet pela professora.

> Voltando a girar pela sala apercebi-me, uma vez mais, de que o Timóteo e o Marco não estavam a desenvolver o esforço necessário à realização da tarefa, com sucesso. Só “mostravam algum empenho” quando me aproximava. Raramente solicitavam o meu apoio e o tempo que disponibilizavam para a realização do trabalho era muito reduzido. Quando me abeirava do par e lhes fazia qualquer pergunta, respondiam corretamente e começavam a trocar impressões, mas logo que me afastava abandonavam o trabalho. Como estava a ser muito solicitada, e este par era muito discreto, tornou-se muito difícil controlá-los. As advertências dadas, de cada vez que os encontrei a navegar na Internet, não surtiram grande efeito. Um dos alunos esteve sempre a controlar a minha posição na sala.

(DB82, Anexo 31)

Perante a postura descrita no excerto do diário de bordo, e depois de analisadas as produções dos alunos, o facto de este par ter apresentado o desempenho mais fraco nesta sequência de tarefas não, constituiu uma surpresa para a investigadora.

5.2. Visão dos alunos

No ensino torna-se necessária a exploração constante da prática e a sua contínua avaliação. É preciso experimentar formas de trabalho que conduzam os alunos à obtenção dos resultados desejados. Para isso é imprescindível que se compreendam bem os modos de pensar e as dificuldades próprias dos alunos (Ponte, 2002).

Consistindo este estudo numa investigação sobre a prática, onde se pretende conhecer a perspetiva dos alunos relativamente à utilização de tarefas com recurso ao *GeoGebra* no ensino da geometria, importa, pois, analisar a sua opinião. A Tarefa 13 (Anexo 16) foi construída, entre outras finalidades, para proporcionar aos alunos um espaço de reflexão sobre a adequação da sequência de tarefas ao desenvolvimento da sua aprendizagem. Esta tarefa, nomeadamente a questão 4., permitiu recolher alguns dados de natureza quantitativa, sobre a perspetiva da globalidade da turma relativamente à sequência de tarefas, no que respeita à utilização do *GeoGebra* e à sua contribuição para o estabelecimento de conjeturas e para a compreensão das propriedades e conceitos geométricos. Permitiu ainda recolher informações no que concerne às indicações fornecidas nas tarefas, à necessidade de apoio por parte do professor e à utilização desta sequência de tarefas como um recurso no ensino da geometria.

Relativamente à existência da necessidade de apoio por parte da professora investigadora em sala de aula, constata-se que 4,1% dos alunos discorda totalmente da existência dessa necessidade, enquanto que 41,7% concorda e 12,5% concorda na totalidade com a necessidade desse apoio. Contudo, para uma parte significativa da turma, 41,7% dos alunos, a necessidade desse apoio parece não ter sido marcante neste trabalho, pois não concordam nem discordam com a afirmação (ver Gráfico 1).

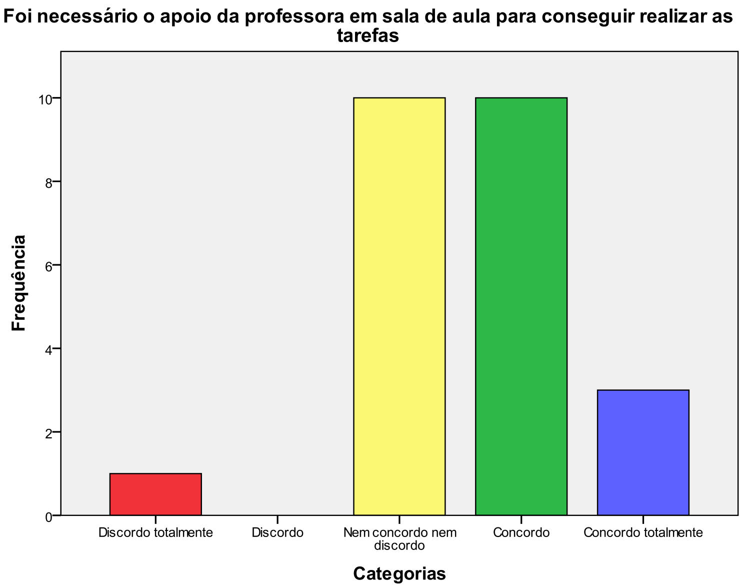


Gráfico 1 – Opinião dos alunos relativamente à necessidade de apoio por parte da professora

No que respeita à utilização do *GeoGebra*, uma larga maioria dos alunos, 87,5%, concorda (41,7%) ou concorda totalmente (45,8%) que foi fácil adaptar-se ao ambiente de trabalho do *software* (ver Gráfico 2). Os restantes 12,5% não concordam nem discordam da afirmação, pelo que podemos depreender que embora não lhes tenha sido muito fácil a adaptação ao ambiente de trabalho, também não terão tido dificuldades significativas nessa adaptação.

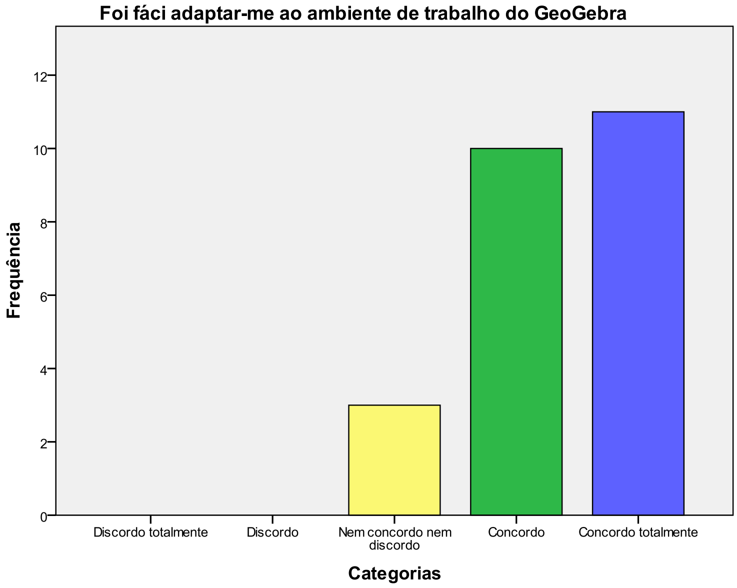


Gráfico 2 – Opinião dos alunos relativamente à facilidade de adaptação ao ambiente de trabalho

Quanto às construções efetuadas com o *GeoGebra* pode concluir-se que foram realizadas com facilidade pela maioria dos alunos da turma (ver Gráfico 3), uma vez que 45,8% dos alunos concordaram e 29,2% concordaram totalmente com a afirmação. Os restantes 25% não concordaram nem discordaram da afirmação pelo que pode inferir-se que, apesar de não terem sentido facilidade para efetuar as construções com o *GeoGebra*, as dificuldades sentidas não lhes terão deixado marcas profundas.

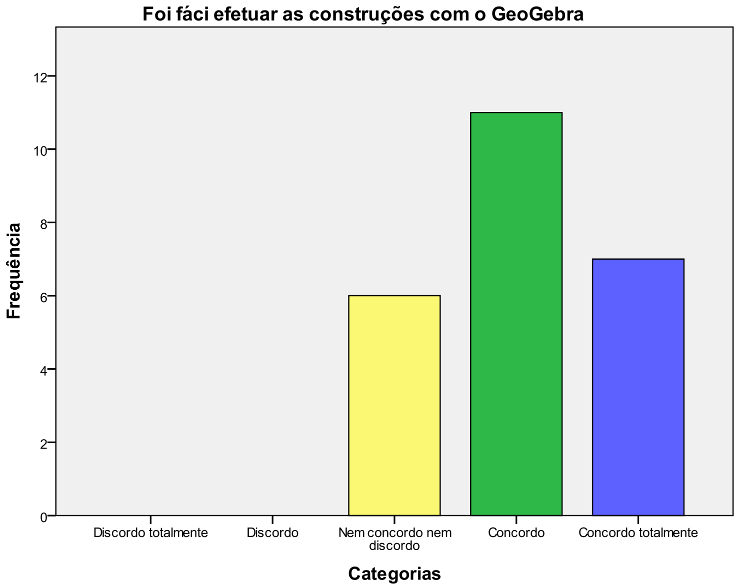


Gráfico 3 – Opinião dos alunos relativamente à facilidade de realização de construções com o *GeoGebra*

Na opinião dos alunos não há dúvida de que a manipulação de objetos no *GeoGebra* facilitou o estabelecimento de conjeturas, com 79,2% a afirmarem concordar, ou concordar totalmente, com esta afirmação. Nenhum aluno discordou desta afirmação, e o número de alunos que não concordou nem discordou é inferior a um quarto do total (ver Gráfico 4).

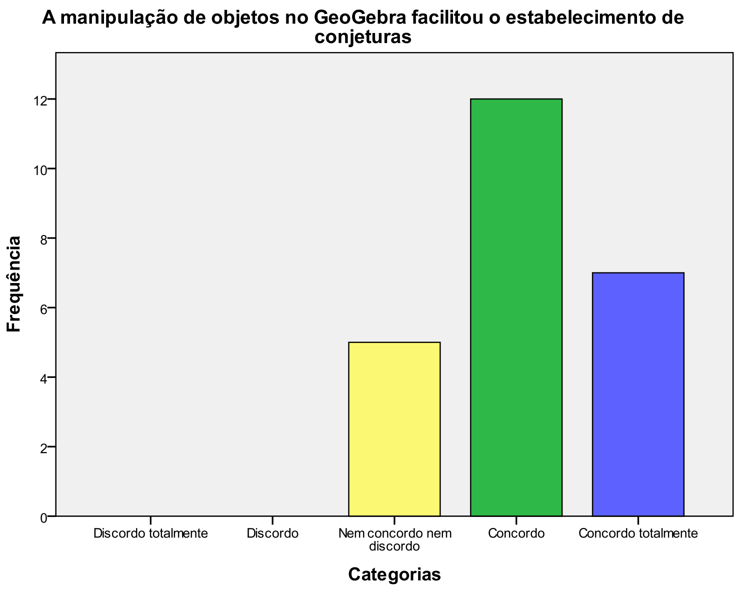


Gráfico 4 – Opinião dos alunos relativamente à influência da manipulação de objetos no *GeoGebra* na facilidade em estabelecer conjeturas

O *GeoGebra*, na opinião da maioria dos alunos (83,3%), possibilitou a compreensão das propriedades e conceitos geométricos. Para os restantes 16,7% tudo indica que não teve esse efeito, como a sua opinião foi a de não concordar nem discordar da afirmação permite-nos depreender que não surtiu efeitos negativos (ver Gráfico 5).

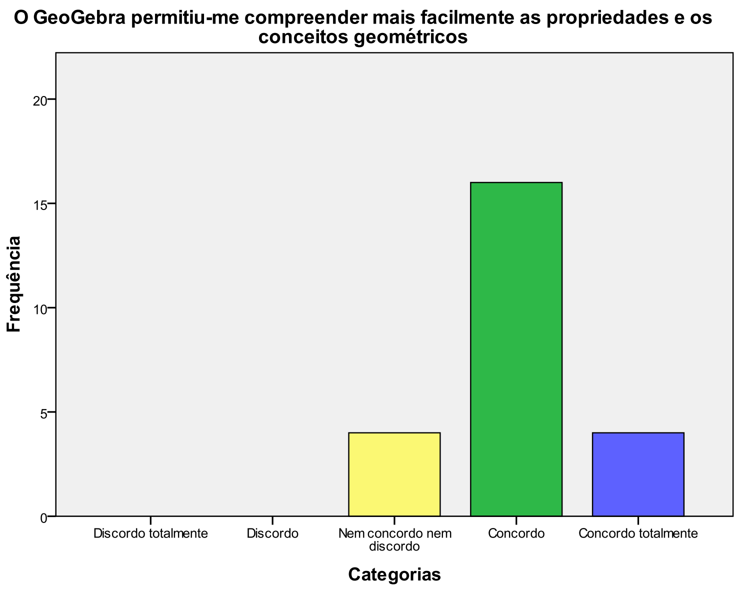


Gráfico 5 – Opinião dos alunos relativamente à influência do *GeoGebra* na facilidade de compreensão das propriedades e dos conceitos geométricos

No que concerne à sequência de tarefas, também 83,3% dos alunos da turma considerou que as indicações fornecidas nas tarefas foram suficientes para o desenvolvimento do trabalho proposto. Os restantes16,7% não concordaram nem discordaram com a afirmação (ver Gráfico 6).

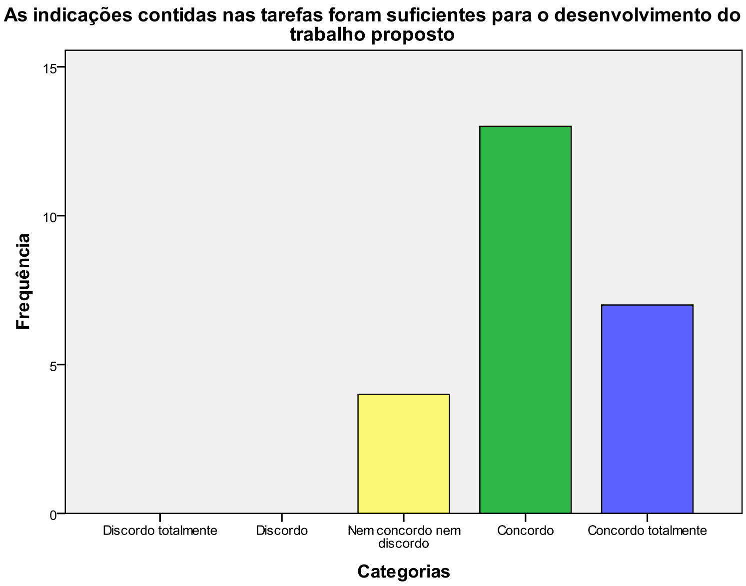


Gráfico 6 – Opinião dos alunos relativamente à suficiência das indicações contidas nas tarefas para o desenvolvimento do trabalho proposto

Relativamente ao facto da sequência de tarefas, com recurso ao *GeoGebra*, ter facilitado aos alunos a aprendizagem da geometria, constatamos que 87,5% dos alunos têm essa opinião e que os restantes 12,5%, não concordam nem discordam com a mesma (ver Gráfico 7).

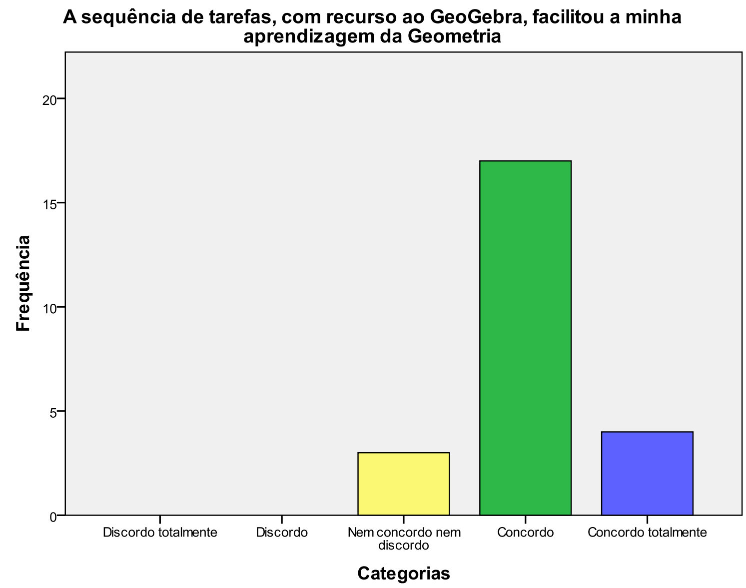


Gráfico 7 – Opinião dos alunos relativamente à facilidade de aprendizagem da geometria, proporcionada pela aplicação da sequência de tarefas

No que respeita à questão 1. da Tarefa 13 (Anexo 16), onde se pergunta se o *GeoGebra* auxiliou o aluno na aquisição de conceitos, e em caso de resposta afirmativa se solicita a sua indicação e o porquê dessa ajuda, um aluno respondeu simplesmente que não, e outro não respondeu à questão. Os restantes vinte e dois alunos responderam afirmativamente à questão, uns com respostas simples, com a indicação de um ou dois conceitos dos estudados, mas muitos foram os que apresentaram argumentos convincentes. Foram feitas várias referências à possibilidade de construção de figuras (ver Figura 52) e de manipulação dos objetos, como elementos facilitadores da compreensão dos conceitos (ver Figura 53). Foram também feitas referências ao facto do *GeoGebra* ter proporcionado situações de aprendizagem diferentes (ver Figura 54) e ainda uma referência à simplicidade das ferramentas (ver Figura 55).

O GeoGebra ajudou-te na aquisição de conceitos? Se sim, quais e porquê?

Sim, ajudou-me a perceber ângulos suplementares, complementares, congruentes, verticalmente opostos, alternos internos e alternos externos porque nós ao fazermos os objectos no ~~Geog~~ Geogebra percebíamos mais facilmente como eles eram, como eles são feitos.

Fonte: Produções dos alunos na Tarefa 13 (Anexo 16)

Figura 52 – Exemplo de uma resposta à questão 1. da Tarefa 13 (Anexo 16)

O GeoGebra ajudou-te na aquisição de conceitos? Se sim, quais e porquê?

O GeoGebra ajudou-me porque como temos mais facilidade em medir movimentar e fazer as figuras geométricas, e, algumas das coisas que aprendi foram os critérios de congruência dos triângulos e que a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é 360º.

Fonte: Produções dos alunos na Tarefa 13 (Anexo 16)

Figura 53 – Exemplo de uma resposta à questão1. da Tarefa 13 (Anexo 16)

O GeoGebra ajudou-te na aquisição de conceitos? Se sim, quais e porquê?

Sim. Conseguiu ajudar-me, pois fique a saber mais sobre triângulos e quadriláteros de uma maneira diferente.

Fonte: Produções dos alunos na Tarefa 13 (Anexo 16)

Figura 54 – Exemplo de uma resposta à questão 1. da Tarefa 13 (Anexo 16)

O GeoGebra ajudou-te na aquisição de conceitos? Se sim, quais e porquê?

Sim, ajudou-me a perceber mais de Geometria porque não percebia assim muito e os seus recursos ajudaram-me porque também eram muito simplificados.

Fonte: Produções dos alunos na Tarefa 13 (Anexo 16)

Figura 55 – Exemplo de uma resposta à questão 1. da Tarefa 13 (Anexo 16)

Depois da análise dos resultados anteriores, a investigadora considera bastante positiva a opinião dos alunos relativamente à utilização desta sequência de tarefas, na lecionação do tópico “Triângulos e quadriláteros”. Também considera que a sequência de tarefas foi significativa para a aprendizagem dos alunos e que o recurso ao *GeoGebra*, apesar das dificuldades manifestadas pelos alunos para construírem as figuras pedidas, foi uma mais-valia no desenvolvimento da capacidade de estabelecer conjeturas. O aspeto menos positivo foi o facto de uma parte significativa da turma, 54,2%, ter concordado, ou concordado totalmente, com a existência de necessidade de apoio por parte da professora, em sala de aula, para conseguirem resolver as tarefas.

5.3. Reflexão final acerca dos desafios sentidos e sugestões de reformulação

Uma vez aplicada a sequência de tarefas, em que os alunos são elementos ativos na construção da sua aprendizagem, impõe-se uma reflexão sobre a mesma. De salientar que a investigadora iniciou este trabalho de reflexão ainda durante a sua aplicação, sempre que as reações dos alunos a surpreenderam ou quando entendeu que o apoio por si prestado poderia não ter sido o mais adequado às dificuldades dos alunos. Quando oportuno, efetuou registos desses pequenos momentos de reflexão. “Subitamente, enquanto circulava pela sala, comecei a ter dúvidas sobre a minha interpretação da situação anterior, porquanto os alunos poderiam ter construído a figura de forma intuitiva.” (DB31, Anexo 21).

O extrato anterior revela que a investigadora utilizou momentos, em que não foi solicitada pelos alunos, para refletir sobre as orientações que lhes tinha fornecido. Dedicou ainda alguns desses momentos à reflexão sobre a globalidade do trabalho realizado em termos de aprendizagem, como é evidenciado no extrato que se segue:

> No pequeno período de reflexão que me foi permitido no momento, fiquei com a noção de que esta questão necessita de reformulação; apercebi-me de que nesta fase os alunos ainda não estavam preparados para lidar com a demonstração de duas conjeturas numa mesma pergunta. Esta demonstração não trouxe vantagens significativas em termos de aprendizagem porque, por um lado, foram poucos os pares que a realizaram com sucesso de forma autónoma e, por outro, consumiu muito do tempo da aula no apoio aos alunos, inviabilizando o terminus da tarefa neste bloco letivo.
>
> (DB111, Anexo 34)

De igual modo, dedicou momentos à reflexão sobre a globalidade do trabalho no que concerne ao clima de aula, como é evidenciado, respetivamente, nos dois extratos que se seguem:

> Comecei por relembrar a simbologia necessária, não obstante, verifiquei que os alunos responderam à pergunta 2.4., sem que antes tivessem respondido às perguntas 2.1., 2.2. e 2.3.. Questionei-me então se esta tarefa, da forma como estava construída, permitiria atingir, na totalidade, os objetivos definidos. É verdade que depois do diálogo em que os alertei para o facto de que as conclusões tiradas a partir de casos particulares necessitam de ser justificadas, porque podem não ser válidas na generalidade das situações, os alunos tentaram responder às restantes questões. Todavia, nesta segunda questão desapareceu o entusiasmo sempre presente nas atividades desenvolvidas com a turma ao longo do ano letivo. Na tentativa de dar mais algum dinamismo à aula, resolvi intervir.

(DB5, Anexo 26)

> Por volta das 8 horas e 55 minutos já muitos pares tinham terminado a questão 4. e não manifestavam interesse em resolver o desafio da 5.ª questão. A Denise e o António já a tinham terminado e estavam a descansar. Quando lhes perguntei porque não resolviam a última questão a Denise disse: "É um desafio, fica para quando já não estiver cansada.". Perante esta resposta, e estando nós muito próximos do final do ano letivo, entendi que não deveria insistir com os alunos. Optei por deixar ao seu critério a decisão sobre a resolução ou não deste desafio. Contudo, decidi que se voltasse a aplicar esta sequência de tarefas, alteraria o enunciado desta 5.ª questão.

(DB112, Anexo 35)

Analisada a fase de implementação desta sequência de tarefas, novos momentos de reflexão se impõem, nomeadamente quanto aos desafios sentidos e a possíveis sugestões de reformulação desta sequência de tarefas. Não há dúvida de que o maior desafio sentido pela investigadora diz respeito à formulação de perguntas durante o apoio prestado aos alunos, nomeadamente a formulação de perguntas de inquirição, de modo a que conseguissem avançar no trabalho, quando estavam a sentir dificuldades. Em muitas situações, a investigadora também teve necessidade de efetuar perguntas de focalização para testar conhecimentos e de seguida voltar às perguntas de inquirição. A dificuldade de formulação destas perguntas de inquirição, não foi sentida durante o estabelecimento das conjeturas, mas sim durante a realização das demonstrações. Além das dificuldades manifestadas para efetuarem as conexões necessárias, acresceu a dificuldade de as comunicarem matematicamente.

Outro desafio sentido pela investigadora durante a aplicação desta sequência de tarefas foi a gestão do tempo. No momento da implementação foi bastante sentido, em especial pela aproximação do final do ano letivo. De facto, num olhar retrospetivo, houve um ou dois momentos em que essa pressão poderá ter influenciado, de forma menos positiva, o desempenho dos alunos em algumas questões, sobretudo quando se aproximava o final das aulas. Analisando as produções dos alunos, a investigadora considera que, se tivesse efetuado mais algumas perguntas de inquirição, o desempenho dos alunos nessas questões poderia ter sido melhor.

Analisando os desafios sentidos, e a forma como lhes deu resposta, a investigadora não tem dúvidas de que os alunos não foram os únicos a "aprender de forma diferente". Ela também aprendeu mais um pouco, nomeadamente que é possível ensinar todo um tópico programático com recurso a novas tecnologias, e tomou consciência de que tem de continuar a libertar-se da pressão do fator tempo. O desenvolvimento de determinadas competências poderá ser demorado, mas, sem querer efetuar previsões, está convicta de que, caso se opte por este tipo de trabalho ao longo de um ciclo de ensino, ele será compensador para os alunos e para os professores.

Quanto a sugestões de reformulação desta sequência de tarefas, a investigadora propõe as devidas adaptações às Tarefas 1, 2 e 3 (Anexos 4, 5 e 6, respetivamente), uma vez que estas foram construídas para introduzir itens não lecionados no 2.º ciclo, em virtude de ter sido aplicada a sequência de tarefas no primeiro ano de implementação do PMEB (ME-DGIDC, 2007), ano letivo 2010/2011. Estas três tarefas poderão ser substituídas pela Tarefa 1 - 2.ª versão (Anexo 17), a aplicar num bloco de 90 minutos (dois tempos letivos) para que os alunos possam recordar conceitos adquiridos no 2.º ciclo, e que são necessários ao desenvolvimento da sequência de tarefas. A investigadora também propõe que a Tarefa 5 (Anexo 8), nomeadamente no que respeita à questão 2., não seja aplicada sem um diálogo prévio acerca da necessidade de efetuar a demonstração das conjeturas, eventualmente com a apresentação de exemplos. Propõe, ainda, a substituição da Tarefa 11 (Anexo 14), pela Tarefa 11 - 2.ª versão (Anexo 18), uma vez que a questão 2. se revelou de extrema complexidade para os alunos. No que respeita ao espaço temporal propõe que esta sequência de tarefas não seja aplicada no final do ano letivo, a fim de reduzir, sobre o professor, a pressão do tempo.

6. Conclusão

No primeiro ponto deste capítulo, apresentam-se as conclusões mais relevantes do estudo, procurando dar resposta às questões de investigação. No segundo ponto, são identificados os fatores mais limitativos deste trabalho e, finalmente, no terceiro ponto, tecem-se algumas recomendações para trabalhos futuros.

6.1. Conclusões do estudo

As novas tecnologias estão cada vez mais presentes nas escolas portuguesas e os *softwares* educativos apresentam enormes potencialidades que poderão ser aproveitadas pelos professores, de modo a proporcionarem aos seus alunos experiências mais significativas na sua aprendizagem da matemática.

O *GeoGebra* é um *software* de geometria dinâmica, bastante intuitivo, composto por várias ferramentas que permitem a construção de figuras geométricas diversificadas, das mais simples às mais complexas. Para além de proporcionar o estudo da geometria, também apresenta recursos que possibilitam o estudo da álgebra e do cálculo. Tem ainda a grande vantagem de ser um *software* livre e gratuito, criado a pensar no ensino.

Este estudo centrou-se na análise da implementação de uma sequência de tarefas, com recurso ao *GeoGebra*, no estudo do tópico "Triângulos e quadriláteros", no 7.º ano de escolaridade do Ensino Básico. Trata-se de uma investigação sobre a prática profissional da investigadora, estruturada com o objetivo de procurar resposta para as questões de investigação: Que desafios emergem na prática letiva quando se aplicam tarefas envolvendo a utilização do *GeoGebra*?; Que visão têm os alunos da utilização de tarefas com recurso ao *GeoGebra*, em geometria?. A aprendizagem dos alunos combinou quatro aspetos: construção e exploração, com recurso ao *GeoGebra,* das propriedades das figuras geométricas por eles construídas; discussão entre os elementos dos pares; registo das suas conclusões no enunciado das tarefas propostas; discussão e correção das tarefas em grupo turma. Utilizou-se uma metodologia de natureza qualitativa, do tipo interpretativo, em virtude de o propósito da investigação não ter sido o de procurar generalizações, mas sim, analisar os dados a partir de situações concretas, procurando encontrar fatores que possam ser comparáveis com outros estudos da mesma natureza.

No que respeita à comunicação matemática, durante a implementação desta sequência de tarefas, com recurso ao *GeoGebra*, o maior desafio para a investigadora foi, sem dúvida, a formulação de perguntas. Apesar da sua falta de experiência na aplicação de tarefas desta natureza, procurou formular, sempre que oportuno, perguntas de inquirição, por considerar que estas promovem o desenvolvimento da autonomia dos alunos, na medida em que necessitam de mobilizar conhecimentos para lhes dar resposta; o sucesso desta tarefa esteve patente na maior parte das situações. Todavia, em algumas circunstâncias o seu desempenho nesta área não foi o ideal, porque não conseguiu gerar nos alunos a reação pretendida: sentirem necessidade de efetuar experiências com o *software* para encontrarem justificações para determinados acontecimentos.

Durante a aplicação da sequência de tarefas, registou-se continuamente a interação aluno-aluno e, também, a interação aluno-professor. Esta última foi menos relevante, não obstante, na opinião da investigadora, ocorreu mais vezes que o desejável, sobretudo no que se refere aos pedidos de esclarecimentos sobre a interpretação de enunciados. Professora e alunos interagiram, criando um clima de trabalho onde os alunos partilharam as suas ideias e procuraram esclarecimentos. Para a criação deste clima de trabalho concorreram, ainda, os materiais utilizados, a modalidade de trabalho selecionada e a boa relação pedagógica, onde os alunos se sentiram à vontade para trocar impressões com o seu par, por vezes com colegas de outros grupos, e expor as suas dificuldades, as suas ideias, tanto individualmente à professora, como em grande grupo.

Gerir o tempo durante a aplicação da sequência de tarefas revelou-se uma atividade difícil. Uma das situações mais complexas, relativa à gestão do tempo, ocorreu durante a aplicação da Tarefa 2 (Anexo 5). No momento em que a professora informou que iria proceder à recolha das produções dos alunos, estes mostraram-se de imediato muito agitados e começaram a solicitar mais tempo, em virtude de ainda não a terem concluído. Também algumas questões organizacionais da escola, como a falta de um laboratório de matemática, a falta de atenção dos alunos durante a leitura dos enunciados, assim como as suas dificuldades na elaboração de justificações, tanto para as conjeturas encontradas, como para as afirmações apresentadas nos enunciados, originaram à professora dificuldades de gestão do tempo.

Nesta sequência de tarefas, o estabelecimento das conjeturas solicitadas revelou-se de grande facilidade para os alunos. Na opinião da investigadora, face aos resultados obtidos, a aplicação desta sequência de tarefas, com recurso ao *GeoGebra*, contribuiu claramente para a consecução do quinto objetivo geral, relativo ao ensino da Matemática, estabelecido no PMEB (ME-DGIDC, 2007), nomeadamente no que concerne à capacidade dos alunos para formular e investigar conjeturas matemáticas. As produções dos alunos revelaram que a elaboração de justificações e a realização de demonstrações também contribuiu para a consecução deste objetivo programático. Contudo, essa contribuição foi menos significativa do que no estudo das conjeturas, porque para alguns alunos o trabalho realizado ainda não foi suficiente para os auxiliar na formação de um conceito acerca do termo demonstração.

A necessidade de conjeturar nunca foi posta em causa pelos alunos durante a aplicação de toda a sequência de tarefas, fizeram-no naturalmente à medida que lhes foram sendo solicitadas, revelando entusiasmo e empenho na resolução dessas questões. O mesmo não aconteceu com a necessidade de demonstrar; mantiveram o empenho, mas em algumas situações perderam o entusiasmo, noutras manifestaram cansaço perante o esforço despendido.

Quanto ao desenvolvimento da capacidade de autonomia dos alunos, ao longo da implementação da sequência de tarefas, registou-se de forma gradual, tanto no que respeita à utilização do *software*, como ao nível da comunicação matemática dos raciocínios efetuados. Sequências de tarefas como esta, onde os alunos têm mais oportunidades para o desenvolvimento da autonomia em vários domínios, trazem problemas ao professor no que respeita ao controlo de alunos que, por norma, se distraem durante a realização das tarefas.

A sequência de tarefas aplicada neste estudo, constituiu-se como um recurso valioso na lecionação do tópico “Triângulos e quadriláteros”, no 7.º ano de escolaridade, por proporcionar aos alunos experiências significativas, onde foram elementos ativos na construção da sua aprendizagem. O recurso ao *GeoGebra* foi uma mais-valia para os motivar para o estabelecimento de conjeturas. Todavia, numa aplicação futura, a investigadora considera haver necessidade de efetuar alguns reajustes. Nas adaptações que forem efetuadas a esta sequência de tarefas, deverão ser ponderadas as conclusões tiradas pela investigadora aquando da reflexão efetuada sobre a sua aplicação, mais especificamente: as Tarefas 1, 2 e 3 (Anexos 4, 5 e 6, respetivamente), deverão ser substituídas pela Tarefa 1 – 2ª versão (Anexo 17), uma vez que foram construídas para introduzir itens não lecionados no 2.º ciclo, em virtude desta sequência de tarefas ter sido aplicada no primeiro ano de implementação do PMEB (ME-DGIDC, 2007), ano letivo 2010/2011; a questão 2. da Tarefa 5 (Anexo 8) deve ser precedida de um diálogo prévio acerca da necessidade de efetuar a demonstração das conjeturas, eventualmente com a apresentação de exemplos; a substituição da Tarefa 11 (Anexo 14), pela Tarefa 11 - 2.ª versão (Anexo 18).

No que respeita à primeira questão de investigação, concluiu-se que os maiores desafios com que se depara o professor na realização de tarefas desta natureza são:

▪ A formulação de perguntas de inquirição, adequadas a cada situação, que permitam esclarecer os alunos e, simultaneamente, orientá-los na prossecução do trabalho;

▪ A orientação dos alunos de modo a que desenvolvam o raciocínio dedutivo, fomentando a aprendizagem da demonstração das conjeturas estabelecidas com recurso ao *software* de geometria dinâmica;

▪ A gestão do tempo quando surgem dificuldades imprevistas, por exemplo, na construção das figuras geométricas (dificuldades de utilização do *software* e de interpretação de enunciados).

Relativamente à segunda questão de investigação, constatou-se que a visão dos alunos relativamente à utilização de tarefas com recurso ao *GeoGebra*, em geometria, é bastante positiva, dado que:

▪ os alunos consideraram que foi fácil a sua adaptação ao *GeoGebra*, assim como a construção das figuras geométricas, e a utilização deste *software* facilitou o estabelecimento de conjeturas, bem como a compreensão das propriedades e dos conceitos geométricos;

▪ os alunos consideraram que as indicações contidas nas tarefas foram suficientes para o desenvolvimento do trabalho proposto e a sequência de tarefas, com recurso ao *GeoGebra*, facilitou a aprendizagem da geometria.

As conclusões deste trabalho estão em consonância com os resultados de estudos de outros investigadores, como Ferreira (2005) e Raposo (2009), no que respeita à identificação de vantagens da utilização de *software* de geometria dinâmica, na visualização e compreensão das propriedades e dos conceitos geométricos. Neste trabalho estabelecem-se ainda duas outras conclusões que vão ao encontro do apontado por Ferreira (2005), nomeadamente, o facto de a utilização do *software* de geometria dinâmica ter facilitado a descoberta das propriedades e das relações geométricas e o facto de, apesar de a professora ter tentado reduzir a sua intervenção, tendo colocado nas tarefas as indicações necessárias à consecução das atividades, os alunos solicitaram-na frequentemente.

Em suma, a implementação desta sequência de tarefas, com recurso ao *GeoGebra*, proporcionou aos alunos aprendizagens significativas, no que respeita às propriedades dos triângulos e dos quadriláteros. Em geral, os alunos estabeleceram conjeturas e fizeram a aprendizagem do conceito. Quanto à prova dessas conjeturas, o sucesso completo nessa ação apenas foi atingido por uma parte dos alunos. Porém, as provas efetuadas por alguns deles, com significativo rigor, bem como a conceção por eles formada acerca deste conceito, surpreenderam de forma bastante positiva a investigadora, considerando a sua idade, a sua total falta de experiência no trabalho com o *GeoGebra* e ainda o facto de que este foi o seu primeiro contacto com a demonstração matemática.

6.2. Limitações do estudo

As conclusões do estudo permitem efetuar um balanço bastante positivo do mesmo. Contudo, qualquer estudo está sempre condicionado por diversos fatores, quer internos, quer externos à investigação. A possibilidade de existência de alguma subjetividade na interpretação dos dados é um desses fatores, uma vez que a investigadora conhecia as caraterísticas dos alunos, por ser sua professora. Outros fatores, como a seleção dos participantes, a formação dos pares, a não existência de um laboratório de matemática e a falta de colaboradores para analisar e discutir as diferentes questões surgidas, tiveram certamente alguma influência neste trabalho. Também o facto de a sequência de tarefas ter sido aplicada no final do ano letivo contribuiu para aumentar a pressão relativamente à gestão do tempo.

6.3. Recomendações

Face aos resultados obtidos, seria interessante estender este estudo a outros anos de escolaridade, em particular a todos os anos do 3.º ciclo do Ensino Básico, com novas propostas de tarefas adaptadas a cada conteúdo, pois o desenvolvimento deste tipo de trabalho, com regularidade, poder-nos-ia ajudar a perceber se alguns alunos, com um trabalho continuado, conseguiriam desenvolver a sua autonomia na realização de demonstrações matemáticas.

O alargamento deste tipo de trabalho a outras turmas do mesmo ano de escolaridade permitiria comparar resultados e, eventualmente, reforçar as conclusões deste estudo.

Estudar as potencialidades deste *software*, o *GeoGebra*, no âmbito da álgebra poderá ser um estudo igualmente interessante, uma vez que possibilitaria o estabelecimento de conjeturas e a realização de mais demonstrações, e os resultados poderiam vir a fortalecer as conclusões desta investigação.

7. Referências bibliográficas

Abrantes, P., Serrazina, L. & Oliveira, I. (1999). *A matemática na Educação Básica*. Lisboa: Ministério da Educação.

Alves, A. (2007). *E-Portefólio: Um estudo de caso*. Tese de mestrado inédita, Universidade do Minho, Instituto de Educação e Psicologia, Braga. Lisboa: APM.

Boavida, A. (2001). Um olhar sobre o ensino da demonstração em Matemática. *Educação e Matemática*, 63, 11-15.

Bogdan, R. & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em Educação: Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

Bravo, F. (2005). *Impacto da utilização de um ambiente de geometria dinâmica no ensino-aprendizagem da Geometria por alunos do 4.º ano do 1.º ciclo do Ensino Básico*. Tese de mestrado inédita, Universidade do Minho, Instituto de Estudos da Criança, Braga.

Brocardo, J. (2001). *As investigações na aula de Matemática: Um projecto curricular no 8.º ano*. Tese de doutoramento inédita, Universidade de Lisboa, Departamento de Educação da Faculdade de Ciências, Lisboa. Lisboa: APM

Candeias, A. (2010). *Aprendizagem das Funções no 8.º ano com o auxílio do software GeoGebra.* Tese de mestrado inédita, Universidade de Lisboa, Instituto de Educação, Lisboa.

Cardoso, M. (2010). *O conhecimento matemático e didáctico, com incidência no pensamento algébrico, de professores do primeiro ciclo do Ensino Básico: que relações com um programa de formação contínua?* Tese de doutoramento inédita, Universidade do Minho, Instituto de Estudos da Criança, Braga.

Carmo, H. & Ferreira, M. (1998). *Metodologia da investigação: Guia para auto-aprendizagem*. Lisboa: Universidade Aberta.

Conceição, A. & Almeida, M. (2010). *Matematicamente falando* 7. Porto: Areal Editores.

Costa, B. & Rodrigues, E. (2010). *Novo Espaço – Matemática 7.º ano*. Porto: Porto Editora.

Coutinho, C. (2011). *Metodologia de investigação em Ciências Sociais e Humanas: Teoria e prática*. Coimbra: Edições Almedina.

De Villiers, M. (1996a). *The future of secondary school geometry*. Consultado a 20 de fevereiro de 2012 em http://mzone.mweb.co.za/residents/profmd/future.pdf.

De Villiers, M. (1996b). *Why proof in dynamic geometry*. Consultado a 21 de fevereiro de 2012 em http://mzone.mweb.co.za/residents/profmd/why.pdf.

De Villiers, M. (1999). Papel e funções da demonstração no trabalho com o *Sketchpad*. *Educação e Matemática*, 63, 31-36.

Felício, A. & Guizzo, M. (2009). *Software GeoGebra: Uso didático nas aulas de Matemática e Informática Educacional nas séries finais do Ensino Fundamental*. Consultado a 11 de janeiro de 2012 em http://anapintro.vilabol.uol.com.br/TCC*Geogebra*.pdf.

Ferreira, E. (2005). *Ensino e aprendizagem de geometria em ambientes geométricos dinâmicos: o tema de geometria do plano no 9º ano de escolaridade*. Tese de mestrado inédita, Universidade do Minho, Braga.

GAVE (2007). *Pisa 2006 – Competências científicas dos alunos portugueses.* Consultado a 30 de abril de 2011 em http://www.gave.min-edu.pt/np3content/?newsId=33&fileName=relatoio_nacional_pisa_2006.pdf.

Hohenwarter, M. & Hohenwarter, J. (2009). *Ajuda GeoGebra: Manual Oficial da Versão 3.2*.. Consultado a 21 de janeiro de 2011 em www.*geogebra*.org/help/docupt_PT.pdf.

Junqueira, M. & Valente, S. (1997). Conjecturas e provas em geometria. Uma nova visita à ilha do triângulo equilátero. *Educação e Matemática*, 45, 44-48.

Lopes, M. (2010). *Construção e aplicação de uma sequência didatica para o ensino da trigonometria usando o software GeoGebra*. Tese de mestrado inédita, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Centro de Ciências Exatas e da Terra, Natal. Consultado a 11 de janeiro de 2012 em http://bdtd.bczm.ufrn.br/tedesimplificado//tde_arquivos/36/TDE-2011-05-25T094327Z-3443/Publico/MariaML_DISSERT.pdf.

Machado, S. (2006). A aprendizagem da demonstração matemática no 8.º ano no contexto de utilização de utilização do Geometer's Shetchpad. *Educação e Matemática*, 86, 10-16.

Martinho, M. H. & Ponte, J. P. (2005). Comunicação na sala de aula de Matemática: Práticas e reflexão de uma professora de Matemática. *Actas do XVI Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Lisboa: APM, 273-293.

ME - DEB (2001). *Currículo Nacional do Ensino Básico: Competências Essenciais*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento de Educação Básica.

ME - DGIDC (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação, Direcção Geral de Inovação Curricular.

NCTM (1989-1991). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM e IIE.

NCTM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM.

Oliveira, H. (2002). "Aprendamos a demonstrar, certamente, mas aprendamos também a conjecturar" – O legado de Pólya. *Educação e Matemática*, 69, 41-43.

Passos, C. P. & Correia, F.C. (2006). *Matemática em Acção – 7.º ano*. Lisboa: Lisboa Editora.

Ponte, J. P. (2002). Investigar a nossa própria prática. In GTI (Org.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (5-28). Lisboa: APM.

Ponte, J. (2003). O ensino da Matemática em Portugal: Uma prioridade educativa? *In O Ensino da Matemática: Situação e Perspectivas*. Lisboa: Conselho Nacional de Educação, 21-56.

Ponte, J., Oliveira, P. & Candeias, N. (2009). *Triângulos e quadriláteros – Materiais de apoio ao professor, com tarefas para o 3.º ciclo – 7.º ano*. Consultado a 29 de janeiro de 2011 em http://www.dgidc.min-edu.pt/matematica/.../triangulos_quadrilateros.pdf.

Raposo, R. (2009). *O Trabalho Colaborativo em Plataforma LMS (Moodle) e a Aprendizagem Matemática*. Tese de mestrado inédita, Universidade de Lisboa, Departamento de Educação da Faculdade de Ciências, Lisboa.

Rodrigues, M. (2008). *A demonstração na prática social da aula de Matemática*. Tese de doutoramento inédita, Universidade de Lisboa, Departamento de Educação da Faculdade de Ciências, Lisboa.

Serrazina, L., & Oliveira, I. (2001). O professor como investigador: Leitura crítica de investigações em educação matemática. In I. C. Lopes & M. C. Costa (Eds.), *Actas SIEM 2001* (pp. 29-56). Lisboa: APM.

Silva, J. (2002). Cinderella. *Educação e Matemática*, 67, 41-42.

Silveira, B. (2002). Cabri-géomètre. *Educação e Matemática*, 68, 35-37.

Trindade, S. (2010). *Contributo dos ambientes de geometria dinâmica para o processo de ensino e aprendizagem da Matemática*. Tese de mestrado inédita, Universidade Nova de Lisboa, Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologias, Lisboa.

Veloso, E. (1998). *Geometria: Temas actuais. Materiais para Professores*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Veloso, E. (2002). The Geometer's Sketchpad (versão 4). *Educação e Matemática*, 66, 20-21.

8. Anexos

Anexo 1 – Pedido de autorização ao Conselho Pedagógico para realização do estudo

Exmo. Senhor:
Director do Agrupamento de Escolas de Maceira

Margarida Maria de Almeida Ferreira Santos, docente de carreira, do Departamento de Matemática e Ciências Experimentais, Grupo 500, NIF: 179165976, aluna do Mestrado em Educação e Tecnologias em Matemática, do Instituto Politécnico de Leiria, pretende desenvolver um projecto de investigação, envolvendo os alunos da turma B, do sétimo ano, deste Agrupamento de Escolas, subordinado ao tema *A utilização de tecnologias educativas no desenvolvimento de um tópico curricular.* Pelo exposto, vem solicitar ao Conselho Pedagógico, a que V.ª Exª preside, autorização para:

- proceder à recolha de dados, prevista para o mês de Maio do corrente ano;

- alterar a ordem de leccionação da unidade didáctica "Triângulos e Quadriláteros" do 7º ano de escolaridade, a fim de tornar possível a produção dos instrumentos necessários à recolha de dados, uma vez que o projecto apenas terá início em Fevereiro. A unidade mencionada seria a penúltima a ser leccionada.

Consultado o Grupo Disciplinar sobre a alteração pretendida, na sua reunião de 26/01/11, não foram colocadas objecções. Os restantes professores que leccionam o 7º ano, mostraram-se disponíveis para proceder à alteração solicitada. Caso a autorização seja concedida, será enviada informação aos Encarregados de Educação para os informar da alteração.

Maceira, 31 de Janeiro de 2011

A Docente

____

Anexo 2 – Informação aos Encarregados de Educação sobre a alteração da ordem de lecionação dos tópicos

Exmo. Senhor:
Encarregado de Educação

Venho, por este meio, informar que será alterada a ordem de leccionação das unidades didácticas do 7º ano de escolaridade. A unidade "Triângulos e Quadriláteros" será leccionada a seguir à unidade "Equações", em vez de se seguir à unidade "Funções" como inicialmente estava previsto. Informo, ainda, que esta alteração foi autorizada, dia 02/02/11, pelo Conselho Pedagógico deste Agrupamento de Escolas.

Maceira, 04 de Fevereiro de 2011

A Docente

____

✂---

Eu, ____, Encarregado de Educação do aluno ____, n.º ______, da turma _____, do 7º ano, declaro que tomei conhecimento da alteração introduzida na sequência de leccionação das unidades didácticas do 7º ano de escolaridade.

Maceira, ____/____/2011

O Encarregado de Educação

____

Anexo 3 – Pedido de autorização aos Encarregados de Educação para utilizar as produções dos alunos neste relatório final

Exmo. Senhor:
Encarregado de Educação

Como é do conhecimento do seu educando, sou aluna do Mestrado em Educação e Tecnologia em Matemática e pretendo desenvolver o trabalho de investigação da minha tese com os alunos da turma B do 7.º ano. A recolha de dados foi autorizada pelo Conselho Pedagógico deste Agrupamento de Escolas, teve início em Maio e consistiu na implementação de uma sequência de 12 tarefas para leccionar a unidade "Triângulos e quadriláteros", com recurso ao GeoGebra.

Um dos objectivos deste trabalho é *analisar de que forma o GeoGebra contribui para o desenvolvimento das capacidades de estabelecer conjecturas e efectuar demonstrações*. Assim, venho solicitar a sua autorização para utilizar algumas partes do trabalho realizado pelo seu educando, na sequência de tarefas anteriormente mencionada, no meu trabalho final (tese de Mestrado), garantindo desde já que será mantido o anonimato de todos os alunos.

Grata pela atenção dispensada

____

(Professora de Matemática)

Eu, ____, Encarregado de Educação do aluno ____, n.º ______, da turma B, do 7.º ano, declaro que **autorizo/não autorizo** (riscar o que não interessa) a professora de Matemática a utilizar, no âmbito da sua tese de Mestrado, as produções do meu educando, realizadas na unidade "Triângulos e quadriláteros".

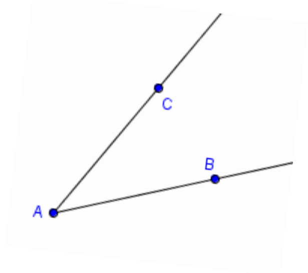
Maceira, ____/____/2011

O Encarregado de Educação

____

Anexo 4 – Tarefa 1

Ângulo é a região do plano limitada por duas semi-rectas que possuem a mesma origem. A origem das semi-rectas designa-se por **vértice do ângulo.**



Para representarmos simbolicamente o ângulo anterior usamos três letras e escrevemos **ângulo BAC** ou ângulo CAB. A letra do meio corresponde ao vértice do ângulo e cada uma das outras duas letras pertence a uma das semi-rectas.

Vamos agora recordar a classificação de ângulos:

1. Completa as frases que se seguem com uma das seguintes palavras: recto, raso, nulo, agudo e obtuso.

    1.1. Um ângulo que mede 0º de amplitude diz-se um ângulo _________________.

    1.2. Um ângulo que mede entre 0º e 90º de amplitude diz-se um ângulo _________________.

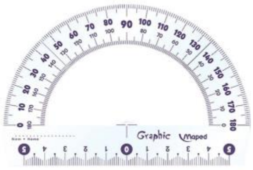
    1.3. Um ângulo que mede 90º de amplitude diz-se um ângulo _________________.

    1.4. Um ângulo que mede mais de 90º e menos de 180º de amplitude diz-se um ângulo _________________.

    1.5. Um ângulo que mede 180º de amplitude diz-se um ângulo _________________.

2. Como se denomina um ângulo que mede 360º de amplitude?

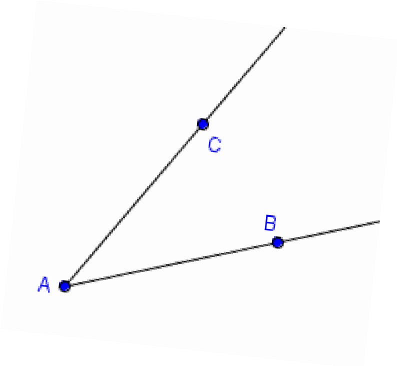
De seguida, vamos ver se ainda te recordas como deves usar um transferidor.



3. Com o auxílio de um transferidor, mede a amplitude dos ângulos seguintes e classifica-os:

Notação: ∠ BAC representa a medida da amplitude do ângulo BAC.

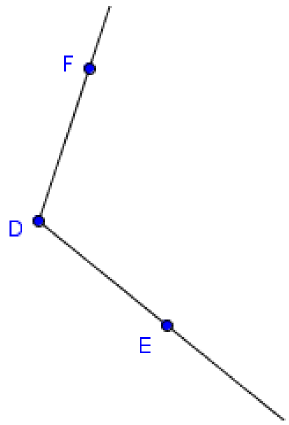
3.1.



∠ BAC = __________

Ângulo ____________

3.2.

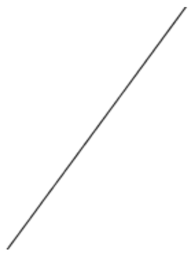


∠ EDF = __________

Ângulo ____________

4. Utilizando as semi-rectas já representadas, desenha um ângulo de amplitude:

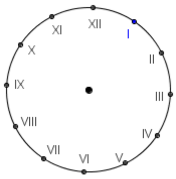
4.1. 52º



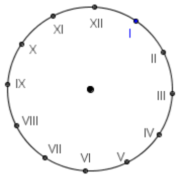
4.2. 130º

4.3. 90º

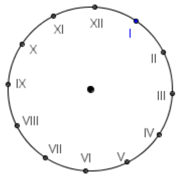
5. Marca as horas em cada um dos relógios. De seguida, indica a amplitude dos ângulos que desenhaste e classifica-os quanto à medida das suas amplitudes.



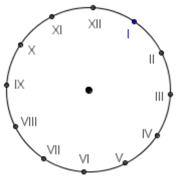
4h



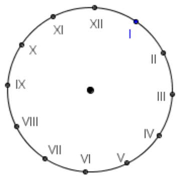
12h



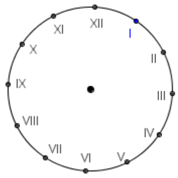
2h



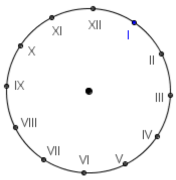
6h



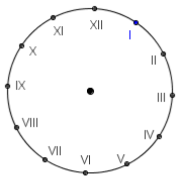
3h



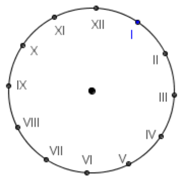
7h



12h30m



4h35m



5h20m

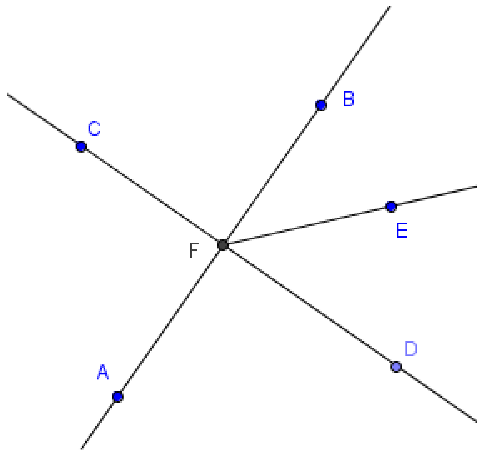
Anexo 5 – Tarefa 2

- Dois ângulos dizem-se **complementares** se a soma das medidas das suas amplitudes é igual a 90º.

- Dois ângulos dizem-se **suplementares** se a soma das medidas das suas amplitudes é igual a 180º.

- Dois ângulos dizem-se **adjacentes** se têm o vértice comum e a sua intersecção é uma semi-recta.

1. Na figura seguinte, sabe-se que AB $\perp$ CD (lê-se "a recta AB é perpendicular à recta CD"). Indica:



1.1. Dois ângulos complementares.

1.2. Dois ângulos suplementares.

1.3. Dois ângulos adjacentes.

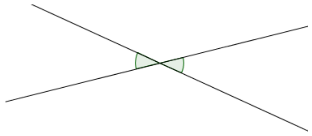
1.4. Um ângulo agudo.

1.5. Um ângulo obtuso.

1.6. Dois ângulos suplementares não adjacentes.

1.7. Um ângulo raso.

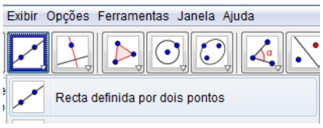
- Dois ângulos dizem-se **verticalmente opostos** se têm o vértice comum e os lados de cada um estão no prolongamento dos lados do outro.



- Dois ângulos com a mesma amplitude dizem-se **congruentes**.

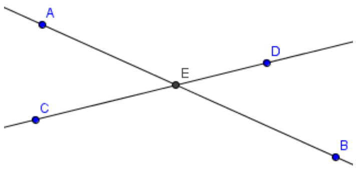
2. Abre o programa *GeoGebra* e traça  duas rectas concorrentes oblíquas.

Sugestão:
Para o efeito selecciona o modo ***Recta definida por dois pontos*** e clica em dois pontos distintos da janela gráfica. Procede de modo idêntico para traçares a segunda recta.

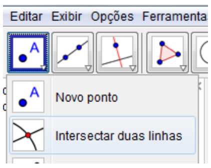


2.1. Observas quantos pares de ângulos verticalmente opostos?

2.2. Vais agora medir a amplitude de cada um dos quatro ângulos. Observa a figura que se segue e efectua o procedimento descrito:

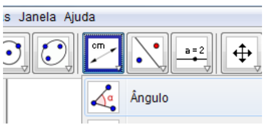


1º - O *GeoGebra* necessita de três pontos do ângulo para medir a sua amplitude, o vértice e um ponto pertencente a cada uma das semi-rectas que formam o ângulo.
Para que o vértice seja assinalado na figura deves seleccionar o modo ***Intersectar duas linhas*** e clicar sobre cada uma das rectas. Aparece então o vértice assinalado com o ponto E.



2º - Para medires a amplitude de um ângulo procede da seguinte forma:

- Selecciona o modo ***ângulo*** e, de seguida, activa três pontos (um em cada uma das semi-rectas que formam o ângulo e o vértice do ângulo – o vértice deve ser o 2º ponto a ser seleccionado).



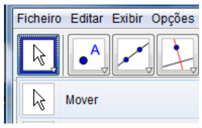
Exemplo: Para determinar a medida da amplitude do ângulo AEC começamos por activar o modo ***ângulo*** e depois activamos os pontos A, E, C.

Regista: ∠AEC = ________
∠DEB = ________
∠AED = ________

∠CEB = ________

O que concluis? ____

3. Move qualquer um dos pontos A, B, C ou D (primeiro selecciona o modo ***mover*** e de seguida clica sobre o ponto e move-o).



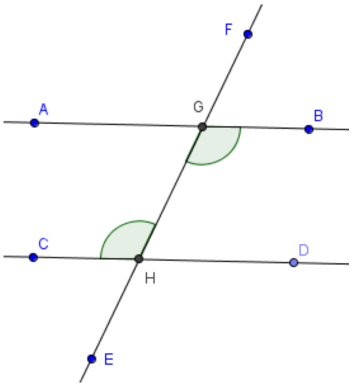
3.1. Compara as amplitudes dos ângulos verticalmente opostos. O que observas? ____
____

3.2. Completa:

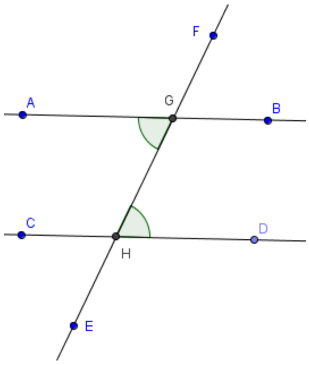
Ângulos **verticalmente opostos** _____________ amplitude , logo são ____________.

Anexo 6 – Tarefa 3

Duas rectas paralelas intersectadas por uma terceira, recta secante, determinam vários ângulos. Observa as figuras que se seguem, em que AB // CD (lê-se: “a recta AB é paralela à recta CD):



- Os ângulos BGH e GHC são **ângulos alternos internos**

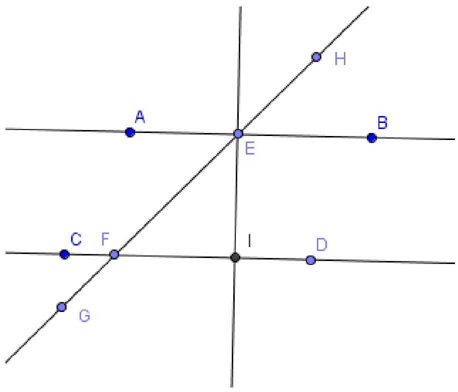


- Os ângulos AGH e GHD são **ângulos alternos internos**

Desafio: Em casa, utilizando o *GeoGebra*, verifica a propriedade seguinte:

Ângulos alternos internos têm a mesma amplitude, logo são congruentes**.**

1. Na figura, a recta AB é paralela à recta CD (AB//CD) e a recta EI é perpendicular à recta AB (EI $\perp$ AB).



1.1. Indica, utilizando as letras da figura:

1.1.1. Um ângulo recto;

1.1.2. Dois ângulos complementares;

1.1.3. Dois ângulos obtusos alternos internos;

1.1.4. Dois ângulos verticalmente opostos;

1.1.5. Um ângulo suplementar do ângulo CFG;

1.1.6. Um ângulo raso;

1.1.7. Dois ângulos agudos alternos internos;

1.1.8. Um ângulo verticalmente oposto ao ângulo AEF.

1.2. Supondo que o ângulo AEH tem de amplitude 120º, indica:

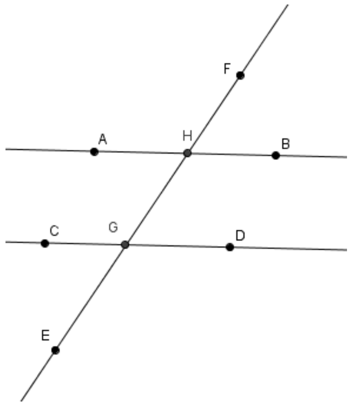
1.2.1. $\angle$GFD

1.2.2. $\angle$CFG

1.2.3. $\angle$FEI

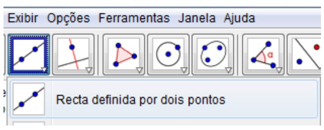
2. Abre o programa GeoGebra e desenha uma figura idêntica à que se segue:

A recta AB é paralela à recta CD

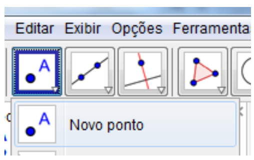


Sugestão:

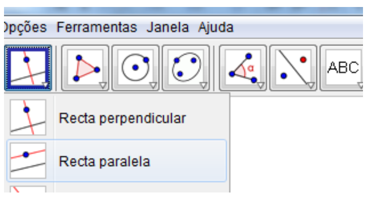
1º - Começa por traçar as duas rectas paralelas. Selecciona o modo ***Recta definida por dois pontos***, clica em dois pontos distintos da janela gráfica e obténs a recta AB.



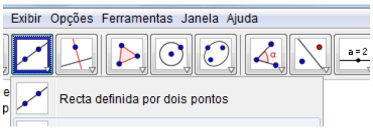
2º - Marca um ponto C não pertencente à recta AB. Para isso, basta seleccionar o modo ***Novo ponto*** e clicar na janela gráfica em qualquer ponto que não pertença à recta AB.



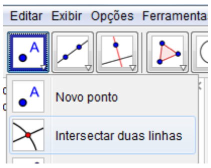
3º - Depois de seleccionares o modo ***Recta paralela***, activa o ponto C, de seguida a recta AB e será traçada a recta pretendida.



Activa novamente o modo ***Novo ponto*** e marca o ponto D na nova recta.



4º - Selecciona o modo ***Recta definida por dois pontos*** e traça a recta EF. Para obteres os pontos G e H efectua o procedimento que se segue:



1º - Selecciona o modo ***Intersectar duas linhas*** e activa as rectas CD e EF.

2º - Aplica o mesmo procedimento às rectas AB e EF.

2.1. Justifica a seguinte afirmação " Os ângulos AHF e EGD são ângulos de lados paralelos".

2.2. Determina a medida da amplitude de cada um dos ângulos mencionados em 2.1.. O que observas?

2.3. Na figura há mais ângulos de lados paralelos. Indica-os.

2.4. Determina a medida das amplitudes dos ângulos que referiste em 2.3. O que observas?

2.5. Completa:

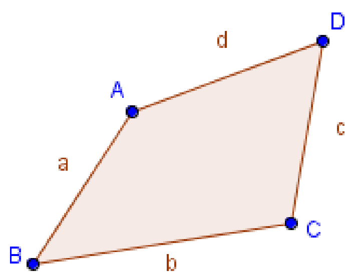
Ângulos de lados paralelos ____________________ amplitude se forem ambos ______________ ou se forem ambos ______________. Se um dos ângulos for agudo e o outro for obtuso então são ___________________________.

Anexo 7 – Tarefa 4

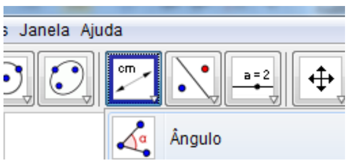
1. Abre o programa *GeoGebra*. Constrói um quadrilátero como o da figura que se segue:

1º - Selecciona o modo ***Polígono***. De seguida, clica em 5 pontos da Janela Gráfica (A, B, C, D e A - o último ponto tem que ser novamente o primeiro para fechar a linha poligonal) para traçar o polígono ABCD.

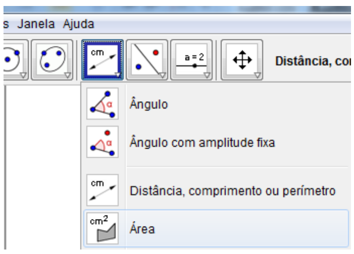
2º - Esconde os rótulos a, b, c e d dos lados do polígono. Para isso, selecciona um dos lados do polígono, pressiona o botão direito do rato e selecciona a opção *Exibir rótulo*. Procede de forma idêntica para os outros três lados do polígono.



1.1.Determina a amplitude de cada um dos ângulos internos do quadrilátero (não te esqueças que deves seleccionar o modo Â***ngulo***).

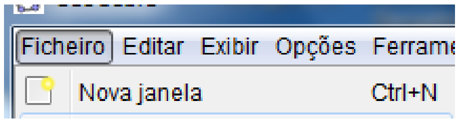


1.2. Determina o perímetro e a área do quadrilátero. Para determinar o perímetro do polígono selecciona o modo ***Distância, comprimento ou perímetro*** e clica de seguida sobre o polígono. Efectua um procedimento análogo para determinar a área do polígono, mas começa por seleccionar o modo ***Área***.

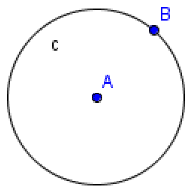


1.3. Arrasta um dos vértices do polígono à tua escolha. O que acontece a todas as medidas?

2. Abre uma nova janela (selecciona a opção ***Nova*** janela do menu ***Ficheiro***).

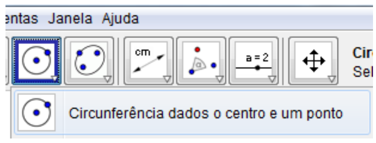


2.1. Constrói uma circunferência e marca sobre ela um ponto B.

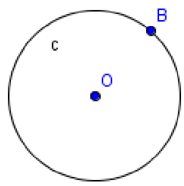


1º - Na janela gráfica começa por marcar dois pontos A e B.

2º - Selecciona o modo ***Circunferência dados o centro e um ponto***, clica no centro e de seguida no ponto da circunferência.



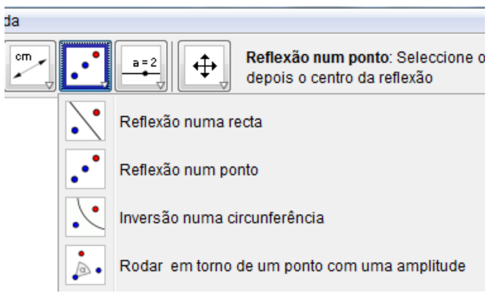
3º - Renomeia o ponto A para ponto O (com o rato sobre o ponto A, pressiona o seu botão direito, selecciona a opção renomear e substitui a letra A pela letra O).



2.2. Faz rotações sucessivas de 90º do ponto B.

1º - Selecciona o modo ***Rodar em torno de um ponto com uma amplitude.***

2º - Clica no cento da circunferência, de seguida no ponto que pretendes rodar. Insere o valor 90º na nova janela que se abre e depois clica em ***Ok*** para a fechar.



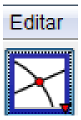
3º - Repete o processo as vezes necessárias para completar 360º.

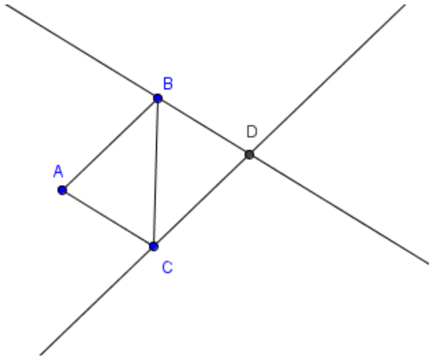
2.3. Une todos os pontos que obtiveste sobre a circunferência. Que figura se obtém? ____

2.4. Mede os comprimentos dos seus lados e as amplitudes dos seus ângulos para testar a tua conjectura.

Sugestão: Para obteres, por exemplo, $\overline{BC}$ (lê-se “comprimento do segmento de recta BC”) deves seleccionar o modo ***Distância, comprimento ou perímetro*** e depois activar o segmento de recta BC.

3. Constrói um triângulo ABC e as rectas CD e BD paralelas a AB e AC, respectivamente, como na figura.
   Nota: Não te esqueças que para obteres o ponto D deves intersectar as duas rectas.





   Mede as amplitudes dos ângulos ABD, BDC,

   DCA e CAB. Que relações existem entre eles?

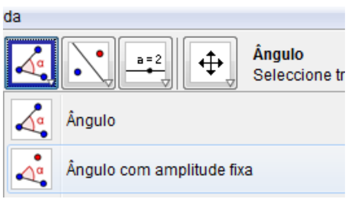
4. Como sabes é possível classificar um triângulo tendo em conta os seus ângulos.

   Recorda:

Triângulo **acutângulo** – um triângulo que tem todos os ângulos agudos.
Triângulo **rectângulo** – um triângulo que tem um ângulo recto.
Triângulo **obtusângulo** - um triângulo que tem um ângulo obtuso.

Testa agora a tua capacidade de usar o GeoGebra em novas situações.

4.1. Constrói um triângulo rectângulo que se mantenha rectângulo quando os seus vértices são arrastados. Descreve como procedeste.
   Sugestão: utiliza o modo ***Ângulo com amplitude fixa***.____________________________________



____

____

____

____

____

____

____

____

____

O triângulo rectângulo que construíste é isósceles? ______________________________________

Consegues mover os pontos de modo a obteres um triângulo rectângulo que não seja isósceles? Se não consegues, como podes construir um novo triângulo rectângulo que não seja isósceles? Tenta.

____
____
____
____
____
____
____
____

4.2. Constrói um triângulo obtusângulo que também seja isósceles. Descreve como procedeste.

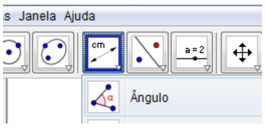
____
____
____
____
____
____

Tarefa adaptada de Ponte, Oliveira e Candeias (2009).

Anexo 8 – Tarefa 5

1. Abre o programa GeoGebra e constrói um triângulo ABC à tua escolha.

1.1. Mede as amplitudes dos ângulos internos do triângulo ABC (usa o modo ***Ângulo***) e adiciona as medidas obtidas. O que verificas?



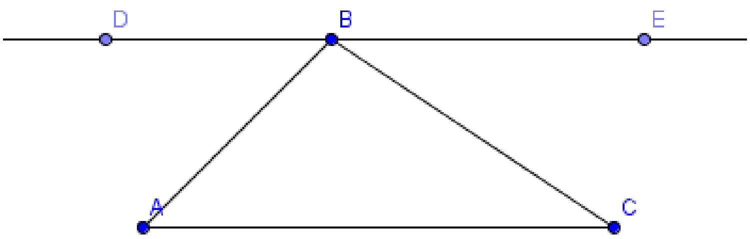
1.2. Arrasta um vértice qualquer do triângulo ABC de modo a obteres um novo triângulo. Verifica o que se passa com a amplitude dos ângulos e com a respectiva soma.

Formula uma conjectura sobre o valor da soma dos ângulos internos em qualquer triângulo.

Num triângulo qualquer ____   ____   ____

2. Considera o triângulo ABC da figura e a recta DE que passa pelo vértice B e é paralela ao lado AC do triângulo.

Nota: Nesta questão não deves utilizar qualquer material de desenho, nem o programa Geogebra.



2.1. Qual é a relação entre os ângulos ABD e BAC? Porquê?

2.2. Qual é a relação entre os ângulos CBE e ACB? Porquê?

2.3. Qual é o valor da soma dos ângulos ABD, CBE e ABC? Porquê?

2.4. Qual é o valor da soma dos ângulos internos do triângulo ABC? Porquê?

2.5. A conclusão que tiraste na alínea anterior permaneceria válida se tivéssemos considerado outro triângulo? Porquê?

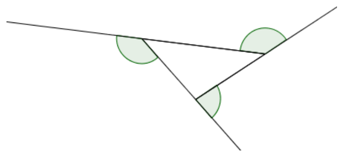
Parabéns. Acabas de realizar a demonstração matemática da conjectura estabelecida em 1.2.

3. O João construiu vários triângulos sem utilizar o computador. Ao adicionar as amplitudes dos ângulos internos formulou a seguinte conjectura: " A soma dos ângulos internos num triângulo é sempre igual a 179º". Mas, depois de ter resolvido a questão 2., afirmou: "Medir as amplitudes dos ângulos pode conduzir a erros, mas isso não acontece com o processo usado nesta questão". Concordas com esta afirmação? Porquê?

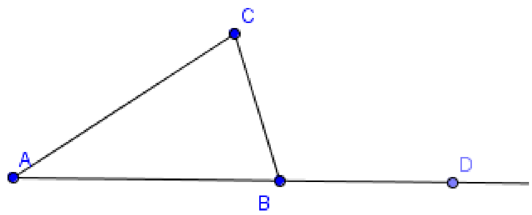
Tarefa adaptada de Ponte, Oliveira e Candeias (2009).

Anexo 9 – Tarefa 6

Ângulo **externo** de um triângulo é aquele que é formado, em cada vértice, por um dos lados do triângulo e pelo prolongamento de outro lado consecutivo.



1. Abre o programa GeoGebra, traça uma semi-recta AB e marca um ponto C não pertencente à semi-recta AB. Constrói o triângulo ABC e na semi-recta AB marca um ponto D à direita de B (como na figura que se segue).



1.1. Na figura observas algum ângulo externo do triângulo ABC? Em caso afirmativo, indica-o.

1.2. Mede as amplitudes dos ângulos BAC e ACB e adiciona-as. Mede a amplitude do ângulo CBD. O que concluis?

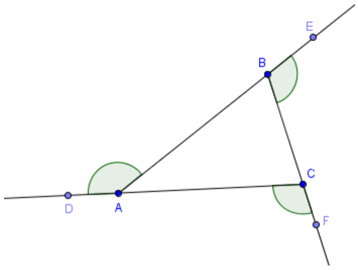
1.3. Move o ponto C e verifica se a conclusão a que chegaste em 1.2 se mantém.

1.4. Estabelece uma conjectura sobre a relação entre a soma das amplitudes de dois ângulos internos de um triângulo e a amplitude de um ângulo externo no vértice oposto.

____
____
____

1.5. Tenta encontrar uma justificação para a conjectura estabelecida anteriormente.

2. Constrói um triângulo ABC. Prolonga os seus lados, como mostra a figura, e acrescenta os pontos D, E e F.



Sugestão: Para prolongares os lados do triângulo selecciona o modo ***Semi-recta definida por dois pontos*** e clica de seguida em dois dos vértices do triângulo ABC.

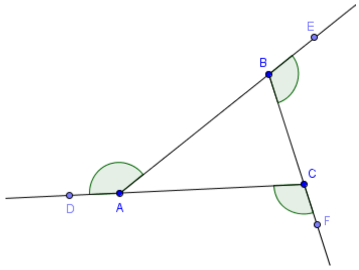
2.1. Mede as amplitudes dos ângulos DAB, EBC e ACF e adiciona as medidas obtidas. O que concluis?

2.2. Constrói outros triângulos (basta movimentar os vértices do triângulo ABC), mede a amplitude dos seus ângulos externos e adiciona-as. O que verificas?

Formula uma conjectura sobre o valor da soma das amplitudes dos ângulos externos de um triângulo qualquer:

____
____
____

3. Considera novamente o triângulo ABC da figura anterior.



Nota: Nesta questão não deves utilizar qualquer material de desenho, nem o programa GeoGebra.

3.1. Qual é o valor da soma $\angle DAB + \angle BAC + \angle EBC + \angle ABC + \angle ACF + \angle BCA$?

3.2. Qual é o valor da soma das amplitudes dos ângulos externos do triângulo? Justifica a tua resposta.

Sugestão: utiliza os conhecimentos adquiridos por ocasião do estudo dos ângulos internos do triângulo.

3.3. A conclusão que tiraste na alínea anterior permaneceria válida se tivéssemos considerado outro triângulo? Porquê?

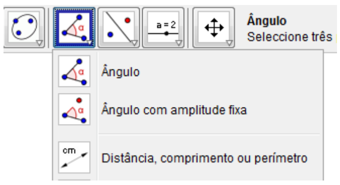
Tarefa adaptada de Ponte, Oliveira e Candeias (2009).

Anexo 10 – Tarefa 7

Dois **triângulos** dizem-se **congruentes** (ou geometricamente iguais) se têm, de um para o outro, os três lados e os três ângulos congruentes.

Importante: Ao longo desta tarefa vais construir triângulos de várias maneiras, utilizando o GeoGebra. Pretende-se que descubras o número mínimo de lados e ângulos congruentes que dois triângulos têm que ter para podermos garantir que são congruentes.

1. Constrói um triângulo ABC usando três segmentos de recta à tua escolha e mede o comprimento dos seus lados e a amplitude dos seus ângulos internos.

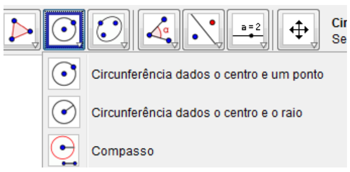


Sugestão: Para medires o comprimento de um segmento de recta, selecciona o modo ***Distância, comprimento ou perímetro*** e, de seguida, activa o segmento de recta.

1.1. Constrói outro triângulo DEF numa posição diferente do triângulo ABC, mas usando segmentos de recta com os mesmos comprimentos.

Sugestão:

1º - Marca na janela gráfica o ponto D à tua escolha. Selecciona o modo ***Compasso***, activa o segmento de recta AB e, de seguida, clica no ponto D (obténs uma circunferência com centro em D e raio igual a $\overline{AB}$).



2º - Marca na circunferência um ponto E e traça o segmento de recta DE. Nota que, da construção efectuada, tem-se $\overline{DE} = \overline{AB}$.

3º - Repete o 1º procedimento e traça duas circunferências, uma com centro em D e raio igual a $\overline{AC}$ e outra com centro em E e raio igual a $\overline{BC}$.

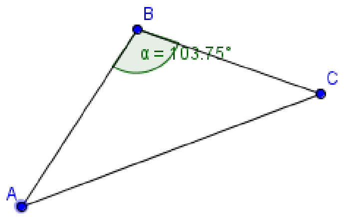
4º - Intersecta as duas circunferências construídas no passo anterior. Une um dos pontos de intersecção (F) com os extremos do segmento de recta DE e obténs o triângulo DEF.

5º - Esconde todas as linhas auxiliares (depois de seleccionares a linha pretendida, clica no botão direito do rato e selecciona o modo ***Exibir objecto***).

1.2. Mede as amplitudes dos ângulos internos do triângulo construído em 1.1. Compara este triângulo com o primeiro (triângulo ABC). Os dois triângulos são congruentes?

1.3. Será que dois triângulos com os três lados congruentes são sempre congruentes?

2. Abre uma nova janela, constrói um novo triângulo ABC à tua escolha e mede as amplitudes dos seus ângulos internos.



2.1. Constrói um outro triângulo DEF numa posição diferente do anterior, mas usando ângulos com a mesma amplitude das dos ângulos do triângulo ABC.

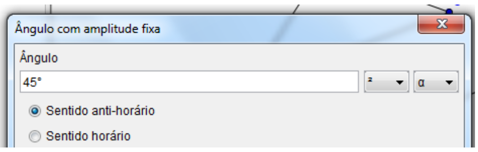
Sugestão:

1º - Na janela gráfica marca os pontos D e E à tua escolha e, de seguida, traça o segmento de recta DE.

2º - Traça o ângulo DEF de modo que $\angle DEF = \angle ABC$.

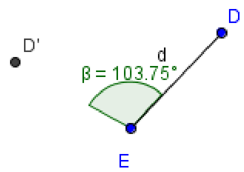
▪ Selecciona o modo ***Ângulo com amplitude fixa***, clica no ponto D seguido do ponto E

(o ponto E será o vértice do ângulo DEF) e abre-se uma janela como a que se segue.



▪ Na janela que se abriu, em vez de indicares um valor para a amplitude do ângulo, deves indicar a letra correspondente ao rótulo da amplitude do ângulo ABC. Por exemplo, na figura apresentada o rótulo do ângulo ABC é α. Para inserir este rótulo basta seleccioná-lo no canto superior direito da janela.

▪ Clica em OK e aparece traçado o ângulo DED' com a mesma amplitude da do ângulo ABC.



3º - Traça a semi-recta ED'.

4º - Efectua um procedimento análogo ao 2º para traçares um ângulo EDE' tal que $\angle EDE' = \angle BAC$. Não te esqueças que depois de seleccionares o o modo ***Ângulo com amplitude fixa*** deves clicar primeiro no ponto E e depois no ponto D porque o vértice do novo ângulo será o ponto D.

5º - Traça a semi-recta DE’ e de seguida intersecta-a com a semi-recta ED’ para obteres o ponto F.

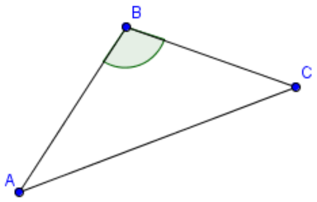
6º - Traça os restantes segmentos de recta que formam o triângulo EDF.

2.2. Os dois triângulos ABC e EDF são congruentes?

2.3. Dois triângulos que verifiquem as condições anteriores são sempre congruentes?

3. Abre uma nova janela e constrói um novo triângulo ABC à tua escolha.

3.1. Constrói outro triângulo numa posição diferente do triângulo ABC, mas usando as suas medidas, apenas para os comprimentos de dois dos seus lados e para a amplitude do ângulo que eles formam.



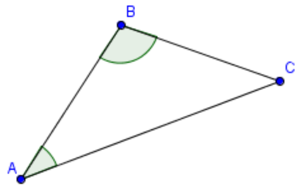
O ângulo ABC é formado pelos lados AB e BC do triângulo ABC

3.2. Compara os dois triângulos anteriores (efectua as medições que entenderes necessárias) e verifica se são congruentes.

3.3. Será que dois triângulos que tenham dois lados com o mesmo comprimento e a amplitude do ângulo por eles formado igual são sempre congruentes?

4. Abre uma nova janela e constrói um novo triângulo ABC à tua escolha.

4.1. Constrói outro triângulo numa posição diferente do triângulo ABC, mas usando as suas medidas, apenas para o comprimento de um dos seus lados e para a amplitude dos dois ângulos que têm esse segmento como lado comum.



O lado AB do triângulo ABC é comum aos ângulos BAC e ABC

4.2. Compara os dois triângulos anteriores (efectua as medições que entenderes necessárias) e verifica se os dois triângulos são congruentes.

4.3. Será que dois triângulos que tenham dois ângulos com a mesma amplitude e o lado comum a esses dois ângulos com o mesmo comprimento são sempre congruentes?

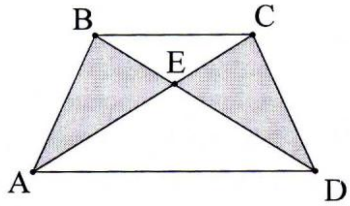
5. Estás em condições de estabelecer algumas conjecturas. Analisa cuidadosamente o trabalho que realizaste e estabelece conjecturas, relativamente às condições mínimas que dois triângulos tenham que verificar para podermos concluir que são congruentes.

6. **Desafio** (para efectuares em casa e/ou na aula, caso termines a questão 5 antes da hora de saída).
   Averigua se existem outras condições que garantam a congruência de dois triângulos.
   Faz uma pequena síntese do trabalho realizado bem como das conclusões obtidas em cada situação.

Tarefa adaptada de Ponte, Oliveira e Candeias (2009).

Anexo 11 – Tarefa 8

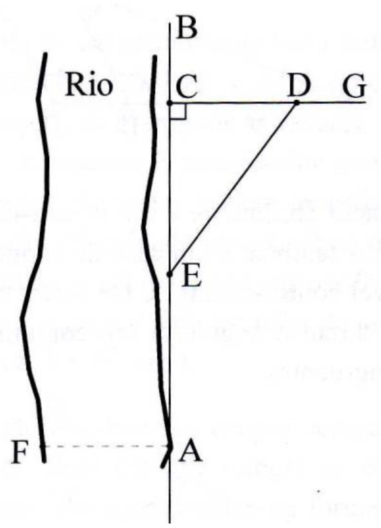
1. Considera o quadrilátero ABCD da figura em que E é o ponto de intersecção das suas diagonais. Sabe-se que $AE \equiv DE$ e $BE \equiv CE$ (lê-se "O segmento de recta BE é congruente com o segmento de recta CE").



1.1. Mostra que os triângulos ABE e DCE são congruentes.

1.2. Podemos afirmar que $AB \equiv CD$? Porquê?

2. Um agrimensor romano (cerca de 180 d.c.) usou triângulos congruentes para determinar a largura de um rio numa determinada zona do seu leito. Começou por traçar uma recta AB ao longo da margem onde se encontrava. Num ponto C tirou uma perpendicular CG a AB. Colocou uma estaca no ponto médio, E, de AC. De A fixou um ponto F na outra margem, sendo AF perpendicular a AC. Finalmente, descobriu um ponto D a partir do qual observou os pontos E e F de modo que D, E e F, estivessem sobre a mesma recta.

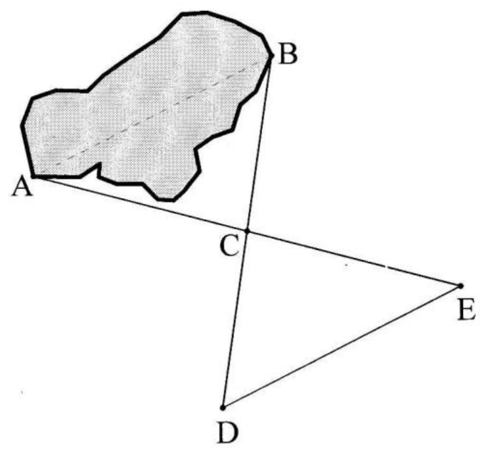


2.1. O agrimensor concluiu que os triângulos ECD e EAF são congruentes. Esta conclusão é correcta? Porquê?

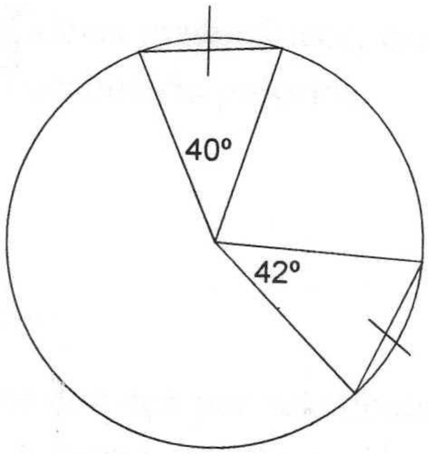
2.2. A afirmação “A largura do rio na zona do ponto A é igual ao comprimento do segmento CD” é verdadeira ou falsa? Porquê?

3. Pretende-se calcular a distância entre duas árvores à beira de um lago nos pontos A e B. Para tal, colocou-se uma estaca num ponto C e outra num ponto D de modo que os pontos B, C e D estão sobre a mesma recta e $CD \equiv BC$. Colocou-se uma outra estaca em E tal que A, C e E estão também sobre uma mesma recta e $AC \equiv CE$.

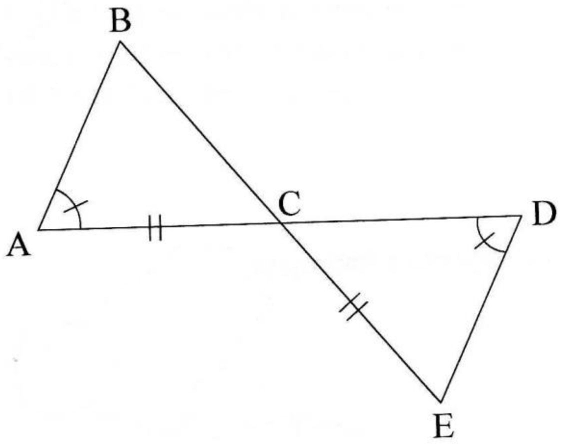
   Com esta construção, podemos concluir que a distância entre as árvores é igual ao comprimento do segmento DE? Justifica a tua resposta.



4. Explica porque a figura seguinte é impossível.



5. Nas condições da figura, pode concluir-se que os triângulos ABC e DEC são congruentes? Porquê?



Tarefa extraída de Ponte, Oliveira e Candeias (2009).

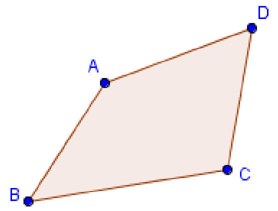
Anexo 12 – Tarefa 9

Recorda:

Quadrilátero é um polígono com quatro lados.

Polígono é o conjunto de pontos do plano limitado por uma linha fechada, formada por segmentos de recta unidos pelas extremidades.

1. Abre o programa GeoGebra e constrói um quadrilátero ABCD à tua escolha.



1.1. Mede as amplitudes dos seus ângulos internos e adiciona-as. O que concluis?

1.2. Arrasta um ou mais vértices do quadrilátero ABCD e verifica se a conclusão que tiraste em ainda se mantém. O que concluis?

Regista a conjectura que estabeleceste.

____

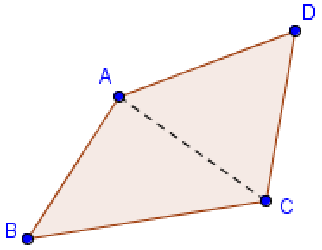
____

____

2. Como sabes, uma conjectura é uma conclusão que estabelecemos a partir dos nossos sentidos ou de medições que efectuamos. Como as medições envolvem erros e os nossos sentidos podem enganar-nos, para termos a certeza que elas são verdadeiras devemos demonstrá-las.

Nota: Nesta questão não deves utilizar qualquer material de desenho, nem o programa Geogebra.

Demonstra a conjectura que estabeleceste em 1.2.



Sugestão:

- Começa por traçar uma diagonal (segmento de recta que une dois vértices não consecutivos) do quadrilátero.

- Organiza a demonstração num esquema a duas colunas.

Na coluna da esquerda regista os vários passos (as afirmações) e na coluna da direita a respectiva justificação. Observa o esquema que se segue:

Passo	Justificação
$\angle CAD + \angle ADC + \angle DCA = 180^{\circ}$	- A soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é igual a 180º.
$\angle CAB + \angle ABC + \angle BCA = 180^{\circ}$	-
$\angle CAD + \angle ADC + \angle DCA + \angle CAB + \angle ABC + \angle BCA = 360^{\circ}$	-
$\angle CBA + \angle BAD + \angle ADC + \angle DCB + = 360^{\circ}$	-

Completa a coluna da direita para concluíres a demonstração da conjectura anterior.

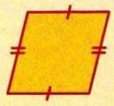
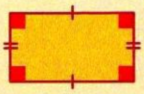
Tarefa adaptada de Ponte, Oliveira e Candeias (2009).

Anexo 13 – Tarefa 10

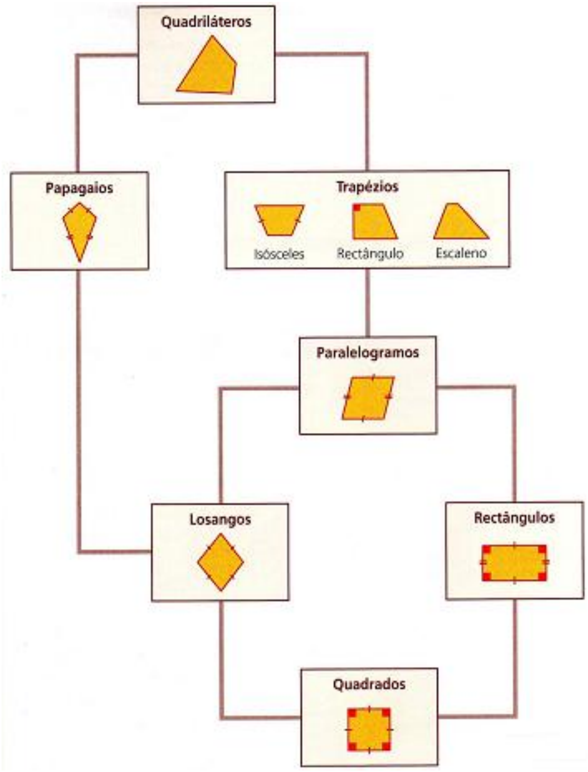
Ao observarmos quadriláteros verificamos que há propriedades que os caracterizam e os relacionam.

No quadro seguinte podes observar uma definição para os quadriláteros. Deves ter em atenção que esta não é única, pois há autores que consideram outras definições (por exemplo os autores do teu manual escolar definem o trapézio como “um quadrilátero com um par de lados paralelos”).

Classificação de quadriláteros

Quadrilátero	Definição	Figura
Papagaio	Dois pares de lados consecutivos congruentes.	
Trapézio	Pelo menos um par de lados opostos paralelos (as bases).	
Paralelogramo	Dois pares de lados paralelos.	
Rectângulo	Paralelogramo com os quatro ângulos internos congruentes (rectos).	
Losango	Paralelogramo com os quatro lados congruentes.	
Quadrado	Paralelogramo com os quatro ângulos e com os quatro lados congruentes.	

Fonte: Conceição & Almeida (2010)



Fonte: Conceição & Almeida (2010)

Abre o programa GeoGebra, constrói cada um dos quadriláteros e efectua os procedimentos que entenderes necessários para completar a tabela que se segue. Tenta tirar conclusões relativamente à existência ou não de congruência, de bissecção (divisão ao meio) e do tipo de ângulos (agudo, recto, …) formados pelas diagonais dos quadriláteros.

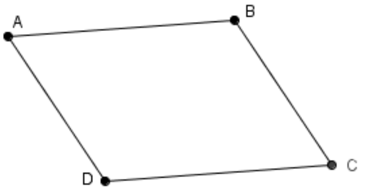
Quadriláteros	Propriedades das diagonais
Papagaio	
Trapézio	
Paralelogramo	
Rectângulo	
Losango	
Quadrado	

Anexo 14 – Tarefa 11

Recorda:

Paralelogramo é um quadrilátero com dois pares de lados

1. Abre o programa GeoGebra e constrói um paralelogramo ABCD à tua escolha.

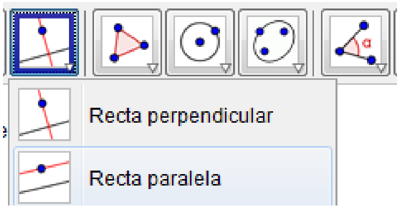


Sugestão: Efectua os procedimentos que se seguem para que quando necessitares de arrastar um vértice o quadrilátero continue a ser um paralelogramo.

1º - Traça o segmento de recta AB.

2º - Marca um ponto C não pertencente ao segmento de recta AB.

3º - Traça uma recta paralela à recta AB e que passa pelo ponto C (selecciona o modo ***Recta paralela*** e de seguida activa o ponto C e a recta AB).



4º - Traça o segmento de recta BC.

5º - Traça a recta paralela à recta BC e que passa pelo ponto A.

6º - Intersecta as duas rectas para obteres o ponto D.

7º - Esconde as duas rectas (botão direito do rato, ***Exibir objecto***).

8º - Traça os segmentos de recta AD e DC.

1.1. Mede o comprimento dos lados do paralelogramo. O que concluis?

1.2. Arrasta um ou mais vértices do paralelogramo ABCD e verifica se a conclusão que tiraste na pergunta 1.1. ainda se mantém. O que concluis?

Regista a conjectura que estabeleceste.

____

____

____

1.3. Mede agora as amplitudes dos seus ângulos internos. O que concluis?

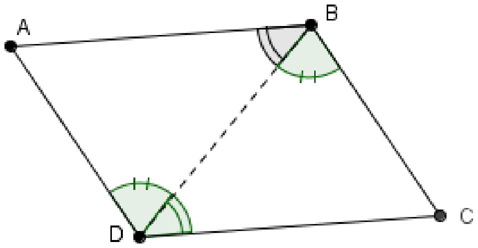
Estabelece a conjectura:

____

____

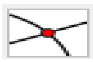
____

2. Agora vais demonstrar as conjecturas anteriores. Começamos por traçar uma das diagonais do paralelogramo, por exemplo o segmento de recta BD.



Vamos organizar a demonstração num esquema a duas colunas. Na coluna da esquerda registamos os vários passos (as afirmações) e na coluna da direita a respectiva justificação.

Passo	Justificação
$\angle ABD = \angle BDC$	
$\angle ADB = \angle DBC$	
Os triângulos ABD e DBC são congruentes	
$\overline{AB} = \overline{DC}$ e $\overline{AD} = \overline{BC}$	
$\angle BAD = \angle BCD$ e $\angle ABC = \angle CDA$	

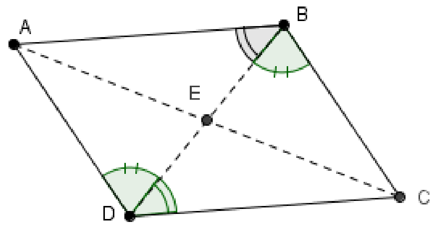
3. Traça a outra diagonal do paralelogramo. Intersecta as duas diagonais (selecciona o modo **Intersectar duas linhas** ).

3.1. Mede o comprimento de cada um dos quatro segmentos de recta em que ficaram divididas as diagonais. O que concluis?

3.2. Move um dos vértices do paralelogramo para obteres outros paralelogramos. A conclusão a que chegaste na questão anterior ainda se mantém? Em caso afirmativo, estabelece a conjectura:

4. Demonstra a conjectura anterior.

Sugestão:
- Organiza a demonstração num esquema a duas colunas.
- Começa por provar que os triângulos ABE e EDC são congruentes e de seguida conclui que $\overline{AE} = \overline{EC}$ e $\overline{DE} = \overline{EB}$.



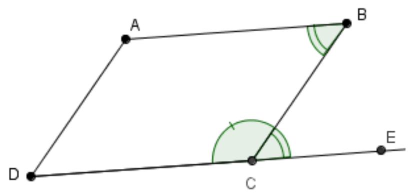
Passo	Justificação

5. Desafio:

Demonstra a propriedade que se segue:

Dois ângulos consecutivos de um paralelogramo são suplementares.

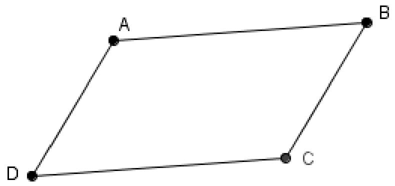
Sugestão:



Tarefa adaptada de Ponte, Oliveira e Candeias (2009).

Anexo 15 – Tarefa 12

1. Abre o programa GeoGebra e constrói um paralelogramo ABCD como o da figura ao lado.



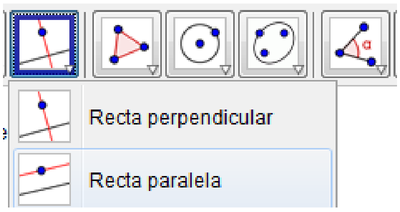
Sugestão: Efectua o procedimento que se segue para que quando necessitares de arrastar um vértice o quadrilátero continue a ser um paralelogramo.

do rato, ***Exibir objecto***).

1º - Traça os segmentos de recta AD e DC. 1 º- Traça o segmento de recta AB.

2º - Marca um ponto C não pertencente ao segmento de recta AB.

3º - Traça uma recta paralela à recta AB e que passa pelo ponto C (selecciona o modo ***Recta paralela*** e de seguida activa o ponto C e a recta AB).



4º - Traça o segmento de recta BC.

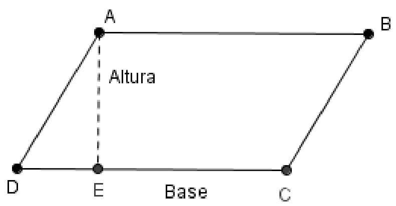
5º - Traça a recta paralela à recta BC e que passa pelo ponto A.

6º - Intersecta as duas rectas para obteres o ponto D.

7º - Esconde as rectas DC e AD (botão direito do rato, ***Exibir objecto***).

8º - Traça os segmentos de recta AD e DC.

2. Pelo ponto A, traça uma recta perpendicular ao segmento de recta DC. Intersecta este segmento de recta com a recta que acabaste de traçar e obténs o ponto E.
   Esconde a recta AE e traça o segmento de recta AE. Para seleccionares o estilo tracejado podes proceder do modo seguinte:

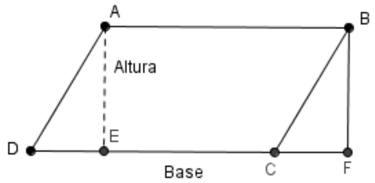


   Seleccionar o segmento de recta AE → Botão direito do rato → Propriedades → Estilo → Tracejado.

Nota:

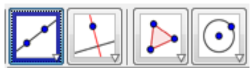
- Num paralelogramo qualquer lado pode ser considerado como **base**. A **altura** é o comprimento do segmento de recta perpendicular à base e que está compreendido entre a base e o lado oposto.

- No paralelogramo ABCD se considerarmos o lado DC como base então podemos considerar o comprimento do segmento de recta AE como altura.

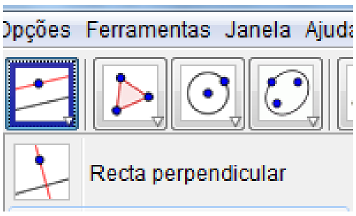


3. Constrói o triângulo BCF, rectângulo em F.

Procedimento:



- Traça uma semi-recta com origem em D e que passa pelo ponto C (selecciona o modo ***Semi-recta definida por dois pontos*** e de seguida activa os pontos D e C).



- Traça uma recta perpendicular à semi-recta DC e que passa pelo ponto B (selecciona o modo ***Recta perpendicular*** e de seguida activa a semi-recta DC e o ponto B).

- Intersecta a recta anterior com a semi-recta DC e obténs o ponto F .

- Esconde a recta BF e a semi-recta DC.

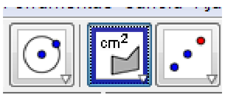
- Traça os segmentos de recta CF e BF.

4. Faz as medições que entenderes necessárias e, de seguida, classifica o quadrilátero ABFE.

5. Mede as áreas dos triângulos AED e BCF e compara-as. O que verificas?

Sugestão:

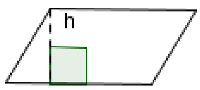
- Antes de procederes à medição da área dos triângulos deves construir primeiro os polígonos. Para construíres o polígono ADE selecciona o modo ***Polígono*** e de seguida activa os pontos A, D, E, A.



- Para medires a área do triângulo ADE deves seleccionar a opção ***Área*** e de seguida activar o polígono ADE.

6. Qual a relação entre a área do paralelogramo ABCD e a do rectângulo ABFE?

7. Completa:

Área do paralelogramo = __________, sendo b a base e h a altura 

Anexo 16 – Tarefa 13

Agora que terminámos o estudo do tópico “Triângulos e quadriláteros”, chegou o momento de reflectir acerca do trabalho realizado no estudo do tópico.

1. O GeoGebra ajudou-te na aquisição de conceitos? Se sim, quais e porquê?

2. O que é uma conjectura? Indica um exemplo.

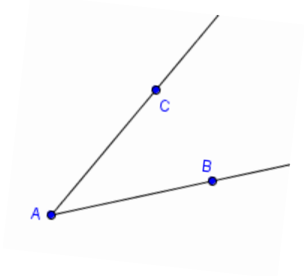
3. O que é uma demonstração?

4. Para avaliar o trabalho desenvolvido neste tópico, "Triângulos e quadriláteros", assinala com uma X a opção que melhor traduz a tua opinião:

	Discordo totalmente	Discordo	Nem concordo nem discordo	Concordo	Concordo totalmente
Foi fácil adaptar-me ao ambiente de trabalho do GeoGebra.					
Foi fácil efectuar as construções com o GeoGebra.					
As indicações contidas nas tarefas foram suficientes para o desenvolvimento do trabalho proposto.					
Foi necessário o apoio da professora em sala de aula para conseguir realizar as tarefas.					
O GeoGebra permitiu-me compreender mais facilmente as propriedades e os conceitos geométricos.					
A manipulação de objectos no GeoGebra facilitou o estabelecimento de conjecturas.					
A sequência de tarefas, com recurso ao GeoGebra, facilitou a minha aprendizagem da Geometria.					

Anexo 17 – Tarefa 1 - 2.ª versão

Ângulo é a região do plano limitada por duas semi-rectas que possuem a mesma origem. A origem das semi-rectas designa-se por **vértice do ângulo.**



Para representarmos simbolicamente o ângulo anterior usamos três letras e escrevemos **ângulo BAC** ou ângulo CAB. A letra do meio corresponde ao vértice do ângulo e cada uma das outras duas letras pertence a uma das semi-rectas.

Vamos agora recordar a classificação de ângulos:

1. Completa as frases que se seguem com uma das seguintes palavras: recto, raso, nulo, agudo e obtuso.

   1.1. Um ângulo que mede 0º de amplitude diz-se um ângulo __________________.

   1.2. Um ângulo que mede entre 0º e 90º de amplitude diz-se um ângulo __________________.

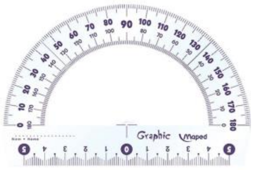
   1.3. Um ângulo que mede 90º de amplitude diz-se um ângulo __________________.

   1.4. Um ângulo que mede mais de 90º e menos de 180º de amplitude diz-se um ângulo __________________.

   1.5. Um ângulo que mede 180º de amplitude diz-se um ângulo __________________.

2. Como se denomina um ângulo que mede 360º de amplitude?

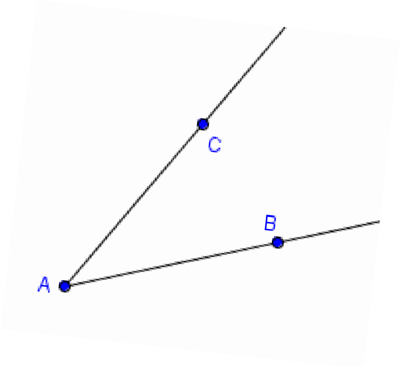
De seguida, vamos ver se ainda te recordas como deves usar um transferidor.



3. Com o auxílio de um transferidor, mede a amplitude dos ângulos seguintes e classifica-os:

Notação: $\angle$ BAC representa a medida da amplitude do ângulo BAC.

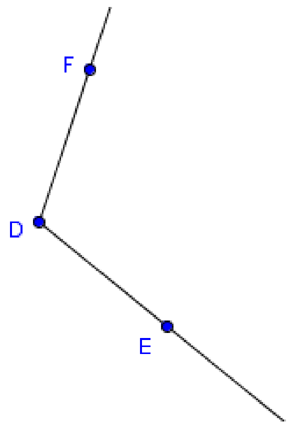
3.1.



$\angle$ BAC = __________

Ângulo ____________

3.2.



$\angle$ EDF = __________

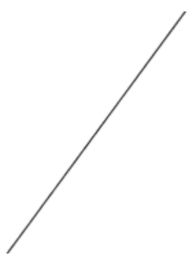
Ângulo ____________

4. Utilizando as semi-rectas já representadas, desenha um ângulo de amplitude:

4.1. 52º

4.2. 130º

4.3. 90º



- Dois ângulos dizem-se **complementares** se a soma das medidas das suas amplitudes é igual a 90º.

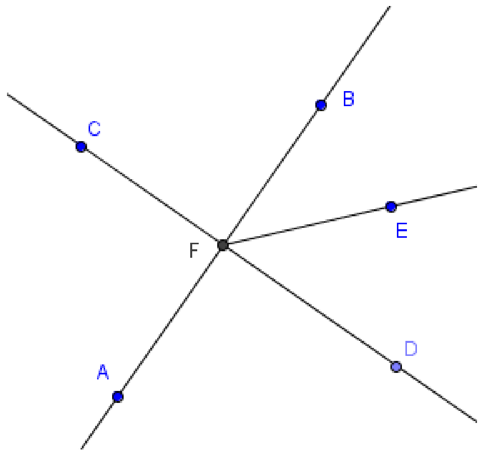
- Dois ângulos dizem-se **suplementares** se a soma das medidas das suas amplitudes é igual a 180º.

- Dois ângulos dizem-se **adjacentes** se têm o vértice comum e a sua intersecção é uma semi-recta.

- Dois ângulos dizem-se **verticalmente opostos** se têm o vértice comum e os lados de cada um estão no prolongamento dos lados do outro.

- Dois ângulos com a mesma amplitude dizem-se **congruentes**.

5. Na figura seguinte, sabe-se que AB $\perp$ CD (lê-se "a recta AB é perpendicular à recta CD"). Indica:



5.1. Dois ângulos complementares.

5.2. Dois ângulos suplementares.

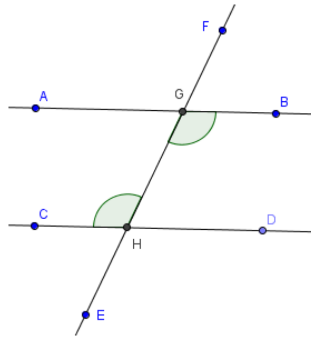
5.3. Dois ângulos adjacentes.

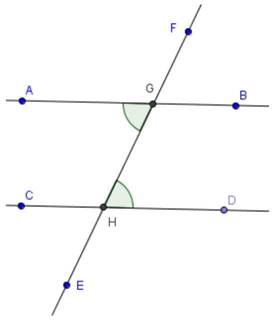
5.4. Dois ângulos verticalmente opostos.

5.5. Dois ângulos suplementares não adjacentes.

5.6. Dois ângulos congruentes.

Duas rectas paralelas intersectadas por uma terceira, recta secante, determinam vários ângulos. Observa as figuras que se seguem, em que AB // CD (lê-se: “a recta AB é paralela à recta CD):

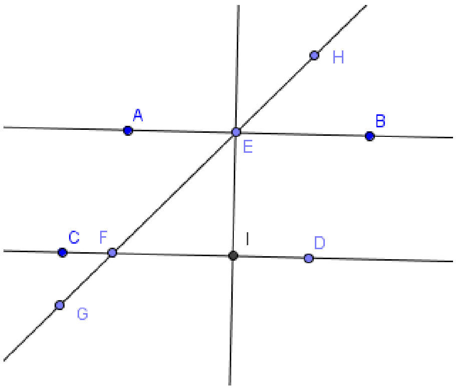




- Os ângulos BGH e GHC são **ângulos alternos internos**

- Os ângulos AGH e GHD são **ângulos alternos internos**

6. Na figura, a recta AB é paralela à recta CD (AB//CD) e a recta EI é perpendicular à recta AB (EI ⊥ AB).



6.1. Indica, utilizando as letras da figura:

6.1.1. Um ângulo recto;

6.1.2. Dois ângulos complementares;

6.1.3. Dois ângulos obtusos alternos internos;

6.1.4. Dois ângulos verticalmente opostos;

6.1.5. Um ângulo suplementar do ângulo CFG;

6.1.6. Um ângulo raso;

6.1.7. Dois ângulos agudos alternos internos;

6.1.8. Um ângulo verticalmente oposto ao ângulo AEF.

6.2. Supondo que o ângulo AEH tem de amplitude 120º, indica:

6.2.1. $\angle$GFD

6.2.2. $\angle$FEI

6.2.3. $\angle$CFG

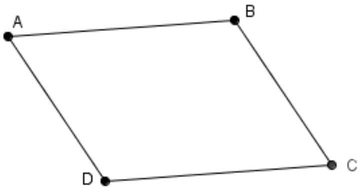
6.2.4. $\angle IFE$

Anexo 18 – Tarefa 11 - 2.ª versão

Recorda:

Paralelogramo é um quadrilátero com dois pares de lados paralelos.

1. Abre o programa GeoGebra e constrói um paralelogramo ABCD à tua escolha.

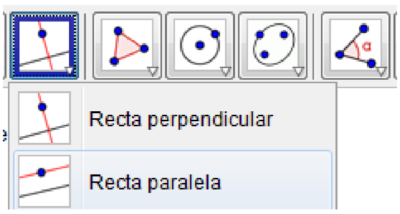


Sugestão: Efectua os procedimentos que se seguem para que quando necessitares de arrastar um vértice o quadrilátero continue a ser um paralelogramo.

1º - Traça o segmento de recta AB.

2º - Marca um ponto C não pertencente ao segmento de recta AB.

3º - Traça uma recta paralela à recta AB e que passa pelo ponto C (selecciona o modo ***Recta paralela*** e de seguida activa o ponto C e a recta AB).



4º - Traça o segmento de recta BC.

5º - Traça a recta paralela à recta BC e que passa pelo ponto A.

6º - Intersecta as duas rectas para obteres o ponto D.

7º - Esconde as duas rectas (botão direito do rato, ***Exibir objecto***).

8º - Traça os segmentos de recta AD e DC.

1.1. Mede o comprimento dos lados do paralelogramo. O que concluis?

1.2. Arrasta um ou mais vértices do paralelogramo ABCD e verifica se a conclusão que tiraste na pergunta 1.1. ainda se mantém. O que concluis?

Regista a conjectura que estabeleceste.

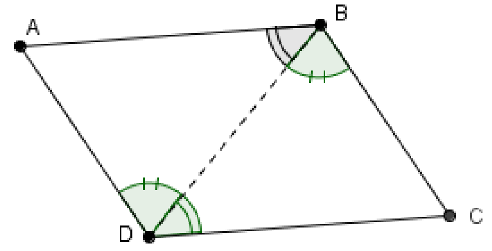
___
___
___

1.3. Mede agora as amplitudes dos seus ângulos internos. O que concluis?

Estabelece a conjectura:

___
___
___

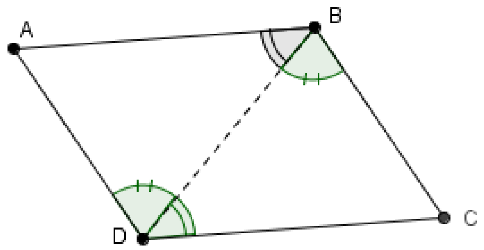
2. Agora vais demonstrar a conjectura estabelecida em 1.2.. Começamos por traçar uma das diagonais do paralelogramo, por exemplo o segmento de recta BD.



Vamos organizar a demonstração num esquema a duas colunas. Na coluna da esquerda registamos os vários passos (as afirmações) e na coluna da direita a respectiva justificação.

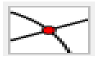
Passo	Justificação
$\angle ABD = \angle BDC$	
$\angle ADB = \angle DBC$	
Os triângulos ABD e DBC são congruentes	
$\overline{AB} = \overline{DC}$ e $\overline{AD} = \overline{BC}$	

3. Agora que já demonstraste que ***Lados opostos num paralelogramo têm o mesmo comprimento***, vais demonstrar a conjectura estabelecida em 1.3.. Podes usar a figura construída na questão 2.



Vamos organizar a demonstração num esquema a duas colunas. Na coluna da esquerda registamos os vários passos (as afirmações) e na coluna da direita a respectiva justificação.

Passo	Justificação
$\overline{AB} = \overline{DC}$ e $\overline{AD} = \overline{BC}$	
Os triângulos ABD e DBC são congruentes	
$\angle BAD = \angle DCB$	
$\angle ABC = \angle CDA$	

4. Traça a outra diagonal do paralelogramo. Intersecta as duas diagonais (selecciona o modo **Intersectar duas linhas** ).

4.1. Mede o comprimento de cada um dos quatro segmentos de recta em que ficaram divididas as diagonais. O que concluis?

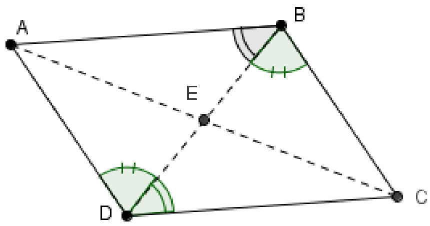
4.2. Move um dos vértices do paralelogramo para obteres outros paralelogramos. A conclusão a que chegaste na questão anterior ainda se mantém? Em caso afirmativo, estabelece a conjectura:

____

____

5. Demonstra a conjectura anterior.

Sugestão:
- Organiza a demonstração num esquema a duas colunas.
- Começa por provar que os triângulos ABE e EDC são congruentes e de seguida conclui que $\overline{AE} = \overline{EC}$ e $\overline{DE} = \overline{EB}$.



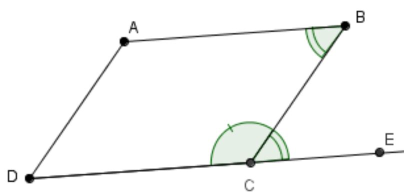
Passo	**Justificação**

6. Desafio:

Demonstra a propriedade que se segue:

Dois ângulos consecutivos de um paralelogramo são suplementares.

Sugestão: Considera a figura ao lado e organiza a demonstração num esquema a duas colunas



Passo	**Justificação**

Tarefa adaptada de Ponte, Oliveira e Candeias (2009).

Anexo 19 – DB1

Data: 09/05/11

Hora: 9h15m – 10h

Antes de distribuir o enunciado da Tarefa 1 (Anexo 4), informei os alunos de que em todo o tópico iriam realizar trabalho de pares, que deveriam elaborar as respostas em conjunto e efetuar os mesmos registos, uma vez que apenas uma das fichas do par seria recolhida, de forma indistinta. Referi também de que poderiam solicitar o meu apoio sempre que necessário, e que a discussão/correção das tarefas só seria realizada depois de recolhidas as suas produções. Por fim, alertei-os para que lessem com atenção as informações fornecidas e, se necessário, as discutissem.
De seguida, distribuí o enunciado e, apesar da ansiedade revelada, os alunos começaram a resolvê-la de imediato.

Questão 1.

Nenhum aluno solicitou o meu apoio. Neste período de tempo, observei a turma em geral e, em particular: o António registava já as respostas, enquanto a Denise ainda lia as informações. Reiterei mais uma vez a diretriz exposta – Respostas conjuntas.

Questão 2.

Observei alguns alunos a folhear o manual e, de repente, surgiu o diálogo seguinte:
Emanuel: Stora, posso consultar o manual?
Professora: Porque não? Há alguma indicação em contrário na ficha?
Emanuel: Fixe.
Carla: Este é o volume 2 e esta matéria é do volume 1!
Prestei atenção a este diálogo pelo facto de nenhum aluno me ter solicitado apoio anteriormente. Era evidente que estavam a tentar solucionar os seus problemas sem a minha ajuda. Contudo, passados alguns minutos, eis que surgiu nova pergunta:
Martine: Ó stora, isto ("…ângulo que mede $360°$ …") é o ângulo Giro, não é?
Professora: Talvez!
Com esta resposta pretendi manter os alunos a refletir mais algum tempo sobre a classificação de ângulos.
A discussão continuou entre os vários pares, sentindo-se alguma agitação no ar. Nenhum aluno evidenciou ter a certeza da resposta correta mas, excetuando a Martine, mais nenhum aluno me colocou qualquer pergunta sobre este conteúdo.
Posteriormente, o Rui e o Manuel pediram-me que verificassem os seus transferidores. Segundo eles, o mesmo ângulo, medido com um dos transferidores, tinha de amplitude 39° e, medido com o outro tinha $37°$. Usando os dois transferidores, efetuei a medição da amplitude do ângulo e perante a confirmação do facto, inédito na minha carreira docente, sugeri aos dois alunos que usassem apenas um dos transferidores para concluir a tarefa. O acontecimento, apesar da surpresa causada ao Manuel, pareceu não ter provocado outros constrangimentos, pois os dois alunos continuaram o seu trabalho e não teceram qualquer outro comentário.

Questão 3.

Somente um par, o da Martine e da Dorisa, solicitou o meu apoio, pretendendo apenas a confirmação da sua interpretação do enunciado. Depois de esclarecidas, prosseguiram o seu trabalho sem qualquer hesitação.

Questão 4.

Esta questão foi bastante reveladora da falta de experiência dos alunos relativamente ao manuseamento do transferidor, da qual só me apercebi quando surgiu, por parte do Salvador, a observação: "Oh stora, não posso fazer o risco por cima do transferidor!".

Depois de ensinar o Salvador e a colega, a Francisca, a usar o transferidor, constatei que mais pares estavam em dificuldades. Todos acabaram por decidir sozinhos o que fazer, exceto o Timóteo e o Marco. Segundo o Marco, o ângulo que acabara de traçar tinha duas amplitudes distintas, $130°$ e $50°$, dependendo do modo como colocava o transferidor. Na verdade, o problema resultava da utilização indistinta das duas escalas para a leitura da medida da amplitude do ângulo.

Por esta altura, existia na sala um ambiente exageradamente calmo. Contudo, todos estavam a trabalhar, e a efetuar registos.

Questão 5.

O António colocou-me a seguinte pergunta: "Ó stora, se o ponteiro ficar nas 4h, o ângulo fica reto?". Em resposta, disse-lhe que pensasse se o ponteiro fica mesmo na direção do 4 quando marca as 4 horas e 35 minutos.

Nos minutos que se seguiram, não me foram colocadas mais questões, os alunos ultimaram os seus trabalhos que comecei a recolher.

Nos últimos dez minutos, depois de recolhida uma das resoluções de cada par, efetuou-se a correção/discussão da tarefa, mas não surgiram situações dignas de registo. A Maria e o Emanuel apresentaram o seu trabalho, apesar de vários pares se terem voluntariado, não tendo surgido questões significativas. Apenas na questão 5., apresentaram uma classificação incorreta num dos ângulos por si traçado, que corrigiram de imediato perante o "coro de protestos " dos colegas.

Anexo 20 – DB2

Data: 11/05/11

Hora: 8h30m – 9h30m

Depois de largos minutos, até que os computadores estivessem ligados e os alunos sentados, distribuí o enunciado da Tarefa 2 (Anexo 5) e procedi ao esclarecimento do conceito de retas perpendiculares.
Professora: O que são retas perpendiculares?
Valter: São retas que se cruzam e formam ângulos de $90°$, retos.
De seguida, os alunos começaram a desenvolver o seu trabalho.
Questão 1.
Observei que alguns alunos estavam a usar o transferidor (cerca de metade dos pares) mas, naquele momento, optei por não efetuar qualquer comentário a esse respeito.
Quase em simultâneo, o Salvador e o Samuel perguntaram-me o que eram ângulos adjacentes, porque não estavam a perceber a definição. A minha resposta limitou-se ao seguinte:
Professora: Ângulos adjacentes são os que têm em comum o vértice e uma semirreta (em voz alta).
Toda a turma prestou atenção ao esclarecimento e todos começaram a resolver a questão, exceto os pares que integravam o Samuel e o Salvador. Para estes pares voltei a ler a definição e, rapidamente, conseguiram identificar na figura ângulos adjacentes.
De seguida surgiu mais uma pergunta:
Patrícia: Ó stora, é assim que se representa o ângulo CFB $(\angle CFB)$?
Professora: Essa notação traduz a medida da amplitude do ângulo CFB, pelo que o mais correto é escrever ângulo CFB.
Aproveitando esta intervenção, dirigi-me ao quadro e procedi ao mesmo esclarecimento para toda a turma.
Depois, voltei a circular pela sala e observei o Valter muito entusiasmado a explicar, corretamente, as suas opções ao seu par, o Luís. Eis que surgiu nova questão:
Carla: Oh stora, não há ângulos obtusos!
Professora: Repara bem. O que é um ângulo obtuso?
A Carla e o seu par olharam-me pensativamente e voltaram a debruçar-se sobre a tarefa sem responderem à minha pergunta. Não voltaram a interpelar-me sobre este assunto.
Questão 2.
Apercebi-me de que os alunos já estavam a tentar resolver a questão 2. quando surgiu a pergunta seguinte:
Vários alunos (praticamente em simultâneo): Ó stora, o que quer dizer distintos?
Professora: São pontos que não coincidem.
O trabalho continuou e uma nova dificuldade apareceu à Martine.
Martine: Ó stora, há 4 pares de ângulos verticalmente opostos?
Professora: Como?

Martine: Veja (indicou a intersecção de uma das retas, por si traçada, com os eixos cartesianos).

Tentei visualizar todos os monitores, uma vez que me encontrava ao fundo da sala e verifiquei que havia pelo menos mais três pares com os eixos cartesianos visíveis na janela gráfica. Sugeri que os ocultassem indicando-lhes os procedimentos a efetuar.

Posteriormente, o Emanuel interpelou-me, dizendo:

Emanuel: Ó stora, como é que se mede?

Professora: Segue as instruções.

Emanuel: Já fiz e não aparece nada.

De seguida, mostrou-me o procedimento que efetuaram. Como verifiquei que se estavam a esquecer de ativar o modo ângulo, alertei-os para o facto e de imediato o par prossegui o seu trabalho.

Nesta altura, a Catarina chamou-me porque de cada vez que mediam a amplitude de um ângulo α obtinham valores que correspondiam à medida da amplitude do ângulo $360° - \alpha$. Então, fiz saber a toda a turma de que, se isso lhes acontecesse, deveriam efetuar novamente o procedimento, mas teriam que ativar os pontos pela ordem inversa.

A resolução da questão prosseguiu sem mais ajudas.

Questão 3.

Na pergunta 3.1. alguns alunos chamaram-me para que lhes validasse a sua resposta. Verifiquei que 3 pares apenas tinham escrito “As amplitudes dos ângulos também mudam”. No entanto, tinham a pergunta 3.3. totalmente correta, pelo que efetuei a observação que se segue:

Professora: Observem com atenção. É só isso que verificam?

Os pares voltaram a debruçar-se sobre o monitor e, céleres, a Marisa e a Patrícia completaram a sua resposta.

Eram 9 horas e 10 minutos quando os informei de que iria proceder à recolha dos trabalhos, gerou-se de imediato um grande alvoroço na sala e ouviram-se muitos comentários:

Denise: Ó stora, ainda não! Ainda não conseguimos acabar!

Manuel: Ó stora, ainda vamos na 3.1..

Salvador: Ó stora, mais um bocadinho.

Estes comentários deixaram-me dois caminhos: recolher de imediato as produções dos alunos e tentar cumprir a planificação prevista, correndo o risco de que se desmotivassem, ou deixá-los terminar a tarefa, uma vez que se mostravam empenhados em concluí-la com sucesso. De facto, ponderando fatores, como as caraterísticas de alguns destes alunos, nomeadamente a Denise, o Salvador, o Manuel, a Martine, a Catarina e a Magda, optei por dar mais algum tempo. Se a opção tivesse sido outra, o mesmo tempo teria sido certamente gasto a tentar refutar os seus argumentos, e a tarefa continuaria a não ser concluída.

Às 9 horas e 20 minutos terminaram a tarefa, procedi à recolha das produções dos alunos (uma por cada par) e iniciou-se a sua correção, não tendo havido grande discussão. A Marisa e a Patrícia foram escolhidas por mim para procederem à apresentação do seu trabalho. A única questão significativa ocorreu quando a Carla perguntou se os ângulos CFD e AFB eram suplementares não adjacentes, tendo a Marisa e a Patrícia ficado um pouco atrapalhadas. O Salvador tentou de imediato esclarecer a situação mas como é muito impulsivo deixou a Carla e o André desnorteados, apesar de lhes ter dado uma explicação correta. Procedi, então, ao esclarecimento destes conceitos, correndo o risco de estar a eliminar uma discussão que poderia vir a mostrar-se muito rica. No entanto, como habitualmente a Carla e o André revelavam dificuldades de aprendizagem em grande grupo, optei por ser eu a esclarecer-lhes a dúvida.

Anexo 21 – DB31

Data: 11/05/11

Hora: 9h30m – 10h

Por volta das 9h e 30m, distribuí o enunciado da Tarefa 3 (Anexo 6) e os alunos começaram a responder às primeiras questões, sem revelarem dificuldades.

Questão 1.

Na pergunta 1.1., apenas registei a existência de algumas dificuldades para identificarem ângulos obtusos alternos internos. Os alunos começaram por visualizar apenas os ângulos FEI e IEB, mas demoraram muito tempo até conseguirem visualizar o ângulo BEF e darem resposta à pergunta 1.1.3..

Na pergunta 1.2. tive a percepção de que a indicação $\angle AEH = 120°$ lhes causou uma enorme confusão. Assim, projetei a figura no quadro, assinalei a medida da amplitude do ângulo AEH e disse-lhes: “Com este valor ($\angle AEH = 120°$) e os conhecimentos que possuem sobre ângulos, determinem os valores pedidos”.

Não registei mais pedidos de apoio para esta pergunta.

Questão 2.

Todos os pares construíram a figura, aparentemente sem problemas. Quando respondi à solicitação do Emanuel, iniciou-se o diálogo seguinte:

Emanuel: Ó stora, eu faço isto (3.º procedimento da sugestão) e não aparece nada!

Professora: Mas já está feito. Por que estás a fazê-lo de novo?

Emanuel: Então! Não tenho que fazer isto (os procedimentos indicados na sugestão)?

Professora: É apenas uma sugestão que deveriam seguir para construir a figura. Como já está construída não devem efetuar esses procedimentos novamente.

Subitamente, enquanto circulava pela sala, comecei a ter dúvidas sobre a minha interpretação da situação anterior, porquanto os alunos poderiam ter construído a figura de forma intuitiva. Preparava-me para verificar se mais pares tinham agido da mesma forma, por estar preocupada com os pontos de interseção da reta oblíqua com as retas paralelas, quando um assessor da Direção Executiva, me pediu licença para interromper a aula. Informou-me de que pelas 10 horas teria início na sala ao lado a prova de Aferição de Matemática do 6.º ano, e que a essa mesma hora eu deveria disponibilizar a sala para a realização de um teste intermédio. Assim, faltando 8 minutos para terminar a aula, decidi recolher todos os enunciados da tarefa e arrumar calmamente o material, disponibilizando a sala à hora marcada e com o menor ruído possível.

Anexo 22 – DB32

Data: 16/05/11

Hora: 8h30m – 9h30m

A partir do momento em que todo o material ficou preparado e os alunos sentados, distribuí novamente a Tarefa 3 (Anexo 6) para a sua conclusão.
Ao iniciarem o trabalho, os grupos aperceberam-se de que não estavam a trabalhar com o computador da aula anterior. Verificámos que havia alguns computadores novos na sala e que a numeração de outros não correspondia à das pastas. Perante esta situação, com um significativo desperdício de tempo, acabei por sugerir que construíssem novamente a figura, pois se tivessem que ir uma vez mais à Biblioteca, para procurar os computadores em falta, perder-se-ia ainda mais tempo. À partida, nem sequer existia a certeza de conseguir fazer este trabalho no tempo destinado à aula, pois os computadores em falta poderiam estar a ser utilizados neste mesmo tempo letivo, por outros alunos, noutras salas de aula.
Alguns minutos passados, a Catarina e a Magda procuraram o meu apoio, visivelmente atrapalhadas: Não conseguiam responder à pergunta 2.1. porque a ordem dos pontos não correspondia à da figura dada. Sugeri-lhes que renomeassem os pontos de acordo com a figura dada e indiquei-lhes os procedimentos a seguir.
De seguida, circulei pela sala para verificar se existiam mais pares a construir a figura da mesma forma que o Emanuel e a Maria a tinham construído na aula anterior. Encontrei 3 pares nessa situação, a Carla e o André, a Martine e a Dorisa e novamente o Emanuel e a Maria. Como verifiquei que a minha intervenção da aula anterior não tinha surtido efeito, já que o Emanuel e a Maria estavam a construir a figura da mesma forma, resolvi dizer-lhes: "Apaguem a figura e iniciem a sua construção seguindo todos os passos indicados na sugestão.". Finalmente, as dúvidas foram dissipadas.
As dificuldades para justificar a pergunta 2.1. foram muitas. Alguns pares não avançaram e estiveram parados muito tempo. Outros continuaram, deixando o espaço reservado a essa resposta totalmente em branco.
O Salvador e o Manuel (alunos de grupos diferentes, mas a trabalhar em carteiras muito próximas) foram os primeiros a dar o 1.º passo. O Manuel tinha escrito " Sim, porque o lado EG está na mesma reta do lado FH.". Perguntei-lhe "E os outros dois lados?", mas foi o Salvador que respondeu "Também são paralelos".
Toda a turma ouviu o comentário do Salvador e a pouco e pouco todos começaram a tentar responder à pergunta. Praticamente todos os pares me chamaram para que lhes validasse as respostas. A maior parte da minha intervenção resumiu-se a "Porquê?", seguido de "Assinalem os ângulos na figura (da folha do enunciado).".
Na pergunta 2.5. os alunos apenas revelaram alguma hesitação ao completarem o último espaço em branco. Depois de longos minutos, em que me observaram à procura de qualquer indicação que os auxiliasse, acabei por lhes sugerir o uso da calculadora dizendo, em jeito de pergunta: "E se usassem a calculadora?". Não lhes disse mais nada, mas de repente os alunos começaram a folhear as tarefas anteriores, certamente à procura do termo suplementares.

Passados alguns minutos ouviu-se na sala:
Manuel: Rui, para! Não fazes nada! (num tom irritado, quase desesperado).
Professora: Manuel, o que se passa?
Manuel: Ó stora, se não for no computador ele não faz nada e hoje nem no computador!
Face a este desabafo do Manuel tive que, mais uma vez, alertar o Rui para a imperiosa mudança de atitude.
Cerca das 9 horas e 20 minutos comecei a recolher as produções dos alunos e quando cheguei junto do último par, o da Denise e do António, perdi algum tempo pois não ma quiseram entregar de imediato, por não estar concluída. A Denise alegou que tinha estado a trabalhar sozinha, porque o António não tinha feito nada. Chamei o António à atenção, mas também me pareceu que a Denise não estava muito ativa nesta aula, exceto para reclamar.
Dado o adiantado da hora, o atraso já bastante significativo, e também porque a tarefa seguinte era de natureza exploratória, independente dos conhecimentos já adquiridos no tópico, decidi deixar a correção/discussão desta tarefa para a aula de Estudo Acompanhado do dia 20 de maio.

Anexo 23 – DB33

Data: 20/05/11

Hora: 9h15m – 9h30m

A aula de Estudo Acompanhado iniciou-se com a discussão da Tarefa 3 (Anexo 6). A Gabriela e o Martim foram os alunos por mim indicados para apresentarem o seu trabalho. A questão 1. não gerou polémica, mas apercebi-me de que alguns pares corrigiram algumas das respostas dadas. Nas diferentes perguntas, alguns pares ainda me perguntaram se os ângulos por si indicados estavam corretos.
A questão 2. já suscitou alguma discussão. A justificação apresentada pela Gabriela, "são paralelos porque têm a mesma distância entre eles e têm a mesma amplitude ", foi alvo de críticas. O Valter foi o primeiro a interrompê-la apresentando logo os seus argumentos, mas não foi totalmente convincente. A partir daqui vários pares quiseram apresentar as suas respostas. Em todas elas, a turma colocou objeções, exceto na apresentada pelo António "Sim, os ângulos AHF e EGD são ângulos de lados paralelos, pois a semirreta AH é paralela à GD e os pontos E e F estão na mesma reta".
Nas restantes perguntas apenas a 2.4. gerou polémica quando a Gabriela apresentou a medida da amplitude dos ângulos. O André, assim como muitos outros alunos, disse: "A nós não nos deu isso". Como eu já previa que esta situação viesse a ocorrer perguntei: "Por que será que isso aconteceu?". Ficaram algo pensativos e o Samuel disse: "É por causa da inclinação da reta EF". Todos pareceram estar de acordo pelo que o Martim apresentou as suas conclusões relativamente à pergunta 2.5., dando-se por terminada a discussão da tarefa.

Anexo 24 – DB41

Data: 16/05/11

Hora: 9h30m – 10h

Depois de ter sido distribuído o enunciado da Tarefa 4 (Anexo 7), os alunos continuaram entusiasmados os seus trabalhos, quando, de súbito se ouviu o Salvador.
Salvador: Ó stora, enganou-se. Para que são os 5 pontos?
Luís: São para fechar.
Professora: É isso mesmo Luís. O último ponto que aparece é o 1.º que foi activado.
Entretanto a Catarina chamou-me e a Magda perguntou-me:
Magda: Ó stora, estas letras (a, b, c e d) é que são os rótulos?
Respondi-lhes afirmativamente e continuaram o seu trabalho.
Pergunta 1.2.
Vários pares seguiram a sugestão dada na tarefa para determinar o perímetro do quadrilátero. No entanto, antes de usarem o modo ***Distância, comprimento ou perímetro***, começaram por medir o comprimento dos lados do polígono.
Estavam a resolver a pergunta 1.3. e eis que o Martim, visivelmente entusiasmado, me coloca a questão seguinte:
Martim: Ó stora, podemos arrastar qualquer um? De certeza?
Professora: Sim, mas não te esqueças de que tem de ficar sempre um quadrilátero.
O Martim continuou com afinco, mas como eu estava distante, desconheço as experiências por si realizadas que o conduziram, logo de seguida, a tecer o comentário seguinte:
Martim: Ah, pois é!
Questão 2.
Nesta questão comprovei a existência de algumas dificuldades na pergunta 2.2.. Para muitos alunos, o "Repete o processo…" não foi interpretado como sendo para continuar a efetuar rotações com a mesma amplitude.
O Salvador iniciou mais um diálogo enquanto tentava resolver a pergunta 2.4.:
Salvador: Ó stora, isto é um quadrado. Tenho mesmo que verificar?
Professora: Sim. Quais são as propriedades do quadrado?
Salvador: Os 4 lados todos iguais.
Professora: O losango também tem os 4 lados todos iguais!
Salvador: Ah, pois é! Os ângulos têm que ser retos.
Às 10 horas terminou a aula, recolhi todos os enunciados para os voltar a distribuir na aula seguinte. A maioria dos grupos encontrava-se a resolver a questão 2., porém, dois ou três pares já estavam a iniciar a resolução da questão 3.

Anexo 25 – DB42

Data: 18/05/11

Hora: 8h30m – 10h

No início da aula distribuí novamente o enunciado da Tarefa 4 (Anexo 7). Os alunos rapidamente continuaram a sua resolução, todavia passados alguns minutos adverti o Timóteo e o Marco, pois em vez de darem continuidade ao trabalho, estavam a tentar navegar na Internet.
O Emanuel e a Maria pediram apoio para a pergunta 2.2. e a Maria disse: "Isto não faz nada.". Quando lhes perguntei como tinham procedido, mostraram-me o procedimento para uma rotação de amplitude igual a $360°$. Alertei-os para a necessidade de uma leitura atenta do enunciado, mas de nada serviu. Estavam completamente bloqueados, pelo que tive de lhes indicar todos os passos a seguir até efetuarem a primeira rotação. Finalmente, sozinhos, concluiram a construção.

Questão 3.

Nesta questão, surgiram inúmeros pedidos de apoio a propósito da utilização do software. Não consegui perceber se os alunos não tinham lido a informação dada, ou se não conseguiam interpretar o enunciado. Pareceram-me um pouco mais agitados que o habitual e ansiosos por concluir a tarefa.
O Salvador e a Francisca, assim como a Patrícia e a Marisa, estavam angustiados quando me solicitaram apoio, porque não conseguiam inferir nada. Ao analisar as figuras que os alunos construíram, verifiquei que as retas CD e BD não eram paralelas a AB e AC, respetivamente. Fui ver o que se passava com os outros pares e deparei-me com a mesma situação em mais de 50% dos casos.
De imediato, chamei a atenção a toda a turma para o facto de no enunciado ser feita a referência ao paralelismo das retas. Perguntei-lhes se tinham tido em consideração essas indicações quando construíram a figura e, na sala, ouviu-se um sonoro "Não!".
Novamente, os alunos tentaram construir a figura, mas não se lembraram do procedimento para traçar uma reta paralela a uma reta dada. Como não quis dizer-lhes de imediato o procedimento a seguir, esperei algum tempo para ver a sua reação. Alguns pares continuaram perplexos, pelo que acabei por lhes dizer que já tinham efetuado aquele tipo de construção numa das tarefas anteriores. Rapidamente, começaram a folhear as tarefas e a maioria dos pares conseguiu dar continuidade ao trabalho sem mais apoio. Aos pares Emanuel e Maria, Catarina e Magda, Martine e Dorisa e Marisa e Patrícia tive de prestar um auxílio muito direcionado, do género "ativa o modo X e de seguida ativa a reta XY e o ponto Z", para conseguirem traçar a primeira paralela.
Nota: Embora a tarefa seja bastante importante no contexto do tema em estudo, Geometria, revelou-se bastante morosa devido às inúmeras dificuldades sentidas pelos alunos no manuseamento do software. A dada altura apercebi-me de que os alunos estavam esgotados e receei que todo o seu entusiasmo pudesse esvanecer-se.

Questão 4.

Muitos dos grupos conseguiram construir um triângulo retângulo sem necessitarem do meu apoio. Contudo, quando movimentaram um dos seus vértices, apenas os triângulos construídos por 3 dos pares se mantiveram retângulos. Certamente, uma vez mais, a maioria dos alunos não leu a orientação dada. Depois de ter alertado toda a turma de que poderiam não ter realizado a construção da forma mais correta e para tentarem de novo, não se esquecendo de utilizar a sugestão dada, o par Dorisa e Martine, continuou a não seguir a minha indicação. Estas duas alunas eram muito empenhadas, mas a Martine tinha uma enorme dificuldade em deixar-se orientar. Tudo tinha que ser feito como ela pensava, facto este que fez com que o par perdesse, por vezes, muito tempo nas construções e depois tirasse as conclusões apressadamente, sem refletir o suficiente sobre os assuntos tratados. Por fim, o par acabou por solicitar o meu apoio, gerando-se o diálogo que se segue:

Professora: O que é um triângulo retângulo?

Dorisa: Tem um ângulo reto.

Martine: Ah, pois! Se eu traçar duas retas perpendiculares …

A Martine resolveu traçar o ângulo reto com o auxílio de duas retas perpendiculares. Eu poderia ter insistido para que usasse o modo ***Ângulo com amplitude fixa*** mas, dadas as caraterísticas da Martine, decidi não interferir. Tinha plena consciência de que a Martine só aceitaria a minha sugestão quando não conseguisse de todo resolver a situação. Quando, passados alguns minutos, me perguntou como se traçavam duas retas perpendiculares, limitei-me a dar-lhe essa informação.

Circulando pela sala verifiquei que a Denise consultava o manual para ver a classificação dos triângulos quanto aos lados. Quando a aluna se apercebeu da minha proximidade disse: “É para ver o que é um triângulo isósceles.”. E continuou o seu trabalho.

O Emanuel chamou-me e perguntou:

Emanuel: Como é que se vê que o triângulo é isósceles?

Professora: O que é um triângulo isósceles?

Emanuel: Tem 2 lados iguais. Ah, então é medir!

Terminado o diálogo, o Emanuel continuou a trocar impressões com o par, a Maria.

Depois de efetuada a construção pedida na pergunta 4.1., quando tentavam responder à pergunta, foram vários os alunos a dizer que não eram capazes de mover os pontos de modo a obterem um triângulo retângulo que não fosse isósceles. Como alguns pares deram por terminada a questão, alertei-os para o facto de que se tal acontecesse deveriam continuar o trabalho sugerido na pergunta. Passados alguns minutos ainda continuavam confusos pelo que acabei por lhes dizer que deveriam tentar construir um triângulo retângulo que não fosse isósceles, e que deveriam indicar todos os procedimentos efetuados.

Logo de seguida, a Martine chamou-me e pelo diálogo gerado constatei que finalmente se apercebera, de que estava a trabalhar de um modo diferente do dos seus colegas.

Martine: Ó stora, o nosso triângulo não é isósceles. Então e agora, já temos tudo mal? O deles é isósceles e o nosso não.

Professora: Não se preocupem porque já têm um triângulo retângulo que não é isósceles. Continuem a resolver a tarefa.

Martine: Ó stora, mas o que é que nós fizemos de mal?

Professora: Nada, apenas construíram o triângulo de um modo diferente do dos vossos colegas.

Martine: Como?

Professora: Partiram de retas perpendiculares para obter o ângulo reto, em vez de usarem o modo ***Ângulo com amplitude fixa***.

Martine: Quer que a gente faça de novo?

Professora: Não, não têm tempo e por outro lado é importante que apresentem o vosso trabalho à turma.

Martine: Será (virada para a colega)?

Nota: Nesta fase final da tarefa, vi os alunos com dificuldades na utilização do software e na interpretação de enunciados. Mostraram-se empenhados em realizar as construções mas depois, no momento da escrita das últimas respostas, alguns estiveram bastante mais inativos. Tentei compreender a origem dessa letargia e, não tendo, no momento, outros indicadores, acabei por concluir que, provavelmente, a situação resultou da existência de dificuldades na comunicação matemática.

Cerca das 9 horas e 52 minutos, quando tudo indicava que a tarefa tinha sido concluída, recolhi as produções dos alunos e até ao final da aula trocaram-se algumas impressões sobre a mesma. Por fim, analisou-se o porquê dos resultados obtidos pela Martine e pela Dorisa.

Anexo 26 – DB5

Data: 23/05/11

Hora: 8h30m – 10h

Decorridos os minutos iniciais necessários à preparação do material, procedi à distribuição do enunciado da Tarefa 5 (Anexo 8). Aparentemente, tudo decorria sem percalços até que me apercebi de que a conclusão obtida pelos alunos na pergunta 1.1., não envolvia a soma das medidas das amplitudes dos ângulos, pelo que solicitei a atenção de toda a turma.
Professora: Tomem atenção! Só devem tirar conclusões depois de efetuarem todos os procedimentos indicados.
Magda: Mas nós fizemos!
Professora: De certeza?
Magda: Sim, stora, fizemos.
Professora: Então digam-me o que fizeram em relação a "adiciona as medidas obtidas".
Vários alunos: Nada.
Professora: Porquê?
Por momentos a turma ficou em silêncio.
Professora: Qual o significado da palavra adiciona?
Martine: Adicionar…
Professora: Mas, o que significa?
O silêncio instalou-se de novo.
Denise: Somar? Juntar?
Professora: Sim.
Os alunos refletiram durante algum tempo sobre as palavras da Denise, debruçando-se de seguida sobre o enunciado.
De repente, novo diálogo.
Samuel: Ó stora, dá 181°, mas não tem que dar 180°?
Timóteo: A nós deu $179{,}99^\circ$.
Denise: Tens razão Samuel, já não me lembrava que dá sempre 180°.
Emanuel: Então o *GeoGebra* está a medir mal?
Denise: Só pode ser.
Professora: Não, as medições que efetuaram estão corretas. Por que será que isto está a acontecer?
Vários alunos: Não sabemos.
Professora: Pensem um bocadinho.
Passado algum tempo, uma vez que não obtive qualquer resposta e os alunos estavam inativos, acabei por lhes dizer: "Usem o menu opções, selecionem um arredondamento diferente e vejam o que acontece". Inicialmente, não pretendia dar qualquer sugestão nesta pergunta 1.1., mas como verifiquei que já era conhecimento adquirido que a soma dos ângulos internos do triângulo é igual a 180°, e também porque os alunos estavam a colocar a hipótese de que os resultados obtidos usando o *GeoGebra* estavam incorretos, acabei por lhes dar esta sugestão.

Os alunos continuaram a resolução da questão e concluíram-na sem mais informações adicionais.

Questão 2.

Comecei por relembrar a simbologia necessária, não obstante, verifiquei que os alunos responderam à pergunta 2.4., sem que antes tivessem respondido às perguntas 2.1., 2.2. e 2.3.. Questionei-me então se esta tarefa, da forma como estava construída, permitiria atingir, na totalidade, os objetivos definidos. É verdade que depois do diálogo em que os alertei para o facto de que as conclusões tiradas a partir de casos particulares necessitam de ser justificadas, porque podem não ser válidas na generalidade das situações, os alunos tentaram responder às restantes questões. Todavia, nesta segunda questão desapareceu o entusiasmo sempre presente nas atividades desenvolvidas com a turma ao longo do ano letivo. Na tentativa de dar mais algum dinamismo à aula, resolvi intervir.

Professora: Assinalem na figuram os ângulos indicados e tentem aplicar os conhecimentos adquiridos nas aulas anteriores.

Começaram, com pouca vontade, a aplicar a sugestão, mas não foram visíveis resultados significativos.

Professora: Leiam o enunciado com cuidado porque nele têm informação importante para a resolução das questões.

Martine: Stora, essa informação é que a reta DE é paralela ao lado AC, não é?

Professora: Sim, Martine, essa informação é muito importante.

Circulando pela sala apercebi-me da existência de respostas variadas para a pergunta 2.1., nomeadamente "São ângulos de lados paralelos", "Têm a mesma amplitude", "São ângulos alternos internos" e "São ângulos congruentes". Praticamente, interpelei todos os pares: "Porquê?". Na pergunta 2.3. voltaram a surgir muitas hesitações, pelo que lhes sugeri novamente que assinalassem na figuram os ângulos indicados, e tentassem aplicar os conhecimentos adquiridos nas aulas anteriores.

Passado algum tempo, o Manuel solicitou o meu apoio e iniciou o diálogo que se segue:

Manuel: Ó stora, isto (indicava na figura o ângulo raso) dá $180°$, mas não sei como escrever.

Professora: Por que é que dá $180°$?

Manuel: Ó stora, porque isto é um ângulo raso!

Professora: Então escreve o que acabaste de dizer.

Diálogos idênticos ao anterior surgiram com a maioria dos grupos.

Chegados novamente à pergunta 2.4. observei muitas respostas similares à seguinte: "É $180°$ porque a soma dos ângulos num triângulo é $180°$". Então o meu comentário para a turma foi: "A vossa resposta baseia-se em conhecimento adquirido nos anos anteriores em vez de estar de acordo com o trabalho realizado nesta questão".

Começaram novamente a tentar encontrar uma justificação para a pergunta 2.4.. Depois, a Gabriela chamou-me e o Martim disse:

Martim: Ó stora, este ($\angle ABD$) é igual a este ($\angle BAC$) e este ($\angle CBE$) é igual a este ($\angle ACB$). Está a ver? Os 3 juntos (ângulos DBA, ABC e CBE) fazem $180°$.

Professora: Está bem. Agora escrevam.

Gabriela: Mas como? Não sabemos escrever isto.

Professora: Escrevam exatamente o que acabaram de me dizer. Usem a notação que já conhecem para vos facilitar a escrita.

Vários foram os pares que me chamaram posteriormente, ou para lhes validar as respostas, ou para verificar se as estavam a registar corretamente.

Na pergunta 2.5. demoraram bastante tempo e solicitaram muitas vezes a minha presença para que lhes validasse as respostas.

Questão 3.

Nesta questão a turma revelou muita atrapalhação. As respostas que observei não eram de forma nenhuma as esperadas, mas como já faltava pouco tempo para o términus da aula, não insisti mais com os alunos, esperando que a discussão final pudesse trazer mais brilho a esta tarefa.

De seguida, às 9 horas e 50 minutos, recolhi as produções dos alunos e deu-se início à correção/discussão da tarefa. Para minha grande surpresa, nenhum dos pares se voluntariou para apresentar o seu trabalho. A correção foi efetuada comigo, a solicitar a alguns pares a leitura das suas respostas, não tendo surgido momentos de discussão significativos nas questões 1. e 2.. Na questão 3., contrariamente às minhas expetativas, também não suscitou discussão a resposta dada pela Marisa, que passo a transcrever:

Marisa: Não, porque a soma das amplitudes dos ângulos de um triângulo dá sempre $180°$.

Como nenhum aluno reagiu a esta afirmação, resolvi intervir.

Professora: Todos estão de acordo com a resposta dada pelas vossas colegas?

Magda: Nós não.

Professora: Porquê?

Magda: Isto é difícil de explicar. Posso ler a nossa resposta?

Professora: Sim, podes.

Magda: Não concordamos com a primeira afirmação, porque a soma dos ângulos internos num triângulo é sempre igual a $180°$, não a $179°$. A segunda afirmação está certa porque quando é com o transferidor o método para medir não é rigoroso, podendo conduzir a erro.

Como não houve reação por parte dos colegas, continuei a intervir.

Professora: Temos duas opiniões diferentes. O que vos parece?

A resposta a esta última pergunta foi o silêncio. Assim, tive que efetuar a síntese deste trabalho porque faltava cerca de um minuto para o terminus da aula.

Nesta tarefa desvaneceu-se o entusiasmo que habitualmente caraterizava a turma.

Anexo 27 – DB6

Data: 27/05/11

Hora: 8h30m – 10h

Distribuído o enunciado da Tarefa 6 (Anexo 9), os alunos deram calmamente início ao seu trabalho, não tendo sido necessário prestar-lhes qualquer tipo de apoio nesta fase inicial. Passado algum tempo, alertei alguns pares, nomeadamente o da Catarina e da Magda, da Maria e do Emanuel e da Carla e do André, para que lessem com atenção o enunciado da pergunta 1.2., porque verifiquei que não tinham procedido à adição das medidas das amplitudes dos ângulos.

Na pergunta 1.3. não registei a existência de dificuldades e na pergunta 1.4. apenas tive de dizer "Usem os termos do enunciado", quando revelaram dificuldades em mencionar os ângulos pretendidos no enunciado da conjetura.

Na pergunta 1.5. apareceram inúmeras dificuldades. Uns não conseguiam fazer nada, outros traçavam e mediam os restantes ângulos externos. Depois, começaram os desabafos:

Denise: Ó stora, não consigo!

Simão. Ó stora, não conseguimos!

Martine: Ó stora, o que é para fazer? Como é que isto se faz?

Professora: Têm que mobilizar os conhecimentos das aulas anteriores.

Martine: Quais?

Professora: Não vos vou dizer quais são, mas podemos fazer uma síntese do que já aprenderam.

Martine: Bora lá stora!

Professora: O que se lembram de ter aprendido neste tópico?

André: A soma dos ângulos internos do triângulo dá $180°$.

Carla: Ângulos congruentes.

Catarina: Ângulos suplementares.

Professora: O que são ângulos suplementares?

Manuel: São ângulos que somados dão $180°$.

Gabriela: Ângulos complementares.

Professora: O que são ângulos complementares?

Gabriela: São ângulos cuja soma é $90°$.

Catarina: Ângulos de lados paralelos.

Magda: Ângulos alternos internos.

Salvador: Ângulos verticalmente opostos.

Martine: Temos que usar tudo isso?

Professora: Não! Devem usar apenas o que se aplica à situação que vos é apresentada. Sugiro que utilizem a figura da página 1, em vez da que construíram no computador, pois assim podem usar o lápis para assinalar os ângulos.

Começaram então a tentar resolver a pergunta, mas uns tiveram em conta somente o facto de que a soma dos ângulos internos do triângulo é $180°$, outros apenas que $\angle ABD = 180°$. Passado algum tempo sugeri-lhes que representassem o ângulo unicamente pela letra do vértice, para simplificar a

escrita. Alguns segundos depois, o Samuel alertou-me para o facto de que era necessário usar a letra B para dois ângulos distintos. Para não mudarem "tudo", acordou-se que todos iriam representar o ângulo ABC pela letra B e o ângulo CBD pela letra D.
De seguida, o Simão e o Samuel solicitaram o meu apoio e iniciaram o diálogo que se segue:
Simão: Stora, só conseguimos fazer isto $\left(\begin{cases} A+B+C=180^\circ \\ B+D=180^\circ \end{cases} \right)$.
Professora: Analisem com cuidado essas duas igualdades. O que concluem?
Samuel: Como o B está aqui ($A+B+C=180^\circ$) e aqui ($B+D=180^\circ$) então $A+C$ tem que ser igual a D.
Professora: Muito bem, estão de parabéns. Agora escrevam o que acabaram de dizer.
De seguida, fui chamada por outros pares que também já tinham chegado a $\begin{cases} A+B+C=180^\circ \\ B+D=180^\circ \end{cases}$. A todos dei a sugestão que havia dado anteriormente ao Simão e ao Samuel.
Circulando pela sala apercebi-me de que o Simão, o Samuel, o Martim e a Gabriela trocavam impressões e inquiri:
Professora: Então, o que se passa?
Samuel: Não conseguimos escrever.
Professora: Ora leiam o que escreveram aqui $\left(\begin{cases} A+B+C=180^\circ \\ B+D=180^\circ \end{cases} ;\quad A+C=D \right)$.
O Samuel leu em voz alta o que tinha escrito no enunciado e, de seguida, voltei a dizer-lhe que escrevesse o que tinha acabado de dizer, mas o Martim interveio.
Martim: Assim (tudo por extenso)?
Professora: Porque não?
Entretanto, a Martine e a Dorisa também já tinham chegado à conclusão correta e também não a conseguiam escrever, pelo que lhes dei a mesma sugestão.
Voltando a circular pela sala observei que a Catarina e a Magda já tinham chegado a $\begin{cases} A+B+C=180^\circ \\ B+D=180^\circ \end{cases}$, mas ainda não tinham tirado a conclusão; o Manuel tentava responder à questão sozinho porque o Rui estava, mais uma vez, na fase do não quero saber; o Timóteo e o Marco estavam muito mais atrasados (certamente este foi um dos dias em que não lhes apeteceu trabalhar); o Luís e o Valter estavam muito apagados e quando o Luís tentou ver o trabalho da Denise ela não o autorizou; o Salvador e a Francisca estavam virados para trás a trocar impressões acerca do trabalho com a Marisa e com a Patrícia.
Gradualmente, os diferentes grupos foram passando à questão seguinte, sem terem surgido mais pedidos de apoio.

Questão 2.

De repente, a Denise perguntou:
Denise: Ó stora, isto é quase 360°, mas há aqui umas centésimas a mais.
Professora: Vê o que podes concluir. Antes disso, se quiseres, arrasta um dos vértices do triângulo e observa o que acontece.
Martine: Ó stora, isto umas vezes dá 360° e noutras não. Porquê?
Professora: Há muita diferença?

Martine: Não. É sempre quase $360°$.
Professora: Por que será que isso acontece?
Martine: Não sei!
Denise: Não olhe para mim, porque também não sei!
Aguardei um pouco para ver se alguém me dava uma resposta, mas tal não aconteceu. Acabei então por recordar aos alunos que na aula anterior tinham discutido este mesmo assunto.
Martim: Então já sei. É $360°$.
Professora: Porquê?
Martim: Por causa dos arredondamentos que o computador faz quando mede.
Passando junto da secretária da Denise e do António vi que a resposta dada à pergunta 2.1. tinha sido simplesmente "É $360°$". Perguntei-lhes o que tinham concluído e o António respondeu-me que "A soma dos ângulos externos do triângulo é $360°$". Sugeri-lhes então que completassem a resposta dada.

Questão 3.

A resolução desta questão começou quando a Denise exclamou:
Denise: Ó stora, são tantos ângulos (em voz alta)!!
Professora: Prestem atenção porque quero dar-vos uma sugestão. Comecem por assinalar na figura todos os ângulos indicados na pergunta 3.1.
Depois desta sugestão, as perguntas 3.1. e 3.2. foram resolvidas, aparentemente, sem grandes dificuldades. Na pergunta 3.3. ficaram novamente bloqueados.
Marisa: Ó stora, mas já sabemos que é sempre $360°$ (em voz alta).
Professora: De onde vem essa certeza? Da questão 2. ou das perguntas 3.1. e 3.2.?
Patrícia: Destas aqui (3.1. e 3.2.). Já cá está tudo.
Não foram efetuados mais pedidos de apoio até ao final da tarefa. Depois, às 9 horas e 45 minutos, recolhi as produções dos alunos e iniciámos a discussão do trabalho.
O par da Martine e da Dorisa foi um dos que se disponibilizou para esta tarefa. A Dorisa apresentou as questões menos polémicas e a Martine, com a segurança que a carateriza, apresentou as restantes. Foi uma apresentação bastante pacífica, apenas necessitei de intervir na pergunta 1.5. para esquematizar o raciocínio apresentado pela aluna.
No final da aula a Denise, que se atrasou um pouco a arrumar o material, disse "Ó stora, isto é difícil, mas com a stora a fazer-nos pensar, até conseguimos!".

Anexo 28 – DB71

Data: 31/05/11

Hora: 8h30m – 10h

Decorridos os minutos iniciais necessários à preparação do material, procedi à distribuição do enunciado da Tarefa 7 (Anexo 10).

Questão 1.

Não se registaram grandes dificuldades na pergunta 1.1.. No entanto, o tempo de resolução foi muito superior ao previsto, apesar de somente três pares, a Carla e o André, o Emanuel e a Maria e o Timóteo e o Marco, terem necessitado da minha ajuda para realizar o 3.º procedimento. Estes não conseguiram efetuar as adaptações necessárias ao 1.º procedimento para obter o que lhes era solicitado no 3.º. Foi necessário fornecer-lhes, uma a uma, todas as instruções para conseguirem terminar a construção do triângulo.

Para as restantes perguntas da questão 1. não foram solicitados mais apoios. No entanto, enquanto circulava pela sala, observei que os pares Emanuel e Maria e Carla e André tinham respondido à pergunta 1.2. sem efetuarem a medição das amplitudes dos ângulos. Decidi intervir em simultâneo para ambos os pares, uma vez que estavam a trabalhar em mesas próximas:

Professora: Quando é que dois triângulos são congruentes?

Carla: Quando os três lados e os três ângulos são congruentes.

Professora: Estão a afirmar que os triângulos são congruentes, mas não verificaram todas as condições. Quais é que faltam?

Emanuel: Os ângulos.

Professora: Sim, falta verificar a medida da amplitude dos ângulos.

Depois desta intervenção os dois pares continuaram o seu trabalho.

Questão 2.

A utilização do software para construir o triângulo pedido na pergunta 2.1. revelou-se de elevado grau de dificuldade para os alunos. O tempo de resolução da pergunta excedeu largamente o previsto, porque somente um par, o do Valter e do Luís, não necessitou do meu apoio. Questionei-me várias vezes se estes alunos estariam a desenvolver o trabalho pedido e por isso, de vez em quando, desloquei-me até à sua mesa. Em todas as situações me surpreenderam pela positiva.

As questões colocadas por alguns dos outros pares revelaram que, possivelmente, apenas tinham utilizado o GeoGebra nas aulas e que não tiveram o cuidado de rever em casa o trabalho já realizado. Por outro lado, houve outros pares bastante mais autónomos que apenas solicitaram apoio para questões pontuais. Para as restantes perguntas, 2.2. e 2.3. não necessitaram de qualquer tipo de esclarecimento.

Quando a aula terminou os alunos apenas tinham resolvido as duas primeiras questões. Assim, como a tarefa não estava terminada, recolhi todos os enunciados para os voltar a distribuir na aula seguinte.

Anexo 29 – DB72

Data: 01/06/11

Hora: 8h30m – 10h

Decorridos os minutos iniciais necessários à preparação do material, distribuí novamente a Tarefa 7 (Anexo 10) para conclusão.
Como já tinham resolvido as questões 1. e 2. na aula anterior, os alunos começaram a resolver a 3.ª questão.
Questões 3. e 4.
Verificou-se uma situação muito idêntica à da questão 2. Novamente o tempo de resolução para as perguntas 3.1. e 4.1. excedeu largamente o previsto e o único par que não necessitou de apoio foi o do Valter e do Luís. Todos os outros pares revelaram dificuldades para construir os triângulos solicitados. Entre as muitas indicações e sugestões que forneci, necessitei de chamar à atenção de que para construírem um segmento de reta com o mesmo comprimento de outro segmento de reta, deveriam usar o modo ***Compasso***. Tal como aconteceu nas perguntas 2.2. e 2.3., também não necessitaram de esclarecimentos adicionais para as restantes perguntas das questões 3. e 4.
Questão 5.
Assim que terminaram a leitura da questão, vários pares começaram a solicitar a minha atenção. Mostraram-se completamente atarantados, sem saberem o que fazer, certamente porque nesta tarefa, ao contrário do que aconteceu nas anteriores, foram solicitadas as conjeturas apenas no final da tarefa. Por isso esclareci:
Professora: Têm que analisar todo o trabalho realizado na tarefa e as conclusões que tiraram, para poderem estabelecer as conjeturas.
Samuel: É mais do que uma?
Professora: Analisem o trabalho realizado. Logo veem o que podem concluir.
Toda a turma se debruçou novamente sobre as questões anteriores. Passado algum tempo, o Valter, que se encontrava com um braço ao peito, pediu autorização para se abeirar de mim:
Valter: Ó professora, se conseguir ler a minha letra, veja lá se é isto.
De facto, as conjeturas estabelecidas estavam totalmente corretas. No texto não faltava nada daquilo que era fundamental, mas também não havia nada de redundante.
Professora: É isto mesmo. Estão de parabéns. É pena que esteja difícil de ler.
Valter: Eu não consigo escrever melhor por causa do meu braço, mas o Luís pode tentar fazer uma letra melhor. Quer?
Professora: Sim, se não se importarem.
Logo fui chamada pelos outros pares para verificar os seus trabalhos, encontrei situações muito diversas, desde respostas completamente corretas, respostas apenas com definições e respostas com um misto de definições e conjeturas. Neste último tipo de resposta, encontrei a síntese de todo o trabalho, pelo que depreendi que os alunos, ou ainda não tinham plena noção do que era uma conjetura, ou não interpretaram bem as minhas palavras quando lhes sugeri que analisassem todo o trabalho realizado.

Uma nota curiosa, em relação a esta última questão, diz respeito ao espaço reservado para a resposta. Ouvi comentários como “Tanto espaço e eu escrevi tão pouco. Será que fizemos isto bem?”
Cerca das 9 horas e 40 minutos recolhi as produções dos alunos, dado que a tarefa já tinha sido concluída.
A Catarina e a Magda apresentaram o seu trabalho à turma sem problemas até à 5.ª questão. Nesse momento, quando a Catarina começou a apresentar a definição de triângulos congruentes o Samuel interrompeu-a.
Samuel: Isso não é nenhuma conjetura.
Valter: Pois não.
Catarina: Porquê?
Samuel: A gente já sabia isso.
A Catarina continuou a apresentar o resto da resposta do seu grupo e foi de novo interrompida quando disse “Dois triângulos com os ângulos com a mesma amplitude são sempre congruentes”.
Denise: Ó professora, ainda há bocado (referindo-se à pergunta 2.3.) ela disse que não, não foi?
Catarina: Pois foi. Aqui enganámo-nos.
Quando este par terminou a sua apresentação, o Valter continuou o diálogo, antes que eu tivesse tido a oportunidade de intervir:
Valter : Só isso?
Samuel: Pois é stora. Elas só disseram uma e ainda faltam duas. Disseram uma repetida.
Magda: Não disse nada.
Samuel: Disseste sim. A última é a mesma que a primeira.
Denise: Ó stora, já não estou a perceber. Afinal quantas são?
Professora: Vamos deixar o Valter ou o Samuel explicarem.
O Samuel começou a apresentar as suas conjeturas e, à medida que as apresentava, ia indicando em qual das questões da tarefa se tinha baseado.
Manuel: Ó stora, isto está bem?
Professora: Sim Manuel, está correto.
Martine: Ó stora, isto parece-me um bocadinho difícil. Não vamos fazer exercícios?
Professora: Sim, na próxima tarefa.
Mesmo no termo da aula, informei-os de que as conjeturas estabelecidas eram conhecidas como os critérios de congruência de triângulos, habitualmente designados por LLL, LAL e ALA.

Anexo 30 – DB81

Data: 03/06/11

Hora: 9h15m – 10h

Um tempo da Área de Estudo Acompanhado era dedicado à Matemática para reforço dos conteúdos lecionados, de acordo com o definido no Plano da Matemática II. Ainda ponderei propor-lhes nesta aula a resolução de exercícios do manual, mas como a Tarefa 8 (Anexo 11) era de aplicação dos conhecimentos adquiridos e os alunos não necessitavam de utilizar o computador, optei por dar início à sua resolução.

Depois de proceder à distribuição dos enunciados, aguardei algum tempo até começar a circular pela sala, para observar o trabalho dos alunos, pois esta era uma aula dedicada à aplicação de conhecimentos. Comecei a verificar as suas respostas à medida que terminavam a questão 1.. Na maioria dos pares observei que apenas tinham respondido à pergunta 1.1. com "São congruentes porque têm os lados e os ângulos todos iguais". Iniciei então diálogo, com os diferentes pares, muito idêntico ao que estabeleci com o Manuel:

Professora: Como sabem que isto (São congruentes porque têm os lados e os ângulos todos iguais) se verifica?

Manuel: Vê-se.

Professora: Como?

Manuel: Parece mesmo que são iguais.

Professora: O facto de parecer que são iguais não significa que o sejam. Temos que ter garantias.

Manuel: Vou medir.

O Manuel pegou de imediato no material de desenho.

Professora: Não foi pedido material de desenho para esta tarefa e na pergunta também não diz para o usarem. Têm apenas que usar os dados que vos dão no enunciado e os conhecimentos adquiridos até este momento.

O Manuel começou a assinalar na figura que $AE \equiv DE$, $BE \equiv EC$ e $AB \equiv CD$. Como observei quase todos os pares a efetuarem o mesmo procedimento, dirigi-me ao quadro e perguntei:

Professora: O que é que vos garante esta igualdade ($AB \equiv CD$)?

Martim: Ó stora, vê-se.

Professora: Não pode ser justificado dessa forma. Têm de usar os dados do enunciado e as relações que conseguirem encontrar na figura.

O Manuel e os colegas mais próximos, que estiveram algum tempo a pensar e a trocar impressões, chamaram-me e o Manuel continuou:

Manuel: Stora, este ângulo (ângulo BEA) é igual a este (ângulo CED).

Professora: Porquê?

Manuel: Porque são ângulos verticalmente opostos.

Professora. É verdade. Então como utilizam esse facto?

Manuel: Posso usar este critério (LAL) para concluir isto (a congruência dos dois triângulos).

Professora: Muito bem. Agora escrevam tudo o que acabas de dizer.

Diálogo idêntico ao anterior decorreu com a maioria dos outros pares.

Na pergunta 1.2. vários pares mostraram-se incrédulos quando, perante a sua resposta “Sim porque os triângulos ABE e DCE são congruentes”, lhes respondi “Correto”. Um exemplo do que acaba de ser descrito pode concluir-se do diálogo:

Martine: Isto está mesmo certo?

Professora: Sim.

Denise: Só isto? E eu aqui a cansar-me.

Terminou a aula, recolhi todos os enunciados da tarefa para os distribuir novamente na aula curricular seguinte.

Anexo 31 – DB82

Data: 06/06/11

Hora: 8h30m – 10h

A aula teve início com a distribuição dos enunciados da Tarefa 8 (Anexo 11) aos alunos, para a sua conclusão. Como todos os pares já tinham resolvido a questão 1., na aula de Estudo Acompanhado, passaram de imediato à segunda questão.

Questão 2.

Passados alguns minutos comecei a circular pela sala para observar o trabalho produzido e questionei alguns pares:

Professora: Como é que garantem esta igualdade ($FE \equiv DE$)?

Aluno: Vê-se que é.

Professora: Leiam atentamente o enunciado e tentem justificar a existência dessa igualdade.

Em cada um dos grupos, Martine e Dorisa, Samuel e Simão, Emanuel e Maria, Marco e Timóteo, Salvador e Francisca e, ainda, Patrícia e Marisa, um dos seus elementos leu todo o enunciado da questão na minha presença. Durante a leitura, os alunos foram explicando e anotando as conclusões que iam tirando. Todos ficaram sem saber o que dizer perante a frase "Colocou uma estaca no ponto médio, E, de AC". Só conseguiram concluir que $CE \equiv EA$ depois de diálogos semelhantes ao que se segue:

Professora: O que é o ponto médio de AC?

Alunos: Divide o segmento ao meio.

Nem todos os pares deram a resposta anterior. Outros, como o do Marco e do Timóteo e o do Emanuel e da Maria, responderam "Divide o segmento em duas partes". Perante esta resposta, desenhei no meu caderno de notas um segmento de reta AB e nele marquei um ponto C a dividir o segmento de reta em duas partes diferentes. De seguida, mostrei-lhes o meu esboço e fazendo-os refletir, perguntei:

Professora: O ponto C divide o segmento de reta AB em duas partes. C é o ponto médio de AB?

Emanuel: Não.

Professora: Porquê?

Emanuel: Porque não está no meio.

Esclarecido este assunto, os dois pares continuaram o seu trabalho.

Outro par que começou a revelar algumas dificuldades foi o da Carla e do André. Só conseguiram continuar o trabalho depois de os ter auxiliado a interpretar, ponto por ponto, o enunciado.

O grupo da Catarina e da Magda estabeleceu que $\angle EFA \equiv EDC$ porque eram ângulos alternos internos agudos e manifestaram a intenção de usar o critério ALA, da congruência de triângulos. Quando lhes perguntei como garantiam a congruência dos segmentos de reta EF e ED não conseguiram apresentar uma resposta válida. Solicitei-lhes então a realização de um trabalho idêntico ao efetuado por outros grupos, leitura atenta do enunciado com a indicação das conclusões que tiravam com essa leitura. Quando leram a frase "Colocou uma estaca no ponto médio, E, de AC"

também não revelaram ter dado importância à informação nela contida. Então, perguntei-lhes o significado daquela informação, tendo as alunas respondido rapidamente à mesma, sem manifestarem qualquer dificuldade.

A dada altura comecei a sentir alguma angústia, pois os alunos estavam a demorar muito mais tempo que o previsto para a realização da tarefa. Só na pergunta 2.1. demoraram cerca de trinta minutos. No entanto, mantinha-se um fator que, do meu ponto de vista, era bastante positivo, não desistiam e continuavam bastante empenhados.

Na pergunta 2.2. a situação melhorou substancialmente. Apenas o Emanuel e a Maria solicitaram a minha intervenção, tendo-se gerado o diálogo seguinte:

Emanuel: Não estamos a perceber esta pergunta.

Professora: Analisem as conclusões que tiraram na alínea anterior.

Maria: Ah pois, os triângulos são congruentes.

Professora: O que é que isso significa?

Emanuel: Têm os lados todos iguais e os ângulos todos iguais.

Professora: Então, já conseguem tirar alguma conclusão?

Emanuel: Acho que sim.

Voltando a girar pela sala apercebi-me, uma vez mais, de que o Timóteo e o Marco não estavam a desenvolver o esforço necessário à realização da tarefa, com sucesso. Só "mostravam algum empenho" quando me aproximava. Raramente solicitavam o meu apoio e o tempo que disponibilizavam para a realização do trabalho era muito reduzido. Quando me abeirava do par e lhes fazia qualquer pergunta, respondiam corretamente e começavam a trocar impressões, mas logo que me afastava abandonavam o trabalho. Como estava a ser muito solicitada, e este par era muito discreto, tornou-se muito difícil controlá-los. As advertências dadas, de cada vez que os encontrei a navegar na Internet, não surtiram grande efeito. Um dos alunos esteve sempre a controlar a minha posição na sala.

De seguida, um outro par deixou-me bastante surpresa. Havia cerca de 20 minutos que o Simão e o Samuel me tinham apresentado, oralmente, uma resposta totalmente correta para a pergunta 2.1. e, nesta ocasião, quando passei junto do par, ainda não a tinham apresentado por escrito. Quando lhes perguntei porque não escreveram a resposta, responderam:

Samuel: Não conseguimos!

Professora: Porquê? Onde está a vossa dificuldade?

Simão: Não sei. Também não sou capaz.

Professora: Ora digam-me de novo a vossa resposta.

O Samuel explicou-me novamente, e a resposta continuava a estar absolutamente correta.

Professora: Está muito bem. Agora só têm de escrever exatamente isso.

Samuel: Mas como?

Professora: Será que te estás a referir a novos símbolos?

Samuel: Sim, não sei como se escreve isto matematicamente.

Professora: Assim já estou mais descansada. Basta usarem as palavras que utilizaste para exprimires oralmente a tua resposta, mas também podem substituir algumas dessas palavras pelos símbolos matemáticos correspondentes.

Samuel: E não fica errado?

Professora: Não, Samuel! Nas justificações matemáticas não temos que usar unicamente a linguagem simbólica. Também podemos usar a linguagem corrente, ou um misto das duas.

Questão 3.

Nesta questão não foram solicitados quaisquer esclarecimentos.

Questão 4.

Aqui surgiram alguns pedidos de auxílio: o Salvador chamou-me e referiu:

Salvador: Stora, estes dois lados (apontando para os lados opostos aos ângulos assinalados) são iguais, mas não há mais nada a dizer que sejam iguais.

Professora: De certeza?

Salvador: Ah, a circunferência! Estes dois lados (apontando para os raios da circunferência) são iguais.

Professora: Por que é que esses dois lados são iguais?

Salvador: Porque são raios da circunferência.

Outro diálogo idêntico ocorreu com o par Marisa e Patrícia, em que a Marisa disse que os lados dos triângulos eram iguais por causa da bolinha.

Questão 5.

Os alunos pareceram estar muito seguros de que os triângulos eram congruentes. Não solicitaram o meu apoio e, no momento, resolvi não os questionar sobre a apresentação de argumentos suficientes para garantir a congruência de triângulos, porque ainda havia tempo suficiente para discutir e corrigir a tarefa na aula.

Às 9 horas e 45 minutos foram recolhidas as produções dos alunos e deu-se então início à discussão da tarefa. Desta vez, foi o par constituído pelo Salvador e pela Francisca que apresentou o seu trabalho.

A Francisca, muito tímida, acompanhou o Salvador, mas este não lhe deu grandes hipótesesde intervenção. Adverti-o várias vezes sobre esse facto mas, como estava tão entusiasmado, poucos segundos depois já tinha monopolizado novamente a palavra. A apresentação decorreu normalmente, com os colegas a corrigirem o Salvador quando ele se enganava (por exemplo: ao referir-se ao ângulo AEB começou pelo vértice) ou quando, devido à sua agitação, não apresentava justificações completas.

Na questão 5. o panorama alterou-se, porque não se tratou apenas de gralhas. A resposta apresentada pelo Salvador, para justificar a resposta dada à pergunta “Nas condições da figura, pode concluir-se que os triângulos ABC e DEC são congruentes?”, não satisfez a globalidade da turma.

Salvador: Não, só se sabe dois ângulos ($\angle BAC = \angle CDE$ e $\angle BCA = ECD$) e os lados AC e CE têm o mesmo comprimento, mas não é necessário.

Denise: Isso não é verdade, os triângulos são congruentes.

Salvador: Não são, não!

Martine: Ó stora, os triângulos são congruentes, não são?

Professora: Já temos duas opiniões diferentes. Vamos analisá-las. Mais alguém quer comentar?

Manuel: Ó stora, eu também acho que não, porque só se sabe dois ângulos e os lados que têm o mesmo comprimento não são os necessários.

Professora: Ó Manuel, o que queres dizer com “os lados não são os necessários”?

Manuel: Quero dizer que não dão para aplicar o critério ALA.

Professora: Porquê?

Manuel: Devia ser o AC igual ao CD.

Professora: Por que é que esses dois lados é que deviam ser congruentes?

Patrícia: Ó stora, eu acho que sei.

Professora: Então diz.
Patrícia: Porque só dá para aplicar o ALA se for com o lado comum aos dois ângulos iguais.
Professora: Muito bem Patrícia. E agora o que concluímos? Os triângulos não são congruentes, ou não temos dados suficientes para tirar essa conclusão?
Denise: Está bem stora, já percebi. Não temos dados suficientes para dizer que os triângulos são congruentes.
Logo de seguida, observei muitos dos pares a alterarem os seus registos, mesmo depois do toque de saída, o que revelou que nesta questão o desempenho dos alunos poderá não ter sido o melhor.

Anexo 32 – DB9

Data: 08/06/11

Hora: 8h30m – 9h15m

A aula teve início com a distribuição do enunciado da Tarefa 9 (Anexo 12) aos alunos, que aparentavam uma maior serenidade, relativamente às aulas anteriores.

Questão 1.

Circulando pela sala, apercebi-me de que 2 pares tinham construído um quadrado. Como os dois pares estavam muito próximos, questionei ambos:

Professora: O quadrilátero que vos foi pedido tem que ser um quadrado?

Emanuel: Não.

Professora: Então, construam um outro quadrilátero que não seja um quadrado.

Salvador: Como? Fiz assim (usou a ferramenta que permite construir um polígono regular com 4 pontos) e apareceu um quadrado.

Professora: Olhem bem para a ferramenta que usaram. Se derem a instrução para a construção de um polígono regular com 4 lados aparece-vos sempre um quadrado.

Salvador: Vou tentar de outra forma.

Estes pares continuaram o seu trabalho e eu voltei a circular pela sala. A dada altura o Rui disse "Stora, há aqui um erro" mostrando-me o visor da calculadora onde se podia ler 360.01. Antes de eu ter tido tempo de reagir o Manuel disse "Não há erro nenhum, deve ser dos arredondamentos". Os dois continuaram o seu trabalho como se eu não estivesse por perto, pelo que acabei por não intervir.

De seguida, observei a Catarina e a Magda a consultarem as tarefas anteriores. Todo o seu material estava muito bem organizado, porém desconheço o tipo de informação que procuravam porque, como as alunas não solicitaram a minha intervenção, optei por não me intrometer.

Questão 2.

Na fase inicial da resolução da questão, fiquei preocupada com a reação dos alunos. Liam, voltavam a ler e sorriam uns para os outros, encolhendo, por vezes, os ombros. De repente a Denise, aluna sempre muita participativa, perguntou:

Denise: Ó stora, não estou a ver como é que hei-de fazer isto!

Valter: Nós também não.

Samuel: E nós também não.

Professora: Assinalem na figura todos os ângulos indicados na coluna da esquerda, sempre que estiverem a justificar um dos passos.

Circulando pela sala, apercebi-me de que a minha sugestão tinha sido bem aceite. Todos estavam a assinalar os ângulos na figura e a começar a completar a coluna da direita. A turma voltou a surpreender-me nesta aula, mas pela positiva, pois o único pedido de apoio que recebi posteriormente foi por parte da Dorisa, que esteve a resolver a tarefa sozinha em virtude da Martine ter faltado à aula.

Foi com alguma rapidez que completaram a tarefa, todavia apercebi-me de que tinham terminado o trabalho sem justificarem a ultima conclusão. Escreveram apenas que a soma dos ângulos internos de qualquer quadrilátero é $360°$. Perante esta situação, optei por intervir, em voz alta, do seguinte modo:

Professora: Vejo que todos concluíram que a soma dos ângulos internos de qualquer quadrilátero é $360°$, mas ninguém refere como é que chegou a essa conclusão.
Denise: Oh! Por causa dos triângulos.
Professora: Escreveste isso na justificação?
Denise: Mas isso é tão fácil. É mesmo preciso pôr isso?
Professora: Sim. Têm de apresentar os argumentos que vos permitiram tirar essa conclusão.
Denise: Pronto, está bem.
De imediato, todos se debruçaram sobre as tarefas e completaram as suas respostas.
Às 9 horas e 5 minutos comecei a recolher as produções dos alunos e iniciou-se a correção/discussão da tarefa.
A Denise e o António apresentaram o seu trabalho sem terem sido interrompidos. Pareceu não haver quaisquer dúvidas e apenas alguns alunos procederam à alteração dos seus registos, no enunciado que ficou na sua posse.

Anexo 33 – DB10

Data: 08/06/11

Hora: 9h15m – 10h

Distribuído o enunciado da Tarefa 10 (Anexo 13), os alunos começaram de imediato a construir os quadriláteros sem solicitarem qualquer apoio. Necessitei apenas de auxiliar o Timóteo na construção do paralelogramo porque estava a trabalhar sozinho, dado que o seu colega Marco acabara de sair para ir ao médico.

A primeira dificuldade surgiu, para a globalidade dos pares, quando terminaram a construção dos quadriláteros. A Carla foi a primeira a dar essa indicação quando perguntou:

Carla: Ó stora, o que é para fazer agora?

Emanuel: Pois é stora, também não estou a perceber.

Luís: Nós também não, stora.

Professora: Já leram o enunciado?

Vários alunos em simultâneo: Sim.

Professora: Vamos lê-lo de novo.

Li o enunciado em voz alta e fui explicando o que era pedido. De repente fui interrompida pela Gabriela:

Gabriela: Stora, o que é que são diagonais?

Professora: Alguém sabe?

Não houve qualquer resposta, excepto uns sorrisos e uns acenos de cabeça a indicar que não.

Professora: Essa informação já vos foi dada ao longo deste tópico.

Logo, todos os pares começaram a folhear as tarefas anteriores e passados alguns minutos começou a ouvir-se na sala "Já sei". Os alunos continuaram o seu trabalho sem solicitarem qualquer auxílio, mas apercebi-me de que alguns pares estavam a medir o comprimento dos lados e a amplitude dos ângulos internos dos quadriláteros. Para evitar perda de tempo, optei por chamar à atenção de que as conclusões pedidas diziam respeito apenas às diagonais dos quadriláteros e não aos seus lados, ou aos seus ângulos internos.

Não registei mais pedidos de apoio. Houve apenas alguns alunos a reclamar devido à falta de espaço para escreverem.

Às 9 horas e 50 minutos já tinha recolhido as produções dos alunos e desta vez foram vários os pares a apresentar o seu trabalho. A Carla e o André, a Gabriela e o Martim, o Emanuel e a Maria, o Samuel e o Simão, o Manuel e o Rui e, por fim, a Catarina e a Magda, apresentaram as suas conclusões, acerca do papagaio, do trapézio, do paralelogramo, do retângulo, do losango e do quadrado, respetivamente. Esta apresentação decorreu sem registo de controvérsias, o que deixou antever que tinham resolvido a tarefa com sucesso.

Anexo 34 – DB111

Data: 13/06/11

Hora: 8h30m – 10h

Depois de distribuídos os enunciados da Tarefa 11 (Anexo 14), deu-se início à sua resolução mas com significativos contratempos. Havia 4 alunos indispostos, com dores de cabeça e dores de barriga, e todos se mostraram bastante preocupados e inquietos relativamente ao teste de CNT que iriam realizar às 12 horas.

Construíram o paralelogramo, sem solicitarem apoio, e começaram a responder às perguntas da primeira questão. A dada altura, dei-me conta de que na pergunta 1.3. havia vários pares a não conseguirem estabelecer a conjetura. Este facto foi inédito nesta sequência de tarefas pois, até ao momento, as dificuldades evidenciadas nunca estiveram relacionadas com o estabelecimento de conjeturas. De seguida, a Denise chamou-me e no diálogo explicou o motivo desta dificuldade:

Denise: Ó stora, aqui (pergunta 1.3.) nós não conseguimos concluir nada.

Professora: O vosso quadrilátero é um paralelogramo?

Denise: Era. Agora já não porque arrastámos os vértices.

Professora: Cuidado, o quadrilátero deveria manter-se paralelogramo mesmo depois de terem arrastado os vértices. Seguiram as sugestões dadas?

Denise: Não e agora não conseguimos pô-lo de novo paralelogramo.

Professora: Parece-me que devem construir novamente o paralelogramo seguindo as indicações dadas no enunciado.

A seguir, dois outros pares, o Samuel e o Simão e a Gabriela e o Martim chamaram-me pelo mesmo motivo. Optei então por chamar à atenção da turma, para que verificassem se os paralelogramos construídos ainda se mantinham paralelogramos depois de terem arrastado os seus vértices. No entanto, pela reação dos alunos, a situação descrita não se verificou com nenhum outro par.

Questão 2.

Começaram a surgir problemas de imediato. Observei que os alunos estavam a utilizar a conjetura estabelecida na pergunta 1.3. para justificar os primeiros passos da demonstração. Alertei-os para o facto de que as conjeturas estabelecidas na questão 1. ainda não tinham sido demonstradas, pelo que não as poderiam utilizar. Salientei ainda que as mesmas seriam demonstradas nesta questão e que depois as poderiam utilizar noutras questões.

Os alunos mostraram muitas dificuldades para justificar os dois primeiros passos. A dada altura, passados largos minutos, e por recear que os alunos pudessem abandonar a tarefa, resolvi questioná-los:

Professora: Como se classificam esses dois ângulos (ângulos ABD e BDC)?

Em resposta, surgiram muitas designações incorretas, a predominante foi a de que eram ângulos verticalmente opostos. Depois de esclarecer por que é que cada uma das designações apresentada estava incorreta, deambulei pela sala dando espaço aos alunos para continuarem a pensar. Alguns minutos passados, a Denise chamou-me e disse: “Ó stora, são ângulos alternos internos, por isso é que são iguais”, e continuou a explicar ao António a sua conclusão.

Nenhum outro par revelou ter conseguido classificar os pares de ângulos, pelo que lhes sugeri a consulta das tarefas anteriores. Passados alguns minutos, observei vários alunos com a Tarefa 3 na mão a tentarem explicar as suas descobertas aos seus pares. Já passava das 9 horas e 15 minutos quando conseguiram começar a justificar os primeiros passos da demonstração.

Chegados à justificação do 3.º passo, as dificuldades voltaram a surgir porque tentaram justificá-lo através da conjetura estabelecida em 1.2.. Mais uma vez tive de intervir em cada grupo, alertando-os para o facto. Gastou -se muito tempo à volta desta questão e eram 9 horas e 40 minutos quando alguns dos pares conseguiram terminar a demonstração. A maior parte não conseguiu terminá-la corretamente e já dava sinais de cansaço e desânimo. Assim, decidi não os questionar mais, deixando-os passar à resolução da questão seguinte.

No pequeno período de reflexão que me foi permitido no momento, fiquei com a noção de que esta questão necessita de reformulação; apercebi-me de que nesta fase os alunos ainda não estavam preparados para lidar com a demonstração de duas conjeturas numa mesma pergunta. Esta demonstração não trouxe vantagens significativas em termos de aprendizagem porque, por um lado, foram poucos os pares que a realizaram com sucesso de forma autónoma e, por outro, consumiu muito do tempo da aula no apoio aos alunos, inviabilizando o terminus da tarefa neste bloco letivo.

Questão 3.

A questão foi resolvida por, praticamente, todos os pares e nenhum solicitou apoio.

No final da aula faltava resolver as duas últimas questões, pelo que recolhi todos os enunciados. Os mesmos seriam distribuídos de novo na aula seguinte, para conclusão da tarefa.

Anexo 35 – DB112

Data: 15/06/11

Hora: 8h30m – 9h15m

Depois de distribuídos, novamente, os enunciados da Tarefa 11 (Anexo 14), deu-se continuidade à sua resolução. Pedi aos alunos que tivessem o cuidado de rever a conjetura estabelecida na última aula, relativa à questão 3., antes de iniciarem a resolução da 4.ª questão.

Questão 4.

Todos os pares solicitaram ajuda nesta questão, sobretudo para lhes confirmar a validade das suas justificações. Alertei praticamente todos os pares para o facto de não poderem usar a igualdade $\overline{ED} = \overline{EB}$ para provar a congruência dos triângulos ABE e EDC.

Nesta tarefa, a maior dificuldade com que me deparei foi conseguir que os alunos aceitassem que na demonstração de uma dada conjetura, esta não poderia ser usada nas justificações dos passos. Vejamos um dos diálogos estabelecidos:

Denise: Mas não posso porquê? Está aqui (questão 3)!

Professora: O que aí está é o que concluíram depois de construírem o paralelogramo e de efetuarem medições, mas ainda não provaram essa propriedade. Estão a fazê-lo agora nesta questão.

António: Também não podemos usar estas (as conjeturas estabelecidas na questão 1.)?

Professora: Essas podem. Reparem que já as provaram na questão 2.

O Samuel e o Salvador pertenciam a pares diferentes, mas nesta aula estiveram a trabalhar em mesas contíguas. Para provar a congruência dos triângulos ABE e EDC, estavam a usar as igualdades $\angle AEB = \angle DEC$, $\angle ABE = \angle EDC$ e $\overline{AB} = \overline{DC}$ e o critério ALA.

Professora: Qual o critério de congruência que estão a usar?

Salvador: ALA.

Professora: Por que se escreve o L entre os dois As?

Samuel: Porque os ângulos têm esse lado em comum.

Professora: É isso que se verifica com os lados e os ângulos usados na justificação que acabaram de escrever?

Salvador: Não.

Samuel: Já sei, são estes dois ângulos (ângulos BAE e ECD) que são iguais.

Professora: Porquê?

Simão: Têm os lados paralelos.

Samuel: Pois, são alternos internos.

Por volta das 8 horas e 55 minutos já muitos pares tinham terminado a questão 4. e não manifestavam interesse em resolver o desafio da 5.ª questão. A Denise e o António já a tinham terminado e estavam a descansar. Quando lhes perguntei porque não resolviam a última questão a Denise disse: "É um desafio, fica para quando já não estiver cansada.". Perante esta resposta, e estando nós muito próximos do final do ano letivo, entendi que não deveria insistir com os alunos. Optei por deixar ao seu critério a decisão sobre a resolução ou não deste desafio. Contudo, decidi que se voltasse a aplicar esta sequência de tarefas, alteraria o enunciado desta 5.ª questão.

Por volta das 9 horas recolhi as produções dos alunos e deu-se início à discussão da tarefa. Na realidade, apenas foram discutidas as questões 2. e 4., pois não surgiram quaisquer perguntas relativas às restantes questões. Apresentei a resolução da questão 2., efetuada pela Denise e pelo António, porque estava muito clara e, também, porque pretendia fornecer à turma alguns esclarecimentos adicionais.

A resolução da questão 4. foi apresentada praticamente só pelo Samuel porque o Simão não quis falar, provavelmente por insegurança. O Samuel fez uma presentação cuidada e pormenorizada, não tendo surgido situações de discussão. Apenas explicou algumas vezes o porquê das justificações por si apresentadas.

Anexo 36 – DB12

Data: 15/06/11

Hora: 9h15m – 10h

Depois de distribuídos os enunciados da Tarefa 12 (Anexo 15), deu-se início à sua resolução. Não foi pedido qualquer esclarecimento nas três primeiras questões.

Questão 4.

Ensinei três pares a medir um segmento de reta, ativando os seus extremos em vez de ativarem o segmento, porque não conseguiam ativar o segmento pretendido. Por exemplo, ativavam o segmento de reta DF, quando pretendiam medir o comprimento do segmento de reta EF.

Questão 5.

Alguns pares: o Manuel e o Rui, a Martine e a Dorisa e o Timóteo e o Marco, não conseguiram medir a área dos triângulos, porque não efetuaram todos os procedimentos necessários. Acabei por lhes aconselhar uma leitura atenta da sugestão. Depois desse trabalho não necessitaram de mais apoio da minha parte.

Questão 6.

Não houve qualquer dúvida.

Questão 7.

10 dos 12 pares completaram corretamente a frase sem qualquer ajuda. Contudo, alguns não usaram as letras adequadas, escrevendo base em vez de b e altura em vez de h, pelo que lhes sugeri que lessem toda a frase e verificassem se ela tinha sentido. Esta sugestão foi suficiente para que efetuassem as adaptações necessárias.

Os dois pares que não conseguiram completar sozinhos a frase, fizeram-no de imediato quando os interpelei:

Professora: O que vos parece?

Os quatro alunos: Não sei.

Professora: Trata-se de uma fórmula para determinar a área do paralelogramo. Pensem mais um pouco e tentem completá-la.

Eram 9 horas e 55 minutos quando recolhi as produções dos alunos. Desta vez, foi o Luís a apresentar a conclusão do seu grupo e ninguém discordou, o que deixa antever que a tarefa terá sido resolvida com sucesso por parte de todos os pares.

Anexo 37 – DB13

Data: 17/06/11

Hora: 9h15m – 10h

A Tarefa 13 (Anexo 16) foi resolvida numa aula de Estudo Acompanhado, porque apenas seria aplicada num tempo de 45 minutos, e também porque se aproximava o final do ano letivo, existindo ainda outras atividades a concluir na disciplina de Matemática. Para essas atividades era fundamental a utilização dos blocos de 90 minutos.

Distribuídos os enunciados da Tarefa 13, informei os alunos de que as questões seriam respondidas individualmente. Acrescentei que ao contrário do que tinha acontecido com as restantes tarefas, no final da aula recolheria os enunciados de todos os alunos em vez de um por cada par.

Começaram a debruçar-se sobre as questões e alguns alunos solicitaram o meu apoio para as questões 2. e 3., não obstante, desta vez, não lhes forneci qualquer indicação. Para que não se sentissem desamparados, informei-os de que não lhes daria sugestões porque pretendia analisar as ideias que tinham formado neste tópico acerca dos conceitos de conjetura e de demonstração. Em resposta, a Denise respondeu “Ah, tá-se bem”.

Pelo que observei, os alunos sentiram algumas dificuldades em responder à primeira parte da questão 2., e poucas para responderem à segunda parte. Na questão 3. as dificuldades foram muitas e notórias para a globalidade dos alunos.