



**POLITÉCNICO DE LEIRIA**  
**ESCOLA SUPERIOR DE TECNOLOGIA E GESTÃO**

**SEBENTA de**  
**SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL**  
**Projeto Mecânico**

**1º SEMESTRE**  
**ENGENHARIA MECÂNICA – 3º ANO**

Rui Barreiros Ruben

ISBN: 978-989-8797-79-7

DOI: <https://doi.org/10.25766/9mxk-1t46>

# ÍNDICE

1 – INTRODUÇÃO AO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS.....	3
2 – FORMULAÇÃO INTEGRAL E MÉTODOS VARIACIONAIS .....	4
2.1 – O porquê dos integrais.....	4
2.2 – Conceitos e fórmulas matemáticas.....	5
2.2.1 – Problemas de fronteira, iniciais e de valores próprios .....	5
2.2.2 – Relações integrais .....	6
2.2.3 – Funcionais .....	7
2.2.4 – O símbolo variacional .....	7
2.3 – Formulação fraca de problemas de fronteira .....	8
2.3.1 – Introdução .....	8
2.3.2 – Formulação fraca ou variacional .....	8
2.3.3 – Formas lineares e bilineares de funcionais quadráticos .....	10
2.3.4 – Exemplos.....	11
2.4 – Métodos variacionais de aproximação .....	15
2.4.1 – Introdução .....	15
2.4.2 – O método de Rayleigh-Ritz .....	15
2.4.3 – Método dos resíduos ponderados .....	21
3 – PASSOS BÁSICOS DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS.....	26
4 – PROBLEMAS UNIDIMENSIONAIS .....	28
4.1 – Introdução .....	28
4.2 – Elemento barra.....	28
4.2.1 – Discretização por elementos finitos .....	28
4.2.2 – Formulação fraca .....	28
4.2.3 – Modelo de elementos finitos .....	30
4.2.4 – Funções de interpolação .....	30
4.2.5 – Cálculo de matrizes e vectores .....	31
4.2.6 – Assemblagem das equações definidas nos elementos .....	32
4.2.7 – Pós-processamento.....	33
4.3 – Elemento viga .....	34
5 – ELASTICIDADE PLANA.....	38
5.1 – Introdução .....	38
5.2 – Definição do problema .....	38
5.3 – Elemento triangular de 3 nós.....	40
5.4 – Elemento quadrilátero de 4 nós.....	47
6 – FUNÇÕES INTERPOLADORAS, INTEGRAÇÃO NUMÉRICA E CONSIDERAÇÕES DE MODELAÇÃO.....	51
6.1 – Biblioteca de elementos e funções interpoladoras .....	51
6.1.1 – Elementos triangulares.....	51
6.1.2 – Elementos quadriláteros.....	52
6.2 – Integração numérica .....	54
6.2.1 – Introdução .....	54
6.2.2 – Transformação de coordenadas.....	55
6.2.3 – Integração com um elemento de referência quadrado .....	58
6.2.4 – Integração com um elemento de referência triangular .....	59
6.3 – Considerações de modelação .....	59
6.3.1 – Comentários iniciais .....	59
6.3.2 – Geometria dos elementos .....	60
6.3.3 – Geração da malha.....	61
6.3.4 – Numeração dos nós .....	63
7 – ELEMENTOS 3D.....	65
7.1 – Introdução .....	65
7.2 – Definição do problema .....	65
7.3 – Elemento tetraédrico de 4 nós .....	65
7.4 – Elemento hexaédrico de 8 nós .....	71
8 – QUALIDADE DA MALHA .....	74
8.1 – Introdução .....	74
8.2 – Número de condição.....	74
Exemplo 1 .....	75
Exemplo 2 .....	76
BIBLIOGRAFIA.....	79

## 1 – INTRODUÇÃO AO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Nos dias de hoje, o método dos elementos finitos está bastante divulgado e é utilizado, de uma forma generalizada, nas análises de engenharia. Nos próximos anos é expectável um crescimento do número de análises de engenharia realizadas através do método dos elementos finitos.

O seu desenvolvimento começou com o advento do computador. A solução da análise por elementos finitos é obtida resolvendo um sistema de equações, como tal só depois do aparecimento do computador é que o processo se tornou eficiente e de aplicação generalizada. Estas duas propriedades, eficiência e aplicabilidade generalizada, são inerentes à teoria utilizada que permite a análise de um grande leque de problemas.

O método dos elementos finitos em engenharia foi inicialmente desenvolvido para analisar problemas de mecânica estrutural. No entanto, cedo se reconheceu que o método pode ser aplicado a outro tipo de problemas, como por exemplo, transferência de calor e dinâmica de fluidos.

A escolha do modelo matemático que rege o problema físico é sempre a primeira etapa da análise por elementos finitos. A solução aproximada pelo método dos elementos finitos do modelo matemático envolve uma discretização da solução em vários pontos do domínio. O método dos elementos finitos é utilizado para resolver modelos matemáticos complexos, mas é importante apreender que a solução nunca pode conter mais informação que a existente no modelo.

## 2 – FORMULAÇÃO INTEGRAL E MÉTODOS VARIACIONAIS

### 2.1 – O porquê dos integrais

No método dos elementos finitos a solução  $u$  é aproximada por

$$u \approx \sum_{j=1}^n u_j \psi_j \quad (2.1)$$

em que  $u$  representa a solução do problema, os  $u_j$  representam o valor da variável  $u$  em pontos discretos do domínio e  $\psi_j$  são designadas por funções de base, de aproximação, de interpolação ou de forma.

Para calcular os  $n$  coeficientes  $u_j$  são necessárias  $n$  equações linearmente independentes. Com a utilização directa da equação diferencial que se pretende resolver nem sempre tal é possível. Utilizando um integral equivalente à equação diferencial garantem-se as  $n$  equações linearmente independentes.

A título de exemplo suponha-se que se pretende obter a solução aproximada de

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dx} \left( x \frac{du}{dx} \right) + u &= 0 \quad \text{para } 0 < x < 1 \\ u(0) &= 1; \left( x \frac{du}{dx} \right)_{x=1} = 0 \quad (\text{condições de fronteira}) \end{aligned} \quad (2.2)$$

A solução aproximada no domínio  $\Omega=(0,1)$  é

$$u \approx U_N = \sum_{j=1}^N c_j \phi_j(x) + \phi_0(x) \quad (2.3)$$

em que os coeficientes  $c_j$  são as incógnitas a determinar e as funções  $\phi_j(x)$ , para  $j=0, \dots, N$ , são escolhidas *a priori* de modo a que as condições de fronteira da solução aproximada  $U_N$  sejam satisfeitas. Por exemplo, para  $N=2$

$$\phi_2 = x^3 - 3x; \phi_1 = x^2 - 2x; \phi_0 = 1$$

satisfazem as condições de fronteira de (2.2), logo,

$$u \approx U_N = c_1(x^2 - 2x) + c_2(x^3 - 3x) + 1 \quad (2.4)$$

Agora é necessário calcular os coeficientes  $c_1$  e  $c_2$ . Substituindo  $U_N$  em (2.2) tem-se

$$\begin{aligned} -\frac{dU_N}{dx} - x \frac{d^2U_N}{dx^2} + U_N &= -2c_1(x-1) - 3c_2(x^2-1) - 2c_1x - 6c_2x^2 + c_1(x^2-2x) + c_2(x^3-3x) + 1 = 0 \\ &= c_2x^3 + (-9c_2 + c_1)x^2 + (-6c_1 - 3c_2)x + (2c_1 + 3c_2 + 1) = 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

ou seja,

$$\begin{cases} c_2 = 0 \\ -9c_2 + c_1 = 0 \\ -6c_1 - 3c_2 = 0 \\ 2c_1 + 3c_2 + 1 = 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

As relações de (2.6) são inconsistentes, logo não é possível calcular a solução aproximada de  $U_N$ .

Por outro lado, é possível obter a solução  $U_N$  recorrendo ao integral

$$\int_0^1 wRdx = 0 \quad (2.7)$$

em que R é o resíduo da equação diferencial,

$$R = -\frac{dU_N}{dx} - x \frac{d^2U_N}{dx^2} + U_N$$

e w é uma função teste. A partir da equação (2.7) é possível obter N equações linearmente independentes. Por exemplo, para w=1 e w=x tem-se,

$$\begin{cases} \int_0^1 1Rdx = (1+2c_1+3c_2) + \frac{1}{2}(-6c_1-3c_2) + \frac{1}{3}(c_1-9c_2) + \frac{1}{4}c_2 = 0 \\ \int_0^1 xRdx = \frac{1}{2}(1+2c_1+3c_2) + \frac{1}{3}(-6c_1-3c_2) + \frac{1}{4}(c_1-9c_2) + \frac{1}{5}c_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{222}{23} \\ c_2 = -\frac{100}{23} \end{cases}$$

A restante parte deste capítulo trata dos diferentes modos de construir os integrais utilizados por vários métodos variacionais.

Nos métodos variacionais pretende-se calcular os coeficientes  $c_j$  da solução aproximada dada pela equação (2.3), através de expressões integrais.

No método dos elementos finitos um dado domínio é visto como a assemblagem de vários sub-domínios (elementos) e a solução aproximada é definida sobre cada sub-domínio do mesmo modo que nos métodos variacionais.

## 2.2 – Conceitos e fórmulas matemáticas

### 2.2.1 – Problemas de fronteira, iniciais e de valores próprios

Os problemas físicos que se pretendem estudar são muitas vezes traduzidos por equações diferenciais definidas num dado domínio  $\Omega$ , com fronteira  $\Gamma$ .

Uma equação diferencial descreve um problema de fronteira se a variável dependente, isto é, a variável desconhecida a determinar, e possivelmente as suas derivadas permitem obter valores específicos na fronteira. No problema de valor inicial as variáveis dependentes e suas derivadas estão especificadas para o instante inicial ( $t=0$ ).

Exemplo de um problema de fronteira,

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dx} \left( a \frac{du}{dx} \right) &= f \quad \text{para } 0 < x < 1 \\ u(0) &= d_0; \left( a \frac{du}{dx} \right)_{x=1} = g_0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Exemplo de um problema de valor inicial,

$$\begin{aligned} \rho \frac{d^2u}{dt^2} + au &= f \quad \text{para } 0 < t \leq t_0 \\ u(0) &= u_0; \left( \frac{du}{dt} \right)_{t=0} = v_0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

Exemplo de um problema de fronteira e de valor inicial,

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left( a \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \rho \frac{\partial u}{\partial t} = f(x,t) \text{ para } \begin{cases} 0 < x < 1 \\ 0 < t \leq t_0 \end{cases} \quad (2.10)$$

$$u(0,t) = d_0(t); \left( a \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=1} = g_0(t); u(x,0) = u_0(x)$$

Nas expressões (2.8), (2.9) e (2.10), se os termos  $d_0$ ,  $g_0$ ,  $u_0$  e  $v_0$  forem diferentes de zero então as condições de fronteira ou iniciais dizem-se não-homogéneas, se forem zero as condições designam-se por homogéneas. Quando o 2º membro das equações diferenciais é nulo –  $f=0$  – as equações dizem-se homogéneas.

### 2.2.2 – Relações integrais

A integração por partes é frequentemente utilizada na formulação integral das equações diferenciais. Nesta secção são apresentadas algumas fórmulas matemáticas úteis para o desenvolvimento teórico do método dos elementos finitos.

A fórmula da integração por partes é dada por:

$$\int_a^b w \frac{dv}{dx} dx = - \int_a^b v \frac{dw}{dx} dx + [wv]_a^b \quad (2.11)$$

A dupla aplicação da regra de integração por partes a um integral de uma equação diferencial de quarta ordem origina a expressão:

$$\int_a^b v \frac{d^4 w}{dx^4} dx = \int_a^b \frac{d^2 w}{dx^2} \frac{d^2 v}{dx^2} dx + \frac{d^2 w}{dx^2}(a) \frac{dv}{dx}(a) - \frac{d^2 w}{dx^2}(b) \frac{dv}{dx}(b) + v(b) \frac{d^3 w}{dx^3}(b) - v(a) \frac{d^3 w}{dx^3}(a) \quad (2.12)$$

Sejam  $\nabla$  e  $\nabla^2$ , respectivamente, o operador do gradiente e o operador Laplaciano, em coordenadas bidimensionais  $(x,y)$ ,

$$\nabla = \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y}; \quad \nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (2.13)$$

onde  $\hat{i}$  e  $\hat{j}$  são os vectores unitários segundo os eixos dos  $xx$  e dos  $yy$ , respectivamente. Se  $F(x,y)$  e  $G(x,y)$  forem funções de classe  $C^0(\Omega)$  no domínio bidimensional o teorema do gradiente fica,

$$\int_{\Omega} \text{grad} F dx dy = \int_{\Omega} \nabla F dx dy = \int_{\Gamma} \hat{n} F ds \Leftrightarrow \int_{\Omega} \left( \frac{\partial F}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial F}{\partial y} \hat{j} \right) dx dy = \int_{\Gamma} (n_x \hat{i} + n_y \hat{j}) F ds \quad (2.14)$$

e o teorema da divergência,

$$\int_{\Omega} \text{div} G dx dy = \int_{\Omega} \nabla \cdot G dx dy = \int_{\Gamma} \hat{n} \cdot G ds \Leftrightarrow \int_{\Omega} \left( \frac{\partial G_x}{\partial x} + \frac{\partial G_y}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\Gamma} (n_x G_x + n_y G_y) ds \quad (2.15)$$

O ponto  $\cdot$  representa o produto escalar (produto interno) e o  $\hat{n}$  é o vector unitário normal à superfície  $\Gamma$  do domínio  $\Omega$ . Os cossenos directores do vector unitário  $\hat{n}$  podem ser escritos como

$$n_x = \cos(x, \hat{n}); n_y = \cos(y, \hat{n}) \quad (2.16)$$

As expressões seguintes, obtidas através dos teoremas do gradiente e da divergência, vão ser úteis nos capítulos seguintes. Sejam  $w$  e  $G$  funções escalares definidas num domínio bidimensional  $\Omega$ , então,

$$\int_{\Omega} (\nabla G) w dx dy = - \int_{\Omega} (\nabla w) G dx dy + \int_{\Gamma} \hat{n} w G ds \quad (2.17)$$

e

$$- \int_{\Omega} (\nabla^2 G) w dx dy = \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla G dx dy - \int_{\Gamma} \frac{\partial G}{\partial n} w ds \quad (2.18)$$

onde  $\frac{\partial}{\partial n}$  representa a derivada em relação à normal à fronteira  $\Gamma$  do domínio  $\Omega$ ,

$$\frac{\partial}{\partial n} = \hat{n} \cdot \nabla = n_x \frac{\partial}{\partial x} + n_y \frac{\partial}{\partial y} \quad (2.19)$$

ou

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} w \frac{\partial G}{\partial x} dx dy &= - \int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial x} G dx dy + \int_{\Gamma} n_x w G ds \\ \int_{\Omega} w \frac{\partial G}{\partial y} dx dy &= - \int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial y} G dx dy + \int_{\Gamma} n_y w G ds \end{aligned} \quad (2.20)$$

### 2.2.3 – Funcionais

Numa expressão integral na forma

$$I(u) = \int_a^b F\left(x, u, \frac{du}{dx}\right) dx; u = u(x) \quad (2.21)$$

em que  $F$  é uma função de  $x$ , de  $u$  e da derivada  $\frac{du}{dx}$ , sendo designada por funcional. O funcional descreve funções definidas por integrais cujos argumentos são eles próprios funções.

O funcional  $I(u)$  diz-se linear se e só se

$$I(\alpha u + \beta v) = \alpha I(u) + \beta I(v) \text{ para quaisquer escalares } \alpha \text{ e } \beta \quad (2.22)$$

O funcional  $B(u, v)$  é bilinear se for linear para cada um dos seus argumentos

$$\begin{aligned} B(\alpha u_1 + \beta u_2, v) &= \alpha B(u_1, v) + \beta B(u_2, v) \\ B(u, \alpha v_1 + \beta v_2) &= \alpha B(u, v_1) + \beta B(u, v_2) \end{aligned} \quad (2.23)$$

O funcional diz-se simétrico se

$$B(u, v) = B(v, u) \quad (2.24)$$

### 2.2.4 – O símbolo variacional

Considere-se a função  $F = F\left(x, u, \frac{du}{dx}\right)$ . Para um ponto  $x$  fixo,  $F$  depende de  $u$  e de  $\frac{du}{dx}$ .

A alteração  $\alpha v$  em  $u$ , onde  $\alpha$  é constante e  $v$  uma função, é chamada uma variação de  $u$ :

$$\delta u = \alpha v \quad (2.25)$$

O operador  $\delta u$  é conhecido como símbolo variacional. A variação  $\delta u$  de uma função  $u$  representa uma alteração admissível em  $u(x)$  com  $x$  fixo. Se  $u$  for especificado num ponto

(normalmente na fronteira) a variação de  $u$  nesse ponto é zero, ou seja, a variação de  $u$  deve satisfazer as condições de fronteira de  $u$ . A variação  $\delta u$  é uma variação virtual e associada a esta alteração em  $u$  ( $u \rightarrow u + \alpha v$ ) há uma alteração de  $F$ . Analogamente à diferenciação total de uma função de duas variáveis a primeira variação de  $F$  em relação a  $u$  é definida por,

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial u} \delta u + \frac{\partial F}{\partial u'} \delta u' \quad \text{com} \quad u' = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.26)$$

De modo análogo a diferenciação total de  $F$  é,

$$\frac{dF}{du} = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{du} + \frac{\partial F}{\partial u} \frac{du}{du} + \frac{\partial F}{\partial u'} \frac{du'}{du} \Rightarrow dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial u} du + \frac{\partial F}{\partial u'} du' \quad (2.27)$$

Como  $x$  é fixo  $dx=0$ , logo a expressão (2.27) é análoga a (2.26).

$\delta$  actua como um operador variacional em relação às variáveis dependentes. Apresentam-se as principais regras do símbolo variacional,

$$\begin{aligned} \delta(F_1 \pm F_2) &= \delta F_1 \pm \delta F_2 \\ \delta(F_1 F_2) &= F_2 \delta F_1 + F_1 \delta F_2 \\ \delta\left(\frac{F_1}{F_2}\right) &= \frac{F_2 \delta F_1 - F_1 \delta F_2}{F_2^2} \\ \delta[(F_1)^n] &= n(F_1)^{n-1} \delta F_1 \end{aligned} \quad (2.28)$$

O operador variacional pode comutar com os operadores diferencial e integral,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\delta u) &= \frac{d}{dx}(\alpha v) = \alpha \frac{dv}{dx} = \alpha v' = \delta u' = \delta\left(\frac{du}{dx}\right) \\ \delta \int_a^b u(x) dx &= \int_a^b \delta u(x) dx \end{aligned} \quad (2.29)$$

## 2.3 – Formulação fraca de problemas de fronteira

### 2.3.1 – Introdução

Como o método dos elementos finitos é uma técnica de construção de funções aproximadas da solução, é necessário estudar o integral com pesos e a formulação fraca das equações diferenciais. A formulação fraca também facilita a classificação das funções de fronteira em naturais e em essenciais. A formulação fraca é um integral com pesos de uma equação diferencial e inclui as condições de fronteira naturais do problema.

### 2.3.2 – Formulação fraca ou variacional

Considere-se a equação diferencial

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dx}\left[a(x)\frac{du}{dx}\right] &= q(x) \quad \text{para} \quad 0 < x < L \\ u(0) = u_0; \quad \left(a\frac{du}{dx}\right)_{x=L} &= Q_0 \end{aligned} \quad (2.30)$$

em que  $u_0$ ,  $Q_0$ ,  $a$  e  $q$  são valores conhecidos,  $L$  é o comprimento do domínio unidimensional e  $u$  é a variável dependente, que neste caso concreto é a temperatura. Se  $u_0=0$  e  $Q_0=0$  ambas as condições de fronteira são homogéneas. Refira-se que a equação (2.30) traduz a condução de calor num domínio unidimensional, como por exemplo uma alheta, sendo que  $a=kA$  em que  $k$  é

a condutividade térmica,  $A$  é a área da secção transversal,  $q$  é o termo de geração de calor,  $u_0$  a temperatura especificada e  $Q_0$  o calor especificado.

A expressão integral permite obter as  $N$  equações linearmente independentes necessárias para calcular os coeficientes  $c_j$  da solução aproximada

$$u \approx U_N = \sum_{j=1}^N c_j \phi_j(x) + \phi_0(x) \quad (2.31)$$

Existem três etapas no desenvolvimento da formulação fraca. A explicação das etapas é ilustrada com a equação diferencial (2.30).

**Primeira etapa** – colocar todas as expressões da equação diferencial num dos membros, multiplicar pela função teste  $w$  e integrar no domínio do problema  $\Omega=(0,L)$

$$\int_0^L w \left[ -\frac{d}{dx} \left( a \frac{du}{dx} \right) - q \right] dx = 0 \quad (2.32)$$

A função no interior dos parênteses rectos é a função resíduo, não sendo identicamente igual a zero quando  $u$  é substituído pela sua aproximação. Matematicamente, a expressão (2.32) diz que o erro na equação diferencial, devido à solução aproximada, é zero no integral multiplicado pela função teste  $w$ . A expressão (2.32) permite escolher  $N$  funções linearmente independentes para  $w$  e obter  $N$  equações linearmente independentes que permitem calcular os coeficientes  $c_j$ , com  $j=1,2,\dots, N$ , de (2.31).

**Segunda etapa** – na expressão (2.32) as funções aproximação  $\phi_j$  têm de ser diferenciáveis tantas vezes como a variável dependente  $u$  na equação diferencial (2.30) e satisfazer as condições de fronteira. Neste caso particular têm de ser duas vezes diferenciáveis. Se a diferenciação é distribuída entre a variável  $u$  e a função  $w$ , o integral resultante requer condições de continuidade mais fracas e daí o nome de formulação fraca. A formulação fraca ou variacional tem duas características desejáveis:

1. a variável dependente necessita de um menor grau de continuidade e normalmente resulta num conjunto de equações simétricas de modo a calcular os coeficientes  $c_j$ ;
2. as condições de fronteira naturais estão incluídas na formulação fraca, logo a aproximação  $U_N$  necessita de satisfazer, apenas, as condições de fronteira essenciais.

Estas duas características da formulação fraca têm um papel importante no desenvolvimento do método dos elementos finitos.

Volte-se ao integral (2.32). Ao fazer a integração por partes do integral obtém-se

$$0 = \int_0^L \left\{ w \left[ -\frac{d}{dx} \left( a \frac{du}{dx} \right) \right] - wq \right\} dx = \int_0^L \left( \frac{dw}{dx} a \frac{du}{dx} - wq \right) dx - \left[ w a \frac{du}{dx} \right]_0^L \quad (2.33)$$

A identificação das condições de fronteira essenciais e naturais é uma tarefa importante na segunda etapa da construção da formulação fraca da equação diferencial. As condições de

fronteira naturais aparecem na formulação fraca:  $\left[ w a \frac{du}{dx} \right]_0^L$ . Neste exemplo a condição de

fronteira natural especifica o calor na fronteira,  $\left(a \frac{du}{dx}\right)_{x=L} = Q_0$ . As variáveis secundárias estão associadas às condições de fronteira naturais, neste caso,  $\frac{du}{dx}$  é a variável secundária e representa o calor,

$$Q = \left(a \frac{du}{dx}\right)_{n_x} \quad (2.34)$$

em que  $n_x$  é o cosseno director. Para problemas unidimensionais a normal à fronteira é sempre segundo o domínio, logo  $n_x(0)=-1$  e  $n_x(L)=1$ .

Por cada uma das variáveis secundárias há uma variável primária. As condições de fronteira essenciais não estão definidas na formulação fraca e especificam as condições de fronteira da variável primária. Neste exemplo,  $u(0) = u_0$  define a condição de fronteira essencial e a temperatura  $u$  é a variável primária. De um modo geral, uma equação diferencial de ordem  $2m$  tem  $m$  variáveis primárias e secundárias.

Com a introdução da condição de fronteira natural em (2.33) obtém-se,

$$\begin{aligned} \int_0^L \left( a \frac{dw}{dx} \frac{du}{dx} - wq \right) dx - \left[ wa \frac{du}{dx} \right]_0^L &= \int_0^L \left( a \frac{dw}{dx} \frac{du}{dx} - wq \right) dx - \left( wa \frac{du}{dx} n_x \right)_{x=0} - \left( wa \frac{du}{dx} n_x \right)_{x=L} \\ &= \int_0^L \left( a \frac{dw}{dx} \frac{du}{dx} - wq \right) dx - (wQ)_{x=0} - (wQ)_{x=L} = 0 \end{aligned} \quad (2.35)$$

A equação (2.35) representa a formulação fraca da equação diferencial (2.30). Diz-se formulação fraca porque requer menor continuidade em  $u$ , que tem de ser duas vezes diferenciável em (2.30) e apenas uma vez em (2.35).

**Terceira etapa** – consiste na imposição das condições de fronteira do problema. A função teste  $w$  é nula nos pontos onde a variável primária é especificada, isto é, a função  $w$  satisfaz a forma homogénea das condições de fronteira essenciais. Na formulação fraca a função  $w$  tem o significado de uma variação virtual da variável primária  $u$ . E como já se referiu, quando a variável primária é especificada num ponto a sua variação virtual é zero. No exemplo em estudo,  $u(0)=u_0$  é a condição de fronteira essencial e  $\left(a \frac{du}{dx}\right)_{x=L} = Q_0$  a condição de fronteira natural, logo

$$\begin{aligned} w(0) &= 0 \quad \text{porque } u(0) = u_0 \\ \left(a \frac{du}{dx}\right)_{x=L} &= Q_0 \end{aligned} \quad (2.36)$$

Introduzindo (2.36) na expressão (2.35) obtém-se a formulação fraca na sua forma final,

$$\int_0^L \left( a \frac{dw}{dx} \frac{du}{dx} - wq \right) dx - w(L)Q_0 = 0 \quad (2.37)$$

### 2.3.3 – Formas lineares e bilineares de funcionais quadráticos

A formulação fraca também se pode escrever sob a forma de funcionais,

$$B(w, u) - I(w) = 0 \Leftrightarrow B(w, u) = I(w) \quad (2.38)$$

com,

$$B(w,u) = \int_0^L a \frac{dw}{dx} \frac{du}{dx} dx \quad (2.39)$$

e

$$I(w) = \int_0^L w q dx + w(L) Q_0 \quad (2.40)$$

Verifica-se que o funcional  $B(w,u)$  é bilinear e simétrico em  $w$  e  $u$ , e que o funcional  $I(w)$  é linear.

Foi referido na secção 2.3.2 que a função  $w$  é a variação virtual da variável primária  $u$ :  $w = \delta u$ . Utilizando esta notação pode-se re-escrever a expressão (2.38),

$$B(\delta u, u) - I(\delta u) = 0 \quad (2.41)$$

Se o funcional  $B(\square, \square)$  for simétrico pode-se escrever (2.41) na forma,

$$0 = \delta \left[ \frac{1}{2} B(u, u) - I(u) \right] = \delta I(u) \quad (2.42)$$

com,

$$I(u) = \frac{1}{2} B(u, u) - I(u) \quad (2.43)$$

Na passagem de (2.41) para (2.42) foram utilizadas as seguintes identidades,

$$B(\delta u, u) = \int_0^L a \frac{d\delta u}{dx} \frac{du}{dx} dx = \delta \int_0^L a \left[ \left( \frac{du}{dx} \right)^2 \right] dx = \frac{1}{2} \delta \int_0^L a \frac{du}{dx} \frac{du}{dx} dx = \frac{1}{2} \delta B(u, u)$$

e

$$I(\delta u) = \int_0^L \delta u q dx + \delta u(L) Q_0 = \delta \left[ \int_0^L u q dx + u(L) Q_0 \right] = \delta I(u)$$

Note-se que se pode utilizar a expressão (2.43) apenas se  $B(w,u)$  for simétrico e bilinear e se  $I(w)$  for linear.

Em mecânica dos sólidos  $I(u)$  representa a energia potencial e (2.42) representa o princípio de energia potencial:

Todas as funções  $u$  admissíveis que fazem  $I(u)$  ser mínimo então também satisfazem a equação diferencial (2.30) e as suas condições de fronteira.

Se o funcional  $I(u)$  não existir, para o método dos elementos finitos basta considerar a primeira variação da formulação fraca.

### 2.3.4 – Exemplos

**Exemplo 2.1** – seja considerada a equação diferencial

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dx} \left( a \frac{du}{dx} \right) - cu + x^2 &= 0 \text{ para } 0 < x < 1 \\ u(0) &= 0; \left( a \frac{du}{dx} \right)_{x=1} = 1 \end{aligned} \quad (2.44)$$

Para obter a formulação fraca seguem-se as três etapas apresentadas na secção 2.3.2. Após a primeira etapa,

## Simulação Computacional

$$0 = \int_0^1 w \left[ -\frac{d}{dx} \left( a \frac{du}{dx} \right) - cu + x^2 \right] dx \quad (2.45)$$

Depois da segunda etapa,

$$0 = \int_0^1 \left( a \frac{dw}{dx} \frac{du}{dx} - cwu + wx^2 \right) dx - \left[ wa \frac{du}{dx} \right]_0^1 \quad (2.46)$$

Da expressão (2.46) é possível verificar que  $u$  é a variável primária e que  $\frac{du}{dx}$  é a variável secundária. Também é possível verificar que  $\left( a \frac{du}{dx} \right)_{x=1} = 1$  é a condição de fronteira natural – não-homogénea – e que  $u(0)=0$  é a condição de fronteira essencial. Com a aplicação das condições de fronteira é obtida a formulação fraca na sua versão mais simplificada,

$$0 = \int_0^1 \left( a \frac{dw}{dx} \frac{du}{dx} - cwu \right) dx + \int_0^1 wx^2 dx - w(1) \quad (2.47)$$

A formulação fraca também se pode escrever,

$$0 = B(w, u) - I(w) \quad (2.48)$$

com,

$$\begin{aligned} B(w, u) &= \int_0^1 \left( a \frac{dw}{dx} \frac{du}{dx} - cwu \right) dx \\ I(w) &= -\int_0^1 wx^2 dx + w(1) \end{aligned} \quad (2.49)$$

Como  $B(\cdot, \cdot)$  é bilinear e simétrico e  $I(w)$  é linear,

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[ a \left( \frac{du}{dx} \right)^2 - cu^2 + 2ux^2 \right] dx - u(1) \quad (2.50)$$

Refira-se, por fim, que as equação diferencial (2.44) traduz a deflexão transversal de um cabo ou, se  $c=0$ , a transferência de calor numa alheta.

**Exemplo 2.2** – considere-se, desta feita, o problema em que se pretende determinar o deslocamento  $w$  da viga elástica de Euler-Bernoulli, definido pela equação diferencial e condições de fronteira,

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} \left[ b(x) \frac{d^2 w}{dx^2} \right] - f(x) &= 0 \quad \text{para } 0 < x < L \\ w(0) = \left( \frac{dw}{dx} \right)_{x=0} &= 0; \quad \left( b \frac{d^2 w}{dx^2} \right)_{x=L} = M_0; \quad \left[ \frac{d}{dx} \left( b(x) \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \right]_{x=L} = 0 \end{aligned} \quad (2.51)$$

em que  $L$  é o comprimento da viga,  $b(x)$  é a rigidez ( $b=EI$ ),  $f(x)$  é a carga distribuída e  $M_0$  o momento flector.

Como a equação diferencial (2.51) contém uma derivada de quarta ordem, é necessário integrar por partes duas vezes. A função teste  $v$  deve ser duas vezes diferenciável e satisfazer as condições de fronteira essenciais homogéneas.

Para obter a formulação fraca é necessário seguir as três etapas da secção 2.3.2. Após a primeira etapa obtém-se a expressão,

$$\int_0^L v \left[ \frac{d^2}{dx^2} \left( b \frac{d^2 w}{dx^2} \right) - f \right] dx = 0 \quad (2.52)$$

Na segunda etapa é necessário integrar duas vezes por partes. Após a primeira integração,

$$0 = \int_0^L \left[ -\left(\frac{dv}{dx}\right) \frac{d}{dx} \left( b \frac{d^2w}{dx^2} \right) - vf \right] dx + \left[ v \frac{d}{dx} \left( b \frac{d^2w}{dx^2} \right) \right]_0^L \quad (2.53)$$

Após a segunda integração por partes chega-se à expressão

$$0 = \int_0^L \left( b \frac{d^2v}{dx^2} \frac{d^2w}{dx^2} - vf \right) dx + \left[ v \frac{d}{dx} \left( b \frac{d^2w}{dx^2} \right) - \frac{dv}{dx} b \frac{d^2w}{dx^2} \right]_0^L \quad (2.54)$$

É possível identificar as condições de fronteira essenciais,

$$w(0) = \left( \frac{dw}{dx} \right)_{x=0} = 0 \quad (2.55)$$

isto é, o deslocamento e a rotação são nulas para  $x=0$ . Relembre-se que há  $m$  variáveis primárias sendo que  $2m$  é a ordem da equação diferencial, logo, neste caso tem-se  $m=2$  e as variáveis primárias são o deslocamento transversal  $w$  e a rotação  $\frac{dw}{dx}$ . E as condições de fronteira naturais são,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left( b \frac{d^2w}{dx^2} \right) &= V \\ b \left( \frac{d^2w}{dx^2} \right) &= M \end{aligned} \quad (2.56)$$

em que  $V$  e  $M$ , o esforço transversal ou de corte e momento flector, respectivamente, são as variáveis secundárias.

Na terceira etapa introduzem-se as condições de fronteira em (2.54) e obtém-se a formulação fraca do problema (2.51),

$$0 = \int_0^L \left( b \frac{d^2v}{dx^2} \frac{d^2w}{dx^2} - vf \right) dx - \left( \frac{dv}{dx} \right)_{x=L} M_0 \quad (2.57)$$

ou, escrevendo através de funcionais,

$$0 = B(v, w) - I(v)$$

com,

$$\begin{aligned} B(v, w) &= \int_0^L b \frac{d^2v}{dx^2} \frac{d^2w}{dx^2} dx \\ I(v) &= \int_0^L v f dx + \left( \frac{dv}{dx} \right)_{x=L} M_0 \end{aligned} \quad (2.58)$$

A forma quadrática é a energia potencial total e escreve-se do seguinte modo:

$$I(w) = \int_0^L \left[ \frac{b}{2} \left( \frac{d^2w}{dx^2} \right)^2 - wf \right] dx - \left( \frac{dw}{dx} \right)_{x=L} M_0 \quad (2.59)$$

**Exemplo 2.3** – considere-se um problema bidimensional de condução de calor definido no domínio  $\Omega$  apresentado na figura 2.1. A equação diferencial de Poisson rege este tipo de problemas.

$$-k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) = q_0 \text{ em } \Omega \quad (2.60)$$

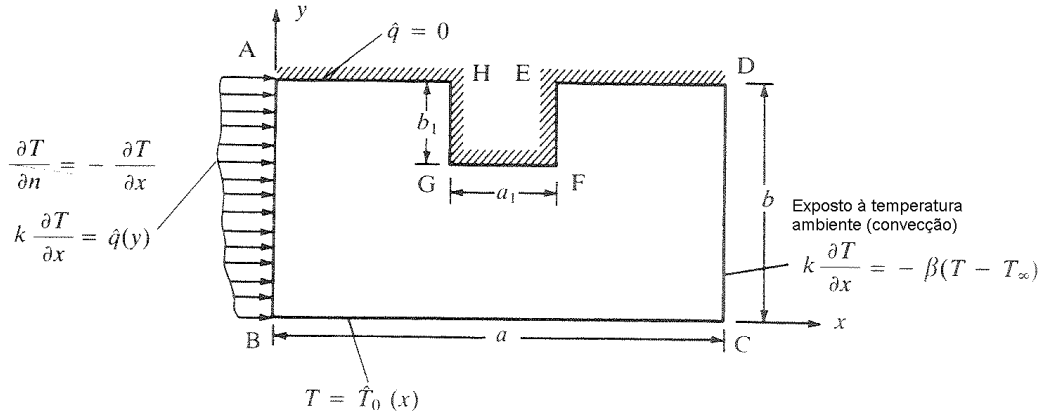


figura 2.1 – transferência de calor num domínio bidimensional (imagem de J.N. Reddy)

onde  $q_0$  representa a geração de calor,  $k$  a condutividade do material isotrópico e  $T$  a temperatura. Pretende-se obter a formulação fraca do problema (2.60), com as condições de fronteira na figura 2.1. Após a primeira etapa obtém-se,

$$0 = \int_{\Omega} w \left[ -k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) - q_0 \right] dx dy \quad (2.61)$$

onde  $w$  é a função teste. Utilizando as expressões (2.20) chega-se a,

$$0 = \int_{\Omega} \left[ k \left( \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} \right) - w q_0 \right] dx dy - \int_{\Gamma} w k \left( \frac{\partial T}{\partial x} n_x + \frac{\partial T}{\partial y} n_y \right) ds \quad (2.62)$$

A variável secundária é obtida através da condição de fronteira natural,

$$k \left( \frac{\partial T}{\partial x} n_x + \frac{\partial T}{\partial y} n_y \right) = k \frac{\partial T}{\partial n} = q_n \quad (2.63)$$

em que a variável secundária  $q_n$  é o fluxo de calor ao longo da fronteira. De um modo geral,  $q_n$  é composto pelos fluxos de condução, convecção e radiação.

A fronteira  $\Gamma$  é composta por vários segmentos sujeitos a diferentes condições de fronteira (ver figura 2.1):

- em  $\Gamma_1=AB$  ( $n_x=-1$  e  $n_y=0$ ) – fluxo  $\hat{q}(y)$  especificado
- em  $\Gamma_2=BC$  ( $n_x=0$  e  $n_y=-1$ ) – temperatura  $\hat{T}(x)$  especificada
- em  $\Gamma_3=CD$  ( $n_x=1$  e  $n_y=0$ ) – fronteira de convecção com temperatura ambiente  $T_{\infty}$  e coeficiente  $\beta$
- em  $\Gamma_4=DEFGHA$  – isolada  $\frac{\partial T}{\partial n} = 0$

Utilizando a informação na fronteira é possível simplificar o último termo de (2.62),

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} w k \left( \frac{\partial T}{\partial x} n_x + \frac{\partial T}{\partial y} n_y \right) ds &= \int_{\Gamma_1} w q_n ds + \int_{\Gamma_2} 0 \left( k \frac{\partial T}{\partial n} \right) ds - \int_{\Gamma_3} w [\beta (T - T_{\infty})] ds + \int_{\Gamma_4} w 0 ds \\ &= \int_0^b w(0, y) \hat{q}(y) dy - \beta \int_0^b w(a, y) [T(a, y) - T_{\infty}] dy \end{aligned} \quad (2.64)$$

Note-se que  $w=0$  em  $\Gamma_2$  deve-se à condição de fronteira essencial.

Substituindo (2.64) em (2.62) obtém-se a formulação fraca,

$$0 = \int_{\Omega} \left[ k \left( \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} \right) - w q_0 \right] dx dy - \int_0^b w(0, y) \hat{q}(y) dy + \beta \int_0^b w(a, y) [T(a, y) - T_{\infty}] dy \quad (2.65)$$

A formulação fraca também se pode escrever na forma,

$$B(w, T) = I(w)$$

com,

$$\begin{aligned} B(w, T) &= \int_{\Omega} k \left( \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} \right) dx dy + \beta \int_0^b w(a, y) T(a, y) dy \\ I(w) &= \int_{\Omega} w q_0 dx dy + \int_0^b w(0, y) \hat{q}(y) dy + \beta \int_0^b w(a, y) T_{\infty} dy \end{aligned} \quad (2.66)$$

Por fim o funcional quadrático é dado por,

$$I(T) = \frac{k}{2} \int_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy - \int_{\Omega} T q_0 dx dy - \int_0^b T(0, y) \hat{q}(y) dy + \beta \int_0^b \frac{1}{2} [T^2(a, y) - 2T(0, y) T_{\infty}] dy \quad (2.67)$$

## 2.4 – Métodos variacionais de aproximação

### 2.4.1 – Introdução

Neste sub-capítulo serão estudadas várias aproximações pelos métodos variacionais, como o de Rayleigh-Ritz, o de Galerkin, o de Petrov-Galerkin e o dos mínimos quadrados. Em todos estes métodos é escolhida uma solução aproximada que é uma combinação linear de funções  $\phi_j$  e parâmetros indeterminados  $c_j$ :  $\sum_j c_j \phi_j$ . Os parâmetros  $c_j$  são determinados de forma a satisfazer a formulação fraca ou que minimizam o funcional quadrático. Os métodos diferem no modo como é realizada a escolha das funções teste  $w$  e das funções de aproximação ou de base  $\phi_j$ .

O método dos elementos finitos utiliza a formulação fraca para formular as equações sobre o elemento finito.

### 2.4.2 – O método de Rayleigh-Ritz

No método de Rayleigh-Ritz os coeficientes  $c_j$  são determinados utilizando a formulação fraca. As funções teste  $w$  são iguais às funções de aproximação:  $w = \phi_i$ .

Considere-se o problema variacional em que se pretende encontrar  $u$  tal que

$$B(w, u) = I(w) \quad (2.68)$$

para todas as funções  $w$  suficientemente diferenciáveis e que satisfazem a forma homogénea das condições de fronteira essenciais. Quando  $B(w, u)$  é bilinear e simétrico e  $I(w)$  é linear, o problema (2.68) é equivalente a minimizar o funcional quadrático

$$I(u) = \frac{1}{2} B(u, u) - I(u) \quad (2.69)$$

No método de Rayleigh-Ritz a solução aproximada de (2.68) é dada pela série finita,

$$u_N = \sum_{j=1}^N c_j \phi_j + \phi_0 \quad (2.70)$$

onde os  $c_j$ , designados por coeficientes de Ritz, são escolhidos tal que (2.68) seja verdadeiro para  $N$  escolhas de  $w$  com

## Simulação Computacional

$$w = \phi_i \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

Desta forma obtêm-se N equações linearmente independentes que permitem calcular os  $c_j$ . Por exemplo, a equação  $i$  é obtida substituindo  $w$  por  $\phi_i$ ,

$$B\left(\phi_i, \sum_{j=1}^N c_j \phi_j + \phi_0\right) = I(\phi_i) \quad (2.71)$$

Se o funcional  $B$  for bilinear o somatório pode estar fora do operador,

$$\sum_{j=1}^N B(\phi_i, \phi_j) c_j = I(\phi_i) - B(\phi_i, \phi_0) \quad (2.72)$$

ou, na forma matricial,

$$\begin{aligned} B_{ij} c_j &= F_i \\ B_{ij} &= B(\phi_i, \phi_j); \quad F_i = I(\phi_i) - B(\phi_i, \phi_0) \end{aligned} \quad (2.73)$$

Se o funcional  $B(w, u)$  for simétrico e bilinear é possível chegar ao sistema de equações de (2.73) minimizando o funcional quadrático. Ao substituir  $u_N$  em (2.69), o funcional  $I(u)$  torna-se uma função quadrática em relação aos parâmetros  $c_1, c_2, \dots, c_N$ . Então, a condição necessária para minimizar  $I(c_1, c_2, \dots, c_N)$  é:

$$\frac{\partial I}{\partial c_1} = 0; \quad \frac{\partial I}{\partial c_2} = 0; \quad \dots \quad \frac{\partial I}{\partial c_N} = 0 \quad (2.74)$$

Deste modo obtêm-se N equações linearmente independentes exactamente iguais às de (2.73).

A aproximação  $u_N$  definida por (2.70) deve satisfazer a condições de fronteira essenciais. As condições de fronteira naturais já estão incluídas na formulação fraca. A forma particular de  $u_N$  tem a capacidade de satisfazer as condições de fronteira essenciais não-homogéneas. Se  $u_N$  fosse da forma,

$$u_N = \sum_{j=1}^N c_j \phi_j \quad (2.75)$$

não seria fácil satisfazer as condições de fronteira não-homogéneas. Por exemplo, suponhamos que  $u_N$  tem que satisfazer a condição  $u_N(x_0) = u_0$ , logo

$$\sum_{j=1}^N c_j \phi_j(x_0) = u_0$$

Os  $c_j$  são parâmetros a determinar, logo não é fácil escolher as funções de base  $\phi_j(x)$  tal que a condição de fronteira seja respeitada. Se se escrever  $u_N$  tal como em (2.70) as condições não-homogéneas são satisfeitas por  $\phi_0$ , isto é,  $\phi_0(x_0) = u_0$  e as funções  $\phi_j$  devem satisfazer as componentes homogéneas de todas as condições de fronteira essenciais, neste caso,  $\phi_j(x_0) = 0$ . Se todas as condições de fronteira essenciais forem homogéneas então  $\phi_0 = 0$ . Como as funções de base  $\phi_j$  satisfazem as condições de fronteira essenciais homogéneas, então a escolha de  $w = \phi_j$  para as funções teste é consistente com o método, já que  $w$  é nulo nos pontos onde as variáveis primárias são especificadas.

No desenvolvimento do método é necessário escolher funções de base  $\phi_i$  que satisfaçam

as seguintes condições:

- as funções  $\phi_j$  devem ser tais que  $B(\phi_i, \phi_j)$  é bem definido e diferente de zero, isto é, diferenciável quantas vezes for necessário.
- $\phi_i$  deve satisfazer as componentes homogéneas das condições de fronteira essenciais.
- $B(\phi_i, \phi_j)$  deve ser linearmente independente.
- o conjunto  $\{\phi_i\}$  deve ser completo. Por exemplo, se  $\phi_i$  for um polinómio, então o conjunto deve conter todos os termos, da maior à menor ordem desejada.

**Exemplo 2.4** – considere-se a equação diferencial do exemplo 2.1 com  $a=c=1$ ,

$$-\frac{d^2u}{dx^2} - u + x^2 = 0 \quad \text{para } 0 < x < 1 \quad (2.76)$$

Considerem-se dois conjuntos de condições de fronteira,

$$1. \quad u(0) = 0 ; u(1) = 0 \quad (2.77)$$

$$2. \quad u(0) = 0 ; \left(\frac{du}{dx}\right)_{x=1} = 1 \quad (2.78)$$

**conjunto 1** – do exemplo 2.1 tem-se que

$$B(w, u) = \int_0^1 \left( \frac{dw}{dx} \frac{du}{dx} - wu \right) dx ; I(w) = -\int_0^1 wx^2 dx \quad (2.79)$$

Ambas as condições de fronteira são essenciais. As  $N$  funções de base  $\phi_i$  devem satisfazer  $\phi_i(0)=\phi_i(1)=0$ . Como as condições de fronteira essenciais são homogéneas, então  $\phi_0=0$ . Escolheu-se

$$\phi_1 = x(1-x); \phi_2 = x^2(1-x); \dots; \phi_N = x^N(1-x) \quad (2.80)$$

A escolha das funções de base deve respeitar a última das condições apresentadas. Por exemplo, a escolha do conjunto  $\{\phi_i\}$

$$\phi_1 = x^2(1-x); \phi_2 = x^3(1-x); \dots; \phi_N = x^{N+1}(1-x)$$

viola a referida condição, já que não é possível gerar o termo linear  $x$  se a solução o contiver.

Perante estes dados conclui-se que a solução aproximada é dada por,

$$u_N = c_1\phi_1 + c_2\phi_2 + \dots + c_N\phi_N = \sum_{j=1}^N c_j\phi_j \quad (2.81)$$

Substituindo (2.81) na forma variacional obtém-se

$$\int_0^1 \left[ \frac{d\phi_i}{dx} \left( \sum_{j=1}^N c_j \frac{d\phi_j}{dx} \right) - \phi_i \left( \sum_{j=1}^N c_j \phi_j \right) \right] dx = -\int_0^1 \phi_i x^2 dx \quad (2.82)$$

$$\sum_{j=1}^N c_j \int_0^1 \left( \frac{d\phi_i}{dx} \frac{d\phi_j}{dx} - \phi_i \phi_j \right) dx = -\int_0^1 \phi_i x^2 dx$$

Ou na forma matricial,

$$\sum_{j=1}^N c_j B(\phi_i, \phi_j) = I(\phi_i) \quad (2.83)$$

com

$$B(\phi_i, \phi_j) = \int_0^1 \left( \frac{d\phi_i}{dx} \frac{d\phi_j}{dx} - \phi_i \phi_j \right) dx ; I(\phi_i) = -\int_0^1 x^2 \phi_i dx \quad (2.84)$$

## Simulação Computacional

O mesmo resultado seria obtido se fosse utilizada a formulação quadrática (2.69), ou seja,

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[ \left( \frac{du}{dx} \right)^2 - u^2 + 2x^2 u \right] dx \quad (2.85)$$

Fazendo  $u \approx u_N$  e substituindo em (2.85) obtém-se

$$I(c_j) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[ \left( \sum_{j=1}^N c_j \frac{d\phi_j}{dx} \right)^2 - \left( \sum_{j=1}^N c_j \phi_j \right)^2 + 2x^2 \left( \sum_{j=1}^N c_j \phi_j \right) \right] dx \quad (2.86)$$

De modo a minimizar o funcional quadrático  $I(u)$  tem-se:

$$\frac{\partial I(u)}{\partial c_i} = 0 = \int_0^1 \left[ \frac{d\phi_i}{dx} \left( \sum_{j=1}^N c_j \frac{d\phi_j}{dx} \right) - \phi_i \left( \sum_{j=1}^N c_j \phi_j \right) + x^2 \phi_i \right] dx = \sum_{j=1}^N B_{ij} c_j - F_i \quad (2.87)$$

onde

$$B_{ij} = \int_0^1 \left( \frac{d\phi_i}{dx} \frac{d\phi_j}{dx} - \phi_i \phi_j \right) dx; \quad F_i = - \int_0^1 x^2 \phi_i dx \quad (2.88)$$

que é igual ao sistema representado em (2.83) e (2.84).

A matriz **B** e o vector **F** podem ser calculados utilizando

$$\begin{aligned} \phi_i &= x^i (1-x) = x^i - x^{i+1} \\ \frac{d\phi_i}{dx} &= ix^{i-1} - (i+1)x^i \end{aligned} \quad (2.89)$$

de modo a obter,

$$\begin{aligned} B_{ij} &= \int_0^1 \left\{ [ix^{i-1} - (i+1)x^i][jx^{j-1} - (j+1)x^j] - (x^i - x^{i+1})(x^j - x^{j+1}) \right\} dx = \\ &= \frac{2ij}{(i+j)[(i+j)^2 - 1]} - \frac{2}{(i+j+1)(i+j+2)(i+j+3)} \\ F_i &= - \int_0^1 x^2 (x^i - x^{i+1}) dx = - \frac{1}{(3+i)(4+i)} \end{aligned} \quad (2.90)$$

Na forma matricial,

$$\mathbf{Bc} = \mathbf{F} \quad (2.91)$$

Por exemplo, para  $N=2$ , (2.91) toma a forma,

$$\frac{1}{420} \begin{bmatrix} 126 & 63 \\ 63 & 52 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} = - \frac{1}{60} \begin{Bmatrix} 3 \\ 2 \end{Bmatrix} \quad (2.92)$$

resolvendo o sistema de equações obtém-se,

$$c_1 = -\frac{10}{123} = -0.0813; \quad c_2 = -\frac{21}{123} = -0.1707 \quad (2.93)$$

Por fim, a solução aproximada para  $N=2$  dá,

$$u_2 = c_1 \phi_1 + c_2 \phi_2 = \left( -\frac{10}{123} \right) (x - x^2) + \left( -\frac{21}{123} \right) (x^2 - x^3) = -\frac{1}{123} (10x + 11x^2 - 21x^3) \quad (2.94)$$

A solução exacta do problema definido por (2.76) com as condições de fronteira (2.77) é

$$u(x) = \frac{\text{sen}(x) + 2\text{sen}(1-x)}{\text{sen}(1)} + x^2 - 2 \quad (2.95)$$

**conjunto 2** – para o segundo conjunto de condições de fronteira o operador bilinear é dado por (2.79) ou por (2.84). Sabendo que  $\phi_0=0$  o operador linear é dado por

### Simulação Computacional

$$I(w) = -\int_0^1 wx^2 dx + w(1) \quad (2.96)$$

logo,

$$F_i = -\int_0^1 x^2 \phi_i dx + \phi_i(1) \quad (2.97)$$

Neste caso há apenas uma condição de fronteira essencial que as funções de base  $\phi_i$  têm de satisfazer:  $\phi_i(0)=0$ . Para este exemplo a escolha das funções de base recaiu em,

$$\phi_i = x^i \quad (2.98)$$

logo,

$$B_{ij} = \int_0^1 (ijx^{i+j-2} - x^{i+j}) dx = \frac{i+j}{1+j-1} - \frac{1}{i+j+1} \quad (2.99)$$

$$F_i = -\int_0^1 x^{i+2} dx + 1 = -\frac{1}{i+3} + 1$$

A solução exacta é dada por,

$$u(x) = \frac{2\cos(1-x) - \text{sen}(x)}{\cos(1)} + x^2 - 2 \quad (2.100)$$

**Exemplo 2.5** – considere-se o problema de uma viga encastrada sujeita a uma carga distribuída uniforme de intensidade  $f_0$  por unidade de comprimento e a um momento  $M_0$  na extremidade livre. Utilizando a teoria de Euler-Bernoulli,

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right) - f_0 = 0 \quad \text{para} \begin{cases} 0 < x < L \\ EI > 0 \end{cases} \quad (2.101)$$

$$w(0) = \left( \frac{dw}{dx} \right)_{x=0} = 0; \quad \left( EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right)_{x=L} = M_0; \quad \left[ \frac{d}{dx} \left( EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \right]_{x=L} = 0$$

A formulação fraca foi já desenvolvida no exemplo 2.2 e é dada por (2.58), como tal,

$$B(v, w) = \int_0^L EI \frac{d^2 v}{dx^2} \frac{d^2 w}{dx^2} dx; \quad I(v) = \int_0^L f_0 v dx + \left( M_0 \frac{dv}{dx} \right)_{x=L} \quad (2.102)$$

Ambas as condições de fronteira essenciais são homogêneas, logo  $\phi_0=0$ . As funções  $\phi_i$  devem satisfazer as condições de fronteira  $\phi_i(0) = \phi_i'(0) = 0$ . A função de menor ordem que satisfaz estas condições é  $\phi_1=x^2$ , então a sequência de funções de base é,

$$\phi_1 = x^2; \quad \phi_2 = x^3; \dots; \quad \phi_N = x^{N+1}$$

A aproximação de Rayleigh-Ritz é dada por

$$w_N(x) = \sum_{j=1}^N c_j \phi_j; \quad \phi_j = x^{j+1} \quad (2.103)$$

Substituindo (2.103) em (2.102) e fazendo  $v=\phi_i$ , obtém-se

$$B_{ij} = \int_0^L EI (i+1) i x^{i-1} (j+1) x^{j-1} dx = \frac{Elij(i+1)(j+1)L^{i+j-1}}{i+j-1} \quad (2.104)$$

$$F_i = \frac{f_0 L^{i+2}}{i+2} + M_0 (i+1)L^i$$

Para  $N=2$ ,

## Simulação Computacional

$$\begin{cases} EI(4Lc_1 + 6L^2c_2) = \frac{1}{3}f_0L^3 + 2M_0L \\ EI(6L^2c_1 + 12L^3c_2) = \frac{1}{4}f_0L^4 + 3M_0L^2 \end{cases} \quad (2.105)$$

ou na forma matricial,

$$EI \begin{bmatrix} 4L & 6L^2 \\ 6L^2 & 12L^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} = \frac{f_0L^3}{12} \begin{Bmatrix} 4 \\ 3L \end{Bmatrix} + M_0L \begin{Bmatrix} 2 \\ 3L \end{Bmatrix} \quad (2.106)$$

Resolvendo o sistema em ordem a  $c_1$  e  $c_2$ :

$$c_1 = \frac{5f_0L^2 + 12M_0}{24EI}; \quad c_2 = -\frac{f_0L}{12EI} \quad (2.107)$$

Por fim, a solução aproximada para  $N=2$  é,

$$w_2(x) = \frac{5f_0L^2 + 12M_0}{24EI}x^2 - \frac{f_0L}{12EI}x^3 \quad (2.108)$$

Para  $N=3$  tem-se,

$$EI \begin{bmatrix} 4 & 6L & 8L^2 \\ 6L & 12L^2 & 18L^3 \\ 8L^2 & 18L^2 & \frac{144}{5}L^4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{3}f_0L^2 + 2M_0 \\ \frac{1}{4}f_0L^3 + 3M_0L \\ \frac{1}{5}f_0L^4 + 4M_0L^2 \end{Bmatrix} \quad (2.109)$$

A solução aproximada por  $N=3$  é,

$$w_3(x) = \frac{f_0x^2}{24EI}(6L^2 - 4Lx + x^2) + \frac{M_0x^2}{2EI} \quad (2.110)$$

que coincide com a solução exacta do problema. Ao calcular a solução aproximada para  $N>3$  daria  $c_j=0$  para  $j>3$ , já que a solução exacta foi atingida para  $N=3$ .

**Exemplo 2.6** – considere-se a equação de Poisson definida num quadrado de lado 1,

$$\begin{aligned} -k\nabla^2 T &= q_0 \quad \text{em } \Omega = \{(x,y) : 0 < (x,y) < 1\} \\ T &= 0 \quad \text{nas faces } x=1 \text{ e } y=1 \\ \frac{\partial T}{\partial n} &= 0 \quad \text{nas faces } x=0 \text{ e } y=0 \end{aligned} \quad (2.111)$$

em que  $T$  é a temperatura e  $q_0$  é a taxa de geração uniforme de calor no domínio  $\Omega$ . A formulação fraca foi desenvolvida no exemplo 2.3,

$$B(w, T) = I(w)$$

onde,

$$\begin{aligned} B(w, T) &= \int_0^1 \int_0^1 k \left( \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} \right) dx dy \\ I(w) &= \int_0^1 \int_0^1 w q_0 dx dy \end{aligned} \quad (2.112)$$

Seja considerada a aproximação da variável primária  $T$ ,

$$T_N = \sum_{i,j=1}^N c_{ij} \cos(\alpha_i x) \cos(\alpha_j y); \quad \alpha_i = \frac{1}{2}(2i-1)\pi \quad (2.113)$$

Como as condições de fronteira essenciais são homogéneas, então  $\phi_0=0$ . As funções de base  $\phi_i$  satisfazem as condições de fronteira essenciais e, neste caso, também satisfazem as condições de fronteira naturais. Se a escolha tivesse recaído em  $\hat{\phi}_i = \sin(i\pi x) \sin(i\pi y)$ , as condições de fronteira

essenciais seriam satisfeitas, mas neste caso  $T$  também seria nulo ( $T=0$ ) em  $x=0$  e  $y=0$ , logo  $\hat{\phi}_1$  não é admissível.

Os termos  $B_{ij}$  e  $F_i$  podem ser calculados substituindo (2.113) em (2.112). Como a série tem dois somatórios introduz-se a notação,

$$B_{(ij)(ml)} = k \int_0^1 \int_0^1 \left\{ \left[ \alpha_i \text{sen}(\alpha_i x) \cos(\alpha_j y) \right] \left[ \alpha_m \text{sen}(\alpha_m x) \cos(\alpha_l y) \right] + \left[ \alpha_j \text{sen}(\alpha_j x) \cos(\alpha_i y) \right] \left[ \alpha_l \text{sen}(\alpha_l x) \cos(\alpha_m y) \right] \right\} dx dy$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq m \text{ ou } j \neq l \\ \frac{1}{4} k (\alpha_i^2 + \alpha_j^2) & \text{se } i = m \text{ e } j = l \end{cases} \quad (2.114)$$

$$F_{ij} = q_0 \int_0^1 \int_0^1 \cos(\alpha_i x) \cos(\alpha_j y) dx dy = \frac{q_0}{\alpha_i \alpha_j} \text{sen}(\alpha_i) \text{sen}(\alpha_j)$$

Para calcular os integrais foram utilizadas as condições de ortogonalidade,

$$\int_0^1 \text{sen}(\alpha_i x) \text{sen}(\alpha_j x) dx = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ \frac{1}{2} & \text{se } i = j \end{cases} \quad (2.115)$$

$$\int_0^1 \cos(\alpha_i x) \cos(\alpha_j x) dx = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ \frac{1}{2} & \text{se } i = j \end{cases}$$

Já é possível calcular os coeficientes  $c_{ij}$ ,

$$c_{ij} = \frac{F_{ij}}{B_{(ij)(ml)}} = \frac{4q_0}{k} \frac{\text{sen}(\alpha_i) \text{sen}(\alpha_j)}{(\alpha_i^2 + \alpha_j^2) \alpha_i \alpha_j} \quad (2.116)$$

Para  $N=1$  a solução aproximada é dada por:

$$T_1 = \frac{32q_0}{k\pi^4} \cos\left(\frac{1}{2}\pi x\right) \cos\left(\frac{1}{2}\pi y\right) \quad (2.117)$$

Para  $N=2$  a solução de Rayleigh-Ritz é,

$$T_2 = \frac{q_0}{k} \left[ 0.3285 \cos\left(\frac{1}{2}\pi x\right) \cos\left(\frac{1}{2}\pi y\right) - 0.0219 \left( \cos\left(\frac{1}{2}\pi x\right) \cos\left(\frac{3}{2}\pi y\right) + \cos\left(\frac{3}{2}\pi x\right) \cos\left(\frac{1}{2}\pi y\right) \right) + 0.0041 \cos\left(\frac{3}{2}\pi x\right) \cos\left(\frac{3}{2}\pi y\right) \right] \quad (2.118)$$

Também é possível utilizar polinómios como função de aproximação. Por exemplo,  $\phi_1 = (1-x)(1-y)$  ou  $\phi_1 = (1-x^2)(1-y^2)$  satisfazem as condições de fronteira essenciais, e a segunda hipótese de função de base também satisfaz as condições de fronteira naturais e a solução aproximada para  $N=1$  é,

$$T_1 = \frac{5q_0}{16k} (1-x^2)(1-y^2) \quad (2.119)$$

A solução exacta do problema em estudo é dada pela expressão,

$$T(x, y) = \frac{q_0}{2k} \left[ (1-y^2) + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos(\alpha_n y) \cosh(\alpha_n x)}{\alpha_n^3 \cosh(\alpha_n)} \right] \quad (2.120)$$

### 2.4.3 – Método dos resíduos ponderados

É sempre possível escrever o integral ponderado de uma equação diferencial, seja esta linear ou não-linear em relação às variáveis dependentes. A formulação fraca também pode ser construída para toda e qualquer equação diferencial, mas nem sempre é possível construir o funcional quadrático. O método de Rayleigh-Ritz que se baseia na formulação fraca pode, desta forma, ser aplicado a qualquer tipo de problema, incluindo problemas não-lineares. O

método dos resíduos ponderados é uma generalização do método de Rayleigh-Ritz em que as funções independentes, ou seja as funções teste, podem ser escolhidas independentemente das funções de base ou de aproximação. No entanto as funções teste têm de ser linearmente independentes. Esta flexibilidade do método dos resíduos ponderados pode ser vantajosa em alguns problemas não-lineares.

O método dos resíduos ponderados pode ser descrito, de uma forma genérica, considerando o operador

$$A(u) = f \text{ em } \Omega \quad (2.121)$$

onde A é um operador diferencial, linear ou não-linear e f é uma função conhecida. São apresentados alguns exemplos:

$$\begin{aligned} 1 - A(u) &= -\frac{d}{dx} \left( a \frac{du}{dx} \right) + cu \\ 2 - A(u) &= \frac{d^2}{dx^2} \left( b \frac{d^2u}{dx^2} \right) \\ 3 - A(u) &= -\left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] \\ 4 - A(u) &= -\frac{d}{dx} \left( u \frac{du}{dx} \right) \\ 5 - A(u, v) &= u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (2.122)$$

Relembre-se que para que o operador seja linear nos seus argumentos deve satisfazer a relação,

$$A(\alpha u + \beta v) = \alpha A(u) + \beta A(v) \quad (2.123)$$

para qualquer escalar  $\alpha$  e  $\beta$  e para quaisquer variáveis u e v. Quando o operador não satisfaz (2.123) diz-se não-linear. Da lista (2.122) de operadores apenas o 4 e o 5 são não-lineares.

No método dos resíduos ponderados a solução aproximada é dada por uma expressão similar à do método de Rayleigh-Ritz,

$$u_N = \sum_{j=1}^N c_j \phi_j + \phi_0$$

Substituindo  $u_N$  em (2.121) obtém-se a função  $f_N = A(u_N)$ , sendo que o resíduo da aproximação é diferente de zero,

$$R = A(u_N) - f = A \left( \sum_{j=1}^N c_j \phi_j + \phi_0 \right) - f \neq 0 \quad (2.124)$$

No método dos resíduos ponderados os coeficientes  $c_j$  são determinados obrigando a que o integral ponderado do resíduo seja nulo,

$$\int_{\Omega} \psi_i(x, y) R(x, y, c_j) dx dy = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (2.125)$$

onde  $\Omega$  representa o domínio do problema,  $\psi_i$  as funções teste que, geralmente, são diferentes das funções aproximação  $\phi_i$ . O conjunto  $\{\psi_i\}$  deve ser linearmente independente para que o sistema de equações também o seja.

Como já foi referido, as condições de fronteira naturais estão incluídas na formulação fraca. No método dos resíduos ponderados dado pela equação (2.125) tal não acontece, e como a solução aproximada tem de satisfazer todas as condições de fronteira, então  $\phi_0$  deve satisfazer todas as condições de fronteira e as funções  $\phi_j$  devem satisfazer a componente homogénea das condições de fronteira naturais e essenciais. Consequentemente, e de um modo geral, as funções de base  $\phi_j$  utilizadas no método dos resíduos ponderados são de ordem superior às utilizadas no método de Rayleigh-Ritz.

**O método de Petrov-Galerkin** – o método dos resíduos ponderados diz-se de Petrov-Galerkin quando  $\psi_i \neq \phi_i$ . Se o operador  $A$  for linear, a expressão (2.125) simplifica-se,

$$\sum_{j=1}^N \left[ \int_{\Omega} \psi_i A(\phi_j) dx dy \right] c_j = \int_{\Omega} \psi_i [f - A(\phi_0)] dx dy \quad (2.126)$$

ou, na forma matricial

$$\sum_{j=1}^N A_{ij} c_j = F_i \quad (2.127)$$

Note-se que devido ao facto de  $\psi_i \neq \phi_i$  então a matriz  $\mathbf{A}$  não é simétrica,

$$A_{ij} = \int_{\Omega} \psi_i A(\phi_j) dx dy \neq A_{ji} \quad (2.128)$$

**O método de Galerkin** – quando  $\psi_i = \phi_i$  o método diz-se de Galerkin e as equações são dadas por,

$$\sum_{j=1}^N A_{ij} c_j = F_i$$

com,

$$A_{ij} = \int_{\Omega} \phi_i A(\phi_j) dx dy; F_i = \int_{\Omega} \phi_i [f - A(\phi_0)] dx dy \quad (2.129)$$

Tal como no caso anterior a matriz  $\mathbf{A}$  não é simétrica.

Refira-se que o método de Galerkin é diferente do método de Rayleigh-Ritz. O primeiro baseia-se no integral ponderado do resíduo e o segundo na formulação fraca da equação diferencial. No entanto, de ambos os métodos resulta igual solução quando:

- as condições de fronteira são apenas essenciais, logo os requisitos de  $\phi_i$  são iguais em ambos os métodos.
- as funções de aproximação para o método Rayleigh-Ritz são as iguais às do método de Galerkin.

**O método dos mínimos quadrados** – no método dos mínimos quadrados os parâmetros  $c_j$  são determinados minimizando o quadrado do integral do resíduo,

$$\frac{\partial}{\partial c_i} \int_{\Omega} R^2(x, y, c_j) dx dy = 0$$

ou,

$$\int_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial c_i} R dx dy = 0 \quad (2.130)$$

ou seja,  $\psi_i = \frac{\partial R}{\partial c_i}$ . Se o operador A for linear, então  $\psi_i = A(\phi_i)$  e a expressão (2.130) pode ser

simplificada,

$$\sum_{j=1}^N \left[ \int_{\Omega} A(\phi_i) A(\phi_j) dx dy \right] c_j = \int_{\Omega} A(\phi_i) [f - A(\phi_0)] dx dy \quad (2.131)$$

ou, na forma matricial

$$\sum_{j=1}^N A_{ij} c_j = F_i$$

com,

$$A_{ij} = \int_{\Omega} A(\phi_i) A(\phi_j) dx dy; F_i = \int_{\Omega} A(\phi_i) [f - A(\phi_0)] dx dy \quad (2.132)$$

Note-se que para o método dos mínimos quadrados e se o operador A for linear então a matriz **A** é simétrica.

**Exemplo 2.7** – considere-se a equação diferencial do exemplo 2.4 com o segundo conjunto de condições de fronteira,

$$\begin{aligned} -\frac{d^2 u}{dx^2} - u + x^2 &= 0 \\ u(0) &= 0; u'(1) = 1 \end{aligned} \quad (2.133)$$

Para o método dos resíduos ponderados tanto a função  $\phi_0$  como as funções  $\phi_i$  devem satisfazer as condições de fronteira,

$$\phi_0(0) = 0; \phi_0'(1) = 1 \text{ (condições de fronteira reais)}$$

$$\phi_i(0) = 0; \phi_i'(1) = 0 \text{ (componente homogénea das condições de fronteira)}$$

Perante estas condições foi escolhida  $\phi_0 = a + bx$ . Utilizando as duas condições obtém-se,

$$\phi_0(x) = x$$

Como uma das condições sobre as funções de base  $\phi_i$  está definida na derivada, então o polinómio que define as funções tem de ser, no mínimo, de segundo grau:  $\phi_1(x) = a + bx + cx^2$ . Utilizando as condições obtém-se,

$$\phi_1 = -cx(2-x)$$

Faz-se  $c=1$  e deste modo a constante  $c$  é absorvida pelo parâmetro  $c_1$ . Como segunda função de base considera-se  $\phi_1(x) = a + cx^2 + dx^3$ . Utilizando novamente as condições obtém-se,

$$\phi_2 = x^2 \left( 1 - \frac{2}{3}x \right)$$

Para  $N=2$  o resíduo é igual a,

$$R = - \left( 0 + \sum_{i=1}^N c_i \frac{d^2 \phi_i}{dx^2} \right) - \left( \phi_0 + \sum_{i=1}^N c_i \phi_i \right) + x^2 = c_1 (2 - 2x + x^2) + c_2 \left( -2 + 4x - x^2 + \frac{2}{3}x^3 \right) - x + x^2 \quad (2.134)$$

Considerem-se, agora, os vários métodos,

## Simulação Computacional

**Petrov-Galerkin** – sejam as funções de ponderação,

$$\psi_1 = x; \quad \psi_2 = x^2 \quad (2.135)$$

como tal,

$$\begin{cases} \int_0^1 xRdx = 0 \\ \int_0^1 x^2Rdx = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{7}{12}c_1 + \frac{13}{60}c_2 - \frac{1}{10} = 0 \\ \frac{11}{30}c_1 + \frac{11}{45}c_2 - \frac{1}{20} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{103}{682} \\ c_2 = -\frac{15}{682} \end{cases} \quad (2.136)$$

Como tal a solução aproximada para N=2 é igual a:

$$u_{PG} = 1.302053x - 0.173021x^2 - 0.014663x^3 \quad (2.137)$$

**Galerkin** – fazendo  $\psi_i = \phi_i$  tem-se,

$$\begin{cases} \int_0^1 x(2-x)Rdx = 0 \\ \int_0^1 x^2\left(1 - \frac{2}{3}x\right)Rdx = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{5}c_1 + \frac{28}{45}c_2 - \frac{7}{60} = 0 \\ \frac{17}{90}c_1 + \frac{29}{315}c_2 - \frac{1}{36} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{623}{4306} \\ c_2 = \frac{21}{4306} \end{cases} \quad (2.138)$$

A solução aproximada é,

$$u_G = 1.2894x - 0.1398x^2 - 0.00325x^3 \quad (2.139)$$

**Mínimos quadrados** – fazendo  $\psi_i = \frac{\partial R}{\partial c_i}$ , tem-se,

$$\begin{cases} \int_0^1 (2 - 2x + x^2)Rdx = 0 \\ -\int_0^1 \left(2 - 4x + x^2 - \frac{2}{3}x^3\right)Rdx = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{28}{15}c_1 - \frac{47}{90}c_2 - \frac{13}{60} = 0 \\ -\frac{47}{90}c_1 + \frac{253}{315}c_2 + \frac{1}{36} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{1292}{9935} \\ c_2 = \frac{991}{19870} \end{cases} \quad (2.140)$$

A solução aproximada é,

$$u_{MQ} = 1.2601x - 0.08017x^2 - 0.03325x^3 \quad (2.141)$$

### 3 – PASSOS BÁSICOS DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Os métodos variacionais estudados no capítulo anterior não são eficientes do ponto de vista computacional, isto porque é difícil seleccionar as funções de base que satisfazem as condições de fronteira, sobretudo quando a geometria é complexa. A aplicação computacional dos métodos variacionais fica, deste modo, limitada.

Idealmente, um método computacional eficiente deve ter as seguintes características:

1. ter uma base sólida de matemática e de física
2. não ter limitações do ponto de vista geométrico nem na aplicação de cargas
3. o procedimento da formulação do problema deve ser independente do domínio e das condições de fronteira específicos
4. o método deve ser suficientemente flexível por forma a permitir diferentes graus de aproximação sem ser necessário reformular todo o problema
5. o procedimento deve ser sistemático para poder ser implementado computacionalmente.

O método dos elementos finitos é uma técnica na qual o domínio é representado como uma colecção de domínios simples, designados por elementos finitos. Deste modo, é possível construir de forma sistemática as funções de base da solução aproximada do problema sobre cada um dos elementos finitos. O método dos elementos finitos difere dos métodos de Rayleigh-Ritz e dos resíduos ponderados na forma como as funções de base são construídas. Esta diferença é responsável por três características básicas do método dos elementos finitos:

1. divisão do todo em partes; permite a representação de domínios complexos como a colecção de geometrias simples, onde a determinação das funções de base é sistemática
2. obtenção de funções de base sobre cada um dos elementos finitos; as funções de base são polinómios que são obtidos por interpolação
3. assemblagem dos elementos que se baseia na continuidade da solução e no balanço dos fluxos internos.

As funções de base dependem não só da geometria mas também do número e coordenadas dos nós e da quantidade de variáveis primárias a interpolar (por exemplo, deslocamento ou deslocamento e rotação). Depois das funções de base serem obtidas, o procedimento utilizado para calcular os coeficientes é exactamente o mesmo que nos métodos de Rayleigh-Ritz ou dos resíduos ponderados.

O método dos elementos finitos tem a vantagem de ser computacionalmente atraente.

#### **Passos da análise por elementos finitos**

1. Discretização de um dado domínio numa colecção de elementos finitos predefinidos.

## Simulação Computacional

- a) Construção da malha de elementos finitos com elementos predefinidos.
  - b) Numerar os nós e os elementos.
  - c) Gerar as propriedades geométricas – coordenadas dos nós e a área – necessárias para o problema.
2. Construção das equações para um dos elementos tipo utilizados na malha.
- a) Construir a formulação variacional do problema diferencial sobre o elemento tipo.
  - b) Considerar a variável dependente na forma aproximada
$$u_h = \sum_{i=1}^n u_i \psi_i$$
e substituir no passo 2a) para obter as equações no elemento
$$\mathbf{K}^e \mathbf{u}^e = \mathbf{F}^e$$
  - c) Calcular ou seleccionar as funções de base  $\psi_i$  e calcular as matrizes para cada um dos elementos.
3. Assemblagem das equações dos elementos por forma a obter as equações de todo o problema.
- a) Identificar a continuidade entre-elementos das variáveis primárias (relação entre os graus de liberdade locais e os graus de liberdade globais – conectividade dos elementos) relacionando os nós dos elementos com os nós globais.
  - b) Identificar as condições de “equilíbrio” para as variáveis secundárias (relação entre cargas locais e cargas globais).
  - c) Assemblar as equações dos elementos utilizando os passos 3a) e 3b).
4. Imposição das condições de fronteira do problema.
- a) Identificar os graus de liberdade primários especificados.
  - b) Identificar os graus de liberdade secundários especificados (se ainda não foi feito em 3b).
5. Solução das equações assembladas.
6. Pós-processamento dos resultados.
- a) Calcular o gradiente da solução e outras quantidades desejadas a partir dos graus de liberdade primários calculados no passo 5.
  - b) Representar os resultados.

## 4 – PROBLEMAS UNIDIMENSIONAIS

### 4.1 – Introdução

Numa análise unidimensional não existem erros na descrição da geometria que, por sua vez, podem existir numa análise bidimensional e tridimensional. Neste caso há apenas erros devido à aproximação da solução.

Neste capítulo serão estudados problemas unidimensionais de barra e de viga. Os passos no desenvolvimento por elementos finitos são:

1. discretização do domínio por um conjunto de elementos finitos
2. construir a formulação fraca da equação diferencial
3. construção das funções interpoladoras
4. desenvolver o modelo de elementos finitos utilizando a formulação fraca
5. assemblagem dos elementos finitos por forma a obter os sistema de equações
6. imposição das condições de fronteira
7. resolver o sistema de equações
8. obter outras quantidades de interesse.

### 4.2 – Elemento barra

#### 4.2.1 – Discretização por elementos finitos

Nos problemas unidimensionais a discretização geométrica do domínio não gera erros. Para qualquer problema a escolha do tipo de elemento, o número de elementos e a densidade dos elementos, dependem da geometria do domínio do problema em análise e da exactidão desejada para a solução aproximada. Não há nenhuma fórmula estipulada para obter essa informação. As regras gerais para a geração da malha unidimensional, bidimensional ou tridimensional são as seguintes:

1. escolher os elementos que caracterizam o problema
2. o número, a forma e o tipo (linear, quadrático, etc.) dos elementos deve ser tal que a geometria do domínio seja representada com a exactidão pretendida
3. a densidade dos elementos deve ser tal que as regiões com grandes gradientes da solução sejam modelados de forma adequada, ou seja, elementos de ordem superior, ou um maior número de elementos, devem ser utilizados onde a solução tem maior gradiente
4. os refinamentos da malha devem variar gradualmente das regiões de grande densidade para as regiões de menor densidade. Os elementos de transição, se utilizados, devem estar longe das regiões críticas – grandes gradientes. Os elementos de transição são aqueles que ligam elementos de ordem menor aos de ordem superior.

#### 4.2.2 – Formulação fraca

O deslocamento axial de uma barra é definido pela equação diferencial,

$$-\frac{d}{dx}\left(EA \frac{du}{dx}\right) = f_x \text{ para } 0 < x < L \quad (4.1)$$

em que E representa o módulo de elasticidade, A a área da secção transversal da barra e  $f_x$  a carga distribuída a que a barra está sujeita.

No desenvolvimento da formulação fraca é apenas necessário considerar um elemento finito arbitrário com domínio  $\Omega^e$ . Para se obter a formulação fraca são seguidas as três etapas estudadas na secção 2.3.2. Na primeira etapa multiplica-se o resíduo da equação diferencial (4.1) pela função teste v e integra-se no domínio do problema,

$$\int_0^L v \left[ \frac{d}{dx}\left(EA \frac{du}{dx}\right) + f_x \right] dx = 0 \quad (4.2)$$

Integrando-se (4.2) por partes obtém-se a formulação fraca,

$$\int_0^L -\frac{dv}{dx} EA \frac{du}{dx} dx + \int_0^L f_x v dx + \left[ v EA \frac{du}{dx} \right]_0^L = 0 \quad (4.3)$$

ou,

$$\int_0^L EA \frac{dv}{dx} \frac{du}{dx} dx = \int_0^L f_x v dx + \left[ v EA \frac{du}{dx} \right]_0^L \quad (4.4)$$

Da equação (4.4) identifica-se a variável primária e a variável secundária. A variável primária é o deslocamento axial u e a variável secundária é o esforço axial  $N = EA \frac{du}{dx}$ . Como tal, as condições de fronteira essenciais são definidas sobre o deslocamento u e as condições de fronteira naturais são definidas especificando o esforço axial N.

Sabendo que  $\varepsilon_{xx} = \frac{du}{dx}$  e que  $\sigma_{xx} = E \frac{du}{dx} = E\varepsilon_{xx}$  pode-se escrever a formulação fraca na forma,

$$\int_0^L A \sigma_{xx}(u) \varepsilon_{xx}(v) dx = \int_0^L f_x v dx + [vN]_0^L \quad (4.5)$$

em que v é o deslocamento virtual. A expressão (4.5) que representa a formulação fraca da equação diferencial da barra, também representa o princípio dos trabalhos virtuais do problema de barra, em que o primeiro termo é o trabalho virtual das tensões e o segundo termo é o trabalho virtual das forças distribuídas e o último termo é o trabalho virtual das forças concentradas.

A formulação fraca dada pela expressão (4.4) também pode ser escrita através de funcionais,

$$B(v,u) = I(v) \quad (4.6)$$

com,

$$B(v,u) = \int_0^L EA \frac{dv}{dx} \frac{du}{dx} dx \text{ e } I(v) = \int_0^L f_x v dx + [vN]_0^L \quad (4.7)$$

A formulação fraca definida pelas equações (4.6) e (4.7) forma a base do modelo de elementos finitos da equação diferencial da barra definida por (4.1). Como o funcional B(v,u) é

simétrico e bilinear é possível escrever o funcional quadrático,

$$I(u) = \frac{1}{2}B(u,u) - l(u) \quad (4.8)$$

em que  $U = \frac{1}{2}B(u,u)$  representa a energia elástica de deformação e  $l(u)$  representa o potencial de forças.

#### 4.2.3 – Modelo de elementos finitos

No método dos elementos finitos a solução aproximada é um polinómio, e tal como no método de Rayleigh-Ritz é dada por coeficientes e funções de base ou de aproximação.

$$u(x) \approx u_h(x) = \sum_{j=1}^n u_j^e \psi_j^e \quad (4.9)$$

em que  $u_j^e$  representa o valor de  $u_h$  no nó  $j$  do elemento  $e$ , e  $\psi_j^e$  é a função interpoladora com a propriedade,

$$\psi_j^e(x_j^e) = 1 \text{ e } \psi_j^e(x_i^e) = 0 \text{ com } i \neq j \quad (4.10)$$

Saliente-se que  $x_j^e$  é a coordenada do nó  $j$  do elemento  $e$ .

Substituindo a aproximação por elementos finitos (4.9) na formulação fraca (4.5) obtém-se,

$$\int_0^L EA \frac{dv}{dx} \sum_{j=1}^n u_j^e \frac{d\psi_j^e}{dx} dx = \int_0^L v f_x dx + v(0)N(0) + v(L)N(L) \quad \forall v \text{ admissível} \quad (4.11)$$

A equação (4.11) é verdadeira para qualquer função  $v$  admissível. Como são necessárias  $n$  equações independentes para calcular as  $n$  incógnitas  $u_1^e, u_2^e, \dots, u_n^e$  escolhem-se  $n$  equações independentes para  $v$ , ou seja,  $v = \psi_1^e, \psi_2^e, \dots, \psi_n^e$ . A equação  $i$  do sistema de equações é obtida substituindo  $v$  por  $\psi_i^e$  em (4.11),

$$\int_0^L EA \frac{d\psi_i^e}{dx} \sum_{j=1}^n u_j^e \frac{d\psi_j^e}{dx} dx = \int_0^L \psi_i^e f_x dx + \psi_i^e(0)N(0) + \psi_i^e(L)N(L) \quad (4.12)$$

O sistema de equações que permite calcular as incógnitas  $u_1^e, u_2^e, \dots, u_n^e$  pode ser escrito na forma matricial,

$$\mathbf{K}^e \mathbf{u}^e = \mathbf{F}^e \quad (4.13)$$

com,

$$K_{ij}^e = \int_0^L EA \frac{d\psi_i^e}{dx} \frac{d\psi_j^e}{dx} dx \text{ e } F_i^e = \int_0^L \psi_i^e f_x dx + \psi_i^e(0)N(0) + \psi_i^e(L)N(L) \quad (4.14)$$

Note-se que a matriz  $\mathbf{K}^e$  é simétrica.

#### 4.2.4 – Funções de interpolação

A aproximação por elementos finitos  $u_h$  da solução  $u$  sobre o elemento finito com domínio  $\Omega^e$  deve, de modo a que a solução aproximada convirja para a solução exacta, satisfazer as seguintes condições:

- $u_h$  deve ser diferenciável como estipulado pela formulação fraca do problema, de modo a que não haja derivadas nulas

- os polinómios utilizados para representar  $u_h$  devem ser completos, isto é, devem ter todos os termos, desde a ordem inferior à superior
- todos os termos do polinómio devem ser linearmente independentes.

Ao analisar a formulação fraca (4.6) do problema de barra observa-se que a solução  $u$  é derivada em ordem à coordenada  $x$  apenas uma vez, como tal a solução aproximada deve ser pelo menos linear em  $x$ ,

$$u_h(x) = c_1 + c_2x \quad (4.15)$$

com dois termos linearmente independentes. Para se escreverem os coeficientes  $c_i$  ( $i=1, 2$ ) em função dos pontos nodais, é necessário identificar dois nós por elemento. O elemento é uma linha com um nó em cada uma das extremidades, como se observa na figura 4.1.

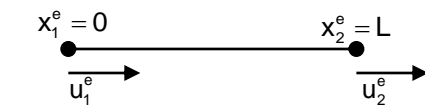


figura 4.1 – elemento genérico de barra

A aproximação por elementos finitos deve ser tal que satisfaça as seguintes condições:

$$u_h(x_i^e) = u_i^e \quad (i = 1, 2) \quad (4.16)$$

onde  $x_i^e$  ( $i=1, 2$ ) representa a coordenada  $x$  do nó  $i$  do elemento. As duas constantes  $c_i$  são calculadas em função dos deslocamentos nodais  $u_i^e$  através de,

$$\begin{cases} u_1^e = u_h(x_1^e) = u_h(0) = c_1 \\ u_2^e = u_h(x_2^e) = u_h(L) = c_1 + c_2L \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = u_1^e \\ c_1 + c_2L = u_2^e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = u_1^e \\ c_2 = \frac{u_2^e - u_1^e}{L} \end{cases} \quad (4.17)$$

Substituindo os coeficientes  $c_1$  e  $c_2$  em (4.15) e desenvolvendo obtém-se,

$$u_h(x) = c_1 + c_2x = u_1^e + \frac{u_2^e - u_1^e}{L}x = u_1^e - \frac{u_1^e}{L}x + \frac{u_2^e}{L}x = u_1^e \left( \frac{L-x}{L} \right) + u_2^e \frac{x}{L} \quad (4.18)$$

Comparando as equações (4.9) e (4.18) verifica-se que as funções interpoladoras  $\psi_1^e$  e  $\psi_2^e$ , também designadas por funções de forma, para o elemento genérico de barra (figura 4.1) são iguais a,

$$\psi_1^e(x) = \frac{L-x}{L} \quad \text{e} \quad \psi_2^e(x) = \frac{x}{L} \quad (4.19)$$

#### 4.2.5 – Cálculo de matrizes e vectores

Na equação (4.13) foi definido o sistema de equações que permite calcular os deslocamentos nodais  $u_1^e$  e  $u_2^e$ . Como o elemento barra tem dois nós e dois graus de liberdade, isto é, dois deslocamentos nodais, a matriz  $\mathbf{K}^e$ , designada por matriz de rigidez, é quadrada com dimensão  $2 \times 2$ . Considerando  $E$  e  $A$  constantes no elemento finito genérico, calcula-se a matriz de rigidez do elemento,

$$\begin{aligned}
 K_{11}^e &= \int_0^L EA \frac{d\psi_1^e}{dx} \frac{d\psi_1^e}{dx} dx = \int_0^L EA \left(-\frac{1}{L}\right)^2 dx = \frac{EA}{L} \\
 K_{12}^e &= K_{21}^e = \int_0^L EA \frac{d\psi_1^e}{dx} \frac{d\psi_2^e}{dx} dx = \int_0^L EA \left(-\frac{1}{L}\right) \left(\frac{1}{L}\right) dx = -\frac{EA}{L} \\
 K_{22}^e &= \int_0^L EA \frac{d\psi_2^e}{dx} \frac{d\psi_2^e}{dx} dx = \int_0^L EA \left(\frac{1}{L}\right)^2 dx = \frac{EA}{L}
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

Logo a matriz  $\mathbf{K}^e$  do elemento genérico de barra é,

$$\mathbf{K}^e = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.21}$$

Também é possível calcular o vector de forças  $\mathbf{F}^e$ ,

$$\begin{aligned}
 F_1^e &= \int_0^L \psi_1^e f_x(x) dx + N(0) \\
 F_2^e &= \int_0^L \psi_2^e f_x(x) dx + N(L)
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

Se a carga distribuída  $f_x(x)$  for constante ao longo de  $x$ , então o vector de forças é igual a:

$$\begin{aligned}
 F_1^e &= \int_0^L \frac{L-x}{L} f_x dx + N(0) = \frac{f_x L}{2} + N(0) \\
 F_2^e &= \int_0^L \frac{x}{L} f_x dx + N(L) = \frac{f_x L}{2} + N(L)
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

Logo, o vector de forças  $\mathbf{F}^e$ , quando  $f_x(x)$  é constante é dado por:

$$\mathbf{F}^e = \begin{Bmatrix} \frac{f_x L}{2} + N(0) \\ \frac{f_x L}{2} + N(L) \end{Bmatrix} \tag{4.24}$$

em que  $N(0)$  e  $N(L)$  representam as forças concentradas aplicadas nos nós 1 e 2, respectivamente.  $N(0)$  e  $N(L)$  são positivos se as forças tiverem o mesmo sentido que o deslocamento nodal positivo.

#### 4.2.6 – Assemblagem das equações definidas nos elementos

A assemblagem das equações de elementos finitos baseia-se em 2 princípios:

1. continuidade das variáveis primárias
2. equilíbrio das variáveis secundárias.

O modo como se faz a assemblagem vai ser ilustrado pela malha de elementos finitos da figura 4.2.

Seja  $\mathbf{K}^e$  a matriz do elemento  $e$ . Da figura 4.2 retira-se a seguinte correspondência, isto é, as seguintes relações de conectividade entre os nós locais e globais,

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \tag{4.25}$$

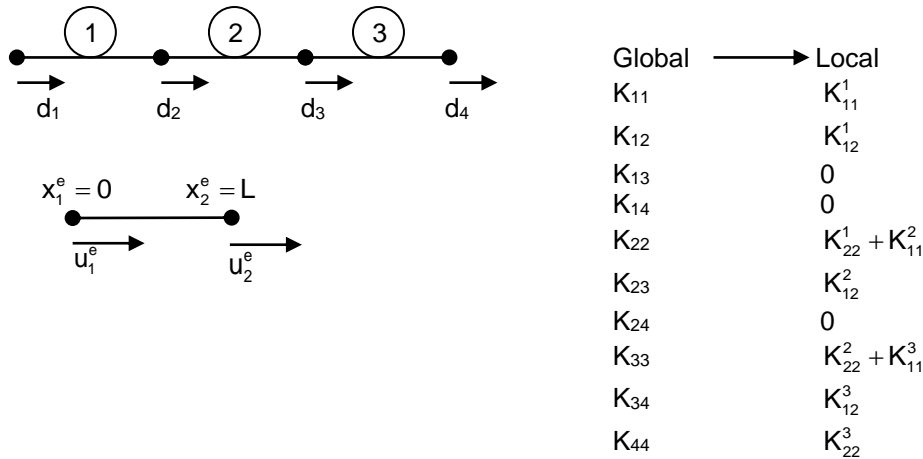


Figura 4.2 – exemplo de montagem para barra

A correspondência entre os graus de liberdade locais  $u_i^e$  e globais  $d_j$  é,

$$u_1^1 = d_1; u_2^1 = u_1^2 = d_2; u_2^2 = u_1^3 = d_3; u_2^3 = d_4 \quad (4.26)$$

em que é imposta a continuidade das variáveis primárias nos nós comuns dos elementos 1 e 2, e 2 e 3. A continuidade da variável primária nos nós garante a continuidade da variável ao longo de toda a fronteira entre elementos da mesma ordem, isto para problemas unidimensionais, bidimensionais e tridimensionais.

Em geral, numa malha de elementos finitos a montagem dos elementos significa colocar os termos de  $K_{ij}^e$  e de  $F_i^e$  nos locais apropriados da matriz  $\mathbf{K}$  global e do vector de forças global  $\mathbf{F}$ . Tal é feito tendo em consideração as relações de conectividade. Para o caso ilustrado na figura 4.2 o sistema de equações global é dado por,

$$\mathbf{Kd} = \mathbf{F} = \mathbf{f} + \mathbf{P} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & 0 & 0 \\ K_{12}^1 & K_{22}^1 + K_{22}^2 & K_{23}^2 & 0 \\ 0 & K_{23}^2 & K_{22}^2 + K_{33}^3 & K_{34}^3 \\ 0 & 0 & K_{34}^3 & K_{44}^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{x1}^1 \\ f_{x2}^1 + f_{x1}^2 \\ f_{x2}^2 + f_{x1}^3 \\ f_{x2}^3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{Bmatrix} \quad (4.27)$$

em que o vector  $\mathbf{f}$  é a contribuição das cargas distribuídas e  $P_i$  representa a carga concentrada aplicada no nó  $i$ .

#### 4.2.7 – Pós-processamento

A solução aproximada obtida pelo método dos elementos finitos num qualquer ponto  $x$  do elemento  $\Omega^e$  é dada por,

$$u_h^e(x) = \sum_{j=1}^2 u_j^e \psi_j^e(x) \quad (4.28)$$

e a derivada da solução é dada por,

$$\frac{du_h^e}{dx} = \sum_{j=1}^2 u_j^e \frac{d\psi_j^e}{dx} \quad (4.29)$$

Após a resolução do sistema de equações global (4.27), as equações (4.28) e (4.29) permitem calcular, respectivamente, o deslocamento axial e a sua derivada em qualquer local

do elemento finito. A informação gerada pela interpolação dada por (4.28) é útil para obter as isolinhas de  $u_h$ .

As derivadas da solução aproximada  $u_h(x)$  não são contínuas nas uniões entre elementos, porque a continuidade das derivadas não é imposta pelo método dos elementos finitos. A formulação fraca sugere que a variável primária  $u$  seja a variável nodal. Se mais variáveis de ordem superior ou dependentes forem tratadas como variáveis nodais de modo a que também sejam contínuas nas fronteiras entre-elementos, então o grau de interpolação (ou a ordem do elemento) aumenta. No entanto, a continuidade de variáveis que não sejam primárias pode violar a física do problema. Por exemplo, obrigando a que a variável  $\frac{du}{dx}$  seja contínua viola-se

a continuidade de  $EA \frac{du}{dx}$  na interface de dois materiais distintos.

### 4.3 – Elemento viga

O deslocamento transversal  $v$  de uma viga é descrito pela equação diferencial,

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( EI \frac{d^2 v}{dx^2} \right) = f_y(x) \quad \text{para } 0 < x < L \quad (4.30)$$

em que  $E$  é o módulo de elasticidade,  $I$  é o momento de inércia da secção da viga e  $f_y(x)$  é a carga distribuída transversal a que a viga está sujeita. Para se chegar à formulação fraca começa-se por integrar o resíduo de (4.30) multiplicado pela função teste  $w$ ,

$$\int_0^L \left[ w \frac{d^2}{dx^2} \left( EI \frac{d^2 v}{dx^2} \right) - w f_y(x) \right] dx = 0 \quad (4.31)$$

Como a equação diferencial é de 4º grau é necessário integrar por partes duas vezes consecutivas de modo a obter a formulação fraca,

$$-\int_0^L \left[ \frac{dw}{dx} \frac{d}{dx} \left( EI \frac{d^2 v}{dx^2} \right) - w f_y(x) \right] dx + \left[ w \frac{d}{dx} EI \frac{d^2 v}{dx^2} \right]_0^L = 0 \quad (4.32)$$

Após a segunda integração por partes obtém-se,

$$\int_0^L \frac{d^2 w}{dx^2} EI \frac{d^2 v}{dx^2} dx = \int_0^L w f_y dx + \left[ \frac{dw}{dx} EI \frac{d^2 v}{dx^2} - w \frac{d}{dx} EI \frac{d^2 v}{dx^2} \right]_0^L \quad (4.33)$$

Neste problema há duas variáveis primárias, o deslocamento transversal  $v$  e a rotação  $\frac{dv}{dx}$ ,

e duas variáveis secundárias, o esforço transversal  $V = \frac{d}{dx} \left( EI \frac{d^2 v}{dx^2} \right)$  e o momento flector,

$$M = EI \frac{d^2 v}{dx^2} .$$

A formulação fraca pode ser escrita através de funcionais,

$$B(w, v) = I(w)$$

com,

$$B(w, v) = \int_0^L EI \frac{d^2 w}{dx^2} \frac{d^2 v}{dx^2} dx \quad e \quad l(w) = \int_0^L w f_y dx + \left[ \frac{dw}{dx} EI \frac{d^2 v}{dx^2} - w \frac{d}{dx} EI \frac{d^2 v}{dx^2} \right]_0^L \quad (4.34)$$

No próximo passo desenvolve-se o modelo de elementos finitos associado ao elemento de viga. Para tal, define-se a solução aproximada por elementos finitos  $v_h(x)$ ,

$$v(x) \approx v_h(x) = \sum_{j=1}^n q_j^e \phi_j^e \quad (4.35)$$

em que os  $q_j^e$  são os graus de liberdade do elemento e, sendo que os  $\phi_j^e$  são as funções de forma associadas. Considere-se um elemento com 2 nós, como a viga tem duas variáveis primárias há dois graus de liberdade por nó: deslocamento transversal e rotação (ver figura 4.3).



Figura 4.3 – elemento genérico de viga

Como o elemento tem 4 graus então tem 4 funções de forma com as seguintes propriedades,

$$\begin{aligned} \phi_1^e(0) &= 1 ; \left( \frac{d\phi_1^e}{dx} \right)_{x=0} = \phi_1^e(L) = \left( \frac{d\phi_1^e}{dx} \right)_{x=L} = 0 \\ \left( \frac{d\phi_2^e}{dx} \right)_{x=0} &= 1 ; \phi_2^e(0) = \phi_2^e(L) = \left( \frac{d\phi_2^e}{dx} \right)_{x=L} = 0 \\ \phi_3^e(L) &= 1 ; \phi_3^e(0) = \left( \frac{d\phi_3^e}{dx} \right)_{x=0} = \left( \frac{d\phi_3^e}{dx} \right)_{x=L} = 0 \\ \left( \frac{d\phi_4^e}{dx} \right)_{x=L} &= 1 ; \phi_4^e(0) = \left( \frac{d\phi_4^e}{dx} \right)_{x=0} = \phi_4^e(L) = 0 \end{aligned} \quad (4.36)$$

ou seja, a função de forma  $\phi_i$  toma o valor de 1 em  $q_i^e$  e o valor zero para os outros graus de liberdade.

Como o elemento tem 4 graus de liberdade, então para a expressão (4.35) tem-se  $n=4$ , ou seja, a aproximação do deslocamento é dada por um polinómio do 3º grau,

$$v_h(x) = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3 \quad e \quad \frac{dv_h}{dx} = c_2 + 2c_3 x + 3c_4 x^2 \quad (4.37)$$

Para calcular os 4 coeficientes,  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  e  $c_4$  utiliza-se a informação de (4.36),

$$\begin{cases} q_1^e = v_h(0) = c_1 \\ q_2^e = \left( \frac{dv_h}{dx} \right)_{x=0} = c_2 \\ q_3^e = v_h(L) = c_1 + c_2 L + c_3 L^2 + c_4 L^3 \\ q_4^e = \left( \frac{dv_h}{dx} \right)_{x=L} = c_2 + 2c_3 L + 3c_4 L^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = q_1^e \\ c_2 = q_2^e \\ c_3 = -\frac{3q_1^e}{L^2} - \frac{2q_2^e}{L} + \frac{3q_3^e}{L^2} - \frac{q_4^e}{L} \\ c_4 = \frac{2q_1^e}{L^3} + \frac{q_2^e}{L^2} - \frac{2q_3^e}{L^3} + \frac{q_4^e}{L^2} \end{cases} \quad (4.38)$$

Comparando (4.37) com (4.35) obtêm-se as funções de forma do elemento de viga,

$$\phi_1^e = 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3}; \quad \phi_2^e = x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}; \quad \phi_3^e = \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3}; \quad \phi_4^e = -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \quad (4.39)$$

É possível escrever a rotação aproximada do elemento,

$$\frac{dv_h}{dx} = \sum_{j=1}^4 q_j^e \frac{d\phi_j^e}{dx} \quad (4.40)$$

Ao substituir a solução aproximada (4.35) na formulação fraca (4.33) obtém-se,

$$\int_0^L EI \frac{d^2 w}{dx^2} \frac{d^2}{dx^2} \left( \sum_{j=1}^4 q_j^e \phi_j^e \right) dx = \int_0^L f_y w dx + P_1 w(0) + P_2 \left( \frac{dw}{dx} \right)_{x=0} + P_3 w(L) + P_4 \left( \frac{dw}{dx} \right)_{x=L} \quad (4.41)$$

em que  $P_i$  representa a carga concentrada associada ao grau de liberdade  $i$ . Saliente-se que  $P_1$  e  $P_3$  são forças transversais e que  $P_2$  e  $P_4$  são momentos flectores.

Para determinar os 4 graus de liberdade  $q_i^e$  ( $i=1, \dots, 4$ ) são necessárias 4 equações. A equação  $i$  é obtida substituindo  $w$  por  $\phi_i^e$  em (4.41),

$$\int_0^L EI \frac{d^2 \phi_i^e}{dx^2} \sum_{j=1}^4 q_j^e \frac{d\phi_j^e}{dx} dx = \int_0^L f_y \phi_i^e dx + P_1 \phi_i^e(0) + P_2 \left( \frac{d\phi_i^e}{dx} \right)_{x=0} + P_3 \phi_i^e(L) + P_4 \left( \frac{d\phi_i^e}{dx} \right)_{x=L} \quad (4.42)$$

O sistema de equações que permite calcular os graus de liberdade escreve-se na forma,

$$\mathbf{K}^e \mathbf{q}^e = \mathbf{F}^e \quad (4.43)$$

com,

$$\mathbf{K}_{ij}^e = \int_0^L EI \frac{d^2 \phi_i^e}{dx^2} \frac{d^2 \phi_j^e}{dx^2} dx \quad \text{e} \quad \mathbf{F}_i^e = \int_0^L f_y \phi_i^e dx + P_1 \phi_i^e(0) + P_2 \left( \frac{d\phi_i^e}{dx} \right)_{x=0} + P_3 \phi_i^e(L) + P_4 \left( \frac{d\phi_i^e}{dx} \right)_{x=L} \quad (4.44)$$

Considerando  $EI$  constante em todo o elemento de viga obtém-se a matriz de rigidez,

$$\mathbf{K}^e = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

Por sua vez o vector de forças para  $f_y$  constante é igual a,

$$\mathbf{F}^e = \begin{Bmatrix} \frac{f_y L}{2} \\ \frac{f_y L^2}{12} \\ \frac{f_y L}{2} \\ -\frac{f_y L^2}{12} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{Bmatrix} = \mathbf{f} + \mathbf{P} \quad (4.46)$$

em que,  $\mathbf{f}$  é vector de cargas distribuídas e  $\mathbf{P}$  é o vector de cargas concentradas – forças e momentos.

Na análise de um problema de elementos finitos é necessário assemblar as matrizes de cada um dos elementos de modo a formar a matriz de rigidez global. O mesmo pode ser referido em relação ao vector de cargas distribuídas. A assemblagem é feita do mesmo modo ao já ilustrado para o elemento barra. Com base na malha da figura 4.4 ilustra-se a assemblagem de um problema de vigas.

### Simulação Computacional

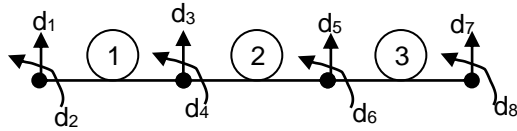


Figura 4.4 – exemplo de assemblagem para viga

Seja  $K^e$  a matriz de rigidez do elemento  $e$ . A matriz de conectividade,

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

relaciona os graus de liberdade locais com os globais.

Para este caso concreto os sistema de equações global é dado por,

$$\begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & K_{13}^1 & K_{14}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{12}^1 & K_{22}^1 & K_{23}^1 & K_{24}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{13}^1 & K_{23}^1 & K_{33}^1 + K_{11}^2 & K_{34}^1 + K_{12}^2 & K_{13}^2 & K_{14}^2 & 0 & 0 \\ K_{14}^1 & K_{24}^1 & K_{34}^1 + K_{12}^2 & K_{44}^1 + K_{22}^2 & K_{23}^2 & K_{24}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{13}^2 & K_{23}^2 & K_{33}^2 + K_{11}^3 & K_{34}^2 + K_{12}^3 & K_{13}^3 & K_{14}^3 \\ 0 & 0 & K_{14}^2 & K_{24}^2 & K_{34}^2 + K_{12}^3 & K_{44}^2 + K_{22}^3 & K_{23}^3 & K_{24}^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_{13}^3 & K_{23}^3 & K_{33}^3 & K_{34}^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_{14}^3 & K_{24}^3 & K_{34}^3 & K_{44}^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \\ d_7 \\ d_8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{y1}^1 \\ f_{y2}^1 \\ f_{y3}^1 + f_{y1}^2 \\ f_{y4}^1 + f_{y2}^2 \\ f_{y3}^2 + f_{y1}^3 \\ f_{y4}^2 + f_{y2}^3 \\ f_{y3}^3 \\ f_{y4}^3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \\ P_7 \\ P_8 \end{Bmatrix} \quad (4.48)$$

## 5 – ELASTICIDADE PLANA

### 5.1 – Introdução

No capítulo anterior foram estudados problemas unidimensionais, neste capítulo serão estudados problemas bidimensionais, mais concretamente problemas de elasticidade plana, caracterizado por um par de equações diferenciais expressas em termos das duas variáveis dependentes que representam as duas componentes do deslocamento.

### 5.2 – Definição do problema

Considere-se um corpo linear elástico  $\Omega$  de espessura  $t$  uniforme e fronteira  $\Gamma$ , como se pode ver na figura 5.1. Se a espessura for muito grande comparada com a dimensão do domínio  $\Omega$  então considera-se que se está perante um caso de deformação plana,

$$\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zz} = 0 \quad (5.1)$$

Se a espessura for pequena comparado com a dimensão do domínio  $\Omega$  então considera-se que se está perante um caso de tensão plana,

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0 \quad (5.2)$$

Ambos os tipos de análises são simplificações de análises tridimensionais que não têm cargas na direcção  $z$ .

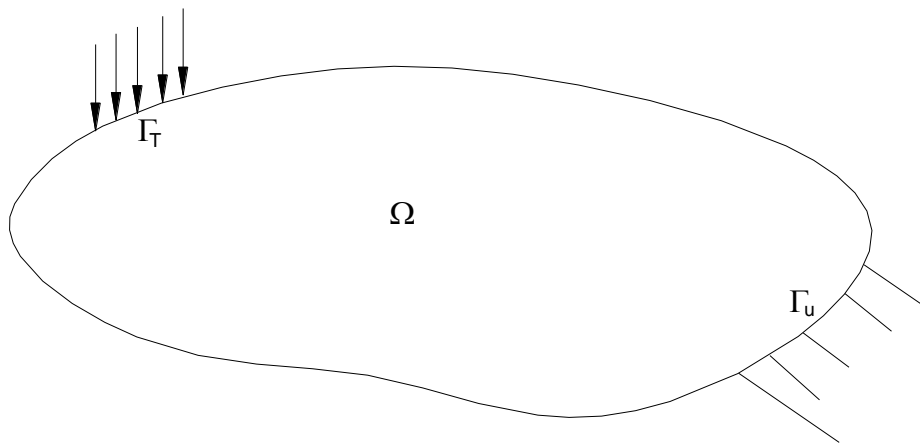


Figura 5.1 – elasticidade plana

As equações diferenciais que traduzem problemas de elasticidade são as equações de equilíbrio,

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = \mathbf{0} \Rightarrow \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0 \quad j = 1, 2, 3$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} + f_x = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} + f_y = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + f_z = 0 \end{cases} \quad (5.3)$$

com as condições de fronteira,

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}n_j &= T_i \quad \text{em } \Gamma_T \\ u_i &= \bar{u}_0 \quad \text{em } \Gamma_u\end{aligned}\quad (5.4)$$

em que  $T_i$  e  $\bar{u}_0$  são valores prescritos de força e de deslocamento, nas fronteiras  $\Gamma_T$  e  $\Gamma_u$ , respectivamente.

Para se obter a formulação fraca multiplica-se a equação diferencial (5.3) pela função teste  $w$  e integra-se no volume  $\Omega$ ,

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} w_i d\Omega + \int_{\Omega} f_i w_i d\Omega = 0 \quad (5.5)$$

Integrando por partes,

$$-\int_{\Omega} \sigma_{ij} \frac{\partial w_i}{\partial x_j} d\Omega + \int_{\Gamma} \sigma_{ij} n_j w_i d\Gamma + \int_{\Omega} f_i w_i d\Omega = 0 \quad (5.6)$$

Relembre-se que o tensor das tensões  $\sigma$  e o tensor das extensões  $\varepsilon$  são simétricos. Para pequenas deformações o tensor das extensões é dado por,

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (5.7)$$

em que  $\mathbf{u}$  é o campo de deslocamentos,

$$\mathbf{u} = (u_x, u_y) = (u, v) \quad (5.8)$$

Sabendo que o tensor das extensões é simétrico pode-se escrever (5.6) na forma,

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \sigma_{ij} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \right) d\Omega &= \int_{\Gamma} \sigma_{ij} n_j w_i d\Gamma + \int_{\Omega} f_i w_i d\Omega \Leftrightarrow \\ \int_{\Omega} \sigma_{ij} (\mathbf{u}) \varepsilon_{ij} (\mathbf{w}) d\Omega &= \int_{\Gamma_T} \mathbf{T} \mathbf{w} d\Gamma + \int_{\Gamma_u} \mathbf{T} \mathbf{w} d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{f} \mathbf{w} d\Omega\end{aligned}\quad (5.9)$$

em que  $\mathbf{u}$  é o campo de deslocamentos real e  $\mathbf{w}$  é o campo de deslocamentos virtual.

A expressão (5.9) é a formulação fraca do problema de elasticidade linear e também é o princípio dos trabalhos virtuais.

Através da lei constitutiva do material é possível escrever o tensor das tensões em função do tensor das extensões,

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} ; \boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} ; \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (5.10)$$

em que  $\mathbf{D}$  é a matriz constitutiva. Simplificando a formulação fraca (5.9),

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T(\mathbf{u}) \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) d\Omega = \int_{\Gamma_T} \mathbf{T} \mathbf{w} d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{f} \mathbf{w} d\Omega \quad (5.11)$$

com  $u_i = \bar{u}_0$  em  $\Gamma_u$ .

A formulação fraca (5.11), também designado por princípio dos trabalhos virtuais, pode ser

escrita através de funcionais,

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = I(\mathbf{w}) \quad (5.12)$$

com,

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T(\mathbf{u}) \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) d\Omega \text{ e } I(\mathbf{w}) = \int_{\Gamma_T} \mathbf{T} \mathbf{w} d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{f} \mathbf{w} d\Omega \quad (5.13)$$

Como  $B(\mathbf{u}, \mathbf{w})$  é simétrico e bilinear e  $I(\mathbf{w})$  é linear, então é possível obter o funcional quadrático,

$$I(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} B(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - I(\mathbf{u}) \quad (5.14)$$

O modelo de elementos finitos será obtido através do funcional quadrático.

### 5.3 – Elemento triangular de 3 nós

Considere-se o elemento triangular de 3 nós representado na figura 5.2.

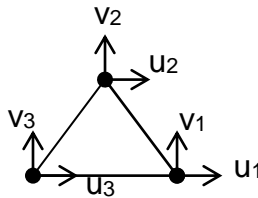


Figura 5.2 – exemplo de um elemento triangular de 3 nós

No elemento finito, a solução aproximada do deslocamento é dada por,

$$\mathbf{u}(x, y) \approx \mathbf{u}_h(x, y) = \sum_{j=1}^3 q_j \psi_j \Rightarrow \begin{cases} u_h = \sum_{j=1}^3 u_j^e \psi_j \\ v_h = \sum_{j=1}^3 v_j^e \psi_j \end{cases} \quad (5.15)$$

em que os  $q_j$  são os deslocamentos nodais,  $u_j$  segundo o eixo dos  $xx$  e  $v_j$  segundo o eixo dos  $yy$ .  $\psi_j$  são as funções de forma.

Nesta fase, considere-se apenas o 1º termo do funcional quadrático (5.14),

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T(\mathbf{u}) \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) d\Omega = t \int_A \boldsymbol{\varepsilon}^T(\mathbf{u}) \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) dA \quad (5.16)$$

em que  $t$  representa a espessura e  $A$  a área do elemento. Para materiais elásticos, isotrópicos e considerando tensão plana a matriz constitutiva é

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

em que  $E$  representa o módulo de elasticidade ou o módulo de Young e  $\nu$  representa o coeficiente de Poisson.

O próximo objectivo é simplificar a expressão (5.16) de modo a que seja possível obter a matriz de rigidez do elemento e,  $\mathbf{K}^e$ . Para tal começa-se por escrever a solução aproximada na forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u}_h \\ \mathbf{v}_h \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_1 & 0 & \psi_2 & 0 & \psi_3 & 0 \\ 0 & \psi_1 & 0 & \psi_2 & 0 & \psi_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = [\Psi]\{\mathbf{q}\} \quad (5.18)$$

O campo de extensões também pode ser escrito na forma matricial,

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{Bmatrix} = [\mathbf{C}][\partial \mathbf{u}] \quad (5.19)$$

Note-se que  $\varepsilon_{zz}$ ,  $\gamma_{xz}$  e  $\gamma_{yz}$  podem não ser nulos já que o problema considerado é de tensão plana.

A matriz que define a derivada do deslocamento  $[\partial \mathbf{u}]$ , pode ser escrita na forma,

$$[\partial \mathbf{u}] = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_h \\ v_h \end{Bmatrix} = [\partial \mathbf{x}][\Psi]\{\mathbf{q}\} \quad (5.20)$$

Neste momento é possível rescrever a expressão (5.16) na forma,

$$\mathbf{B}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \mathbf{t} \int_A \{\mathbf{q}\}^T [\Psi]^T [\partial \mathbf{x}]^T [\mathbf{C}]^T [\mathbf{D}][\mathbf{C}][\partial \mathbf{x}][\Psi]\{\mathbf{q}\} dx dy \quad (5.21)$$

Como se observa, a expressão (5.21) está em função das coordenadas globais (x,y) do elemento e. Sendo assim seria necessário calcular as funções de forma em função das variáveis globais (x,y), bem como calcular o integral sobre a área do elemento. Este trabalho pode ser fastidioso e difícil, já que numa malha de elementos finitos seria necessário calcular as funções de forma para cada um dos elementos. O cálculo dos integrais também não seria fácil, sobretudo para os elementos distorcidos em que a sua fronteira não é de fácil definição. Perante estas dificuldades surgiu a ideia de recorrer a um elemento genérico, que se pode ver na figura 5.3, definido nas coordenadas locais ( $\xi, \eta$ ). Neste caso apenas se utilizam as funções de forma definidas sobre o elemento genérico e que são função das coordenadas ( $\xi, \eta$ ) e o integral é definido sobre o a área do elemento de referência  $A_R$ . Esta simplificação é um processo de transformação de coordenadas.

Na figura 5.3 é possível observar um elemento real e o respectivo elemento genérico. As coordenadas do elemento genérico podem ser observadas na figura, sendo que a sua área é

igual a 1/2. O elemento  $e$  tem como coordenadas dos nós:  $(x_1^e, y_1^e)$ ,  $(x_2^e, y_2^e)$  e  $(x_3^e, y_3^e)$ . A numeração dos nós pode ser qualquer desde que a sua sequência seja segundo a seta da figura 5.3.

Como já se observou na expressão (5.15) este elemento tem 3 funções de forma. Como tal a solução aproximada é dada pelo polinómio de primeiro grau,

$$\begin{cases} u_h = a_1 + b_1\xi + c_1\eta \\ v_h = a_2 + b_2\xi + c_2\eta \end{cases} \quad (5.22)$$

No entanto já se observou em (5.15) que as funções de forma que definem o deslocamento  $u_h$  são as mesmas que definem o deslocamento  $v_h$ . Como tal basta, por exemplo, centrar o cálculo das funções de forma em  $u_h$ . Nos nós os deslocamentos são os deslocamentos nodais:  $u_h(0,0)=u_1$ ,  $u_h(1,0)=u_2$  e  $u_h(0,1)=u_3$ . Logo, para calcular os coeficientes  $a_1$ ,  $b_1$  e  $c_1$  recorre-se ao sistema de equações:

$$\begin{cases} u_h(0,0) = u_1 \\ u_h(1,0) = u_2 \\ u_h(0,1) = u_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = u_1 \\ a_1 + b_1 = u_2 \\ a_1 + c_1 = u_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = u_1 \\ b_1 = u_2 - u_1 \\ c_1 = u_3 - u_1 \end{cases} \quad (5.23)$$

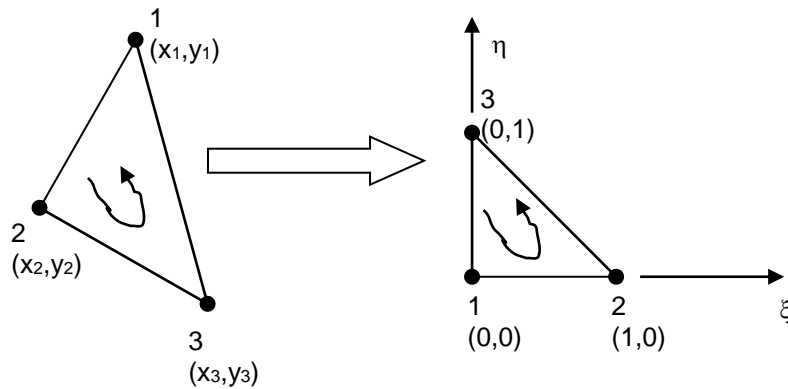


Figura 5.3 – elemento real e elemento genérico

Substituindo os coeficientes  $a_1$ ,  $b_1$  e  $c_1$  em (5.22), obtém-se,

$$u_h = u_1 + (u_2 - u_1)\xi + (u_3 - u_1)\eta = u_1(1 - \xi - \eta) + u_2\xi + u_3\eta \quad (5.24)$$

Comparando as expressões (5.15) e (5.24) chega-se às funções de forma:

$$\begin{aligned} \psi_1(\xi, \eta) &= 1 - \xi - \eta \\ \psi_2(\xi, \eta) &= \xi \\ \psi_3(\xi, \eta) &= \eta \end{aligned} \quad (5.25)$$

Encontradas que estão as funções de forma o próximo passo da transformação de coordenadas consiste na substituição de todos os termos em  $(x,y)$  da expressão (5.21) por termos em  $(\xi,\eta)$ . Apenas a matriz  $[\partial x]$  depende das variáveis globais  $(x,y)$ :

$$[\partial \mathbf{x}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Pela regra da derivação em cadeia tem-se que,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{aligned} \quad (5.26)$$

Na forma matricial,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

As coordenadas em qualquer ponto do elemento podem ser calculadas tal como o deslocamento, ou seja,

$$\begin{cases} x = \sum_{i=1}^3 \psi_i x_i^e \\ y = \sum_{i=1}^3 \psi_i y_i^e \end{cases} \quad (5.28)$$

em que os  $x_i$  e os  $y_i$  representam as coordenadas globais  $x$  e  $y$  no nó  $i$ , respectivamente. Como se observa da expressão (5.27) não é possível calcular  $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial \xi}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial \eta}{\partial x}$  e  $\frac{\partial \eta}{\partial y}$ , de forma directa.

Como tal, rescreve-se a derivação em cadeia do seguinte modo,

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} = [\mathbf{J}] \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

em que  $[\mathbf{J}]$  é a matriz jacobiana da transformação de coordenadas:

$$[\mathbf{J}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \psi_i}{\partial \xi} x_i^e & \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \psi_i}{\partial \xi} y_i^e \\ \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \psi_i}{\partial \eta} x_i^e & \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \psi_i}{\partial \eta} y_i^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1^e + x_2^e & -y_1^e + y_2^e \\ -x_1^e + x_3^e & -y_1^e + y_3^e \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

E o jacobiano da transformação é o determinante da matriz jacobiana,

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_{11}\mathbf{J}_{22} - \mathbf{J}_{12}\mathbf{J}_{21} = -x_1^e y_3^e - y_1^e x_2^e + x_2^e y_3^e - x_3^e y_2^e + y_2^e x_1^e + x_3^e y_1^e \quad (5.31)$$

Neste momento já é possível escrever a matriz  $[\partial \mathbf{x}]$  em coordenadas locais,

$$[\partial \mathbf{x}] = \begin{bmatrix} [\mathbf{J}]^{-1} & [0] \\ [0] & [\mathbf{J}]^{-1} \end{bmatrix} [\partial \xi] = [\Gamma][\partial \xi] \quad (5.32)$$

em que,

$$[\partial \xi] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial \eta} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial \xi} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (5.33)$$

A inversa da matriz jacobiana é igual a:

$$[\mathbf{J}]^{-1} = \frac{1}{\mathbf{J}} \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{22} & -\mathbf{J}_{12} \\ -\mathbf{J}_{21} & \mathbf{J}_{11} \end{bmatrix} = \frac{1}{\mathbf{J}} \begin{bmatrix} -y_1^e + y_3^e & y_1^e - y_2^e \\ x_1^e - x_3^e & -x_1^e + x_2^e \end{bmatrix} \quad (5.34)$$

Como tal, já é possível escrever a expressão (5.21) em coordenadas locais,

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) &= t \int_{A_R} \mathbf{J} \{ \mathbf{q} \}^T [\Psi]^T [\partial \xi]^T [\Gamma]^T [\mathbf{C}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{C}] [\Gamma] [\partial \xi] [\Psi] \{ \mathbf{q} \} d\xi d\eta = \\ &= t \int_{A_R} \mathbf{J} \{ \mathbf{q} \}^T [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] \{ \mathbf{q} \} d\xi d\eta \end{aligned} \quad (5.35)$$

com,

$$[\mathbf{B}] = [\mathbf{C}] [\Gamma] [\partial \xi] [\Psi] \quad (5.36)$$

Sendo, neste momento, possível calcular a matriz  $\mathbf{B}$ .

$$[\mathbf{C}] [\Gamma] = \frac{1}{\mathbf{J}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{22} & -\mathbf{J}_{12} & 0 & 0 \\ -\mathbf{J}_{21} & \mathbf{J}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{J}_{22} & -\mathbf{J}_{12} \\ 0 & 0 & -\mathbf{J}_{21} & \mathbf{J}_{11} \end{bmatrix} = \frac{1}{\mathbf{J}} \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{22} & -\mathbf{J}_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathbf{J}_{21} & \mathbf{J}_{11} \\ -\mathbf{J}_{21} & \mathbf{J}_{11} & \mathbf{J}_{22} & -\mathbf{J}_{12} \end{bmatrix} \quad (5.37)$$

e,

$$[\partial \xi] [\Psi] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial \eta} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial \xi} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 & 0 & \psi_2 & 0 & \psi_3 & 0 \\ 0 & \psi_1 & 0 & \psi_2 & 0 & \psi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.38)$$

Por fim,

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{B}] &= \frac{1}{J} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -J_{21} & J_{11} \\ -J_{21} & J_{11} & J_{22} & -J_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
 &= \frac{1}{J} \begin{bmatrix} -J_{22} + J_{12} & 0 & J_{22} & 0 & -J_{12} & 0 \\ 0 & J_{21} - J_{11} & 0 & -J_{21} & 0 & J_{11} \\ J_{21} - J_{11} & -J_{22} + J_{12} & -J_{21} & J_{22} & J_{11} & -J_{12} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{5.39}$$

Como a matriz  $\mathbf{B}$  não depende das coordenadas  $(\xi, \eta)$  obtém-se,

$$\mathbf{B}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = t \int_{A_R} J \{\mathbf{q}\}^T [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] \{\mathbf{q}\} d\xi d\eta = \frac{t}{2} J \{\mathbf{q}\}^T [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] \{\mathbf{q}\} \tag{5.40}$$

Depois de analisado o funcional  $\mathbf{B}(\mathbf{u}, \mathbf{u})$  é necessário analisar o funcional  $I(\mathbf{u})$ ,

$$I(\mathbf{u}) = \int_A \mathbf{f} \mathbf{u} dA + \int_{\Gamma_T} \mathbf{T} \mathbf{u} d\Gamma \tag{5.41}$$

com  $u_i=0$  em  $\Gamma_u$ .

Considerando a aproximação por elementos finitos obtém-se,

$$I(\mathbf{u}) = \int_A \sum_{i=1}^6 f_i \psi_i q_i dA + \int_{\Gamma_T} \sum_{i=1}^6 T_i \phi_i q_i d\Gamma = \int_{A_R} \sum_{i=1}^6 J f_i \psi_i q_i dA + \int_{\Gamma_T} \sum_{i=1}^6 T_i \phi_i q_i d\Gamma \tag{5.42}$$

em que  $\phi_i$  representa as funções de forma na fronteira  $\Gamma_T$ . Por exemplo, se existir carga entre os nós 1 e 3 então,

$$\{\phi\} = \begin{Bmatrix} \frac{L_{12} - s}{L_{12}} \\ \frac{L_{12} - s}{L_{12}} \\ \frac{s}{L_{12}} \\ \frac{s}{L_{12}} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{5.43}$$

sendo que  $L_{12}$  representa a distância entre os nós 1 e 2 e  $s$  é a variável definida na fronteira.

Logo, o funcional quadrático fica igual a,

$$I(\mathbf{u}) = \frac{t}{4} J \{\mathbf{q}\}^T [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] \{\mathbf{q}\} - \int_{A_R} \sum_{i=1}^6 J f_i \psi_i q_i dA - \int_{\Gamma_T} \sum_{i=1}^6 T_i \phi_i q_i d\Gamma \tag{5.44}$$

Como foi referido no capítulo 4, as soluções  $\{\mathbf{q}\}$  admissíveis que tornam o funcional quadrático  $I(\mathbf{u})$  mínimo, também satisfazem a equação diferencial do problema e as condições de fronteira que regem o problema,

$$\frac{\partial I(\mathbf{u})}{\partial \{\mathbf{q}\}} = 0 \Rightarrow \frac{t}{2} J [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] \{\mathbf{q}\} = \int_{A_R} \sum_{i=1}^6 J f_i \psi_i dA + \int_{\Gamma_T} \sum_{i=1}^6 T_i \phi_i d\Gamma \tag{5.45}$$

ou, na forma matricial,

$$\mathbf{K}^e \mathbf{q} = \mathbf{F}^e \quad \text{com} \quad \mathbf{K}^e = \frac{t}{2} \mathbf{J} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \quad \text{e} \quad \mathbf{F}_i^e = \int_{A_R} \mathbf{J} f_i \psi_i dA + \int_{\Gamma_T} T_i \phi_i d\Gamma \quad (5.46)$$

O sistema de equações global, obtém-se assembling as matrizes e os vectores, definidas em (5.46), de cada um dos elementos que constituem a malha,

$$\mathbf{K} \mathbf{d} = \mathbf{F} \quad (5.47)$$

em que o vector  $\mathbf{d}$  representa o vector de todas as incógnitas do sistema de equações global. Depois de resolvido o sistema de equações (5.47) obtém-se os deslocamentos nodais  $\mathbf{d}$ .

Considere-se um qualquer elemento da malha, com os nós e as respectivas coordenadas representadas na figura 5.4.

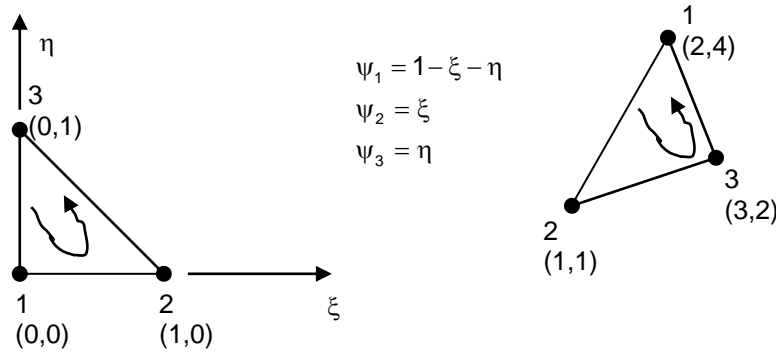


Figura 5.4 – elemento genérico e um exemplo de um elemento de uma qualquer malha

Os deslocamentos nodais do elemento são:

$$\{\mathbf{q}\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

Após o cálculo dos deslocamentos nodais é possível calcular o deslocamento em qualquer ponto  $(x,y)$  do elemento. Para tal utiliza-se o elemento genérico, por exemplo, o deslocamento no ponto  $(\xi,\eta)=(0.5,0)$  é dado por:

$$\begin{aligned} u_h(\xi = 0.5, \eta = 0) &= \psi_1(\xi, \eta)u_1 + \psi_2(\xi, \eta)u_2 + \psi_3(\xi, \eta)u_3 = 0.5(u_1 + u_2) \\ v_h(\xi = 0.5, \eta = 0) &= \psi_1(\xi, \eta)v_1 + \psi_2(\xi, \eta)v_2 + \psi_3(\xi, \eta)v_3 = 0.5(v_1 + v_2) \end{aligned} \quad (5.48)$$

E para saber a que coordenadas globais  $(x,y)$  corresponde o ponto  $(\xi,\eta)=(0.5,0)$  utiliza-se a expressão (5.28),

$$\begin{aligned} x &= \psi_1(0.5,0)x_1^e + \psi_2(0.5,0)x_2^e + \psi_3(0.5,0)x_3^e = 0.5(x_1^e + x_2^e) = 1.5 \\ y &= \psi_1(0.5,0)y_1^e + \psi_2(0.5,0)y_2^e + \psi_3(0.5,0)y_3^e = 0.5(y_1^e + y_2^e) = 2.5 \end{aligned} \quad (5.49)$$

Se se pretender calcular o deslocamento no ponto  $(x,y)=(2,3)$ , primeiro é necessário calcular o correspondente ponto local  $(\xi,\eta)$  através da expressão (5.28),

$$\begin{cases} 2 = (1 - \xi - \eta)2 + \xi + 3\eta \\ 3 = (1 - \xi - \eta)4 + \xi + 2\eta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi = 0.2 \\ \eta = 0.2 \end{cases}$$

Logo, o deslocamento para  $(x,y)=(2,3)$  ou para  $(\xi,\eta)=(0.2,0.2)$  é:

$$\begin{aligned} u_h &= (1-0.2-0.2)u_1 + 0.2u_2 + 0.2u_3 = 0.6u_1 + 0.2u_2 + 0.2u_3 \\ v_h &= (1-0.2-0.2)v_1 + 0.2v_2 + 0.2v_3 = 0.6v_1 + 0.2v_2 + 0.2v_3 \end{aligned}$$

#### 5.4 – Elemento quadrilátero de 4 nós

Após o desenvolvimento da matriz de rigidez e do vector de forças referentes ao elemento triangular de 3 nós, apresenta-se o elemento quadrilátero de 4 nós. Este elemento também é, por vezes, referido como elemento quadrado ou rectangular, embora tenha quatro lados que nem sempre formam um quadrado ou um rectângulo perfeitos.

O elemento quadrilátero genérico de 4 nós, definido nas coordenadas locais  $(\xi,\eta)$ , está representado na figura 5.5. Para este elemento a solução aproximada é dada por,

$$\begin{cases} u_h = \sum_{i=1}^4 \psi_i u_i \\ v_h = \sum_{i=1}^4 \psi_i v_i \end{cases} \quad (5.50)$$

em que os  $u_i$  e os  $v_i$  são os deslocamentos nodais segundo as coordenadas  $x$  e  $y$ , respectivamente. Os  $\psi_i$  representam as funções de forma.

Sabendo que há 4 funções de forma, a solução aproximada é do tipo,

$$u_h = a + b\xi + c\eta + d\xi\eta \quad (5.51)$$

em que  $u_h(-1,-1)=u_1$ ,  $u_h(1,-1)=u_2$ ,  $u_h(1,1)=u_3$  e  $u_h(-1,1)=u_4$ . Como tal têm-se 4 equações linearmente independentes que permitem calcular os coeficientes  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$ ,

$$\begin{cases} u_h(-1,-1) = u_1 \\ u_h(1,-1) = u_2 \\ u_h(1,1) = u_3 \\ u_h(-1,1) = u_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b - c + d = u_1 \\ a + b - c - d = u_2 \\ a + b + c + d = u_3 \\ a - b + c - d = u_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{u_1 + u_2 + u_3 + u_4}{4} \\ b = \frac{-u_1 + u_2 + u_3 - u_4}{4} \\ c = \frac{-u_1 - u_2 + u_3 + u_4}{4} \\ d = \frac{u_1 - u_2 + u_3 - u_4}{4} \end{cases} \quad (5.52)$$

Logo:

$$u_h = u_1 \left( \frac{1}{4} - \frac{\xi}{4} - \frac{\eta}{4} + \frac{\xi\eta}{4} \right) + u_2 \left( \frac{1}{4} + \frac{\xi}{4} - \frac{\eta}{4} - \frac{\xi\eta}{4} \right) + u_3 \left( \frac{1}{4} + \frac{\xi}{4} + \frac{\eta}{4} + \frac{\xi\eta}{4} \right) + u_4 \left( \frac{1}{4} - \frac{\xi}{4} + \frac{\eta}{4} - \frac{\xi\eta}{4} \right) \quad (5.53)$$

Comparando (5.50) com (5.51) obtêm-se as funções de forma,

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \frac{1}{4}(\xi-1)(\eta-1) \\ \psi_2 &= -\frac{1}{4}(\xi+1)(\eta-1) \\ \psi_3 &= \frac{1}{4}(\xi+1)(\eta+1) \\ \psi_4 &= -\frac{1}{4}(\xi-1)(\eta+1) \end{aligned} \quad (5.54)$$

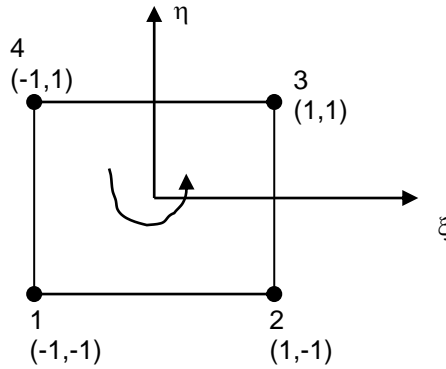


Figura 5.5 – elemento genérico, quadrilátero de 4 nós

Tal como para o elemento triangular, a matriz de rigidez do elemento  $\mathbf{K}^e$  é obtida através do funcional  $B(\mathbf{u}, \mathbf{u})$ ,

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T(\mathbf{u}) \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) d\Omega = t \int_A \boldsymbol{\varepsilon}^T(\mathbf{u}) \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) dA \quad (5.55)$$

em que  $t$  e  $A$  representam a espessura e a área do elemento, respectivamente.

A matriz  $\mathbf{D}$  para materiais elásticos, isotrópicos e considerando tensão plana, está representada na expressão (5.17).

A solução aproximada pode ser escrita na forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u}_h \\ \mathbf{v}_h \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_1 & 0 & \psi_2 & 0 & \psi_3 & 0 & \psi_4 & 0 \\ 0 & \psi_1 & 0 & \psi_2 & 0 & \psi_3 & 0 & \psi_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} = [\boldsymbol{\psi}] \{\mathbf{q}\} \quad (5.56)$$

E o campo de extensões também pode ser descrito na forma matricial,

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{Bmatrix} = [\mathbf{C}] \{\partial \mathbf{u}\} \quad (5.57)$$

Simplificando um pouco mais,

$$\{\partial \mathbf{u}\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_h \\ v_h \end{Bmatrix} = [\partial \mathbf{x}][\boldsymbol{\psi}]\{\mathbf{q}\} \quad (5.58)$$

Nesta etapa é possível simplificar a expressão (5.55),

$$\mathbf{B}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \mathbf{t} \int_A \{\mathbf{q}\}^T [\boldsymbol{\psi}]^T [\partial \mathbf{x}]^T [\mathbf{C}]^T [\mathbf{D}][\mathbf{C}][\partial \mathbf{x}][\boldsymbol{\psi}]\{\mathbf{q}\} dx dy \quad (5.59)$$

Até aqui a única diferença em relação ao elemento triangular é a dimensão da matriz  $\boldsymbol{\psi}$  e do vector  $\mathbf{q}$ . Mas tal como para o elemento triangular é necessário fazer uma transformação de coordenadas no integral de (5.59), de modo a trabalhar em coordenadas locais  $(\xi, \eta)$ . Para tal, define-se a matriz jacobiana da transformação de coordenadas,

$$[\mathbf{J}] = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^4 \frac{\partial \psi_i}{\partial \xi} x_i^e & \sum_{i=1}^4 \frac{\partial \psi_i}{\partial \xi} y_i^e \\ \sum_{i=1}^4 \frac{\partial \psi_i}{\partial \eta} x_i^e & \sum_{i=1}^4 \frac{\partial \psi_i}{\partial \eta} y_i^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\eta}{4}(x_1^e - x_2^e + x_3^e - x_4^e) + \frac{1}{4}(-x_1^e + x_2^e + x_3^e - x_4^e) & \frac{\eta}{4}(y_1^e - y_2^e + y_3^e - y_4^e) + \frac{1}{4}(-y_1^e + y_2^e + y_3^e - y_4^e) \\ \frac{\xi}{4}(x_1^e - x_2^e + x_3^e - x_4^e) + \frac{1}{4}(-x_1^e - x_2^e + x_3^e + x_4^e) & \frac{\xi}{4}(y_1^e - y_2^e + y_3^e - y_4^e) + \frac{1}{4}(-y_1^e - y_2^e + y_3^e + y_4^e) \end{bmatrix} \quad (5.60)$$

em que o jacobiano é o determinante da matriz jacobiana,

$$\mathbf{J} = \det[\mathbf{J}] \quad (5.61)$$

Relembre-se que os pontos,  $(x_1^e, y_1^e)$ ,  $(x_2^e, y_2^e)$ ,  $(x_3^e, y_3^e)$  e  $(x_4^e, y_4^e)$  representam as coordenadas dos nós 1, 2, 3 e 4, do elemento e.

Para implementar a transformação de coordenadas é necessário referir que,

$$[\partial \mathbf{x}] = \begin{bmatrix} [\mathbf{J}]^{-1} & [0] \\ [0] & [\mathbf{J}]^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial \eta} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial \xi} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} = [\boldsymbol{\Gamma}][\partial \boldsymbol{\xi}]$$

A expressão (5.59) já pode ser escrita em coordenadas locais,

$$\mathbf{B}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \mathbf{t} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{J}[\mathbf{q}]^T [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}][\mathbf{B}][\mathbf{q}] d\xi d\eta \quad (5.62)$$

com,

$$[\mathbf{B}] = [\mathbf{C}][\boldsymbol{\Gamma}][\partial \boldsymbol{\xi}][\boldsymbol{\psi}] \quad (5.63)$$

Para o cálculo da matriz  $\mathbf{B}$  é necessário multiplicar,

$$[C][\Gamma] = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -J_{21} & J_{11} \\ -J_{21} & J_{11} & J_{22} & -J_{12} \end{bmatrix} \quad (5.64)$$

e,

$$[\partial\xi][\psi] = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} \eta-1 & 0 & 1-\eta & 0 & \eta+1 & 0 & -\eta-1 & 0 \\ \xi-1 & 0 & -\xi-1 & 0 & \xi+1 & 0 & 1-\xi & 0 \\ 0 & \eta-1 & 0 & 1-\eta & 0 & \eta+1 & 0 & -\eta-1 \\ 0 & \xi-1 & 0 & -\xi-1 & 0 & \xi+1 & 0 & 1-\xi \end{bmatrix} \quad (5.65)$$

Com os resultados de (5.64) e de (5.65) é possível calcular a matriz **B** que devido à sua dimensão não é representada nestas páginas.

O funcional  $I(\mathbf{u})$  é calculado do mesmo modo que no sub-capítulo 5.3,

$$I(\mathbf{u}) = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \sum_{i=1}^8 J f_i \psi_i q_i d\xi d\eta + \int_{\Gamma_T} \sum_{i=1}^8 T_i \phi_i q_i d\Gamma \quad (5.66)$$

Tal como para o elemento triangular, a matriz de rigidez e o vector de forças são obtidos derivando o funcional quadrático (5.14) em ordem a vector **q**,

$$\frac{\partial I(\mathbf{u})}{\partial \{\mathbf{q}\}} = 0 \Rightarrow t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 J [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] \{\mathbf{q}\} d\xi d\eta = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \sum_{i=1}^8 J f_i \psi_i d\xi d\eta + \int_{\Gamma_T} \sum_{i=1}^8 T_i \phi_i d\Gamma \quad (5.67)$$

ou na forma matricial,

$$\mathbf{K}^e \mathbf{q} = \mathbf{F}^e$$

com,

$$\mathbf{K}^e = t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 J \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\xi d\eta \quad (5.68)$$

e com,

$$\mathbf{F}_i^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 J f_i \psi_i d\xi d\eta + \int_{\Gamma_T} T_i \phi_i d\Gamma \quad (5.69)$$

Ao contrário do que sucedeu para o elemento triangular de 3 nós, neste caso o integral da expressão (5.68) depende das coordenadas locais  $(\xi, \eta)$ . De modo a simplificar o cálculo do integral são utilizados métodos de integração numérica. No capítulo seguinte são apresentados e analisados esses métodos.

## 6 – FUNÇÕES INTERPOLADORAS, INTEGRAÇÃO NUMÉRICA E CONSIDERAÇÕES DE MODELAÇÃO

### 6.1 – Biblioteca de elementos e funções interpoladoras

No anterior capítulo foi estudado o problema bidimensional de elasticidade em tensão plana. Durante a análise foram desenvolvidas as funções de interpolação de alguns elementos, nomeadamente, o elemento triangular de 3 nós e o elemento quadrilátero de 4 nós. Estes elementos, que foram desenvolvidos para analisar problemas regidos por equações diferenciais de segunda ordem, são aplicáveis a todos os modelos de elementos finitos que admitem interpolação de Lagrange das variáveis primárias da formulação fraca.

O objectivo deste capítulo é desenvolver uma biblioteca de elementos bidimensionais, triangulares e quadriláteros de Lagrange, isto é, elementos sobre os quais apenas a função (e não as suas derivadas) é interpolada.

Os elementos com forma regular, designados por elementos genéricos, ou de referência, sobre os quais são desenvolvidas as funções de interpolação, ou funções de forma, podem ser utilizados como a base da integração numérica, definida sobre os elementos reais com geometria irregular. Claro que, tal requer uma transformação de coordenadas da geometria do elemento real para a geometria do elemento genérico.

#### 6.1.1 – Elementos triangulares

O elemento triangular de 3 nós e os elementos triangulares de ordem superior podem ser obtidos, de forma sistemática, através do triângulo de Pascal (ver figura 6.1).

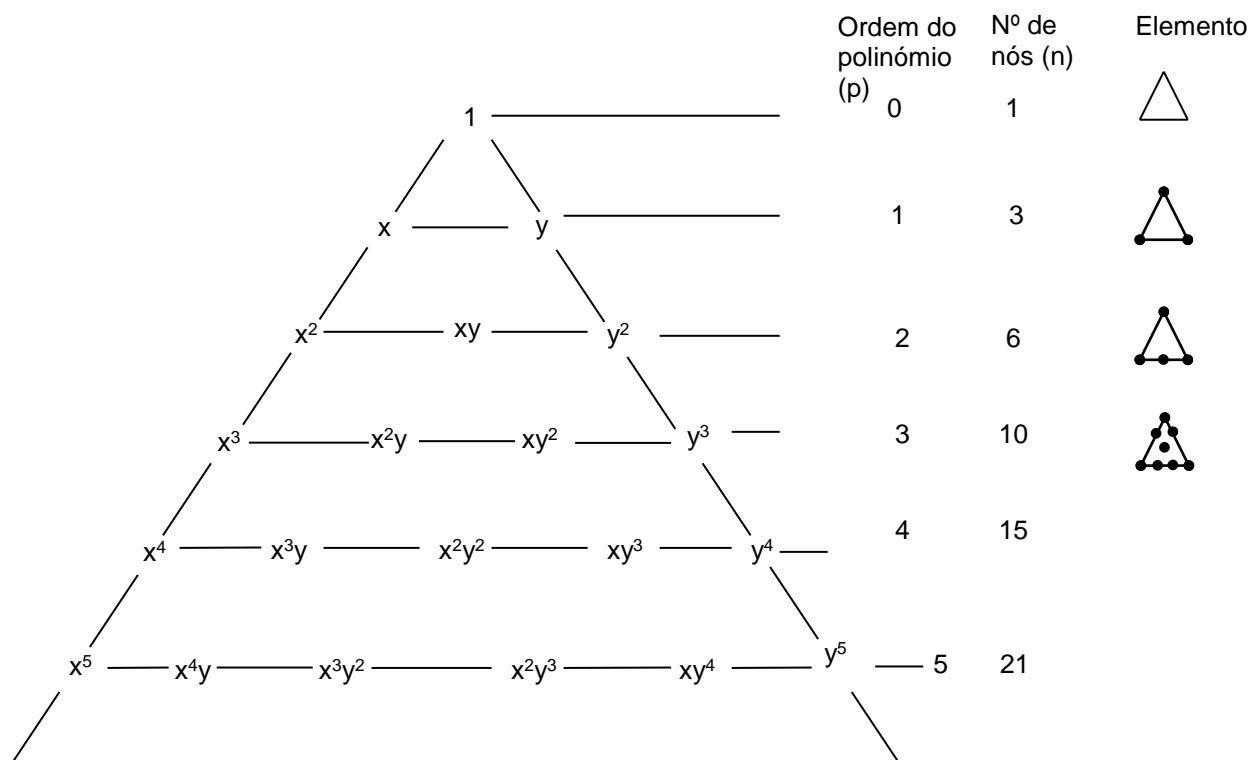


Figura 6.1 – triângulo de Pascal e elementos triangulares da família de Lagrange

A forma do triângulo é arbitrária. Por exemplo, o elemento de segundo grau tem 6 nós, situados nos 3 vértices e no meio de cada uma dos lados. O polinómio interpolador tem 6 constantes que podem ser escritas em termos dos valores nodais da variável interpoladora,

$$u_h = \sum_{i=1}^6 \psi_i u_i \quad (6.1)$$

em que  $\psi_i$  representa as funções interpoladoras, ou de forma, quadráticas. Estas funções são obtidas da mesma forma do que para o elemento triangular de 3 nós (ver capítulo 5).

De um modo geral um elemento triangular de ordem  $p$  tem  $n$  nós,

$$n = \frac{1}{2}(p+1)(p+2) \quad (p = 0,1,\dots) \quad (6.2)$$

Nos elementos triangulares da família de Lagrange o posicionamento dos nós é simétrico. Também se verifica que para um elemento associado a um polinómio de grau  $p$ , então na fronteira do elemento o polinómio que define as condições de fronteira também é de grau  $p$ . Em complemento à figura 6.1, definem-se os polinómios interpoladores de alguns elementos triangulares da família de Lagrange,

$$p = 0; u_h = a_1$$

$$p = 1; u_h = a_1 + a_2x + a_3y$$

$$p = 2; u_h = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2$$

$$p = 3; u_h = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2 + a_7x^3 + a_8x^2y + a_9xy^2 + a_{10}y^3$$

Para obter as funções interpoladoras ou de forma, é necessário resolver o sistema de equações  $n \times n$ , em que  $n$  é o número de nós.

### 6.1.2 – Elementos quadriláteros

Analogamente aos elementos triangulares, os elementos quadriláteros da família de Lagrange podem ser desenvolvidos através do triângulo de Pascal, como é representado na figura 6.2. E por exemplo, como o elemento linear tem 4 nós, os termos do polinómio devem ser 1,  $x$ ,  $y$  e  $xy$  que forma um quadrilátero no triângulo de Pascal. De um modo geral, um elementos quadrilátero de ordem  $p$  tem  $n$  nós,

$$n = (p+1)^2 \quad (p = 0,1,\dots) \quad (6.3)$$

e o polinómio associado contém os termos do paralelogramo  $p$ . Por exemplo, o elemento quadrilátero de segunda ordem tem 9 nós e o polinómio interpolador é:

$$u_h = a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy + a_5x^2 + a_6y^2 + a_7x^2y + a_8xy^2 + a_9x^2y^2$$

O polinómio contém todos os termos do segundo grau, mais os termos  $x^2y$  e  $xy^2$  do terceiro grau e o termo  $x^2y^2$  do quarto grau.

O elemento quadrilátero da família de Lagrange de ordem  $p$  tem o polinómio interpolador:

$$u_h(x,y) = \sum_{i=1}^n a_i x^i y^k \quad (j+k \leq p+1; i, j \leq p) \quad (6.4)$$

$$u_h(x,y) = \sum_{i=1}^n u_i \psi_i$$

em que os  $\psi_i$  representam as funções interpoladoras, ou de forma da família de Lagrange. Tal

como para os elementos triangulares, para calcular as funções interpoladoras é necessário resolver um sistema de equações  $nxn$ .

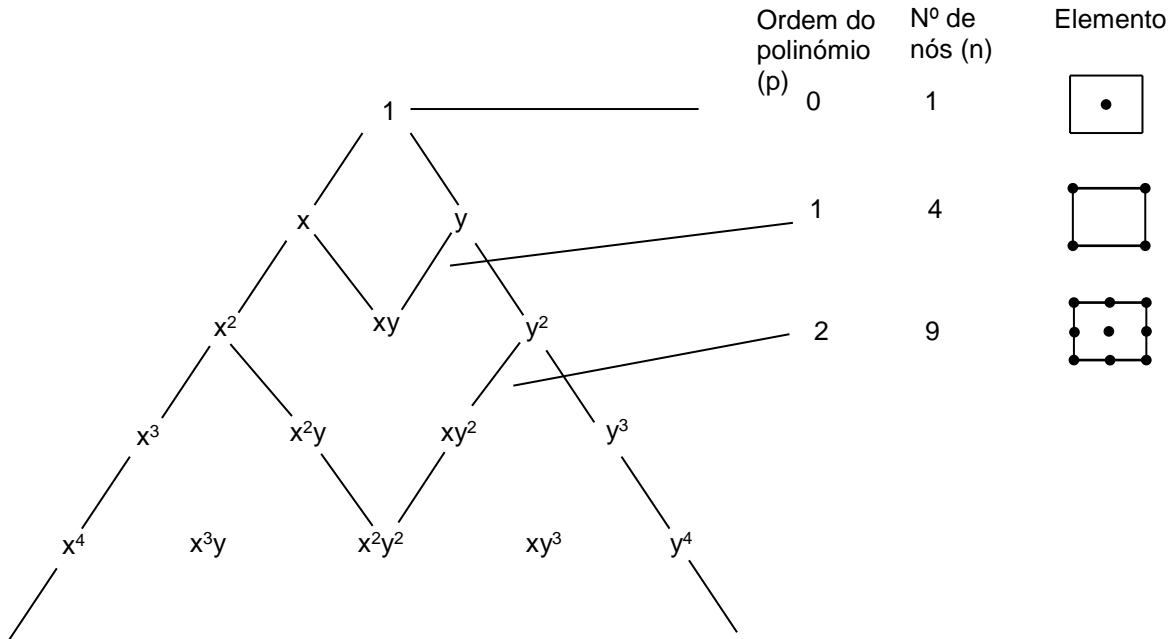


Figura 6.2 – triângulo de Pascal e elementos quadriláteros da família de Lagrange

Nas figuras 6.3 e 6.4 é possível observar dois elementos e as suas respectivas funções de forma.

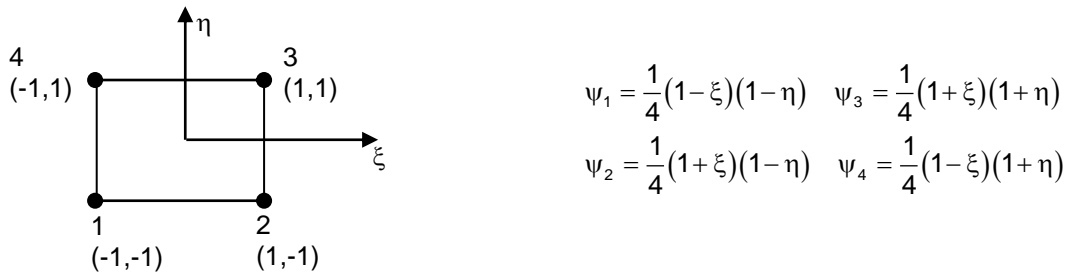


Figura 6.3 – elemento genérico de 4 nós

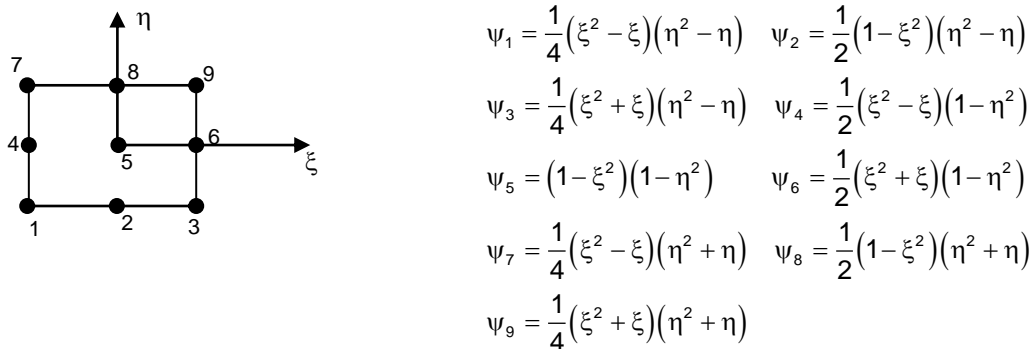


Figura 6.4 – elemento genérico de 9 nós

## 6.2 – Integração numérica

### 6.2.1 – Introdução

Uma boa representação de domínios com fronteiras curvas pode ser garantida através de uma malha refinada ou de elementos de segunda ordem ou superior. Por exemplo, uma região não rectangular não pode ser representada por elementos rectangulares, no entanto pode sê-lo, nalguns casos, por elementos quadriláteros. Como as funções de interpolação são mais fáceis de obter para elementos quadrados e também é mais fácil integrar num domínio quadrado, transformam-se as expressões integrais sobre os elementos quadriláteros em integrais sobre um domínio quadrado. Estes integrais são mais fáceis de calcular, utilizando-se para tal métodos de integração numérica, tal como o de Gauss-Legendre. Este método requer que o integral seja especificado sobre uma região quadrada  $\hat{\Omega}$  de dimensão  $2 \times 2$  e o sistema de coordenadas  $(\xi, \eta)$  é tal que  $-1 \leq (\xi, \eta) \leq 1$ . É por esta razão que os elementos quadriláteros genéricos  $\hat{\Omega}$  têm, normalmente, dimensão  $2 \times 2$ . A transformação da geometria e das variáveis da equação diferencial do problema definido no sistema de coordenadas  $(x, y)$  para o sistema de coordenadas  $(\xi, \eta)$  resulta em expressões algébricas complexas que permitem a obtenção da solução analítica (isto é, exacta) dos integrais. Como tal, a transformação de uma expressão integral, definida no elemento  $\Omega^e$ , para o domínio  $\hat{\Omega}$  facilita o processo de integração numérica.

A transformação entre o elemento  $\Omega^e$  e o elemento genérico  $\hat{\Omega}$  permite escrever,

$$x = \sum_{j=1}^m x_j^e \hat{\psi}_j(\xi, \eta) \quad y = \sum_{j=1}^m y_j^e \hat{\psi}_j(\xi, \eta) \quad (6.5)$$

onde os  $\hat{\psi}$  representam as funções interpoladoras, ou de forma, do elemento de referência, ou genérico  $\hat{\Omega}$ , e  $x_j^e$  é a coordenada  $x$  do nó  $j$  do elemento  $e$ .

Considere-se como exemplo o elemento de referência da figura 6.3. As coordenadas no elemento de referência  $(\xi, \eta)$  são escolhidas tal que  $-1 \leq (\xi, \eta) \leq 1$ . Esta escolha é imposta pelos limites do método de Gauss-Legendre. A expressão (6.5) transforma um ponto  $(\xi, \eta)$  do elemento de referência  $\hat{\Omega}$  num ponto  $(x, y)$  do elemento  $\Omega^e$  e vice-versa, se o jacobiano da transformação for definido positivo. A linha  $\xi=1$  de  $\hat{\Omega}$  é definida parametricamente por  $x=x(1, \eta)$  e por  $y=y(1, \eta)$  no elemento  $\Omega^e$ :

$$\begin{aligned} x(1, \eta) &= \sum_{j=1}^4 x_j^e \hat{\psi}_j(1, \eta) = x_1^e 0 + \frac{1}{2} x_2^e (1 - \eta) + \frac{1}{2} x_3^e (1 + \eta) + x_4^e 0 = \frac{1}{2} (x_2^e + x_3^e) + \frac{1}{2} (x_3^e - x_2^e) \eta \\ y(1, \eta) &= \sum_{j=1}^4 y_j^e \hat{\psi}_j(1, \eta) = \frac{1}{2} (y_2^e + y_3^e) + \frac{1}{2} (y_3^e - y_2^e) \eta \end{aligned} \quad (6.6)$$

Observa-se que  $x(1, \eta)$  e  $y(1, \eta)$  são funções lineares em  $\eta$ , definindo uma linha recta. De modo similar as linhas  $\xi=-1$  e  $\eta \pm 1$  são transformadas em rectas no elemento  $\Omega^e$ . Por outras palavras, o elemento de referência  $\hat{\Omega}$  é transformado num elemento quadrilátero definido no plano  $(x, y)$  mas os lados não são, necessariamente, paralelos. Inversamente, qualquer elemento quadrilátero da malha pode ser transformado no elemento de referência  $\hat{\Omega}$  definido

no plano  $(\xi, \eta)$ .

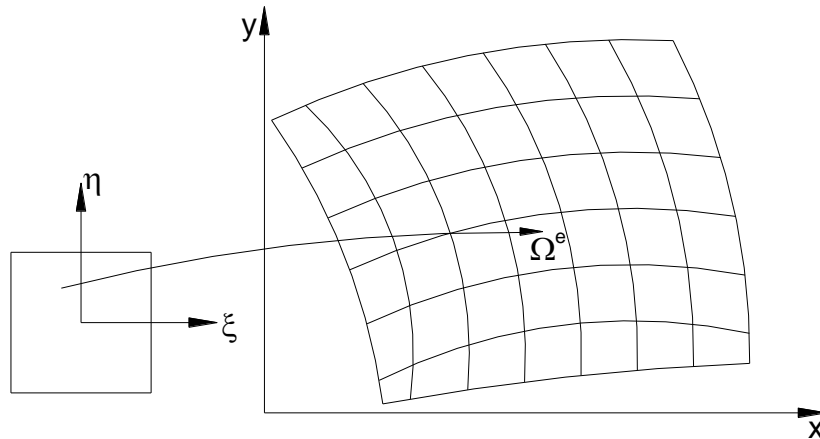


Figura 6.5 – geração de uma malha de elementos finitos através de um elemento genérico

De um modo geral, as variáveis dependentes do problema são aproximadas através da expressão,

$$u(x, y) = \sum_{j=1}^n u_j^e \psi_j(\xi, \eta) \quad (6.7)$$

As funções interpoladoras, ou de forma,  $\psi$  utilizadas para a aproximação das variáveis dependentes podem não ser iguais às funções  $\hat{\psi}$  utilizadas na aproximação da geometria. Dependendo do grau das aproximações da geometria e das variáveis dependentes, a formulação por elementos finitos classifica-se em três categorias:

1. super-paramétrica ( $m > n$ ) – a aproximação utilizada para a geometria é de ordem superior à utilizada para a variável dependente.
2. iso-paramétrica ( $m = n$ ) – igual grau para ambas as aproximações.
3. sub-paramétrica ( $m < n$ ) – a aproximação utilizada para a variável dependente é de ordem superior à utilizada para a geometria.

Em toda a sebeta apenas são consideradas formulações iso-paramétricas, ou seja,  $\hat{\psi} = \psi$  e  $m = n$ .

### 6.2.2 – Transformação de coordenadas

Deve-se referir que a transformação de coordenadas de um elemento quadrilátero de uma malha de elementos finitos no elemento de referência  $\hat{\Omega}$  tem apenas o objectivo de desenvolver os integrais através de integração numérica e de facilitar o cálculo das funções de forma. Não há transformação física do domínio. O sistema de equações obtido através da formulação de elementos finitos refere-se sempre ao modelo físico, e as incógnitas são os valores nodais do domínio físico.

Elementos de referência de diferente ordem definem distintas transformações e distintas colecções de elementos. Por exemplo, um elemento de referência rectangular quadrático pode ser utilizado para gerar uma malha de elementos quadriláteros cúbicos com fronteiras curvilíneas, como se pode ver na figura 6.6.

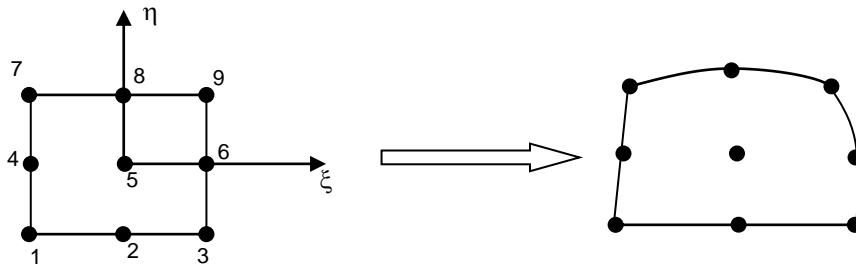


Figura 6.6 – elemento de referência quadrático e exemplo de elemento cúbico

Quando se realiza uma transformação de coordenadas é necessário escrever a integranda em coordenadas  $(\xi, \eta)$ . Por exemplo, considere-se a expressão,

$$K_{ij}^e = \int_{\Omega^e} \left[ a(x,y) \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + b(x,y) \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} + c(x,y) \psi_i \psi_j \right] dx dy \quad (6.8)$$

A expressão (6.8) deve ser reescrita em função das coordenadas locais  $(\xi, \eta)$ . Como também há derivadas em ordem a  $x$  e  $y$  é necessário relacionar  $\frac{\partial \psi_i}{\partial x}$  e  $\frac{\partial \psi_i}{\partial y}$  com  $\frac{\partial \psi_i}{\partial \xi}$  e  $\frac{\partial \psi_i}{\partial \eta}$ . Para tal utiliza-se a expressão (6.5). Pela regra da derivação em cadeia tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_i}{\partial \xi} &= \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \psi_i}{\partial \eta} &= \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{aligned} \quad (6.9)$$

ou na notação matricial,

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \psi_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \psi_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (6.10)$$

A expressão (6.10) relaciona as derivadas de  $\psi$  em relação às várias coordenadas. A sua matriz é designada por matriz jacobiana da transformação de coordenadas,

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

Mas para a transformação de coordenadas é necessária a inversa da matriz jacobiana,

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \psi_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \psi_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (6.12)$$

Também é possível escrever a expressão (6.12) através da diferenciação em cadeia,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_i}{\partial x} &= \frac{\partial \psi_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \psi_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_i}{\partial y} &= \frac{\partial \psi_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \psi_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{aligned} \quad (6.13)$$

Não é possível calcular de forma directa as derivadas  $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial \xi}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial \eta}{\partial x}$  e  $\frac{\partial \eta}{\partial y}$ , no entanto é possível calcular  $\frac{\partial x}{\partial \xi}$ ,  $\frac{\partial x}{\partial \eta}$ ,  $\frac{\partial y}{\partial \xi}$  e  $\frac{\partial y}{\partial \eta}$  e consequentemente calcular a matriz [J].

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \xi} &= \sum_{j=1}^n x_j^e \frac{\partial \psi_j}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} &= \sum_{j=1}^n y_j^e \frac{\partial \psi_j}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} &= \sum_{j=1}^n x_j^e \frac{\partial \psi_j}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} &= \sum_{j=1}^n y_j^e \frac{\partial \psi_j}{\partial \eta} \end{aligned} \quad (6.14)$$

e,

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n x_j^e \frac{\partial \psi_j}{\partial \xi} & \sum_{j=1}^n y_j^e \frac{\partial \psi_j}{\partial \xi} \\ \sum_{j=1}^n x_j^e \frac{\partial \psi_j}{\partial \eta} & \sum_{j=1}^n y_j^e \frac{\partial \psi_j}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (6.15)$$

A matriz jacobiana é calculada através das coordenadas nos nós  $(x_j^e, y_j^e)$  e das funções de forma  $\psi_j$ .

De modo a calcular as derivadas de  $\psi_j$  em relação a x e y é necessário calcular  $[J]^{-1}$ . Para tal é necessário que o determinante da matriz [J] seja não negativo em todos os pontos de  $(\xi, \eta)$ ,

$$J = \det[J] = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} > 0 \quad (6.16)$$

O determinante da matriz jacobiana, J, designa-se por jacobiano.

É possível provar que os elementos lineares não convexos têm jacobiano negativo, como tal não são admissíveis na formulação por elementos finitos. Designam-se por não convexos os elementos que têm pelo menos dois pontos que são unidos por uma recta que não está contida, na sua totalidade, no seu interior. Na figura 6.7 é possível observar um exemplo de um elemento não convexo.

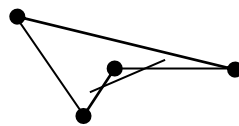


Figura 6.7 – exemplo de um elemento não convexo

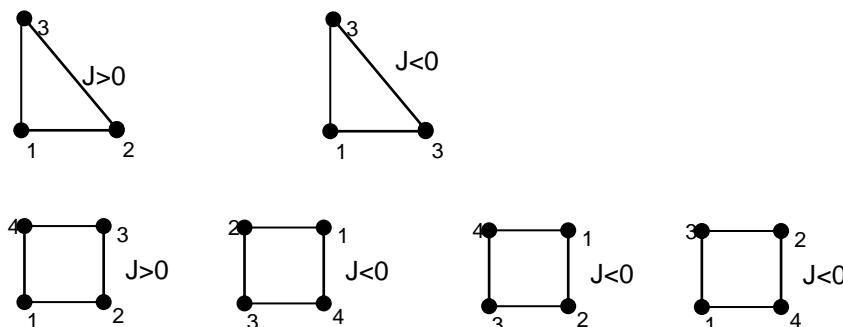


Figura 6.8 – influência da numeração dos nós no jacobiano

Uma inversão no sentido da numeração dos nós também produz um jacobiano negativo.

Podem-se observar alguns exemplo na figura 6.8.

Voltando à expressão (6.12), pode-se rescrevê-la do seguinte modo,

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = [\mathbf{J}]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \psi_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \psi_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \psi_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \psi_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = [\mathbf{J}^*] \begin{Bmatrix} \frac{\partial \psi_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \psi_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (6.17)$$

Na expressão (6.8), o termo  $dx dy$  é transformado em,

$$dx dy = J d\xi d\eta \quad (6.18)$$

no elemento de referência.

As expressões (6.12), (6.15) e (6.18) são suficientes para fazer a transformação de coordenadas. A expressão (6.8) pode ser reescrita desta forma,

$$\begin{aligned} K_{ij}^e &= \int_{\Omega^e} \left[ a(x,y) \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + b(x,y) \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} + c(x,y) \psi_i \psi_j \right] dx dy = \\ &= \int_{\hat{\Omega}} \left[ \hat{a} \left( J_{11}^* \frac{\partial \psi_i}{\partial \xi} + J_{12}^* \frac{\partial \psi_i}{\partial \eta} \right) \left( J_{11}^* \frac{\partial \psi_j}{\partial \xi} + J_{12}^* \frac{\partial \psi_j}{\partial \eta} \right) + \right. \\ &+ \hat{b} \left( J_{21}^* \frac{\partial \psi_i}{\partial \xi} + J_{22}^* \frac{\partial \psi_i}{\partial \eta} \right) \left( J_{21}^* \frac{\partial \psi_j}{\partial \xi} + J_{22}^* \frac{\partial \psi_j}{\partial \eta} \right) + \hat{c} \psi_i \psi_j \left. \right] J d\xi d\eta = \\ &= \int_{\hat{\Omega}} F(\xi, \eta) d\xi d\eta \end{aligned} \quad (6.19)$$

onde  $\hat{a}$ ,  $\hat{b}$  e  $\hat{c}$  são funções de  $(\xi, \eta)$ .

### 6.2.3 – Integração com um elemento de referência quadrado

O método de integração numérica designado por quadratura de Gauss-Legendre aplica-se a integrais definidos num quadrado de lado 2 com  $-1 \leq (\xi, \eta) \leq 1$ ,

$$\int_{\hat{\Omega}} F(\xi, \eta) d\xi d\eta = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 F(\xi, \eta) d\eta d\xi \square \int_{-1}^1 \left[ \sum_{j=1}^N F(\xi, \eta_j) w_j \right] d\xi \square \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N F(\xi_i, \eta_j) w_i w_j \quad (6.20)$$

onde M e N são os números de quadratura nas direcções  $\xi$  e  $\eta$ ,  $(\xi_i, \eta_j)$  são os pontos de Gauss e  $w_i$  e  $w_j$  são os pesos de Gauss. Na tabela 6.1 é possível observar os pontos de Gauss e os respectivos pesos.

Tabela 6.1 – pontos e pesos do método de quadratura de Gauss-Legendre

Número de pontos	Ponto	Peso
1	0.0	2.0
2	$\pm 0.5773502692$	1.0
3	0.0	0.8888888889
	$\pm 0.7745966692$	0.5555555555
4	$\pm 0.3399810435$	0.6521451548
	$\pm 0.8611363116$	0.3478548451
5	0.0	0.5688888889
	$\pm 0.5384693101$	0.4786286705
	$\pm 0.9061798459$	0.2369268850
6	$\pm 0.2386191861$	0.4679139346
	$\pm 0.6612093865$	0.3607615730
	$\pm 0.9324695142$	0.1713244924

Um polinómio de ordem  $p$  é integrado exactamente utilizando,

$$N = \text{int} \left[ \frac{1}{2}(p+1) \right] \quad (6.21)$$

ou seja,  $N$  deve ser um inteiro maior que  $\left[ \frac{1}{2}(p+1) \right]$ . Na maioria dos casos as funções de interpolação têm igual ordem em  $\xi$  e  $\eta$ , como tal  $N$  deve ser igual a  $N$  ( $M=N$ ). Quando a função integranda tem diferentes ordens em  $\xi$  e em  $\eta$  o número de pontos de Gauss deve ser escolhido com base no termo de maior ordem.

A tabela 6.2 exemplifica o modo como o número de pontos de Gauss deve ser escolhido. Note-se que a ordem do polinómio é determinada pelos termos  $J_{ij}^*$ , pelo jacobiano  $J$  e pelas derivadas das funções interpoladoras. Os termos  $a$ ,  $b$  e  $c$  são, normalmente, constantes.

Tabela 6.2 – selecção dos pontos de Gauss para elementos lineares, quadráticos e cúbicos

Tipo de elemento	Máximo grau do polinómio	N=M
Linear (4 nós)	2	2
Quadrático (9 nós)	4	3
Cúbico (16 nós)	6	4

### 6.2.4 – Integração com um elemento de referência triangular

No secção anterior foi estudada a integração numérica sobre um elemento de referência quadrado. Também é possível distorcer um elemento quadrilátero até obter um elemento triangular. Os nós em excesso devem ser sobrepostos aos nós vizinhos. Um elemento de referência pode, deste modo, ser obtido de forma natural associando elementos de referência quadrados.

Para um elemento triangular a integração é realizada através da expressão,

$$\int_{\Omega} F(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N F(\xi_i, \eta_i) w_i \quad (6.22)$$

em que os  $w_i$  e os  $(\xi_i, \eta_i)$  representam, respectivamente, os pesos e os pontos de integração disponíveis na tabela 6.3.

Tabela 6.3 – pontos de pesos para a integração num elemento de referência triangular

Número de pontos	$\xi$	$\eta$	Peso	Tipo de elemento
3	$\xi_1=0.1666666667$	$\eta_1=\xi_1$	0.3333333333	6 nós
	$\xi_2=0.6666666667$	$\eta_2=\xi_2$	0.3333333333	
	$\xi_3=\xi_1$	$\eta_3=\xi_3$	0.3333333333	

## 6.3 – Considerações de modelação

### 6.3.1 – Comentários iniciais

Uma simulação numérica de um processo físico ou de um sistema requer um modelo matemático que descreve o processo e um método numérico para o analisar. No desenvolvimento do processo matemático são, por vezes, feitas algumas considerações de modo a construir as relações matemáticas que regem o sistema. O modelo matemático é utilizado de modo a que se possa adquirir conhecimento acerca do processo físico. Se as

relações matemáticas forem simples é possível obter a solução analítica do problema. No entanto, muitos dos problemas são deveras complicados e é necessário utilizar métodos numéricos, como por exemplo o método dos elementos finitos, para estimar a solução do problema.

A análise por elementos finitos é uma simulação numérica do processo físico, como tal envolve considerações acerca da representação do sistema e/ou do seu comportamento. Considerações válidas podem ser realizadas apenas se existir um bom conhecimento qualitativo sobre o modo como o sistema trabalha. Conclui-se que um bom conhecimento sobre os princípios básicos do processo físico e sobre a teoria dos elementos finitos, permite o desenvolvimento de um melhor modelo numérico do processo físico.

### 6.3.2 – Geometria dos elementos

A integração numérica sobre um elemento envolve a transformação de coordenadas do elemento real para o elemento de referência  $\hat{\Omega}$ . A transformação é aceitável se e só se a cada um dos pontos do elemento real corresponder apenas um ponto do elemento de referência e vice-versa. Ou seja, a transformação tem de ser um para um. Matematicamente pode-se escrever que a transformação é aceitável se

$$J^e = \det[J^e] > 0 \quad \forall \Omega^e \quad (6.23)$$

onde  $[J^e]$  representa a matriz jacobiana e  $J^e$  o jacobiano do elemento  $\Omega^e$ . Geometricamente o jacobiano  $J^e$  representa a razão entre um pedaço de área do elemento  $\Omega^e$  com a área correspondente no elemento de referência. Se  $J^e$  é zero então o elemento real é transformado numa área nula do elemento de referência, o que é inaceitável do ponto de vista físico.  $J^e < 0$  significa que há uma inversão do sistema de coordenadas devido, por exemplo, a uma inversão da numeração dos nós do elemento real em comparação com a numeração do elemento de referência.

De um modo geral o jacobiano é uma função de  $\xi$  e de  $\eta$ , implicando que o elemento real é transformado de forma não uniforme, isto é, o elemento está distorcido. Uma excessiva distorção não é recomendável, porque pode gerar transformações de elementos reais com área não nula num elemento de referência com zonas de área nula ou quase nula.

Algumas geometrias de elementos devem ser evitadas de modo a ter malhas sem distorções elevadas. Por exemplo, um elemento triangular não deve ter ângulos próximos dos  $0^\circ$  nem dos  $180^\circ$ , sendo que os valores aceitáveis estão entre os  $15^\circ$  e os  $165^\circ$ . Para os elementos quadriláteros também se devem evitar ângulos próximos dos  $0^\circ$  e dos  $180^\circ$ .

Para elementos da família de Lagrange de ordem igual ou superior a 2, uma inadequada localização dos nós interiores contribui para a distorção, devendo estar a uma determinada distância dos nós dos vértices. Por exemplo, no caso dos elementos quadráticos, os nós interiores não devem estar a uma distância menor que um quarto do comprimento do lado em relação aos nós dos vértices. Nas figuras 6.9 e 6.10 é possível observar algumas exemplos de geometrias de elementos a evitar. Também se deve referir que num elemento rectangular o maior lado deve ser, no máximo, 10 vezes maior que o menor lado.

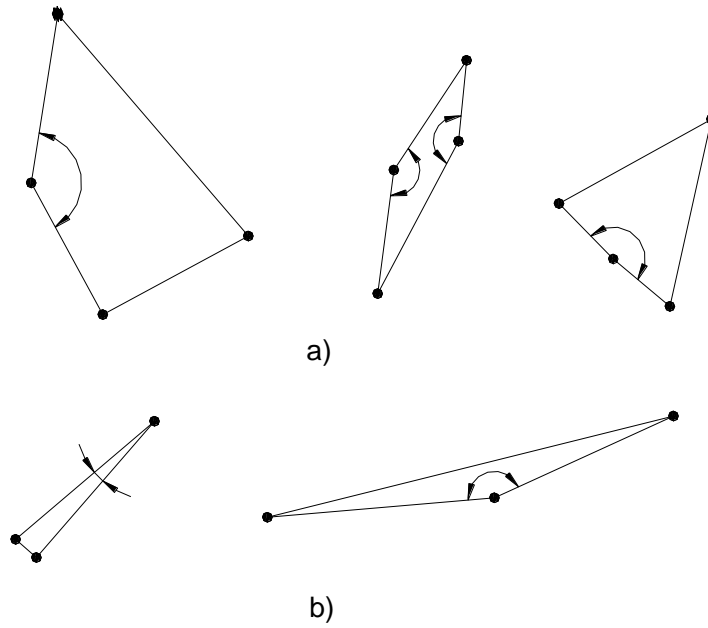


Figura 6.9 – elementos finitos com ângulos inaceitáveis: a) elementos quadriláteros lineares, b) elementos triangulares lineares

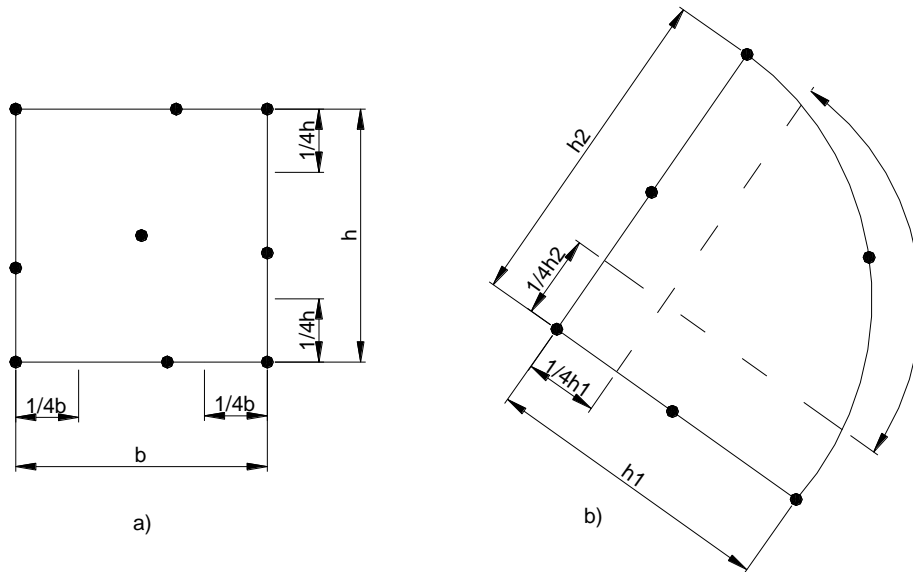


Figura 6.10 – intervalo admissível para os nós internos dos elementos quadráticos a) quadriláteros e b) triangulares

### 6.3.3 – Geração da malha

A geração de uma malha de elementos finitos para um determinado problema deve adoptar as seguintes linhas orientadoras:

- a malha deve representar a geometria do domínio computacional e a aplicação da carga com qualidade
- deve ser tal que grandes gradientes da solução são representados de forma adequada
- não deve conter elementos com geometrias inaceitáveis, especialmente nas

regiões com grandes gradientes da solução

Dentro das linhas orientadoras, a malha utilizada pode ser mais ou menos refinada e pode conter um ou mais tipos de elementos, como por exemplo lineares e quadráticos, triangulares e quadriláteros. Uma boa escolha da ordem e do tipo do elemento pode poupar esforço computacional e fornecer resultados com qualidade. No entanto, note-se que a escolha dos elementos e da malha está dependente do problema.

Deve-se iniciar a análise de elementos finitos com uma malha mais grosseira mas que respeite as três linhas orientadoras. Também se devem explorar as simetrias, caso existam. A solução desta primeira análise permite adquirir algum conhecimento sobre o processo físico, sendo que estes resultados servem de guia para os ajustes das subseqüentes análises.

A geração de malhas utilizando apenas um tipo de elemento está facilitada porque todas as fronteiras são compatíveis. Por seu turno, o refinamento de malhas envolve várias hipóteses: subdivisão dos elementos por dois ou mais elementos do mesmo tipo ou substituição por elementos de ordem superior (ver figura 6.11). É necessário ter em atenção que o refinamento local da malha deve ser tal que elementos pequenos não devem ser vizinhos de elementos muito maiores.

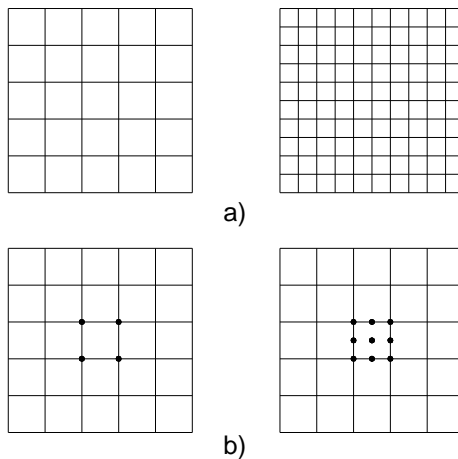


Figura 6.11 – refinar a malha: a) mais elementos, b) elementos de maior ordem

Quando se combinam elementos de diferentes ordens, por exemplo lineares com quadráticos, é necessário garantir que há compatibilidade nas fronteiras entre os elementos. Uma forma de assegurar a continuidade da solução primária na fronteira é utilizando elementos de transição com diferente número de nós em faces opostas, como se pode verificar na figura 6.12. Outra das formas consiste em impor um constrangimento ao nó entre vértices do elemento quadrático, no entanto a continuidade não é garantida na totalidade embora haja uma melhoria. A utilização de elementos de transição é uma prática comum para solucionar este tipo de problemas.

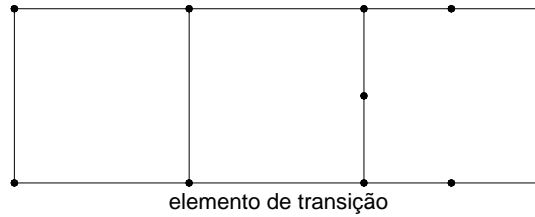


Figura 6.12 – exemplo de elemento de transição entre um elemento linear e outro quadrático

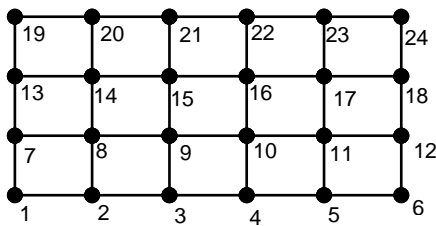
### 6.3.4 – Numeração dos nós

A matriz de rigidez global é bandeda. Alguns métodos de resolução do sistema de equações  $\mathbf{Kd}=\mathbf{F}$  exploram esse facto, como tal quanto menor for a largura de banda mais rápida é a resolução do sistema de equações. Por sua vez a largura de banda está intimamente relacionada com a numeração dos nós da malha de elementos finitos,

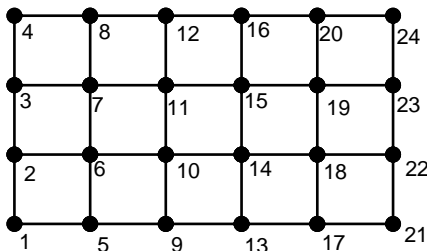
$$\text{meia largura de banda} = \max_{1 \leq e \leq NE} [ (|NN_1 - NN_n| + 1) NGL ] \quad (6.24)$$

em que  $NN_1$  e  $NN_n$  representam o menor e maior número dos nós do elemento  $e$ ,  $NE$  é o número de elementos na malha e  $NGL$  é o número de graus de liberdade num nó.

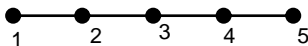
Na figura 6.13 é possível observar alguns exemplos sobre o modo como se calcula a meia largura de banda.



$$\text{meia largura de banda} = (|1 - 8| + 1)2 = 16$$

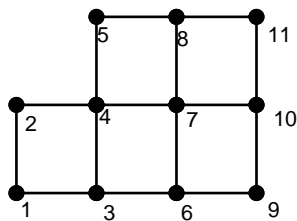


$$\text{meia largura de banda} = (|1 - 6| + 1)2 = 12$$



viga – barra

$$\text{meia largura de banda} = (|1 - 2| + 1)3 = 6$$



$$\text{meia largura de banda} = (|3 - 7| + 1)2 = 10$$

Figura 6.13 – exemplos de numeração de malhas e respectiva meia largura de banda

Para o exemplo de viga-barra da figura 6.13 a banda da matriz de rigidez tem o seguinte



## 7 – ELEMENTOS 3D

### 7.1 – Introdução

Neste capítulo serão apresentados os principais elementos tridimensionais lineares para elasticidade: o tetraedro de 4 nós e o hexaedro de 8 nós.

### 7.2 – Definição do problema

Na elasticidade plana o problema foi apresentado de forma genérica. Logo, aproveitando o trabalho feito, relembra-se que a formulação fraca de um problema de elasticidade é dado por:

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = I(\mathbf{w})$$

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T(\mathbf{u}) \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) d\Omega \quad \text{e} \quad I(\mathbf{w}) = \int_{\Gamma_T} \mathbf{T} \mathbf{w} d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{f} \mathbf{w} d\Omega \quad (25)$$

em que  $\Omega$  representa o volume do corpo com fronteira  $\Gamma$ .  $\boldsymbol{\varepsilon}$  é o campo de deformações,  $\mathbf{D}$  a matriz constitutiva,  $\mathbf{f}$  a carga volúmica, sendo que  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{w}$  representam o campo de deslocamentos real e virtual, respetivamente. As condições de fronteira do problema são:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} n_j &= T_i \quad \text{em } \Gamma_T \\ u_i &= \bar{u}_0 \quad \text{em } \Gamma_u \end{aligned} \quad (26)$$

em que  $T_i$  e  $\bar{u}_0$  são valores prescritos de força e de deslocamento, nas fronteiras  $\Gamma_T$  e  $\Gamma_u$ , respetivamente.

Como  $B(\mathbf{u}, \mathbf{w})$  é simétrico e bilinear e  $I(\mathbf{w})$  é linear, então é possível obter o funcional quadrático,

$$I(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} B(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - I(\mathbf{u}) \quad (27)$$

O modelo de elementos finitos será obtido através do funcional quadrático.

### 7.3 – Elemento tetraédrico de 4 nós

Considere-se o elemento tetraédrico de 4 nós representado na figura 1.

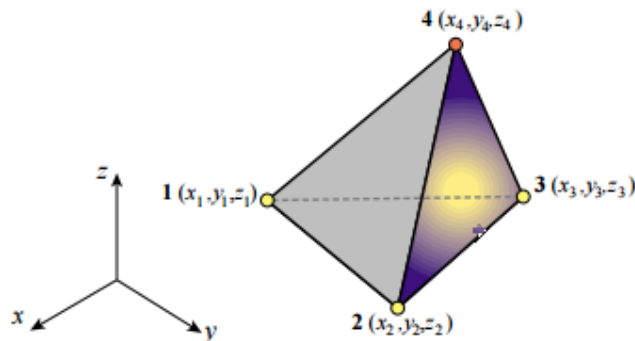


Figura 1 – exemplo de um elemento tetraédrico de 4 nós

Cada nó tem as coordenadas globais xyz representadas na figura 1 e os graus de liberdade u, v e w que representam os deslocamentos segundo os eixos dos xx, yy e zz,

respetivamente. Logo, se cada nó tem 3 graus de liberdade, no total existem 12 graus de liberdade. Deste modo, o campo de deslocamentos aproximado fica:

$$\mathbf{u}_h(x, y, z) = \begin{cases} u_h = \sum_{j=1}^4 u_j^e \psi_j \\ v_h = \sum_{j=1}^4 v_j^e \psi_j \\ w_h = \sum_{j=1}^4 w_j^e \psi_j \end{cases} \quad (28)$$

em que os  $q_j$  são os deslocamentos nodais,  $u_j$  segundo o eixo dos  $xx$ ,  $v_j$  segundo o eixo dos  $yy$  e  $w_j$  segundo o eixo dos  $zz$ .  $\psi_j$  são as funções de forma. O índice  $h$  relembra que a solução é aproximada.

Para se obter a matriz de rigidez é necessário o primeiro termo do funcional quadrático,

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T(\mathbf{u}) \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) d\Omega \quad (29)$$

Para materiais elásticos, isotrópicos a matriz constitutiva é,

$$\mathbf{D} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \quad (30)$$

em que  $E$  representa o módulo de elasticidade ou o módulo de Young e  $\nu$  representa o coeficiente de Poisson.

O próximo objetivo é simplificar a expressão (5.16) de modo a que seja possível obter a matriz de rigidez do elemento  $e$ ,  $\mathbf{K}^e$ . Para tal começa-se por escrever a solução aproximada na forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} u_h \\ v_h \\ w_h \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_1 & 0 & 0 & \psi_2 & 0 & 0 & \psi_3 & 0 & 0 & \psi_4 & 0 & 0 \\ 0 & \psi_1 & 0 & 0 & \psi_2 & 0 & 0 & \psi_3 & 0 & 0 & \psi_4 & 0 \\ 0 & 0 & \psi_1 & 0 & 0 & \psi_2 & 0 & 0 & \psi_3 & 0 & 0 & \psi_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ w_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ w_4 \end{Bmatrix} = [\Psi]\{q\} \quad (31)$$

O campo de deformações também pode ser escrito na forma matricial,

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \end{Bmatrix} = [C][\partial u] \quad (32)$$

A matriz que define a derivada do deslocamento  $[\partial u]$ , pode ser escrita na forma,

$$[\partial \mathbf{u}] = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_h \\ v_h \\ w_h \end{Bmatrix} = [\partial \mathbf{x}][\boldsymbol{\psi}]\{\mathbf{q}\} \quad (33)$$

Neste momento é possível rescrever a expressão (5.16) na forma,

$$\mathbf{B}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \int_{\Omega} \{\mathbf{q}\}^T [\boldsymbol{\psi}]^T [\partial \mathbf{x}]^T [\mathbf{C}]^T [\mathbf{D}][\mathbf{C}][\partial \mathbf{x}][\boldsymbol{\psi}]\{\mathbf{q}\} dx dy dz \quad (34)$$

Como se observa, a expressão (5.21) está em função das coordenadas globais (x,y,z) do elemento e. Sendo assim seria necessário calcular as funções de forma em função das variáveis globais (x,y,z), bem como calcular o integral sobre a área do elemento. Este trabalho pode ser fastidioso e difícil, já que numa malha de elementos finitos seria necessário calcular as funções de forma para cada um dos elementos. Os cálculos dos integrais também não seriam fáceis, sobretudo para os elementos distorcidos em que a sua fronteira não é de fácil definição. Perante estas dificuldades surgiu a necessidade de recorrer a um elemento genérico, que se pode ver na figura 2, definido nas coordenadas locais ( $\xi, \eta, \zeta$ ). Neste caso apenas se utilizam as funções de forma definidas sobre o elemento genérico e que são função das coordenadas ( $\xi, \eta, \zeta$ ) e o integral é definido sobre o volume do elemento genérico  $\Omega_g$ . Esta simplificação é um processo de transformação de coordenadas.

Como já se observou na expressão (5.15) este elemento tem 4 funções de forma. Como tal a solução aproximada é dada pelo polinómio,

$$\begin{cases} u_h = a + b\xi + c\eta + d\zeta \\ v_h = a + b\xi + c\eta + d\zeta \\ w_h = a + b\xi + c\eta + d\zeta \end{cases} \quad (35)$$

No entanto já se observou em (5.15) que as funções de forma que definem o deslocamento  $u_h$  são as mesmas que definem o deslocamento  $v_h$  e  $w_h$ . Como tal basta, por exemplo, centrar o cálculo das funções de forma em  $u_h$ . Por definição, nos nós os graus de liberdade são os deslocamentos nodais:  $u_h(0,0,0)=u_1$ ,  $u_h(1,0,0)=u_2$ ,  $u_h(0,1,0)=u_3$  e  $u_h(0,0,1)=u_4$ . Logo, para calcular os coeficientes a, b, c e d recorre-se ao sistema de equações:

$$\begin{cases} u_h(0,0,0) = u_1 \\ u_h(1,0,0) = u_2 \\ u_h(0,1,0) = u_3 \\ u_h(0,0,1) = u_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = u_1 \\ b = u_2 - u_1 \\ c = u_3 - u_1 \\ d = u_4 - u_1 \end{cases} \quad (36)$$

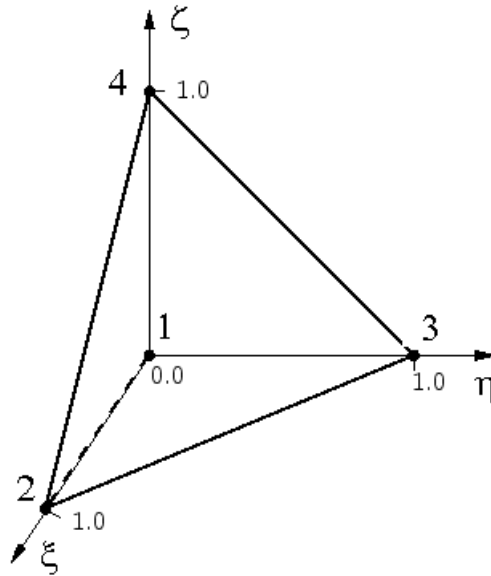


Figura 2 – elemento genérico

Logo, as funções de forma são:

$$\begin{aligned} \psi_1(\xi, \eta, \zeta) &= 1 - \xi - \eta - \zeta \\ \psi_2(\xi, \eta, \zeta) &= \xi \\ \psi_3(\xi, \eta, \zeta) &= \eta \\ \psi_4(\xi, \eta, \zeta) &= \zeta \end{aligned} \quad (37)$$

Encontradas que estão as funções de forma o próximo passo da transformação de coordenadas consiste na substituição de todos os termos em  $(x,y,z)$  da expressão (5.21) por termos em  $(\xi,\eta,\zeta)$ . Apenas a matriz  $[\partial x]$  depende das variáveis globais  $(x,y,z)$ :

$$[\partial x] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Pela regra da derivação em cadeia tem-se que,

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \zeta} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \zeta} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{cases} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{cases} = [J] \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{cases} \quad (38)$$

em que [J] é a matriz Jacobiana da transformação de coordenadas:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^4 \frac{\partial \psi_i}{\partial \xi} x_i^e & \sum_{i=1}^4 \frac{\partial \psi_i}{\partial \xi} y_i^e & \sum_{i=1}^4 \frac{\partial \psi_i}{\partial \xi} z_i^e \\ \sum_{i=1}^4 \frac{\partial \psi_i}{\partial \eta} x_i^e & \sum_{i=1}^4 \frac{\partial \psi_i}{\partial \eta} y_i^e & \sum_{i=1}^4 \frac{\partial \psi_i}{\partial \eta} z_i^e \\ \sum_{i=1}^4 \frac{\partial \psi_i}{\partial \zeta} x_i^e & \sum_{i=1}^4 \frac{\partial \psi_i}{\partial \zeta} y_i^e & \sum_{i=1}^4 \frac{\partial \psi_i}{\partial \zeta} z_i^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 + x_2 & -y_1 + y_2 & -z_1 + z_2 \\ -x_1 + x_3 & -y_1 + y_3 & -z_1 + z_3 \\ -x_1 + x_4 & -y_1 + y_4 & -z_1 + z_4 \end{bmatrix} \quad (39)$$

E o jacobiano da transformação é o determinante da matriz Jacobiana,

$$J = \det[J] \quad (40)$$

Neste momento já é possível escrever a matriz  $[\partial x]$  em coordenadas locais,

$$[\partial x] = \begin{bmatrix} [J]^{-1} & [0] & [0] \\ [0] & [J]^{-1} & [0] \\ [0] & [0] & [J]^{-1} \end{bmatrix} [\partial \xi] = [\Gamma][\partial \xi] \quad (41)$$

em que,

$$[\partial\xi] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial\xi} & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial\eta} & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial\zeta} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial\xi} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial\eta} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial\zeta} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial\xi} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial\eta} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial\zeta} \end{bmatrix}$$

Como tal, já é possível escrever a expressão (5.21) em coordenadas locais,

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) &= \int_{\Omega_g} \mathbf{J}\{\mathbf{q}\}^T [\boldsymbol{\psi}]^T [\partial\xi]^T [\boldsymbol{\Gamma}]^T [\mathbf{C}]^T [\mathbf{D}][\mathbf{C}][\boldsymbol{\Gamma}][\partial\xi][\boldsymbol{\psi}]\{\mathbf{q}\} d\xi d\eta d\zeta = \\ &= \int_{\Omega_g} \mathbf{J}\{\mathbf{q}\}^T [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}][\mathbf{B}]\{\mathbf{q}\} d\xi d\eta d\zeta \end{aligned} \quad (42)$$

com,

$$[\mathbf{B}] = [\mathbf{C}][\boldsymbol{\Gamma}][\partial\xi][\boldsymbol{\psi}] \quad (43)$$

Como nenhum dos termos do integral depende das coordenadas locais  $(\xi, \eta, \zeta)$ , e o volume do elemento genérico é igual a  $1/6$ , a matriz de rigidez do elemento tetraédrico linear é dada por:

$$\mathbf{K} = \frac{1}{6} \mathbf{J}[\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}][\mathbf{B}] \quad (44)$$

## 7.4 – Elemento hexaédrico de 8 nós

Após o desenvolvimento da matriz de rigidez do tetraedro linear de 4 nós, apresenta-se o elemento hexaédrico de 8 nós.

A formulação é em tudo idêntica ao elemento anterior, no entanto o número de graus de liberdade é bastante superior. Como este elemento tem 8 nós, e como cada nó tem os mesmos 3 graus de liberdade, então o número total de graus de liberdade do elemento genérico representado na figura 3 é de 24. Logo,

$$\mathbf{u}_h(x, y, z) = \begin{cases} u_h = \sum_{j=1}^8 u_j^e \psi_j \\ v_h = \sum_{j=1}^8 v_j^e \psi_j \\ w_h = \sum_{j=1}^8 w_j^e \psi_j \end{cases} \quad (45)$$

Os  $\psi_i$  representam as funções de forma que são iguais a:

$$\begin{aligned}
 \psi_1 &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta) & \psi_5 &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1+\zeta) \\
 \psi_2 &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1-\zeta) & \psi_6 &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1+\zeta) \\
 \psi_3 &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1-\zeta) & \psi_7 &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1+\zeta) \\
 \psi_4 &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1-\zeta) & \psi_8 &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1+\zeta)
 \end{aligned} \tag{46}$$

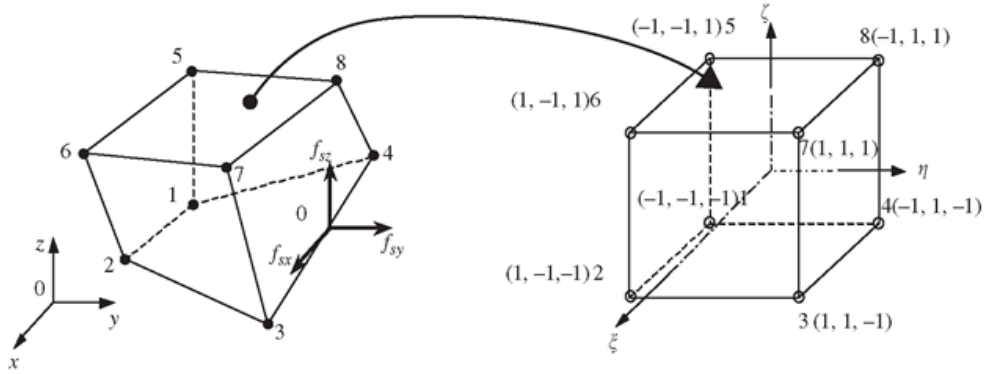


Figura 3 – elemento real e genérico hexaédrico de 8 nós

Tal como para o elemento triangular, a matriz de rigidez do elemento  $\mathbf{K}^e$  é obtida através do funcional  $B(\mathbf{u}, \mathbf{u})$ ,

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T(\mathbf{u}) \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) d\Omega \tag{47}$$

A matriz  $\mathbf{D}$  para materiais elásticos, isotrópicos e considerando tensão plana, está representada na expressão (5.17).

A solução aproximada pode ser escrita na forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u}_h \\ \mathbf{v}_h \\ \mathbf{w}_h \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_1 & 0 & 0 & \dots & \psi_8 & 0 & 0 \\ 0 & \psi_1 & 0 & \dots & 0 & \psi_8 & 0 \\ 0 & 0 & \psi_1 & \dots & 0 & 0 & \psi_8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{w}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_8 \\ \mathbf{v}_8 \\ \mathbf{w}_8 \end{Bmatrix} = [\boldsymbol{\psi}] \{\mathbf{q}\} \tag{48}$$

O campo de deformações continua a ser dado pelas equações (32) e (33). Continua a ser necessário fazer uma transformação de coordenadas e para tal é essencial a matriz Jacobiana,

$$\mathbf{[J]} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^8 \frac{\partial \psi_i}{\partial \xi} x_i^e & \sum_{i=1}^8 \frac{\partial \psi_i}{\partial \xi} y_i^e & \sum_{i=1}^8 \frac{\partial \psi_i}{\partial \xi} z_i^e \\ \sum_{i=1}^8 \frac{\partial \psi_i}{\partial \eta} x_i^e & \sum_{i=1}^8 \frac{\partial \psi_i}{\partial \eta} y_i^e & \sum_{i=1}^8 \frac{\partial \psi_i}{\partial \eta} z_i^e \\ \sum_{i=1}^8 \frac{\partial \psi_i}{\partial \zeta} x_i^e & \sum_{i=1}^8 \frac{\partial \psi_i}{\partial \zeta} y_i^e & \sum_{i=1}^8 \frac{\partial \psi_i}{\partial \zeta} z_i^e \end{bmatrix} \tag{49}$$

em que o Jacobiano é o determinante da matriz Jacobiana,

$$J = \det[J] \quad (50)$$

Volta a ser necessário aplicar a equação (41) para simplificar o funcional  $B(\mathbf{u}, \mathbf{u})$ ,

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 J[\mathbf{q}]^T [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}][\mathbf{B}][\mathbf{q}] d\xi d\eta d\zeta \quad (51)$$

com,

$$[\mathbf{B}] = [\mathbf{C}][\Gamma][\partial\xi][\psi] \quad (52)$$

Logo, a matriz de rigidez é dada por,

$$\mathbf{K} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 J[\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}][\mathbf{B}] d\xi d\eta d\zeta \quad (53)$$

Desta feita, os termos no interior do integral dependem das variáveis  $(\xi, \eta, \zeta)$  logo é necessário utilizar a regra de Gauss-Legendre para resolver o integral. Como o elemento tem 8 nós, devem ser utilizados, para uma integração completa, 8 pontos de Gauss. Para uma integração completa a matriz de rigidez toma a forma,

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 F(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) W_i W_j W_k \quad (54)$$

em que,

$$F = J[\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}][\mathbf{B}] \quad (55)$$

neste caso os pesos  $W$  são iguais a 1 e os pontos de Gauss estão representados na figura 4.

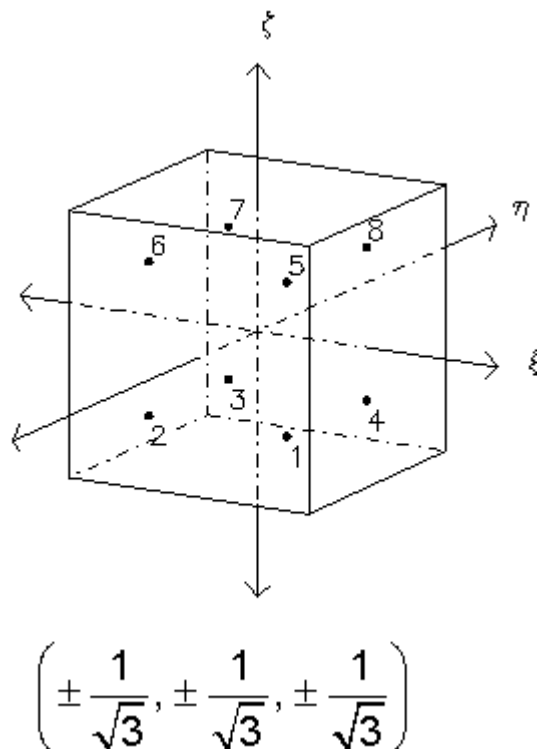


Figura 4 – pontos de Gauss para a integração numérica sobre o hexaédrico de 8 nós

## 8 – QUALIDADE DA MALHA

### 8.1 – Introdução

A qualidade da malha depende de cada um dos elementos que a compõem. Uma boa medida da qualidade de cada um dos elementos é o número de condição da matriz Jacobiana. Esta técnica permite comparar diferentes tipos de elementos, uma vez que é uma técnica geral.

### 8.2 – Número de condição

A matriz Jacobiana permite fazer a transformação de coordenadas entre um elemento genérico perfeito e um elemento real que pode ou não ser perfeito. Um elemento real será perfeito se tiver as mesmas proporções geométricas do que o elemento genérico.

Relembre-se que a matriz Jacobiana para problemas bidimensionais e tridimensionais é dada pela expressão,

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{J}] &= \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad 2\text{D} \\
 [\mathbf{J}] &= \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad 3\text{D}
 \end{aligned} \tag{1}$$

em que (x,y,z) representam as variáveis globais e (ξ,η,ζ) as variáveis locais do elemento genérico

O número de condição da matriz Jacobiana é da por:

$$\kappa = \frac{1}{n} \|\mathbf{J}\|_{\text{F}} \times \|\mathbf{J}^{-1}\|_{\text{F}} \tag{2}$$

em que n=2 para problemas bidimensionais e n=3 para problemas tridimensionais. A expressão  $\|\mathbf{A}\|_{\text{F}}$  é a norma de Frobenius da matriz  $\mathbf{A}$  e determina-se com a seguinte equação:

$$\|\mathbf{A}\|_{\text{F}} = \left[ \text{tr}(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) \right]^{1/2} \tag{3}$$

O número de condição da matriz Jacobiana definido na equação (2) é igual 1 quando o elemento real é perfeito e tende para infinito quanto pior for a qualidade do elemento. Como tal, e de modo a ter sempre a mesma medida de qualidade utiliza-se o inverso do número de condição,

$$\begin{aligned}
 q &= \frac{1}{\kappa} \\
 0 &< q \leq 1
 \end{aligned} \tag{4}$$

a medida de qualidade q está sempre entre 0 e 1, sendo que se q=1 o elemento é perfeito e

quanto mais perto de 0 pior é a qualidade do elemento finito. Esta técnica para calcular a qualidade pode ser utilizada para elementos lineares, quadráticos ou de grau superior.

### Exemplo 1

Neste primeiro exemplo vamos calcular a qualidade de 2 elementos triangulares de 3 nós, representados na figura 1.

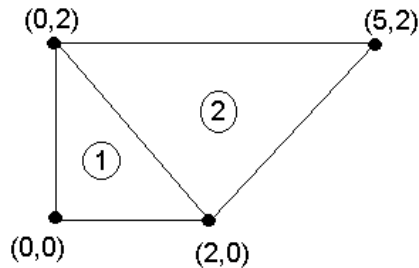


Figura 1 – 2 elementos triangulares de 3 nós

Relembre-se que para este caso,

$$[J] = \begin{bmatrix} -x_1^e + x_2^e & -y_1^e + y_2^e \\ -x_1^e + x_3^e & -y_1^e + y_3^e \end{bmatrix}$$

$$[J]^{-1} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix}$$

Elemento 1 – No caso do elemento 1 considerem-se as coordenadas dos nós:

Nó 1 – (0,0);

Nó 2 – (2,0);

Nó 3 – (0,2).

Deste modo,

$$[J] = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$J = \det[J] = 4$$

$$[J]^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Continuando com os cálculos,

$$[J]^T [J] = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{tr}([J]^T [J]) = 4 + 4 = 8$$

$$[J]^{-T} [J]^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{bmatrix}$$

$$\text{tr}([J]^{-T} [J]^{-1}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Logo, as normas de Frobenius são iguais a,

$$\|\mathbf{J}\|_F = \sqrt{8}$$

$$\|\mathbf{J}^{-1}\|_F = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

E o número de condição e, por fim, a respetiva medida de qualidade,

$$\kappa = \frac{1}{n} \|\mathbf{J}\|_F \times \|\mathbf{J}^{-1}\|_F = \frac{1}{2} \sqrt{8} \sqrt{\frac{1}{2}} = 1$$

$$q = \frac{1}{\kappa} = 1$$

Em suma, o elemento 1 tem qualidade máxima.

Elemento 2 – No caso do elemento 2 considerem-se as coordenadas dos nós:

Nó 1 – (2,0);

Nó 2 – (5,2);

Nó 3 – (0,2).

Deste modo,

$$[\mathbf{J}] = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$J = \det[\mathbf{J}] = 10$$

$$[\mathbf{J}]^{-1} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/5 & -1/5 \\ 1/5 & 3/10 \end{bmatrix}$$

Continuando com os cálculos,

$$[\mathbf{J}]^T [\mathbf{J}] = \begin{bmatrix} 13 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\text{tr}([\mathbf{J}]^T [\mathbf{J}]) = 13 + 8 = 21$$

$$[\mathbf{J}]^{-T} [\mathbf{J}]^{-1} = \begin{bmatrix} 2/25 & 1/50 \\ 1/50 & 13/100 \end{bmatrix}$$

$$\text{tr}([\mathbf{J}]^{-T} [\mathbf{J}]^{-1}) = \frac{2}{25} + \frac{13}{100} = \frac{21}{100}$$

Logo, as normas de Frobenius são iguais a,

$$\|\mathbf{J}\|_F = \sqrt{21}$$

$$\|\mathbf{J}^{-1}\|_F = \sqrt{\frac{21}{100}}$$

E o número de condição e, por fim, a respetiva medida de qualidade,

$$\kappa = \frac{1}{n} \|\mathbf{J}\|_F \times \|\mathbf{J}^{-1}\|_F = \frac{1}{2} \sqrt{21} \sqrt{\frac{21}{100}} = 1.05$$

$$q = \frac{1}{\kappa} = 0.952$$

## Exemplo 2

No segundo exemplo vamos calcular a qualidade de 1 elemento quadrilátero de 4 nós, representado na figura 2.

## Simulação Computacional

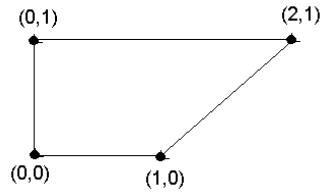


Figura 2 – 1 elemento quadrilátero de 4 nós

Relembre-se que para este caso,

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\eta}{4}(x_1^e - x_2^e + x_3^e - x_4^e) + \frac{1}{4}(-x_1^e + x_2^e + x_3^e - x_4^e) & \frac{\eta}{4}(y_1^e - y_2^e + y_3^e - y_4^e) + \frac{1}{4}(-y_1^e + y_2^e + y_3^e - y_4^e) \\ \frac{\xi}{4}(x_1^e - x_2^e + x_3^e - x_4^e) + \frac{1}{4}(-x_1^e - x_2^e + x_3^e + x_4^e) & \frac{\xi}{4}(y_1^e - y_2^e + y_3^e - y_4^e) + \frac{1}{4}(-y_1^e - y_2^e + y_3^e + y_4^e) \end{bmatrix}$$

$$[J]^{-1} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix}$$

Neste caso considerem-se as coordenadas dos nós:

Nó 1 – (0,0);

Nó 2 – (1,0);

Nó 3 – (2,1);

Nó 4 – (0,1).

Deste modo,

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\eta}{4} + \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{\xi}{4} + \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Neste caso, a matriz  $J$  depende das coordenadas locais. Logo, teremos de calcular a qualidade em pontos específicos. O ideal seria calcular em vários pontos e fazer a média. Neste exemplo vamos calcular a qualidade do elemento em  $(\xi, \eta) = (0,0)$ . Então,

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$J = \det[J] = \frac{3}{8}$$

$$[J]^{-1} = \frac{3}{8} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/3 & 0 \\ -2/3 & 2 \end{bmatrix}$$

Continuando com os cálculos,

### Simulação Computacional

$$[\mathbf{J}]^T [\mathbf{J}] = \begin{bmatrix} 5/8 & 1/8 \\ 1/8 & 1/4 \end{bmatrix}$$

$$\text{tr}([\mathbf{J}]^T [\mathbf{J}]) = \frac{7}{8}$$

$$[\mathbf{J}]^{-T} [\mathbf{J}]^{-1} = \begin{bmatrix} 20/9 & -4/3 \\ -4/3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{tr}([\mathbf{J}]^{-T} [\mathbf{J}]^{-1}) = \frac{56}{9}$$

Logo, as normas de Frobenius são iguais a,

$$\|\mathbf{J}\|_F = \sqrt{\frac{7}{8}}$$

$$\|\mathbf{J}^{-1}\|_F = \sqrt{\frac{56}{9}}$$

E o número de condição e, por fim, a respetiva medida de qualidade,

$$\kappa = \frac{1}{n} \|\mathbf{J}\|_F \times \|\mathbf{J}^{-1}\|_F = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{7}{8}} \sqrt{\frac{56}{9}} = 1.167$$

$$q = \frac{1}{\kappa} = 0.857$$

## BIBLIOGRAFIA

Grande parte desta sebenta foi inspirada no livro:

- Reddy, J. N., "An Introduction to the Finite Element Method" 3ª edição, McGraw-Hill, 2005.

Outra bibliografia utilizada:

- Cook, R. D., Malkus, D. S., Plesha, E. M., "Concepts and Applications of Finite Element Analysis" 4ª edição, Wiley, 2001.
- Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L., Zhu, J.Z., "The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals" 6ª edição, Butterworth-Heinemann, 2005.
- Wriggers, P., "Computational Contact Mechanics" 2ª edição, Springer, 2006.
- Knupp, P. M.; "Achieving finite element mesh quality via optimization of the Jacobian matrix norm and associated quantities. Part I – a framework for surface mesh optimization"; International Journal for Numerical Methods in Engineering, pp-401-420, 2000.
- Knupp, P. M.; "Achieving finite element mesh quality via optimization of the Jacobian matrix norm and associated quantities. Part II – A framework for volume mesh optimization and the condition number of the Jacobian matrix"; International Journal for Numerical Methods in Engineering, pp-1165-1185, 2000.