

Modelação do pêndulo caótico - Parte 1

by DIOGO NASCIMENTO BAPTISTA^{a,b,c}, ALEXANDRA NASCIMENTO BAPTISTA^{a,b,c}, HUGO COSTELHA^{d,e}

^a Departamento de Matemática,
Escola Superior de Tecnologia e Gestão,
Instituto Politécnico de Leiria, Leiria, Portugal
^b Ciêncializar,
Escola Superior de Tecnologia e Gestão,
Instituto Politécnico de Leiria, Leiria, Portugal
^c CIMA
^d INESC TEC
^e Departamento de Engenharia Eletrotécnica,
Escola Superior de Tecnologia e Gestão,
Instituto Politécnico de Leiria, Leiria, Portugal

Resumo Um pêndulo físico, sujeito a um amortecimento e a uma força externa que atua sobre o eixo de rotação deste, reproduz vários tipos de movimentos, que poderão ser periódicos ou não. Controlando a amplitude e a frequência da força externa, o objetivo é prever e caracterizar o tipo de movimentos descritos pelo pêndulo. Neste primeiro trabalho sobre o tema, serão introduzidas as equações necessárias para a modelação do movimento e analisados os dados experimentais resultantes das leituras efetuadas num pêndulo cujo eixo de rotação está sujeito a um movimento horizontal periódico.

1 Introdução

Consideremos o sistema dinâmico composto pelo pêndulo, com um único ponto-massa, supondo que não existe atrito no eixo de rotação do pêndulo e que a massa do cabo rígido do pêndulo é desprezável. Assumindo que a única força a que o pêndulo se encontra sujeito é a força da gravidade, a equação que modela este sistema dinâmico é dada por

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \sin(\theta) = 0, \quad (1)$$

onde θ representa o ângulo que o cabo do pêndulo faz com o eixo vertical, g é a aceleração devida à gravidade e L representa o comprimento do cabo do pêndulo (figura 1).

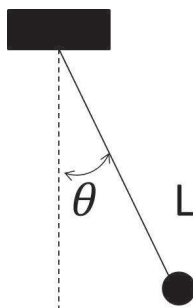


Figura 1: Esquema de um pêndulo.

Supondo que estamos nas condições do sistema descrito em (1) e considerando a resistência do ar a atuar

no ponto-massa, a equação do movimento do pêndulo amortecido pode ser dada por

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \sin(\theta) + k \frac{d\theta}{dt} = 0, \quad (2)$$

onde k é o coeficiente de viscosidade.

Se, em vez de considerarmos a resistência do ar, considerarmos uma força motora a atuar sobre o suporte do sistema, esta irá provocar um movimento horizontal oscilatório com uma determinada amplitude a e frequência ω , que iremos representar por h . Nestas condições, a equação que modela o movimento do pêndulo forçado é dada por:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \sin(\theta) + \frac{1}{L} \cos(\theta) \frac{dh^2}{dt^2} = 0 \quad (3)$$

2 Modelação de um movimento harmónico forçado

Com o objetivo de confrontar resultados teóricos com resultados experimentais, nesta seção modelamos os dados experimentais resultantes das leituras efetuadas pelo sensor "Rotary Motion Sensor" da Vernier.



Figura 2: "Rotary Motion Sensor", da Vernier, usado para a obtenção dos dados experimentais.

O modelo matemático considerado é dado pela equação diferencial não linear de segunda ordem (3), visto que o eixo de rotação do pêndulo vai realizar um movimento horizontal oscilatório, com uma dada amplitude e frequência.

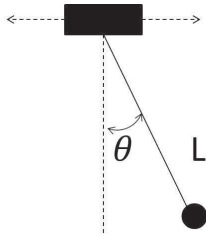


Figura 3: Esquema de um pêndulo cujo eixo de rotação realiza um movimento horizontal oscilatório.

2.1 Dados experimentais

É importante referir que o levantamento de dados foi efetuado relativamente ao ângulo θ , em função do tempo t em segundos, fixada uma determinada amplitude. Foram analisadas 3 situações distintas, sempre com um cabo de comprimento igual a 400 milímetros:

1. Considerámos, como condição inicial, o pêndulo em repouso na sua posição de equilíbrio. Do movimento que o eixo de rotação do sistema realiza apenas se conhece a amplitude, que neste caso é igual a 200 milímetros. Através da leitura dos dados, obtivemos o seguinte gráfico:

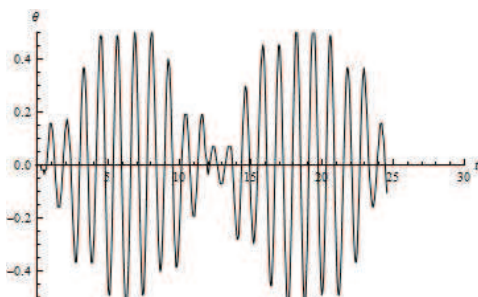


Figura 4: Movimento do pêndulo com $L = 400mm$ e $a = 200mm$.

2. Considerámos, como condição inicial, o pêndulo em repouso na sua posição de equilíbrio e a amplitude do movimento do eixo de rotação do pêndulo igual a 50 milímetros. Através da leitura dos dados, obtivemos o seguinte gráfico:

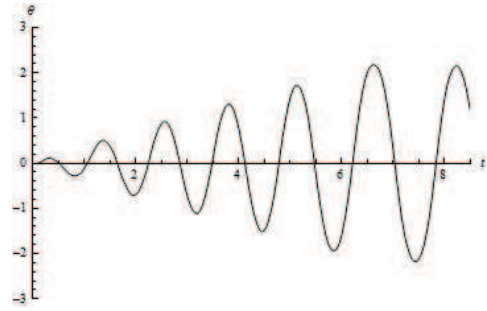


Figura 5: Movimento do pêndulo com $L = 400mm$ e $a = 50mm$.

3. Considerámos, como condição inicial, o pêndulo em repouso na sua posição de equilíbrio e a amplitude do movimento do eixo de rotação do pêndulo igual a 100 milímetros. Através da leitura dos dados, obtivemos o seguinte gráfico:

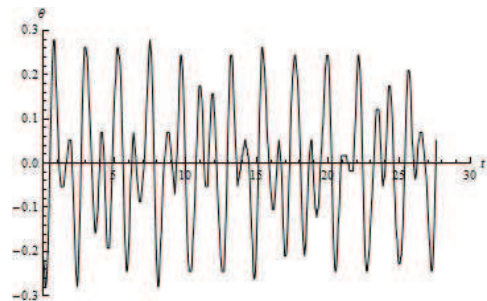


Figura 6: Movimento do pêndulo com $L = 400mm$ e $a = 100mm$.

2.2 Modelação dos dados

Analisando o comportamento do pêndulo, dadas as condições iniciais, o nosso estudo evidenciou 3 tipos distintos de comportamento, consequência da alteração da amplitude do movimento do eixo de rotação do pêndulo. No caso 1, o movimento do pêndulo é periódico; no caso 3, o movimento é caótico, isto é, não é possível prever a posição do pêndulo num instante futuro; no caso 2, identificámos o fenómeno de ressonância, dado que a frequência da força externa é igual à frequência natural do movimento do pêndulo, o que origina um crescimento linear, em função do tempo.

Para modelar a força externa que está a atuar no sistema, iremos considerar a função definida por

$$P_2(t) = \sum_{n=0}^N (-1)^n P_1(A(t - Bn)) \quad (4)$$

onde $N > 0$, $A \neq 0$ e B são constantes reais e

$$P_1(t) = \begin{cases} 0 & t < -0.5 \\ 1 & -0.5 < t < 0.5 \\ 0 & t > 0.5 \end{cases}$$

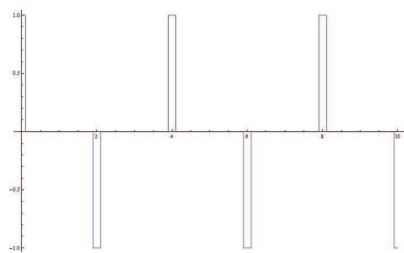


Figura 7: Gráfico de P_2 considerando $A = 5$ e $B = 2$.

Usando o software "Mathematica®", foram modelados os movimentos anteriormente descritos, considerando o seguinte código:

```
(* g - a aceleracao da gravidade *)
(* L - o comprimento do cabo*)
(* tmax - tempo decorrido*)
(* A - tempo decorrido com aceleracao maxima*)
(* B - frequencia da forza externa*)
soln[tmax_] := NDSolve[{
omega1'[t] == omega2[t],
omega2'[t] == -(1/L)*4*Sum[(-1)^(n)*
*HeavisidePi[A*(t-B*n)],{n, 0, 30}]*
*Cos[omega1[t]]-(g/L)*Sin[omega1[t]],
omega1[0] == 0, omega2[0] == 0},
{omega1, omega2}, {t, 0,tmax},
MaxSteps -> 50000];
solt = soln[tmax][[1]];
Plot[{Evaluate[{omega1[t]} /. solt]},
{t, 0, tmax}, PlotRange -> All]
```

Os resultados obtidos foram os seguintes:

1. Considerando $N = 30$, $A = 10$ e $B = 0.71$ na função dada em (4), obtemos um movimento com as mesmas características do que o obtido experimentalmente no caso 2, como podemos observar pelo seguinte gráfico.

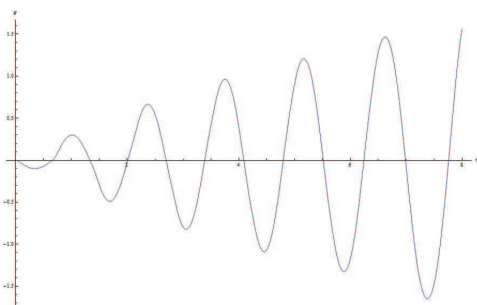


Figura 8: Solução de (3) considerando $N = 30$, $A = 10$ e $B = 0.71$ na função P_2 .

2. Se, em (4), considerarmos $N = 30$, $A = 8$ e $B = 1.7$, obtemos um movimento com as mesmas

características do que o obtido experimentalmente no caso 1, como podemos observar pelo seguinte gráfico.

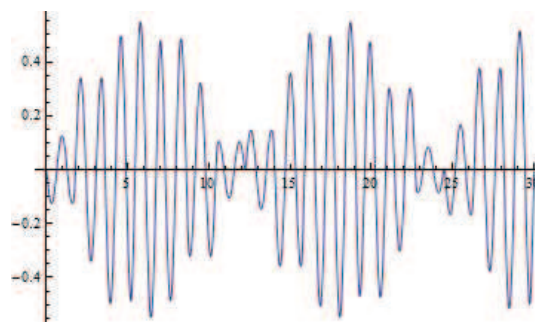


Figura 9: Solução de (3) considerando $N = 30$, $A = 8$ e $B = 1.7$ na função P_2 .

3 Conclusão

As equações diferenciais que modelam o movimento do pêndulo, forçado ou não, são bem conhecidas na literatura. A situação do eixo de rotação do pêndulo estar sob a ação de uma força motora foi também alvo de vários estudos, por exemplo [1] e [2].

Neste trabalho verificou-se que os modelos matemáticos conseguem corroborar, com alguma exatidão, os dados experimentais resultantes da análise do sistema físico. A maior dificuldade registada foi encontrar um modelo que descrevesse/incorporasse o movimento resultante da força motora, de modo que a solução obtida fosse ao encontro dos valores obtidos experimentalmente. Em trabalho futuro, é nosso objetivo modelar de forma mais exata este tipo de sistema, analisando dados experimentais associados aos movimentos resultantes da ação de uma força motora.

Nota: Os autores agradecem os contributos fornecidos por um revisor anónimo que permitiram retificar a expressão da equação (3) que se encontrava na primeira versão deste trabalho.

Bibliografia

- [1] JOHN M. SCHMITT and PHILIP V. BAYLY, Bifurcations in the Mean Angle of a Horizontally Shaken Pendulum: Analysis and Experiment, *Nonlinear Dynamics*: 15 1–14, 1998.
- [2] R. VAN DOOREN, Chaos in a Pendulum with Forced Horizontal Support Motion: a Tutorial, *Chaos, Solitons & Fractals* Vol. 7, No. 1, pp. 77–90. 1996.