



Mestrado em Engenharia Civil – Construções Civas

***Análise estrutural de telhas de aço autoportante***

Dissertação apresentada para a obtenção do grau de Mestre em  
Engenharia Civil

**Tiago Filipe Rodrigues Lopes**

Leiria, Março de 2015





Mestrado em Engenharia Civil – Construções Civas

***Análise estrutural de telhas de aço autoportante***

Dissertação apresentada para a obtenção do grau de Mestre em  
Engenharia Civil

**Tiago Filipe Rodrigues Lopes**

**Orientador:** Doutor Luís Carlos Prola  
(Professor Coordenador, ESTG-IPL)

**Coorientador:** Doutor Rui Miguel Barreiros Rúben  
(Professor Coordenador DEM, ESTG-IPL)

Leiria, Março de 2015



*As raízes da ciência são amargas,  
mas os seus frutos são doces.*

*"Aristóteles"*



## ***Agradecimentos***

---

A realização desta Dissertação de Mestrado só foi possível graças à colaboração e ao contributo, de forma direta ou indireta, de várias pessoas, às quais gostaria de expressar algumas palavras de agradecimento e reconhecimento, em particular:

Ao Professor Luís Prola e Professor Rui Rúben, pela disponibilidade manifestada para orientar este trabalho, pela preciosa ajuda na definição do objeto de estudo, pela incansável orientação científica, pela constante ajuda no ABAQUS, pela revisão crítica do texto, pelos proficientes comentários, esclarecimentos, opiniões e sugestões, pela cedência e indicação de bibliografia relevante, pela acessibilidade, pelo estímulo que, por vezes, se tornou decisivo em determinado momento da elaboração desta dissertação e pelo interesse demonstrado;

Aos meus colegas e amigos do Departamento de Engenharia Civil, pela proveitosa colaboração, amizade e espírito de entreajuda, em especial ao Eng. João Baptista e ao Eng. Patrick Pinheiro, pelas horas infindáveis de estudo, companheirismo e sobretudo amizade.

Ao meu Pai, à Paula, à minha família e amigos pelo apoio que me foi dado durante a elaboração deste trabalho.

Por último, mas não menos importante, à minha esposa que sem o seu estímulo, dedicação e encorajamento nas horas de frustração, não seria possível a finalização desta etapa da minha vida.

A todos, enfim reitero o meu apreço e a minha eterna gratidão.



## **Resumo**

---

O sistema autoportante caracteriza-se por ser um sistema constituído por perfis de aço enformados a frio longos e inteiriços, planos ou arqueados, permitindo obter vãos livres de grande dimensão, apoiados unicamente nas extremidades. Este sistema muito utilizado em coberturas já conta com largos anos de aplicação, baseado em conhecimento empírico e de difícil caracterização por parte dos regulamentos de estruturas existentes.

O presente trabalho tem como objetivo apresentar e discutir os resultados de uma investigação numérica, do comportamento geométrica e fisicamente não linear de telhas autoportantes de aço enformado a frio de secção de parede esbelta. Os resultados apresentados, são obtidos através de análises realizadas no programa comercial de elementos finitos ABAQUS<sup>TM</sup>. Para o estudo dos modos de instabilidade locais são testados numericamente perfis de eixo reto. Efetuam-se (i) análises lineares de estabilidade, em regime elástico e, (ii) análises de pós-encurvadura, em regime elástico e elasto-plástico. São analisados troços retos (i) simplesmente apoiados (local/globalmente com empenamento livre), (ii) com comprimentos que garantem cargas críticas de encurvadura coincidentes com os modos local, distorcional e global e (iii) contabiliza a influência da presença de imperfeições geométricas iniciais com diferentes configurações.

O trabalho inclui ainda, resultados da análise numérica de chapas autoportantes curvas de doze metros, modeladas de acordo com as prescrições do fabricante da telha (BLOCOTELHA), submetidos a um carregamento pontual a meio vão para simular o comportamento de um ensaio da telha realizado no Departamento de Engenharia Civil da Escola Superior de Tecnologia e Gestão do Instituto Politécnico de Leiria.

São apresentados e discutidos pormenorizadamente os resultados numéricos do comportamento obtido nas análises lineares de estabilidade, análises de pós-encurvadura dos modos de instabilidade local, distorcional e global "puros", a resistência última dos perfis de eixo reto e comentadas as repostas da simulação numéricas da telha curva de doze metros de comprimento.

**Palavras-chave:** telha autoportante, aço enformado a frio, método de elementos finitos, Instabilidade local de placa - distorcional - global, Pós-encurvadura elástica e elasto-plástica.



# ***Abstract***

---

The cold-formed steel roofing system is characterized by a long profiled steel sheets, flated or curved, allowing large spans to be supported only at the ends. This system is widely used however is based on empirical knowledge and not being compatible with current desing standards.

This study aims to present and discuss the results of a numerical investigation of the geometric and physical nonlinear behavior of cold formed steel tiles of a section of slender wall. The results presented are obtained through analyses performed by the finite element program ABAQUS<sup>TM</sup>. For the study of local instability modes, straight axle profiles were tested numerically . Carrie out were, (i) linear stability analysis in elastic and, (ii) postbuckling analysis in elastic and elasto-plastic mode. Straight sections were analyzed (i) simple supported (local/globally with free warping), (ii) with lengths that ensure critical buckling loads coincident with the local modes, distorcional global and (iii) accounts for the influence of the initial geometric imperfections present with different configurations.

The work also includes results of the numerical analysis of of a cold formed steel sheet curved roofing with a span of 12 meters, modeled according to the instructions of the tile manufacturer (BLOCOTELHA), subject to a centered load to simulate the behavior of a test tile, conducted at the Department of Civil Engineering from Escola Superior de Tecnologia e Gestão of the Instituto Politécnico de Leiria.

Is presented and discussed in detail are the numerical results obtained from the linear stability behavior, analysis of postbuckling of local distorcional instability modes and globally "pure", ultimate strength values of straight shaft profiles as well as comments on the answers of the numerical simulation on twelve meter long curved tiles.

**Keywords:** self-supporting tile, cold-formed steel, finite element methods, local-plate/distorcional buckling, elastic and elasto-plastic post buckling.



# Índice

---

Índice de Figuras .....	xi
Simbologia.....	xv
Capítulo 1 - Introdução.....	1
1.1 Considerações gerais sobre perfis enformados a frio .....	1
1.2 Chapas enformadas a frio.....	3
1.3 Âmbito e objetivo do trabalho.....	8
1.4 Organização do trabalho .....	9
Capítulo 2 – Telhas de aço Autoportante.....	11
2.1 Introdução .....	11
2.2 Aço enformado a frio.....	11
2.3 Sistema autoportante.....	14
2.4 Processo de fabrico e montagem de telhas de aço autoportantes .....	16
Capítulo 3 – Análise numérica .....	21
3.1 Introdução .....	21
3.2 Estabilidade estrutural.....	21
3.2.1 Interação entre modos de Encurvadura.....	24
3.2.2 Imperfeições geométricas iniciais.....	25
3.3 Modelação por elementos finitos .....	27
3.3.1 Descrição do ABAQUS .....	28
3.3.2 Discretização do perfil.....	29
3.3.3 Modelação material .....	32
3.3.4 Condições de fronteira .....	32
3.3.5 Carregamentos.....	35
3.4 Análise linear elástica de estabilidade .....	36
Capítulo 4 – Análise de Pós-encurvadura .....	43
4.1 Introdução .....	43
4.2 Imperfeições geométricas iniciais.....	43
4.3 Análise de Pós-encurvadura em regime elástico.....	47
4.4 Análise de Pós-encurvadura em regime elásto-plástico .....	50
Capítulo 5 – Análise numérica de ensaio.....	55
5.1 Introdução .....	55
5.2 Descrição geral do modelo do ensaio .....	55
5.3 Modelação por elemento finitos.....	57
5.4 Resultados da análise numérica .....	59

<b>Capítulo 6 – Conclusões .....</b>	<b>73</b>
<b>6.1 Conclusões .....</b>	<b>73</b>
<b>6.2 Desenvolvimentos futuros .....</b>	<b>75</b>
<b>Bibliografia .....</b>	<b>77</b>

# Índice de Figuras

---

<b>Figura 1</b> - Secção EGB200 e condições de apoio. ....	6
<b>Figura 2</b> - Comparação dos resultados numéricos vs EC3 vs CNR 10022 [41].....	6
<b>Figura 3</b> - Resultados experimentais vs domínio de interação M-N do EC3 [41]. ....	7
<b>Figura 4</b> - Secções simples de paredes abertas [6].....	11
<b>Figura 5</b> - Secções compostas de paredes abertas [6]. ....	12
<b>Figura 6</b> - Secções compostas de paredes fechadas [6].....	12
<b>Figura 7</b> - Exemplo de formas de chapas perfiladas [6].....	12
<b>Figura 8</b> - Modelos de telhas autoportantes [48].....	12
<b>Figura 9</b> – Laminagem a frio (“ColdRolling”) [49]. ....	13
<b>Figura 10</b> – Processo de quinagem (“Pressbraking”) [49]. ....	13
<b>Figura 11</b> - Corte transversal do sistema autoportante na zona do tirante. ....	14
<b>Figura 12</b> - Corte transversal do sistema autoportante na zona do contraventamento. ....	14
<b>Figura 13</b> – Sistema de apoio das telhas de aço autoportantes[48]. ....	15
<b>Figura 14</b> – Catálogo da BLOCOTELHA com espessuras do perfil BC900 em função do vão[48]. .....	16
<b>Figura 15</b> – Introdução do rolo de chapa na perfiladora. ....	16
<b>Figura 16</b> – Perfilagem (a) entrada da chapa na perfiladora, (b) rolos da perfiladora e hidráulicos inferiores. ....	17
<b>Figura 17</b> – (a) colocação de filme plástico de proteção e (b) cavaletes de apoio. ....	17
<b>Figura 18</b> – Guilhotina de corte. ....	18
<b>Figura 19</b> – Transporte e armazenamento em fábrica. ....	18
<b>Figura 20</b> - Sistema de elevação das telhas de aço autoportantes. ....	19
<b>Figura 21</b> - Montagem das telhas de aço autoportantes. ....	19
<b>Figura 22</b> - Cobertura com telhas autoportante, (a) Pista de Padel Las Rosas e (b) estádio Áustria. .....	19
<b>Figura 23</b> – Conceito de estabilidade do equilíbrio, adaptado de [50]. ....	21
<b>Figura 24</b> – Instabilidade Bifurcacional, adaptado de [50]. ....	22
<b>Figura 25</b> – Secção C à compressão: (a) MLP, (b) MD, (c) MGF e (d) MGFT [2]. ....	23
<b>Figura 26</b> - Curvas $\sigma_b$ vs. comprimento da barra, que ilustram os vários fenómenos de interação: (a) <i>MLP-F</i> ou <i>MLP-MFT</i> , (b) <i>MD-MF</i> ou <i>MD-MFT</i> e (c) <i>MLP-MD-MF</i> ou <i>MLP-MD-MFT</i> , adaptado de [2]. ....	25

<b>Figura 27</b> - Definição das imperfeições geométricas: (a) Tipo 1 e (b) Tipo 2, adaptado de de Schafer e Peköz [53].....	27
<b>Figura 28</b> - Elemento de quatro nós: (a) Localização dos pontos de integração, (b) S4R e S4R5 "integração reduzida" e (c) S4 (integração completa), adaptado de Abaqus Analysis User's Manual. ....	29
<b>Figura 29</b> - Influência do elemento finito no valor de $\sigma_{cr}$ : perfis(a) em C e Z e (b) em "Rack" [55]. ....	30
<b>Figura 30</b> - Gráfico de tensão crítica/comprimento da barra ( $\sigma_{cr}/L$ ), para diversos comprimentos da malha de elementos finitos. ....	31
<b>Figura 31</b> – Discretização do perfil BC900.....	31
<b>Figura 32</b> - Modelos de comportamento mecânico do aço: modelo (a) elástico-linear, (b) comportamento elástico-plástico perfeito, (c) comportamento elasto-plástico, com inclinação nominal do patamar de cedência, (d) comportamento elasto-plástico com encruamento e (e) curva tensão-deformação real obtida a partir de resultados experimentais, adaptado do EC3-1-5 [56]. ..	32
<b>Figura 33</b> - Ilustração da diferença entre as rotulações de flexão globais e locais [55]. ....	33
<b>Figura 34</b> - Condições de apoio modeladas.....	34
<b>Figura 35</b> - Influência da concentração de tensões no valor de $\sigma_{cr}$ : perfis (a) em C, (b) em Z e (c) em "Rack" [55].....	35
<b>Figura 36</b> - Carregamento aplicado na análise linear de estabilidade por elementos finitos [57]. ..	35
<b>Figura 37</b> - Curva de encurvadura dos perfis analisados: (a) MLP, (b) MD e (c) MGFT.....	37
<b>Figura 38</b> - Configuração do MLP. ....	38
<b>Figura 39</b> - Configuração do MD para $L = 2350$ mm. ....	39
<b>Figura 40</b> - Configuração do MD: (a) abas em sentidos opostos, (b) abas no mesmo sentido e (c) duas semi-ondas. ....	40
<b>Figura 41</b> - Configuração do MGFT .....	41
<b>Figura 42</b> - Configuração do acoplamento ( $L_{L-D}$ ).....	41
<b>Figura 43</b> - Curvas de pós-encurvadura elástica do MLP com diferentes magnitudes de imperfeições. ....	45
<b>Figura 44</b> - Curvas de pós-encurvadura elástica do MD com diferentes magnitudes de imperfeições. ....	46
<b>Figura 45</b> - Curvas de pós-encurvadura elástica do MGFT com diferentes magnitudes de imperfeições (a) resultados no nó 26446 e (b) valores máximos na estrutura para $ L /1000$ .....	46
<b>Figura 46</b> - Curva de instabilidade elástica para secções com 1,25mm, com identificação da localização e configuração do modo. ....	47
<b>Figura 47</b> - Análise de pós-encurvadura elástica - MLP.....	49
<b>Figura 48</b> - Análise de pós-encurvadura elástica - MD.....	49

<b>Figura 49</b> - Análise de pós-encurvadura elástica - MGFT.....	50
<b>Figura 50</b> - Trajectória de Pós-encurvadura elasto-plástica com $L=100\text{mm}$ .....	51
<b>Figura 51</b> - Trajectória de Pós-encurvadura elasto-plástica com $L=2350\text{ mm}$ .....	52
<b>Figura 52</b> - Trajectória de Pós-encurvadura elasto-plástica com $L=4200\text{ mm}$ .....	53
<b>Figura 53</b> - Evolução da deformação plástica e configuração deformada no colapso das colunas com $L=100\text{ mm}$ , $L=2350\text{ mm}$ e $L=4200\text{ mm}$ .....	53
<b>Figura 54</b> - Pontos da Figura 53: (a) ponto I, (b) ponto II e (c) ponto III. ....	54
<b>Figura 55</b> - Ensaio: (a) esquema de ensaio [46] e (b) estrutura para ensaio.....	56
<b>Figura 56</b> - Condições de apoio das telhas de aço autoportantes: (a) aparelhos de apoio e (b) Costura longitudinal entre telhas [46]. ....	56
<b>Figura 57</b> - Discretização com elementos finitos.....	57
<b>Figura 58</b> - Condições de apoio: (a) aparelhos de apoio, (b) parafusos de fixação aos aparelhos de apoio e (c) costura entre telhas. ....	58
<b>Figura 59</b> - Carregamento aplicado na modelação do ensaio.....	59
<b>Figura 60</b> - Gráfico carga/deslocamento no ponto central a $1/2$ vão.....	60
<b>Figura 61</b> - Gráfico Carga/Deslocamento a meio vão.....	61
<b>Figura 62</b> - Conjunto de três telhas. ....	62
<b>Figura 63</b> - Discretização do conjunto de três telhas, com elementos finitos. ....	62
<b>Figura 64</b> - Gráfico carga/deslocamento com peso da areia. ....	63
<b>Figura 65</b> - Gráfico Carga/deslocamento sem o peso da areia.....	64
<b>Figura 66</b> - Modelação numérica com $P_1 = 3\text{ kN}$ e valores de carga dos ensaios divididos por três. ....	65
<b>Figura 67</b> - Variação das tensões longitudinais a meio vão: (a) $P= 4,21\text{ kN}$ , (b) $P= 9,45\text{ kN}$ e (c) $P= 15,72\text{ kN}$ .....	66
<b>Figura 68</b> - Pontos discretos da secção a $1/2$ vão.....	67
<b>Figura 69</b> - Variação de tensões da secção retificada a $1/2$ vão. ....	67
<b>Figura 70</b> - Variação de tensões da secção retificada a $1/2$ vão: (a) modelação numérica, (b) 2º ensaio experimental de Baptista [46]. ....	68
<b>Figura 71</b> - Variação das tensões longitudinais a um quarto do vão: (a) $P= 4,21\text{ kN}$ , (b) $P= 9,45\text{ kN}$ e (c) $P= 15,72\text{ kN}$ . ....	69
<b>Figura 72</b> - Pontos discretos da secção a $1/4$ vão.....	69
<b>Figura 73</b> - de tensões da secção retificada a $1/4$ vão. ....	70
<b>Figura 74</b> - Mecanismo de rotura na modelação numérica. ....	70
<b>Figura 75</b> - Mecanismo de rotura nos ensaios experimentais [46].....	71
<b>Figura 76</b> - Ensaio experimental: Deformação dos bordos [46]. ....	71
<b>Figura 77</b> - Modelação numérica: Deformação dos bordos. ....	72



# *Simbologia*

---

## **Siglas**

AISI	American Iron and Steel Institute
AS	Australian Standards
ASTM	American Society for Testing and Materials
CNR	National Research Council, Italy
EC 3	Eurocódigo 3
EN	Norma Europeia
ESTG	Escola Superior de Tecnologia e Gestão do Instituto Politécnico de Leiria
FSDT	First order shear deformation theory
LSF	Light Steel Framing
MEF	Método dos Elementos Finitos
MD	Modo distorcional
MF	Modo flexão
MG	Modo global
MGF	Modo global flexão
MGFT	Modo global flexão torção
ML	Modo local
MLP	Modo local de placa
MT	Modo torcional

## Simbolos

$b$	Largura de uma placa reforçada ou não reforçada
$d_1$	Deformação da alma
$d_2$	Deformação do banzo
$E$	Módulo de elasticidade
$F$	Flexão
$f_y$	Tensão de cedência do aço
$f_u$	Tensão de rotura do aço
$L$	Comprimento
$L_L$	Comprimento do modo local
$L_D$	Comprimento do modo distorcional
$L_G$	Comprimento do modo global
$M$	Momento
$N$	Esforço axial
$P$	Carga
$P_{cr}$	Carga crítica
$P_i$	Carga inicial
$P_u$	Carga última
$S$	Shell
$t$	Espessura
$v_0$	Deformação das abas
$w_0$	Deformação da alma

## Letras Gregas

$\sigma_b$	Tensão de bifurcação
$\sigma_{bD}$	Tensão de bifurcação distorcional
$\sigma_{bG}$	Tensão de bifurcação global
$\sigma_{bL}$	Tensão de bifurcação local
$\sigma_{cr}$	Tensão crítica
$\sigma_{un}$	Tensão uniforme
$\sigma_{nun}$	Tensão não uniforme
$\nu$	Coefficiente de Poisson



# **Capítulo 1 - Introdução**

---

## **1.1 Considerações gerais sobre perfis enformados a frio**

A utilização de elementos enformados a frio com fins estruturais tem originado um elevado interesse na construção civil, fundamentalmente devido a dois aspetos: (i) a resistência mecânica e peso permitem obter uma elevada eficiência estrutural e (ii) um processo de fabrico versátil, permitindo produzir economicamente e em grande escala uma vasta gama de formas geométricas. A constante procura de uma maior eficiência deu origem a soluções estruturais muito variadas, assumindo-se a construção metálica como uma das mais vantajosas.

A elevada eficiência estrutural exibida pelos elementos enformados a frio resulta da reduzida espessura das chapas que os constituem, a qual está ligada à especificidade do processo de fabrico, à elevada resistência e ductilidade do aço, originando elementos estruturais muito esbeltos. Esta solução torna-se cada vez mais competitiva, associada à pré-fabricação e facilidade de transporte dos elementos estruturais, à rapidez de montagem e desmontagem das estruturas, e à possível reutilização dos materiais, como justifica Yu [1] no seu clássico livro sobre estruturas de aço enformado a frio. Todavia, a elevada esbelteza dos elementos de aço leve torna-os muito suscetíveis a fenómenos de instabilidade, pelo que o estudo do comportamento de estabilidade destes elementos assume uma enorme importância, nos procedimentos de dimensionamento que acompanhem esta evolução.

Embora a utilização de elementos enformados a frio na indústria da construção civil remonte à década de 1850, em Inglaterra e nos Estados Unidos da América, a sua utilização efetiva em estruturas de edifícios só teve lugar a partir de 1940. Antes disso, foi na indústria automóvel que se assistiu ao desenvolvimento de tecnologias específicas para enformar a frio, componentes estruturais para veículos e um pouco mais tarde, na indústria aeronáutica e naval como observa Prola [2] na sua tese de doutoramento. A utilização de elementos enformados a frio em estruturas de engenharia civil, foi estimulada devido ao contributo da publicação em 1946 pelo "American Iron and Steel Institute", das primeiras

disposições regulamentares relativas ao comportamento estrutural deste tipo de elementos [3].

Um trabalho de Peköz [4] relata que na década de 1990, nos Estados Unidos da América verificou-se um explosivo crescimento no número de residências construídas com elementos estruturais de aço enformados a frio e o previsível aumento do seu crescimento. Também noutros países, nomeadamente na Inglaterra, Brasil e principalmente Austrália, se têm vindo a observar situações semelhantes.

Os elementos estruturais de aço enformados a frio, frequentemente possuem secções de parede fina aberta, o que automaticamente origina a suscetibilidade a fenómenos de instabilidade tais como (i) fenómenos de encurvadura local (instabilidade das chapas dos perfis submetidas a tensões de compressão) ou (ii) fenómenos consequentes da complexa deformabilidade sob torção e baixa rigidez i.e., ao empenamento, como está explicado no livro de Hancock [5]. É indispensável o estudo aprofundado destes tipos de fenómenos, para que se conheça com precisão o comportamento estrutural dos elementos de aço enformados a frio e, conseqüentemente, elaborar disposições regulamentares que conduzam a um dimensionamento seguro e económico. Devido à diversidade de fenómenos envolvidos nestes elementos e o elevado grau de não linearidade, a determinação correta desses fenómenos obriga a recorrer a métodos de análise sofisticados e que exigem um esforço computacional elevado. Os instrumentos de análise sofisticados por não serem de fácil acesso por parte dos projetistas, faz com que as regras de dimensionamento contidas nos atuais regulamentos de estruturas de aço [6-8] sejam, normalmente aproximadas e excessivamente conservativas. É de prever que com a comercialização de softwares cada vez mais desenvolvidos e com o desenvolvimento da capacidade de processamento dos computadores em geral, a situação se altere a curto prazo. Neste cenário será viável a adoção generalizada de regras de dimensionamento que traduzam melhor o comportamento real das estruturas, nomeadamente das estruturas de aço enformadas a frio como sublinha Prola [2].

Dos estudos realizados sobre o comportamento estrutural de elementos de parede fina, com recurso a métodos numéricos sofisticados e também a ensaios experimentais, tem sido possível caracterizar com rigor o comportamento estrutural destes elementos e em particular a presença dos fenómenos de instabilidade de natureza *local* ou *global*, e a sua influência no comportamento de pós-encurvadura. Os regulamentos de estruturas metálicas contabilizam os efeitos dos fenómenos de instabilidade com a aplicação da "Largura Efetiva", conceito introduzido por Von Kármán ou mais recentemente o "Método da

Resistência Direta", proposto por Schafer [9, 10] e adicionado na regulamentação Australiana e Norte Americana.

Trabalhos desenvolvidos, demonstram que o comportamento de pós-encurvadura dos elementos de parede fina, afetados por fenómenos de instabilidade local ou global, para algumas dimensões dos perfis, pode ocorrer uma bifurcação simultânea em mais do que um modo de instabilidade de natureza distinta, facto associado ao fenómeno de interação entre modos de instabilidade. Estes fenómenos podem ser encontrados nos trabalhos sobre interação local de placa/distorcional sobre colunas com secção C, realizados por Hancock et al. [11, 12], Ungureanu e Dubina [13], Dinis et al, Dinis e Camotim [14, 15], Becque e Rasmussen [16] e Silvestre et al. [17], sobre colunas "Rack", em Dinis et al. [18], em vigas com secção C em Dinis e Camotim [19] e em vigas com secção em Z em Haidarali e Nethercot [20]. Estudos sobre o efeito da interação distorcional/global e local de placa/distorcional/global no comportamento de pós-encurvadura e resistência última para colunas com secções C, foram desenvolvidos por Camotim e Dinis [21], Eliane, Dinis et al. [22, 23] e vigas com secção C, Rasmussen et al. [24, 25].

Os métodos considerados nos regulamentos têm sido alvo de calibrações por um vasto conjunto de resultados experimentais de trabalhos desenvolvidos, contudo a diversidade das secções estudadas é limitada. O conhecimento e o estudo constante sobre o efeito dos fenómenos de instabilidade no desempenho dos elementos estruturais, designadamente em relação à sua resistência última é essencial, pois sem esse conhecimento não é possível assegurar que os procedimentos e fórmulas presentes nos códigos de dimensionamento de estruturas, continuam ser racionais, eficientes e seguros.

## **1.2 Chapas enformadas a frio**

Face ao exposto, conclui-se que, grande parte das investigações sobre o comportamento dos aços enformados a frio, centra-se sobretudo no estudo de secções C, Z, "Rack" e cantoneiras. Os fenómenos de instabilidade em elementos de parede fina, constitui um tema bastante atual, principalmente quando se trata de perfis com secções diferentes das comumente estudadas e estandardizadas nos regulamentos de cálculo de estruturas.

Sobre trabalhos de investigação em telhas autoportantes, depreende-se que são poucos e na grande maioria sobre chapas com secções de geometria trapezoidal de eixo reto. Os primeiros trabalhos relevantes sobre telhas autoportantes focaram-se em trabalhos experimentais que em muitos casos eram comparados com as especificações de regulamentos, principalmente com a norma norte-americana [7].

Utilizando esta metodologia, na década de 1970, Jorgenson e Chern [26] fizeram um estudo experimental de telhas trapezoidais retas e curvas de vão pequeno (aproximadamente 4 metros) que compararam com resultados obtidos pelo regulamento norte-americano AISI [7] vigente na altura.

Após, Bergfelt et al. [27] acrescentarem ao trabalho experimental sobre telhas autoportantes o estudo da influência da encurvadura local na resistência global, em 1982, Jorgenson e Chowdhury [28], compararam a capacidade de carga de telhas de eixo reto e curvo. Avaliaram também a influência da espessura na capacidade de carga e uma verificação dos resultados através dos procedimentos da Norma AISI [7].

Seguindo procedimento semelhante Bernard et al. [29] compararam os testes realizados anteriormente para telhas trapezoidais [30, 31] com resultados obtidos pelas especificações do regulamento norte-americano [7] e europeu [6]. Observando uma melhor previsão dos resultados por parte do Código Europeu.

Para os resultados experimentais de Bernard et al. [30, 31], Wu et al. [32] utilizaram as especificações dadas pela Norma AISI [7] usando os aços Australianos (AS 1397 e 650) e Norte Americanos (ASTM A613-80). As prescrições da Norma Norte Americana foram também usadas por Papazian et al. [33], para comparação com resultados de testes experimentais com chapas trapezoidais. O mesmo foi feito por Landolfo e Mazzolani [34] que fizeram comparações com as especificações do EC3 [6].

Com o avanço das técnicas de análise numéricas de programas de cálculo automático de estruturas, surge na literatura a aplicação da técnica de modelação das chapas com sofisticados programas de elementos finitos, que permitem o estudo dos complexos fenómenos de instabilidade e plasticidade, que condicionam o comportamento e a resistência das telhas.

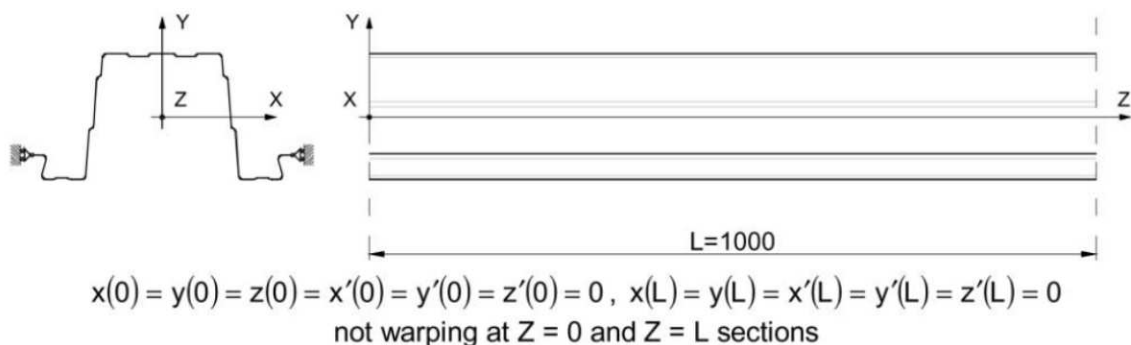
Esta técnica foi usada por Fonseca [35], que estudou o comportamento de telhas de aço autoportantes à flexão, com o intuito de avaliar os diferentes tipos de ligação entre elas. Comparou os resultados teóricos obtidos pela AISI 2001 e, por um modelo de elementos finitos com comportamento elástico linear. Mezzomo [36] utilizou os Métodos dos Elementos Finitos e Faixas Finitas para comparar as cargas críticas obtidas nos seus

ensaios para o mesmo tipo de telha, onde estudou analisou também a influência dos vínculos laterais entre telhas na rigidez do conjunto.

Biegus e Czepizac [37] desenvolveram 41 modelações numéricas feitas no programa comercial de elementos finitos ABAQUS, com o intuito de identificar modos de rotura em 19 testes realizados. O mesmo fizeram em [38], onde analisaram telhas com a secção reforçada no apoio intermédio.

Liew et al. [39] e Peng et. al. [40] propuseram um método de análise não linear de chapas corrugadas com e sem reforço por meio da teoria de primeira ordem de deformações por corte (método “mesh free” que denominaram pela sigla FSDT). Fizeram comparações com simulações feitas no programa ABAQUS.

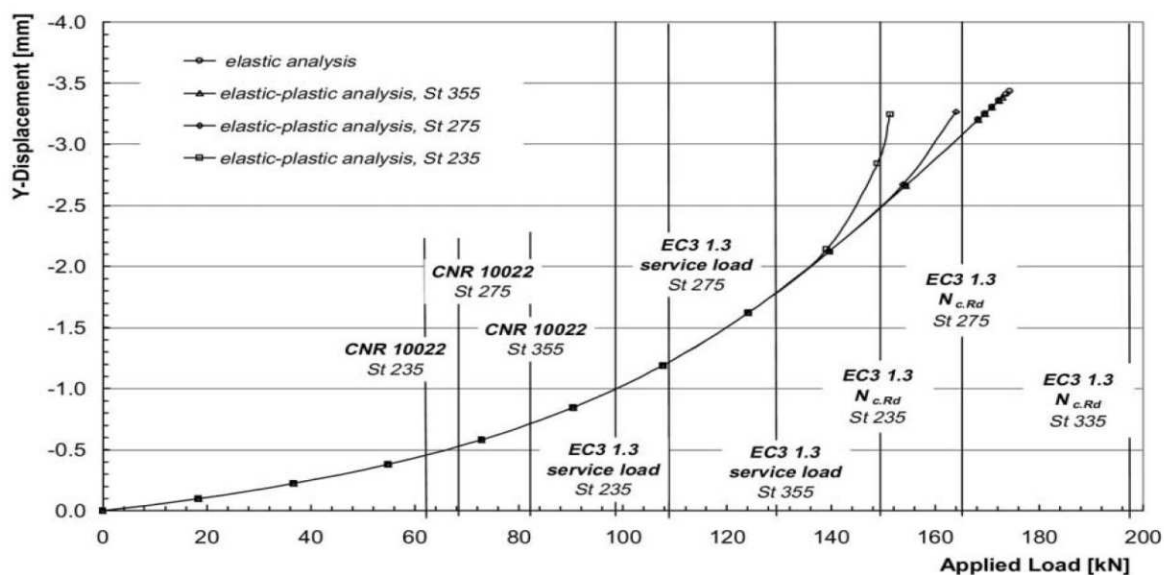
No trabalho realizado por Caramelli et al. [41], foi elaborado um estudo numérico e experimental das secções de telhas de aço autoportantes e, comparado os resultados obtidos com os métodos preconizados pela Norma Italiana CNR 10022 e pelo EC3-1-3. Os ensaios experimentais foram realizados com o intuito de determinar o domínio da resistência mecânica do perfil EGB2000 e identificar os seus mecanismos de colapso, ligados fundamentalmente a fenómenos de instabilidade local e global. Os ensaios foram de três tipos distintos, (i) ensaio à compressão, (ii) ensaio à compressão com flexão constante e (iii) ensaio à compressão com flexão variada. Todos os perfis ensaiados tinham o comprimento de 1000 mm. O ensaio à compressão, consistiu em rotular os extremos do perfil, incrementar cargas axialmente e medir as deformações até à rotura. O ensaio à compressão com flexão constante, baseou-se na mesma metodologia aplicada no ensaio à compressão, com a diferença de a carga axial ser excêntrica em relação ao centro geométrico da secção e igual nos dois extremos. O ensaio à compressão com flexão variada, foi em tudo igual ao ensaio anterior, com a diferença de ter sido acrescentado um carregamento perpendicular a meio vão por uma prensa hidráulica. As análises numéricas foram realizadas com elementos finitos de casca com o Software ADINA, com o intuito de verificar a aplicabilidade das formulações regulamentares. Os elementos foram restringidos ao empenamento nos extremos e livres de se deformarem axialmente como ilustrado na Figura 1. Foram determinados os três primeiros modos de instabilidade do elemento e, para uma análise de pós encurvadura em regime elástico e elasto-plástico foram incrementadas imperfeições geométricas iniciais correspondentes ao primeiro modo de instabilidade, com uma magnitude de  $0.14t$ . Seguidamente fizeram incrementos de deformações de acordo com os resultados experimentais.



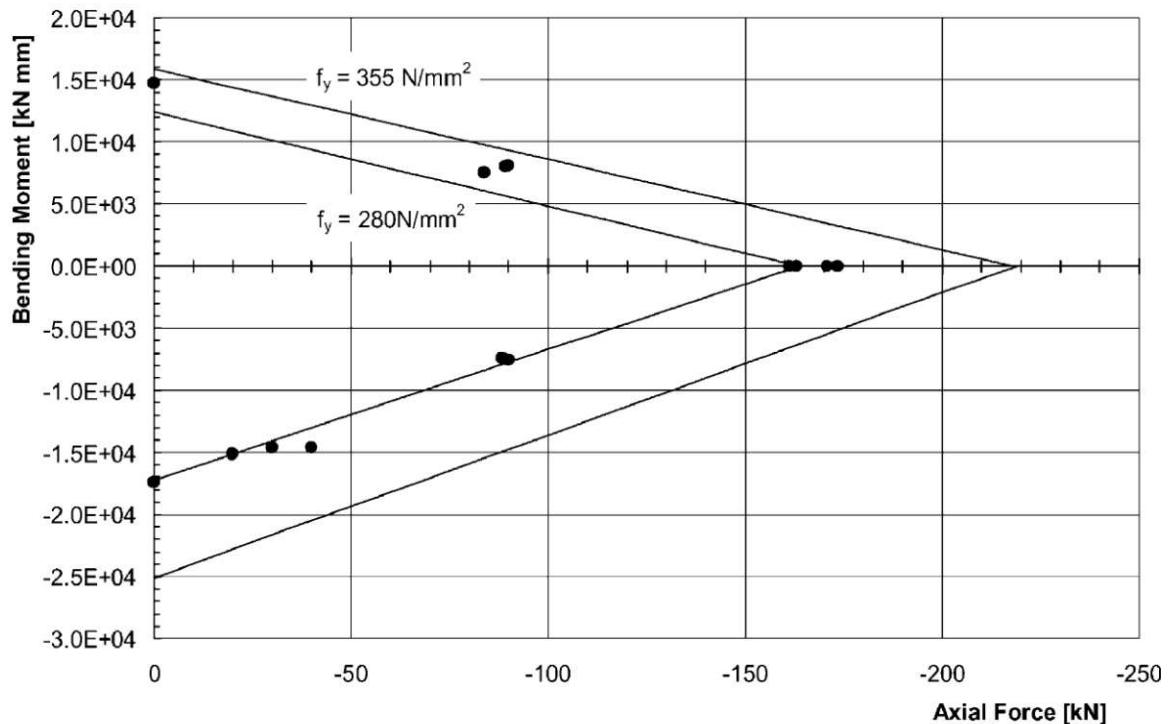
**Figura 1** - Secção EGB200 e condições de apoio.

Como preconizado nas normas regulamentares foi determinada a secção efetiva para a compressão, flexão e a respetiva capacidade resistente. A aplicação dos procedimentos regulamentares do EC3-1-3, produz uma redução significativa das áreas das secções efetivas dos elementos, para considerar um comportamento pós-crítico.

Para o perfil EGB2000, comparando a análise numérica com a regulamentação em vigor, Caramelli et al. [41] concluíram que, os valores obtidos pelo EC3-1.3 para a resistência da secção transversal, são resultados pouco seguros para perfis da classe S275 e S355 como comprova a Figura 2.



**Figura 2** - Comparação dos resultados numéricos vs EC3 vs CNR 10022 [41].



**Figura 3** - Resultados experimentais vs domínio de interação M-N do EC3 [41].

Da comparação entre análise numérica e a regulamentação EC3, os autores constataram que nem sempre os resultados no que diz respeito aos valores de concepção e regulamentares são seguros. Dos resultados obtidos experimentalmente, quando comparados com os resultados regulamentares no domínio de interação entre momentos e esforços axiais como se mostra na Figura 3, conclui-se que o regulamento indica capacidades resistentes superiores às verificadas nos ensaios experimentais.

Biegus e Kowal [42], analisaram o comportamento de um sistema estrutural de telhas autoportantes que colapsaram em Tuszyn em 2003 e Gdansk em 2010, ambas cidades Polacas. Das análises realizadas, concluíram que as estruturas em questão não satisfaziam os critérios de segurança, tratando-se de estruturas extremamente esbeltas, muito sensíveis a fenômenos de instabilidade, às imperfeições e aos efeitos de segunda ordem. Os autores recomendam o reforço de todas as estruturas construídas com a secção estudada para vãos superiores a 20 m, que se encontrem em risco de poderem vir a colapsar.

Recentemente têm-se aplicado algoritmos genéticos para otimização da geometria, como apresentado por Mezzomo et al. [43] aplicando estes algoritmos na otimização da geometria das secções trapezoidais. Mezzomo et al. [44] analisam a influência das condições de apoio na otimização e Lu e Mäkeläinen [45] otimizam as secções, usando as especificações do EC3 [6].

### 1.3 Âmbito e objetivo do trabalho

Esta dissertação insere-se no âmbito de um programa que visa estudar telhas autoportante curvas produzidas pela empresa BLOCOTELHA. A análise experimental foi desenvolvida por Batista [46], no Laboratório de Estruturas e Betão Armado, afeto ao departamento de Engenharia Civil da Escola Superior de Tecnologia e Gestão do Instituto Politécnico de Leiria. A telha ensaiada foi analisada numericamente, no presente trabalho, no sentido de colaborar com o planeamento dos ensaios experimentais e comparação de resultados obtidos.

O objetivo geral deste trabalho consiste em, estudar o comportamento estrutural da telha de aço autoportante BC900, produzida pela empresa BLOCOTELHA. O estudo foi desenvolvido por um conjunto de objetivos específicos, com recurso ao software comercial de elementos finitos ABAQUS, listados seguidamente:

- i) efectuar análises lineares de estabilidade para determinar a carga crítica de encurvadura elástica de troço retos com o perfil BC900, submetidas a tensões de compressão puras, simplesmente apoiadas e livres de empenar. Para obtenção dos valores das cargas críticas e identificação dos modos puros, foi utilizado o método de elementos finitos;
- ii) avaliar de forma breve, para os troços retos com comprimentos que exibem o primeiro modo de instabilidade sobre forma MLP, MD e MGFT, a influência das imperfeições geométricas iniciais na pós-encurvadura em regime elástico;
- iii) analisar o comportamento de pós-encurvadura em regime elasto-plástico dos troços retos referidos anteriormente e classificar a influência da classe de resistência do aço, na resistência última dos perfis;
- iv) simular numericamente um ensaio das telhas autoportantes curvas, com comprimento de 12 m, submetidas a uma carga central distribuída numa faixa de 1 m, apoiadas de acordo as prescrições do fabricantes. Este estudo tem como ponto fulcral comparar os resultados obtidos numericamente, com os resultados experimentais obtidos no trabalho de Baptista [46].

## 1.4 Organização do trabalho

A presente dissertação está organizada em cinco capítulos.

No presente capítulo faz-se uma apresentação de carácter introdutório ao tema da dissertação, referem-se trabalhos com desenvolvimentos relevantes no assunto em estudo, as motivações que estiveram na origem do trabalho, o âmbito e os objetivos.

No capítulo 2 é feita uma exposição sobre os aços enformados a frio, abordando a variedade de elementos e diferenças entre eles, assim como os processos de produção. É descrito o funcionamento do sistema das telhas de aço autoportante, descrevendo os aparelhos de apoio e o sistema de contraventamento. É explicado todo o processo de fabrico, armazenamento montagem em obra e remates finais para a conclusão da obra.

No capítulo 3 apresentam-se os principais conceitos teóricos intimamente ligados à elaboração desta dissertação. Caracterizam-se os fenómenos de instabilidade e imperfeições inerentes aos perfis metálicos de aço de parede fina. São apresentados aspectos fundamentais relativos à modelação numérica por elementos finitos a utilizar na realização da análise linear elástica de estabilidade. O capítulo termina com a apresentação e discussão dos resultados obtidos na análise linear elástica de estabilidade de perfis de eixo reto, submetidas à compressão pura.

No capítulo 4 realizam-se análises de pós-encurvadura em regime elástico e elasto-plástico, a partir da análise linear elástica de estabilidade. É analisada a sensibilidade dos perfis de eixo reto às imperfeições geométricas iniciais, assim como a influência da variação da tensão de cedência do aço, nas trajetórias de pós-encurvadura.

No início do capítulo 5 é descrito o modelo de ensaio da telha curva com 12 m, realizado por Baptista [46]. Seguidamente referem-se vários aspetos relativos à modelação computacional utilizando o método de elementos finitos, com o intuito de simular o modelo de ensaio. Por fim apresentam-se e comparam-se os resultados obtidos na análise numérica e experimental, ilustrando-se e comentando-se diagramas carga/deslocamento, variação de tensões longitudinais e configurações deformadas.



## Capítulo 2 – Telhas de aço Autoportante

---

### 2.1 Introdução

Este capítulo tem como objetivo apresentar o sistema de telhas de aço autoportantes e as suas particularidades. Para isso, apresentam-se os tipos de aço enformados a frio utilizados na construção civil e os vários processos de fabrico para, por fim, enquadrar o sistema de telhas de aço autoportante.

### 2.2 Aço enformado a frio

Os elementos estruturais de aço enformados a frio podem ser classificados em dois tipos como apresentado no livro de Dubina et al. [47]:

- i) perfis, peças de eixo reto, secção uniforme e geometria da secção transversal variável que devido à sua versatilidade proporcionada pelo processo de fabrico, podem apresentar várias formas e dimensões (Figuras 4, 5 e 6). Possuem uma vasta gama de utilização, podendo ser usados em pórticos industriais como elementos de estrutura principal, ou mais usualmente como elementos estruturais secundários, aplicados em fachadas ou coberturas para fixação do revestimento exterior das estruturas. Estes elementos são também utilizados no processo de construção designado de Light Steel Framing (LSF) como pilares, vigas ou treliças;

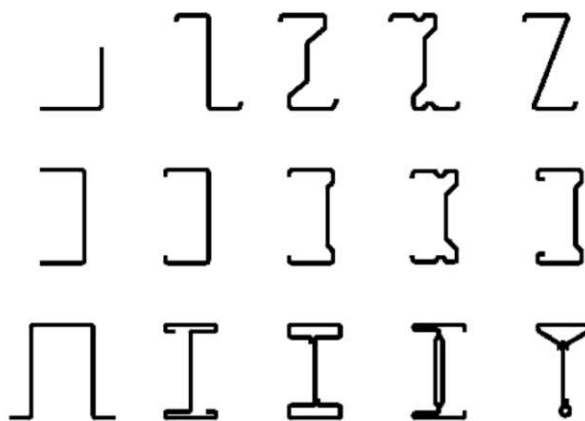


Figura 4 - Seções simples de paredes abertas [6].

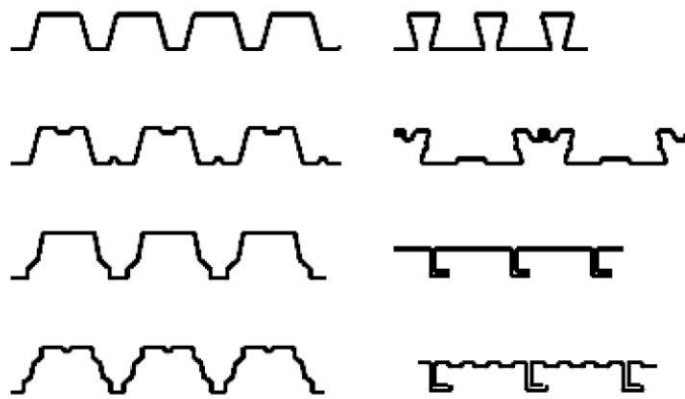


**Figura 5** - Secções compostas de paredes abertas [6].



**Figura 6** - Secções compostas de paredes fechadas [6].

ii) chapas perfiladas, que são elementos estruturais resultantes do processo da dobragem de chapas de aço com espessura constante, sendo esta espessura normalmente inferior à dos perfis (Figuras 7 e 8), classificadas pelos fabricantes como telhas onduladas, telhas trapezoidais e telhas autoportantes. São peças laminares com superfície poligonal, utilizadas em lajes mistas e em estruturas de paredes, pavimentos e coberturas.

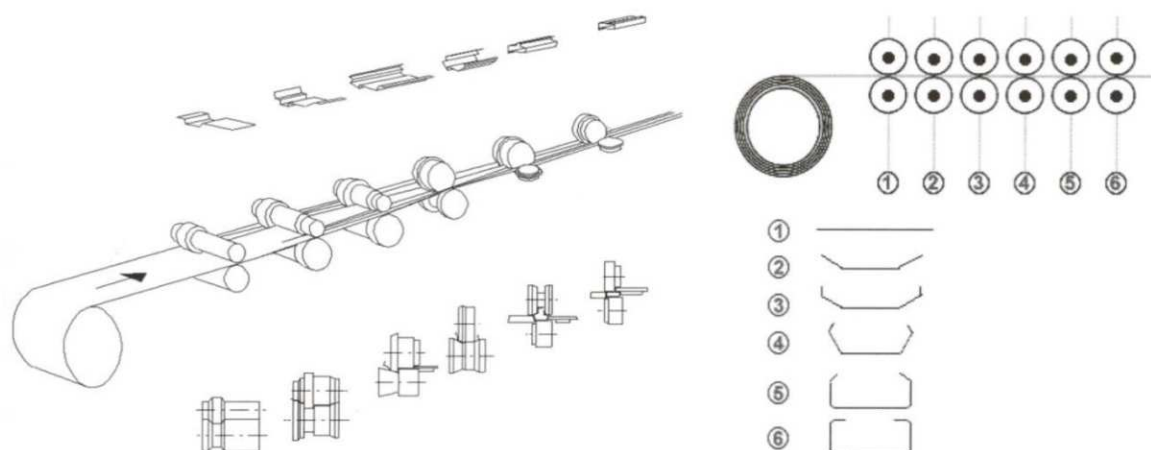


**Figura 7** - Exemplo de formas de chapas perfiladas [6].

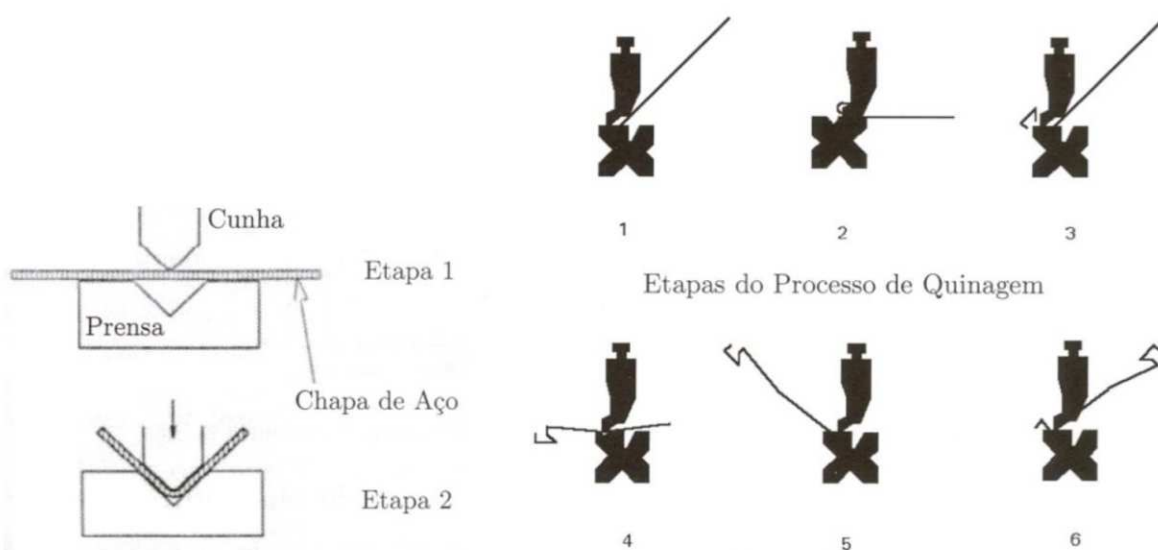


**Figura 8** - Modelos de telhas autoportantes [48].

O processo de fabrico de elementos estruturais de aço enformados a frio é caracterizado por dois métodos : (i) laminagem a frio (“ColdRolling” Figura 9) e (ii) dobragem ou quinagem (“ Pressbraking” Figura 10).



**Figura 9** – Laminagem a frio (“ColdRolling”) [49].



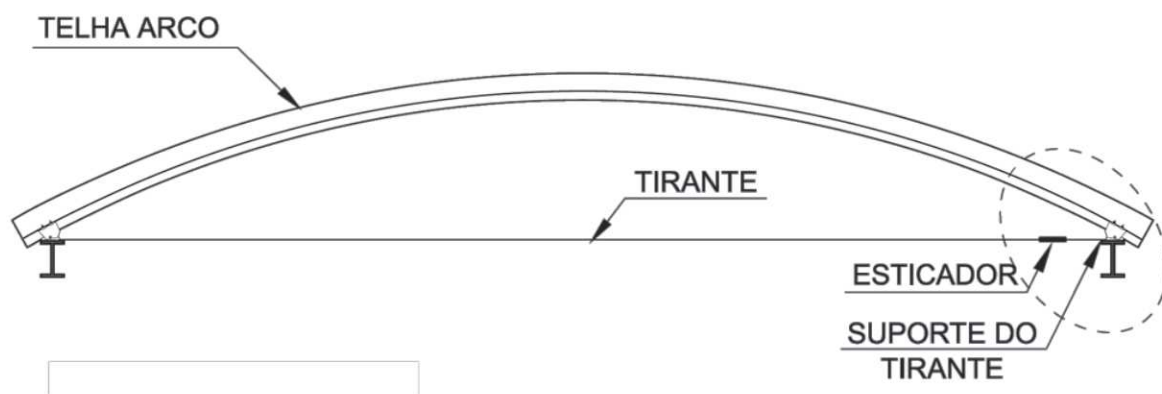
**Figura 10** – Processo de quinagem (“Pressbraking”) [49].

No processo de laminagem, são utilizadas máquinas perfiladoras em que a chapa passa por uma série de rolos superiores e inferiores, que permite a produção contínua de telhas de acordo com a secção projetada.

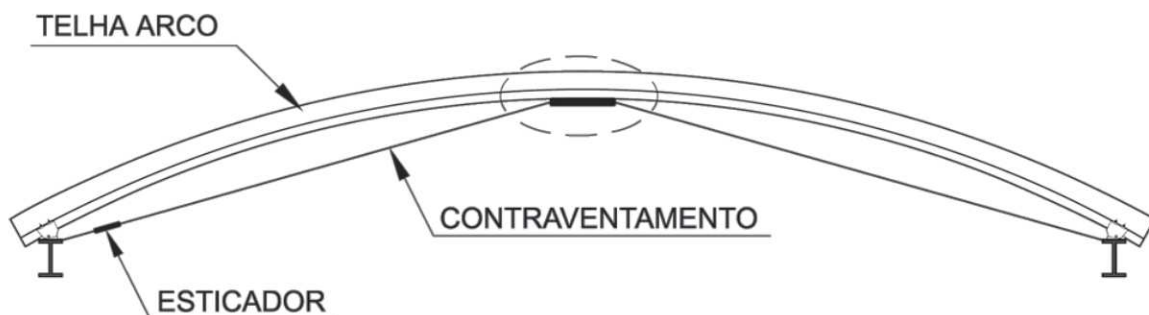
A dobragem ou quinagem, consiste num processo tecnológico de deformação plástica, onde se utiliza uma prensa que força a dobragem da chapa na direção longitudinal.

## 2.3 Sistema autoportante

O sistema autoportante caracteriza-se por ser constituído por perfis de aço enformados a frio longos e inteiriços, planos ou arqueados, permitindo obter vãos livres de grande dimensão, apoiados unicamente nas extremidades, como está ilustrado na Figura 11 e 12 . São utilizados tirantes que unem as extremidades dos apoios passando pela flecha máxima da telha a meio vão, de forma a criar um contraventamento das telhas.

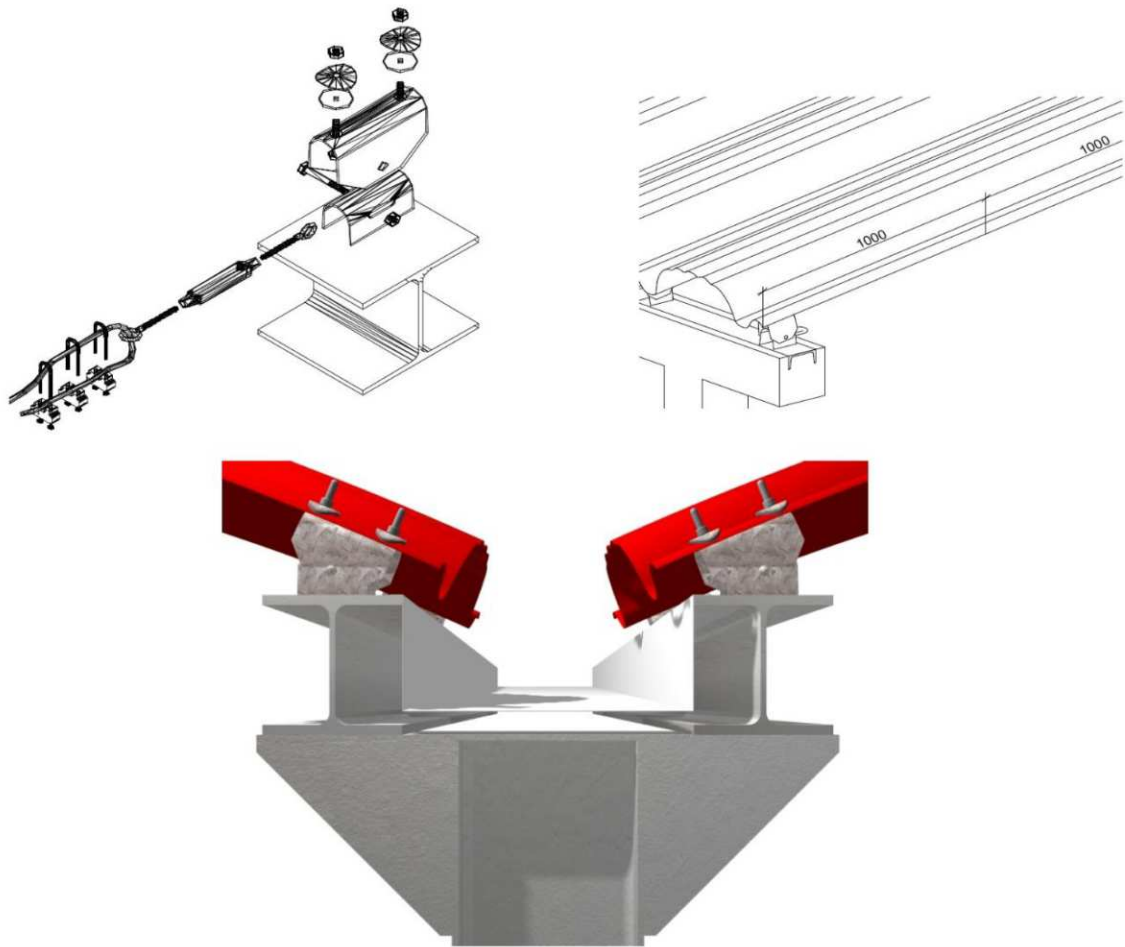


**Figura 11** - Corte transversal do sistema autoportante na zona do tirante.



**Figura 12** - Corte transversal do sistema autoportante na zona do contraventamento.

O sistema é constituído por telhas perfiladas em aço zincado, justapostas e interligadas através de parafusos galvanizados com anilhas de vedação e fixação. As telhas autoportantes são fixas à estrutura de apoio, através de suportes de fixação específicos para a configuração da telha, como representados na Figura 13.



**Figura 13** – Sistema de apoio das telhas de aço autoportantes[48].

Este sistema pode ter como apoio estruturas de betão ou aço e devido à geometria da telha e às características do material que a constitui, consegue-se obter resistência mecânica para vencer grandes vãos sem apoios intermédios. Na Figura 14 estão apresentados dados e imagens da telha BC900, retirados do catálogo de produtos da BLOCOTELHA [48].



ii) a Figura 16 mostra como a chapa de aço é forçada a passar pelos rolos da perfiladora e assume a forma da secção transversal do perfil determinado. No caso das telhas autoportantes curvas, a perfiladora possui um sistema hidráulico inferior que lhe permite alterar a inclinação, Figura 16 (b), podendo assim ajustar o raio de curvatura das telhas autoportantes em função do vão de projeto;



**Figura 16** – Perfilagem (a) entrada da chapa na perfiladora, (b) rolos da perfiladora e hidráulicos inferiores.

iii) após a telha ser perfilada, fica apoiada em cavaletes e é colocado um filme de plástico na parte superior, conforme apresentado no Figura 17, para que na fase de armazenamento, transporte e montagem o elemento e camada de proteção do aço não sejam danificados;



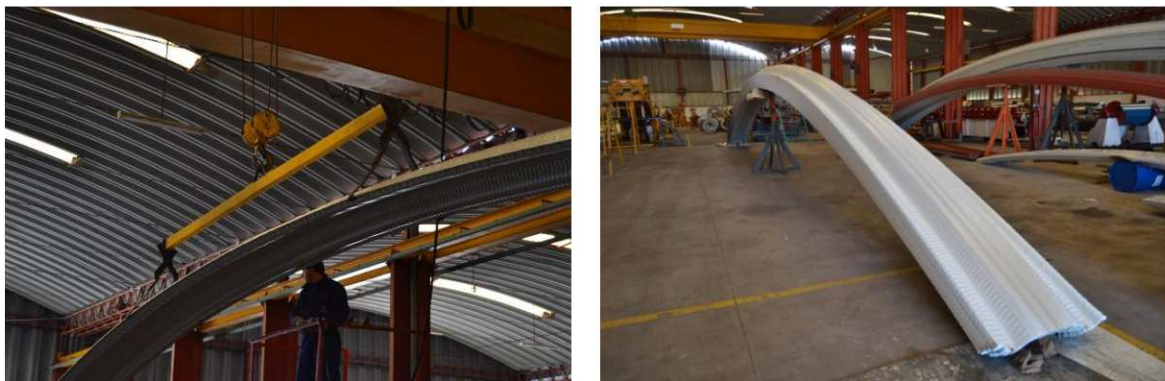
**Figura 17** – (a) colocação de filme plástico de proteção e (b) cavaletes de apoio.

iv) a perfiladora possui um sistema de guilhotina permitindo que o perfil ao atingir o comprimento desejado efetue o corte automaticamente, como se vê na Figura 18;



**Figura 18** – Guilhotina de corte.

- v) as telhas de aço autoportantes são transportadas por um sistema fixo a uma ponte rolante e colocadas na zona de armazenamento. Este consiste em empilhar os perfis apoiados a meio vão por um cavalete, Figura 19. Posteriormente são colocadas num camião e transportadas para a obra;



**Figura 19** – Transporte e armazenamento em fábrica.

- vi) dependendo dos vãos das telhas de aço autoportantes produzidas, o fornecimento para obra é realizado com recurso a transporte especial de grandes vãos. Em obra antes da aplicação das telhas de aço autoportantes, são colocados os tirantes de ligação das extremidades dos apoios da estrutura. O processo de montagem das telhas consiste na utilização de equipamentos de elevação com um elemento de encaixe na telha a 1/4 de vão dos extremos, para não a danificar na elevação com a carga do peso próprio. Estas operações estão ilustradas nas Figuras 20 e 21. As telhas são colocadas sobre os aparelhos de apoio, fixas com parafusos e justapostas entre elas com uma costura nas abas laterais. A costura é realizada com parafusos afastados de aproximadamente um metro. Para finalizar a montagem, são

tensionados os cabos e montados os elementos de acabamento e remates, para que a aplicação do sistema autoportante fique concluído, como se observa na Figura 22.



**Figura 20** - Sistema de elevação das telhas de aço autoportantes.



**Figura 21** - Montagem das telhas de aço autoportantes.



**Figura 22** - Cobertura com telhas autoportante, (a) Pista de Padel Las Rosas e (b) estádio Áustria.



## Capítulo 3 – Análise numérica

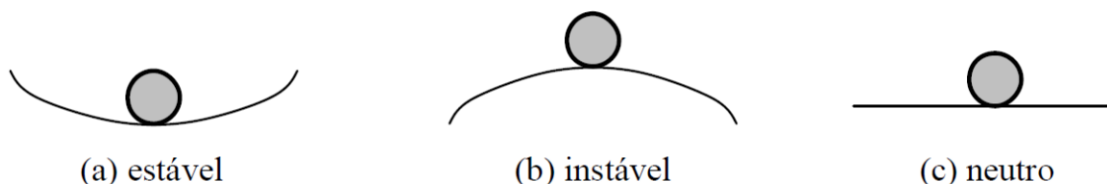
---

### 3.1 Introdução

Este capítulo tem como objectivo apresentar conceitos teóricos inerentes à elaboração desta dissertação. Ilustram-se conceitos de estabilidade, bem como os tipos de instabilidade característicos de elementos metálicos de parede fina, caracterizam-se os procedimentos adotados na modelação de elementos finitos no ABAQUS e por fim apresentam-se os resultados obtidos na análise linear de estabilidade.

### 3.2 Estabilidade estrutural

O conceito de estabilidade está relacionado com a capacidade de uma estrutura conseguir estabelecer uma posição de equilíbrio após ser submetida a uma perturbação externa, como a aplicação de uma força ou da imposição de um deslocamento. Após o término da perturbação externa, a estrutura apresenta um equilíbrio estável se voltar à posição inicial, antes do início da análise. Se a estrutura não conseguir voltar à posição inicial ou ficar numa nova posição equilibrada, ela apresenta um equilíbrio instável. Se a estrutura atingir uma nova posição deformada e se mantiver o equilíbrio, a resistência e a posição inicial assumir uma nova deformada, está em equilíbrio neutro. Normalmente o equilíbrio neutro, estruturalmente classifica-se como a posição de transição entre o equilíbrio estável e o equilíbrio instável. A Figura 23 adaptada do livro de Reis e Camotim [50], ilustra as diferentes condições de equilíbrio estático.



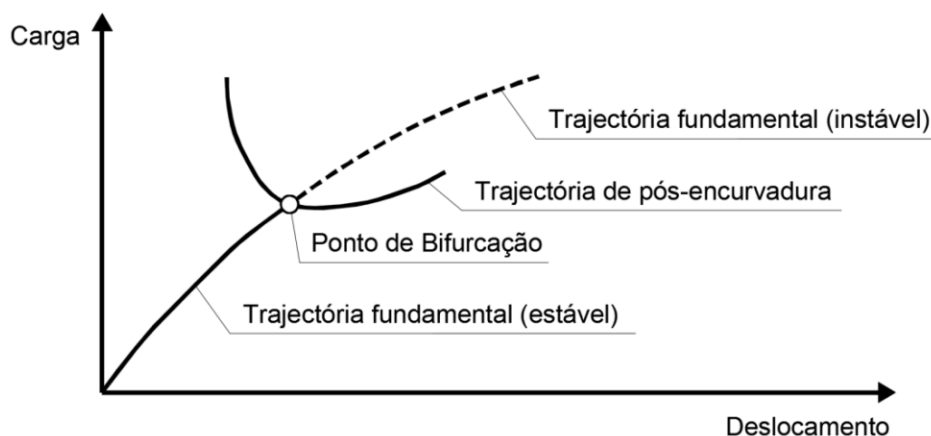
**Figura 23** – Conceito de estabilidade do equilíbrio, adaptado de [50].

Em uma análise estrutural, os fenômenos que envolvem conceitos de estabilidade são designados por fenômenos de instabilidade estrutural, ou encurvadura estrutural, devido à perda da forma original como resultado da deformação, provocados pelo aparecimento de tensões de compressão.

No livro de Galambos [51], define-se por instabilidade a condição na qual a estrutura comprimida perde a capacidade de resistir a um aumento de carga, apresentado um decréscimo na capacidade resistente, ocorrendo a instabilidade no ponto máximo da curva carga/deslocamento. Os problemas de instabilidade podem ser subdivididos em duas categorias (i) problemas associados com fenômenos de bifurcação de equilíbrio e - ii) problemas em que o sistema atinge a carga máxima sem que tenha ocorrido bifurcação.

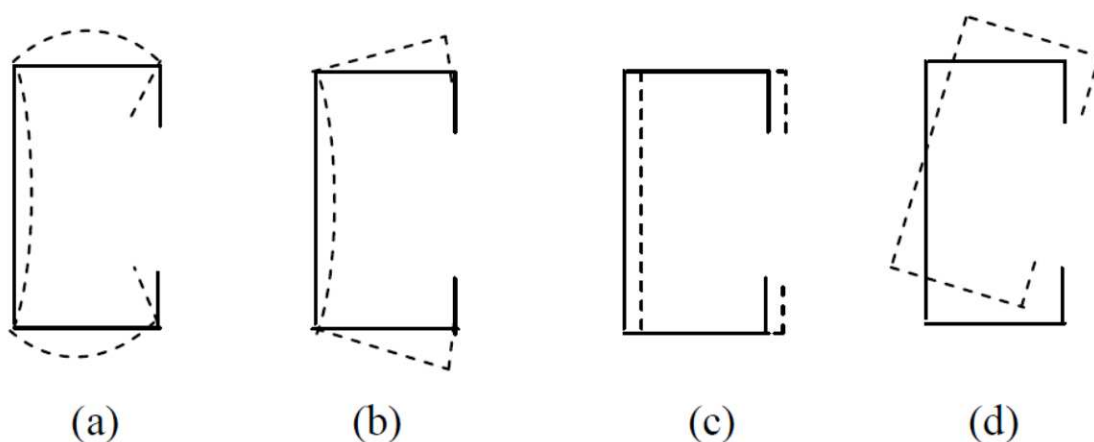
A Figura 24 retirada de Reis e Camotim [50] serve para ilustrar graficamente por meio da relação carga-deslocamento o fenômeno da instabilidade bifurcacional, onde podem ser observados:

- i) uma trajetória de equilíbrio fundamental (linear ou não linear) com início na origem do diagrama. Até à ocorrência do primeiro ponto de bifurcação, o equilíbrio é estável e é representado pela linha a cheio e, após esse ponto, o equilíbrio torna-se instável e é representado pela linha a tracejado;
- ii) a nova forma do comportamento da estrutura é representada por uma trajetória de equilíbrio de pós-encurvadura que não passa pela origem do diagrama carga/deslocamento;
- iii) a intersecção das duas trajetórias representa o primeiro ponto de bifurcação, designado também por carga crítica de encurvadura. Esse ponto de bifurcação representa a mudança de configuração de equilíbrio da trajetória fundamental (estado de equilíbrio neutro), quando passa de estável para instável.



**Figura 24** – Instabilidade Bifurcacional, adaptado de [50].

Os perfis de aço enformados a frio, quando sujeitos a esforços de compressão, ficam muito suscetíveis aos fenómenos de instabilidade. A reduzida espessura das chapas de aço utilizadas na produção dos perfis, dá origem a secções de parede muito esbelta, o que provoca uma enorme suscetibilidade ao colapso por fenómenos de instabilidade. A caracterização do comportamento de estabilidade dos perfis enformados a frio, engloba a possibilidade de apresentarem deformabilidades tanto de natureza local de placa (MLP), distorcional (MD), e global (MGF e MGFT), representados na Figura 25 para uma secção em C.



**Figura 25** – Secção C à compressão: (a) MLP, (b) MD, (c) MGF e (d) MGFT [2].

Os fenómenos de instabilidade de encurvadura por modo local (ML) ou local de placa (MLP), caracterizam-se pela deformação das paredes das barras, enquanto o eixo permanece indeformável, Figura 25 (a). Este fenómeno ocorre em perfis de parede fina designados por barras curtas, quando sujeitos a tensões de compressão e apresentam um comportamento de placas uniaxialmente comprimidas. O comprimento de meia onda característico deste fenómeno, é menor quando comparado com o modo distorcional (MD) e modo global (MG) [2].

A instabilidade por encurvadura distorcional (MD), é um fenómeno associado à distorção da secção transversal. Contrariamente ao modo local, o modo distorcional compreende deformações ao nível dos bordos longitudinais do elemento, ocorrendo em perfis com um comprimento intermédio e localiza-se entre o modo local e o modo global. A estabilidade do elemento é condicionada pelo comportamento que os banzos apresentam à torção. A instabilidade do elemento é “precipitada” pela encurvadura, por torção dos

banzos, enquanto as restantes placas apresentam deformações de flexão por compatibilidade.

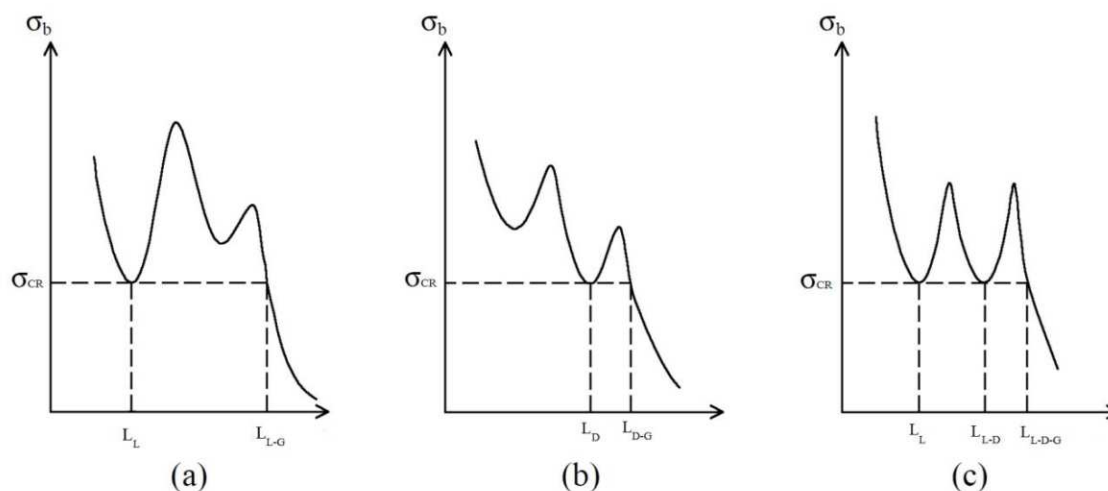
A encurvadura por modo global (MG) é um fenómeno característico de barras com um elevado índice de esbelteza global, associado a barras longas. A perda de estabilidade global pode apresentar três formas, (i) encurvadura por flexão (MF), caracterizada pelo movimento de corpo rígido das secções transversais em resposta ao deslocamento do eixo da barra, o qual assume configuração curva (ii) encurvadura por torção (MT), caracterizada pela rotação da secção em torno do centro de corte, sem sofrer deformações no plano da secção e (iii) encurvadura por flexão-torção (MFT), resultado da encurvadura por flexão e torção em concomitância.

### 3.2.1 Interação entre modos de Encurvadura

Devido à elevada esbelteza dos perfis enformados a frio, é favorável a ocorrência dos fenómenos de interação entre modos de instabilidade e pode ocorrer tanto em fase elástica como em fase elasto-plástica, sendo que a plasticidade que ocorre numa fase avançada de pós-encurvadura, originando a que estes modos surjam maioritariamente em regime elástico. As imperfeições iniciais baseadas em um único modo de encurvadura, pode conduzir a resultados não conservativos devido à possibilidade de ocorrência de interação entre alguns modos. A interação é um conjunto de fenómenos que condicionam o comportamento geometricamente não linear de sistemas estruturais, caracterizados pelo acontecimento em simultâneo ou quase simultâneo de vários modos de instabilidade. A identificação da susceptibilidade de ocorrência de fenómenos de interação entre modos de diferente natureza faz-se a partir da análise linear de estabilidade, nomeadamente através de curvas de correlação da carga crítica com o comprimento dos elementos estruturais e, da identificação dos comprimentos que apresentam cargas de bifurcação semelhantes, associadas a dois ou mais modos de instabilidade de natureza diferente.

As curvas da Figura 26 que representam esquematicamente, a variação da tensão de bifurcação ( $\sigma_b$ ) com o comprimento da barra, traduzem uma ideia, das situações em que cada um dos tipos de interação pode condicionar o comportamento estrutural de uma barra. A observação destas figuras permite identificar os seguintes fenómenos de interação modal: (i) a interação *MLP-MF* ou *MLP-MFT* ocorre em barras cujo comprimento esteja na vizinhança  $L_{L-G}$ , valor que corresponde à bifurcação simultânea nos modos local de placa e global, conforme se observa na Figura 26 (a), (ii) a Figura 26 (b) por seu lado mostra a

interação *MD-MF* ou *MD-MFT* que pode ocorrer em barras cujo comprimento da barra tenha valor semelhante a  $L_{L-G}$ ; (iii) finalmente na Figura 26 (c) ilustra-se a ocorrência dos dois fenômenos de interação, *MLP-MD*, cujo comprimento das barras esteja na vizinhança de  $L_{L-D}$  e, *MLP-MD-MF* ou *MLP-MD-MFT* cujo comprimento esteja na vizinhança de  $L_{L-D-G}$  [2].



**Figura 26** - Curvas  $\sigma_b$  vs. comprimento da barra, que ilustram os vários fenômenos de interação: (a) *MLP-F* ou *MLP-MFT*, (b) *MD-MF* ou *MD-MFT* e (c) *MLP-MD-MF* ou *MLP-MD-MFT*, adaptado de [2].

### 3.2.2 Imperfeições geométricas iniciais

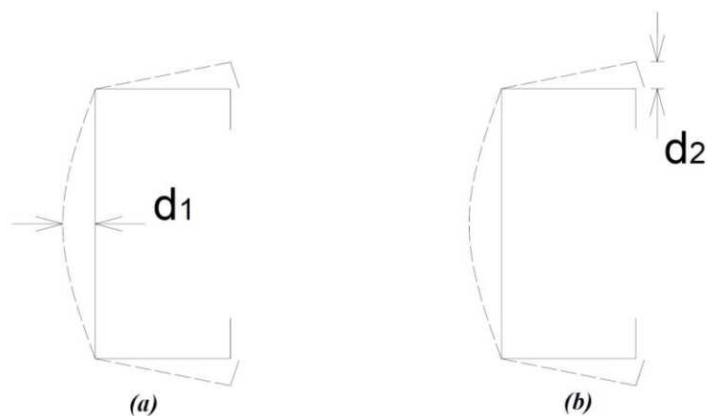
Todas as estruturas são na realidade imperfeitas. Um interessante estudo sobre as imperfeições iniciais foi feito por Dubina e Ungureanu [52]. As imperfeições podem ser classificadas como (i) imperfeições mecânicas, (ii) imperfeições materiais ou (iii) imperfeições geométricas. Como exemplo do tipo de imperfeições em estruturas, podem-se caracterizar como (i) imperfeições mecânicas, as imperfeições causadas pelas condições de apoio ou a introdução de carregamentos. As (ii) imperfeições materiais podem-se considerar as tensões residuais ou tensões de cedência do aço. Ao processo de fabrico, transporte ou montagem atribuem-se o aparecimento de (iii) imperfeições geométricas.

Por imperfeições geométricas iniciais entende-se, então, a diferença entre as geometrias de um elemento "perfeito" e de um elemento "real" antes da aplicação de carregamentos. As imperfeições de um elemento compreende encurvar, empenar, torcer ou sofrer desvios locais caracterizados por mossas e ondulações regulares, como observaram Schafer e Peköz [53]. Ao longo dos anos muitos estudos teóricos e experimentais têm sido realizados, com o intuito de classificar a relação da forma e magnitude das imperfeições

geométricas iniciais presentes nos perfis metálicos. A enorme variabilidade destes parâmetros torna difícil a tarefa de se padronizar um procedimento para a consideração das imperfeições geométricas da análise de estruturas. Em relação à variação das imperfeições ao longo do comprimento não existem informações muito detalhadas, contudo estão disponíveis na bibliografia dados sobre a magnitude máxima das imperfeições geométricas. Os elementos de aço enformados a frio, são particularmente sensíveis a imperfeições na forma dos seus modos de instabilidade próprios. Como ressaltam no seu trabalho, Schafer e Peköz [53] o conhecimento da amplitude das imperfeições nos modos de instabilidade mais baixos é muitas vezes suficiente para caracterizar as imperfeições influentes, a utilização de imperfeições máximas pode ser utilizada para fornecer uma estimativa conservadora da magnitude da imperfeição num determinado modo próprio.

Para uma magnitude das imperfeições iniciais, é consensual nos meios técnicos e científicos a adoção de valores iguais a  $L/1500$  ou mais conservativamente  $L/1000$ , aplicados a meio vão do comprimento longitudinal em trabalhos de investigação voltados para as imperfeições globais [47].

Para as imperfeições localizadas, Schafer e Peköz [53] com base em medições de imperfeições geométricas resultantes de ensaios produzidos em vários trabalhos, realizaram análises estatísticas, observando a relação singular entre a probabilidade de ocorrência e a magnitude de imperfeição. Os autores dividiram as imperfeições no dois tipos ilustrados na Figura 27: (i) Tipo1 - a imperfeição máxima local referente a um elemento reforçado, (ii) Tipo2 - desvio máximo de linearidade sofrido por um banzo e respetivo reforço. Baseados na análise estatística das medições de imperfeições, propuseram regras simples, para secções com espessura menor de 3mm, a relação largura/espessura ( $b/t$ )  $<200$  para imperfeições do Tipo 1 e ( $b/t$ )  $<100$  para imperfeições do Tipo2.



**Figura 27** - Definição das imperfeições geométricas: (a) Tipo 1 e (b) Tipo 2, adaptado de de Schafer e Peköz [53].

Para imperfeições do Tipo 1 uma regressão linear simples baseada na largura originou a expressão aproximada, equação (3.1):

$$d_1 \approx 0,006b \quad (3.1)$$

Onde  $b$  é a largura ou o comprimento da alma. Uma regra alternativa com base em uma curva exponencial adaptada à espessura deu origem à equação (3.2):

$$d_1 \approx 6te^{-2t} \quad (d_1 \text{ e } t \text{ em mm}) \quad (3.2)$$

Para imperfeições do Tipo 2 o máximo desvio de linearidade é aproximadamente igual à espessura da chapa equação (3.3):

$$d_2 \approx t \quad (3.3)$$

### 3.3 Modelação por elementos finitos

Como explica Silva [43] na sua tese de doutoramento, muitos dos problemas de engenharia estrutural envolvem a busca de uma solução para os deslocamentos, deformações, tensões, forças, momentos e outras inúmeras variáveis. A solução exata para esses problemas requer que o equilíbrio, tanto das forças como das tensões, seja mantido durante todo o tempo de solicitação em qualquer ponto da estrutura. Isso nem sempre é fácil, pois normalmente são considerados diversos parâmetros e a solução pode-se tornar muito complicada para ser obtida analiticamente. É necessário então recorrer a métodos aproximados, porém, capazes de fornecer respostas com qualquer nível de precisão desejada, uma vez que, essa precisão depende fundamentalmente do número de

simplificações adotadas e das ferramentas computacionais disponíveis. O Método de Elementos Finitos (MEF) aplica-se às equações diferenciais de equilíbrio ou equações integrais com as respectivas condições de apoio. Este método consiste na divisão do domínio da integração em um número finito de pequenas regiões designadas por "elementos finitos".

O MEF, pela sua versatilidade e abrangência de aplicação em vários campos da ciência, e com disponibilidade de vários programas comerciais de cálculo (e.g., ABAQUS, ANSYS, ADINA), tem tido grande utilização para efetuar análises lineares e não lineares do comportamento das estruturas por parte da comunidade científica.

Nesta dissertação optou-se pela utilização do programa comercial ABAQUS por se ter familiaridade com o seu uso.

### **3.3.1 Descrição do ABAQUS**

As diversas potencialidades do Software ABAQUS [54], permitem que problemas de engenharia complexos, envolvendo geometrias complicadas, relações constitutivas não lineares, ocorrência de grandes deformações, carregamentos transientes, interações entre materiais, possam ser modelados numericamente.

O ABAQUS divide-se em três etapas distintas, as quais embora sequenciais, também podem ser utilizadas em separado, (i) pré-processador, (ii) simulação e (iii) pós-processador, etapas estas que se dividem em módulos descrito seguidamente de forma sucinta:

#### **(i) Pré-Processador**

O pré-processador ABAQUS/CAE consiste numa interface gráfica composta por módulos que permite ao utilizador uma rápida e eficiente definição da geometria do problema, atribuição das propriedades dos diferentes materiais, aplicação dos carregamentos e das condições de fronteira do problema, seleção do número de etapas pretendidas na análise e, finalmente, geração da malha de elementos finitos correspondente ao elemento analisado. Uma monitorização da consistência e adequação do modelo gerado pode ser feita através de ferramentas especiais do ABAQUS/CAE que permite verificar várias definições do modelo em cada módulo, a geometria do modelo definido (módulo PART), propriedades mecânicas dos materiais (módulo PROPERTY), agrupamento de elementos (módulo ASSEMBLY), a imposição da sequência de passos de análise podendo

ser de natureza linear e não linear (módulo STEP), definição das condições de fronteira e de carregamentos (módulo LOAD), geração da malha de elementos finitos (módulo MESH) e finalmente, a obtenção do ficheiro com os dados de entrada (módulo JOB);

### (ii) Simulação

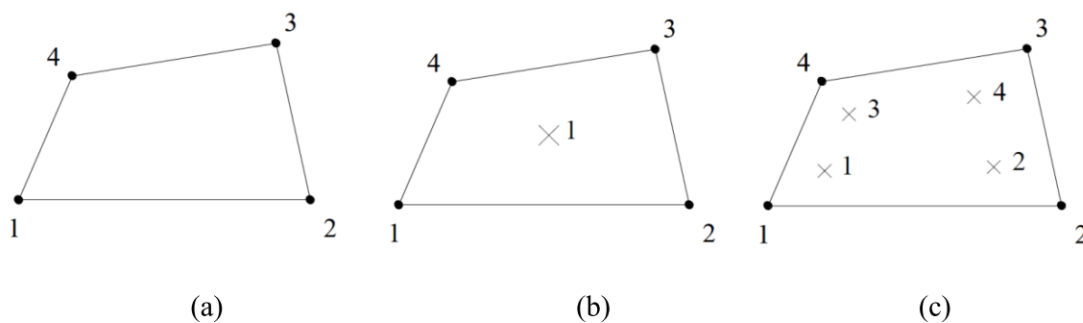
Após ser gerado o ficheiro com dados de entrada pelo pré-processador, o qual pode, por sua vez, ser editado pelo utilizador para alterar dados não tratados convenientemente pelo ABAQUS/CAE, é possível a execução da simulação pelo método de elementos finitos utilizando os modelos ABAQUS/STANDARD e ABAQUS/EXPLICIT;

### (iii) Pós-Processador

O pós-processador ABAQUS/VIEWER que, opera sobre os arquivos de saída, possibilita, para interpretação dos resultados numéricos, procedimentos de visualização gráfica e de animação. Também possibilita a exportação de dados para serem tratados em outros softwares.

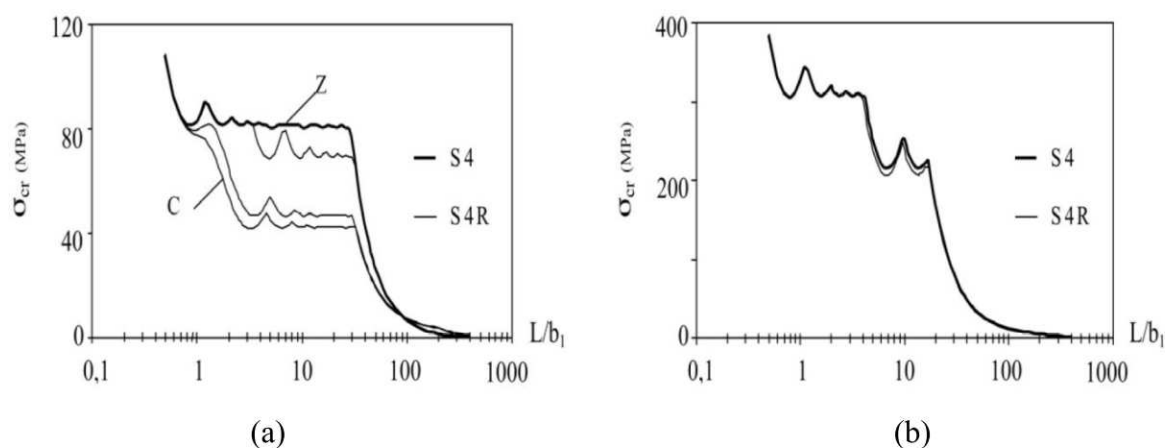
## 3.3.2 Discretização do perfil

A biblioteca do ABAQUS dispõe de três elementos de casca com quatro nós, S4, S4R e S4R5 (a letra “S” corresponde à designação Shell, o número 4 refere-se ao número de nós, R à redução de integração e 5 significa a consideração de 5 graus de liberdade por nó). Os elementos S4 e S4R consideram seis graus de liberdade por nó, três rotações e três deslocamentos, enquanto os elementos S4R5 consideram apenas cinco. Na integração numérica dos elementos S4 estão envolvidos quatro pontos de integração, nos elementos S4R e S4R5 está envolvido apenas um ponto “Integração Reduzida”, conforme descrito no Abaqus Analysis User's Manual. A Figura 28 ilustra as configurações dos elementos finitos de 4 nós do programa ABAQUS.



**Figura 28** - Elemento de quatro nós: (a) Localização dos pontos de integração, (b) S4R e S4R5 "integração reduzida" e (c) S4 (integração completa), adaptado de Abaqus Analysis User's Manual.

O tipo de elemento utilizado numa análise numérica pode influenciar os resultados obtidos. De acordo com Dinis e Camotim [55], os resultados de uma análise linear elástica de estabilidade com elementos finitos para secções em C, Z e "Rack", utilizando os tipos de elemento S4R e S4R5, mostram que os resultados são praticamente coincidentes, tratando ambos os tipos de elemento por "S4R". A comparação entre valores obtidos com elementos S4 e S4R, mostra que são (i) praticamente idênticos, nas colunas "curtas" (instabilidade num modo local de placa MLP), (ii) um pouco diferentes, nas colunas "intermédias" (instabilidade num modo distorcional MD) e nas colunas "longas" (instabilidade num modo global por flexão ou flexão-torção), como se pode observar na Figura 29. No segundo caso, os valores obtidos com elementos S4R são sempre inferiores aos obtidos por elementos S4, tendo estas diferenças origem no facto da integração "reduzida" introduzir uma diminuição de rigidez "artificial" nos elementos S4R.



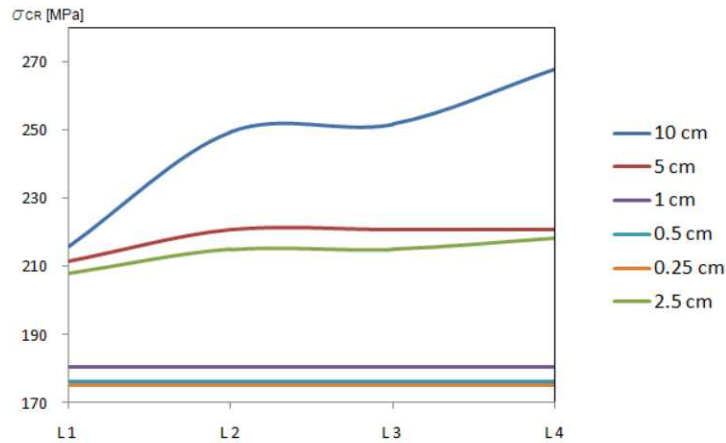
**Figura 29** - Influência do elemento finito no valor de  $\sigma_{cr}$ : perfis(a) em C e Z e (b) em "Rack" [55].

Em virtude deste comportamento, os vários elementos finitos de casca disponíveis na biblioteca do ABAQUS, o tipo de elemento escolhido para análise de todas as secções de aço enformado a frio no decurso deste trabalho, foi o S4.

A secção do perfil foi fornecida pelo fabricante [48], desenhada num programa CAD e posteriormente importada para o ABAQUS. Considerando o plano médio da espessura dos perfis, foi realizada a discretização com elementos finitos de casca S4 isoparamétricos com "integração completa".

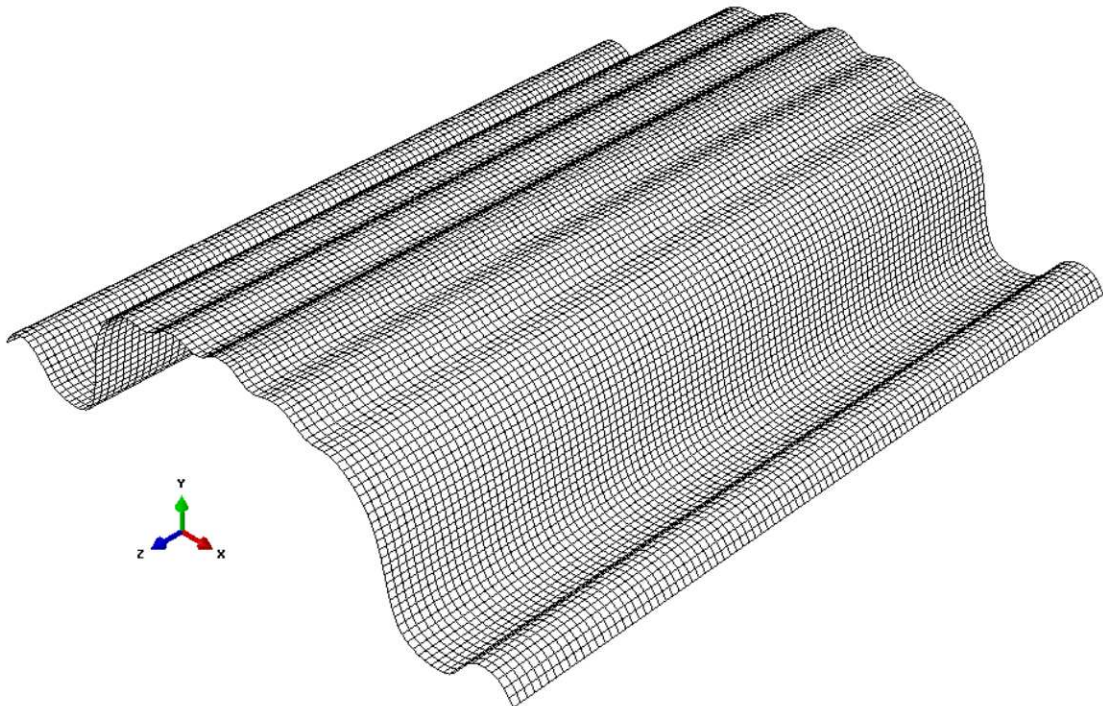
Na definição do tamanho da malha de elementos finitos a ser adoptada neste trabalho, foi realizado um estudo simplificado de sensibilidade da malha, avaliando a tensão crítica de bifurcação para os cinco primeiros modos de instabilidade do perfil com 1,25 mm de espessura e o esforço computacional na obtenção dos resultados. Foram

utilizados 6 tamanhos de malhas diferentes para 4 comprimentos da secção em estudo. Na Figura 30 apresentam-se os resultados em termos de  $\sigma_{cr}$  para o primeiro modos de instabilidade.



**Figura 30** - Gráfico de tensão crítica/comprimento da barra ( $\sigma_{cr}/L$ ), para diversos comprimentos da malha de elementos finitos.

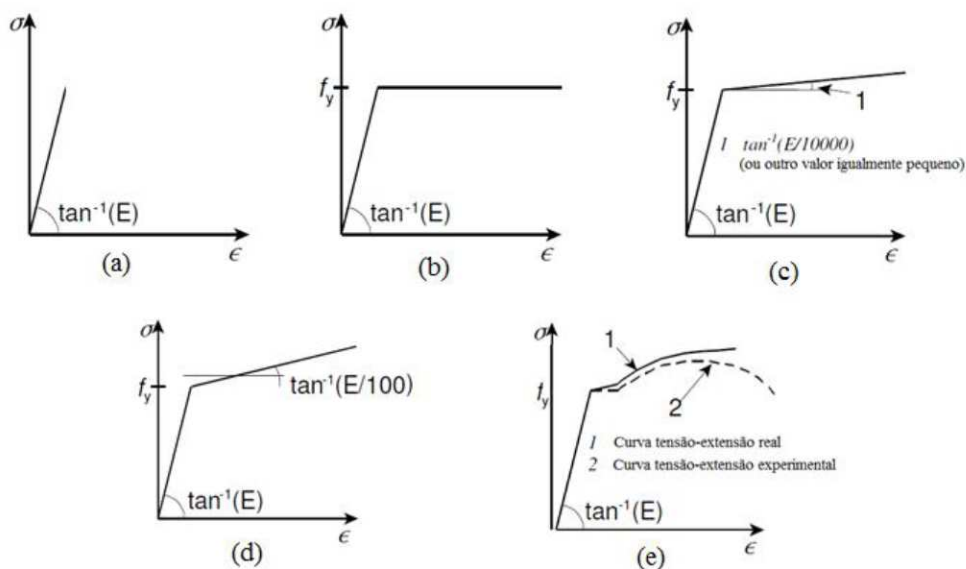
Após estas análises optou-se por utilizar neste trabalho, elementos com 10 mm de dimensão longitudinal e um controlo de curvatura com um factor máximo de desvio de 0,05 com um número aproximado de 16 elementos por círculo. Na Figura 31, está representada a discretização do perfil estudado.



**Figura 31** – Discretização do perfil BC900.

### 3.3.3 Modelação material

O material utilizado pelo fabricante na produção dos perfis em estudo é o aço S250GD+Z dados do catálogo da BLOCOTELHA [48]. De acordo com a EN1993-1-3 [6], a tensão de cedência deste aço é  $f_y = 250$  MPa e tensão de rotura  $f_u = 330$  MPa. Os valores considerados para o módulo de elasticidade  $E = 210$  GPa e o coeficiente de *Poisson*  $\nu = 0,30$ . Para a caracterização das propriedades mecânicas do aço no ABAQUS, admitindo o material como homogêneo e isotrópico, neste trabalho, das análises permitidas pelo programa ilustradas na Figura 32, definiu-se os valores de  $E$ ,  $\nu$  e  $f_y$  e assim reproduziu-se nos modelos o comportamento elástico-linear (Figura 32 (a)) e o comportamento elástico/perfeitamente plástico (Figura 32 (b)). O comportamento elasto-plástico (Figuras 32 (c) e (d)) com encruamento, não foi considerado neste trabalho.



**Figura 32** - Modelos de comportamento mecânico do aço: modelo (a) elástico-linear, (b) comportamento elástico-plástico perfeito, (c) comportamento elasto-plástico, com inclinação nominal do patamar de cedência, (d) comportamento elasto-plástico com encruamento e (e) curva tensão-deformação real obtida a partir de resultados experimentais, adaptado do EC3-1-5 [56].

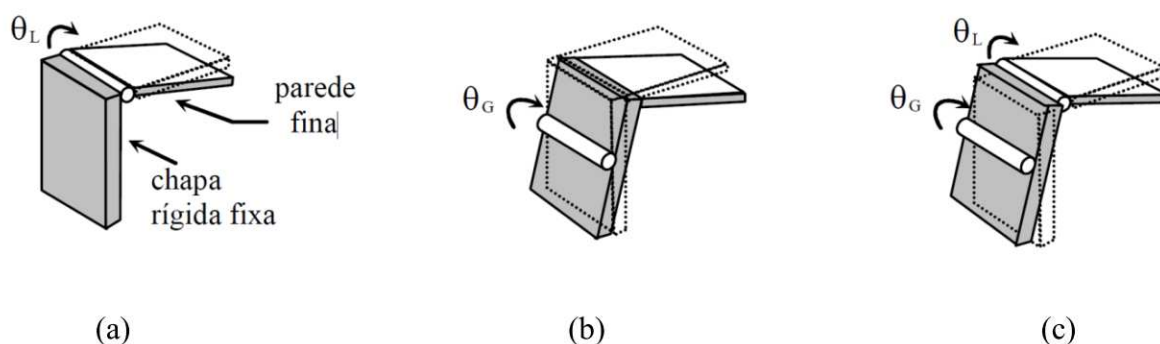
### 3.3.4 Condições de fronteira

Ao estudar o comportamento de estabilidade dos elementos estruturais de aço enformado a frio através do MEF, a modelação das condições de apoio assume grande

importância na obtenção dos resultados. Uma modelação (involuntariamente) desajustada das condições de apoio dos elementos de aço enformados a frio, pode influenciar os resultados finais, especialmente se os resultados forem alvo de comparação com resultados experimentais. Antes da modelação das condições de apoio dos perfis, é conveniente distinguir entre condições de apoio globais e locais definidas no trabalho de Dinis e Camotim [55]:

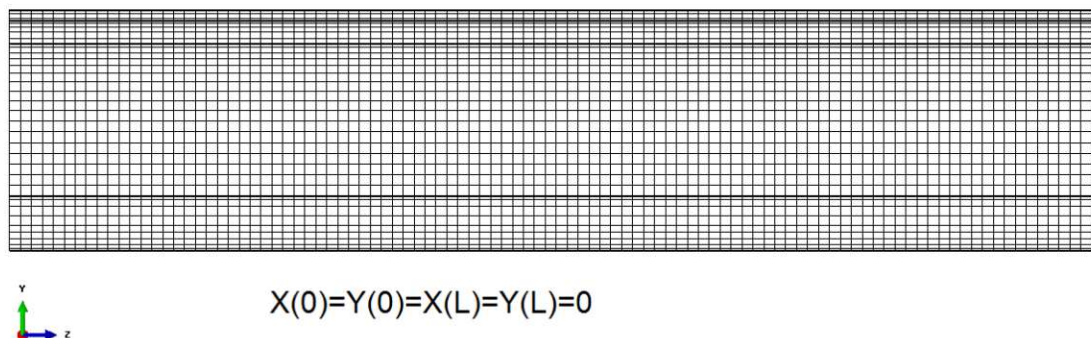
- i) as condições de apoio globais dizem respeito ao deslocamento de corpo rígido das secções extremas da barra, i.e., os deslocamentos e rotações das extremidades do eixo da barra, existindo 6 condições de apoio deste tipo em cada extremidade;
- ii) as condições de apoio locais dizem respeito aos deslocamentos dos bordos transversais das paredes que formam a barra, os quais tem que ser compatíveis (ii<sub>1</sub>) com as condições globais e (ii<sub>2</sub>) entre si, ao longo da linha média de cada secção extrema. Um exemplo de um deslocamento associado a uma condição de apoio local, é o empenamento.

Para ilustrar a diferença entre as rotações de flexão globais e locais, a Figura 33 mostra três situações fisicamente aceitáveis, envolvendo a ligação entre o bordo transversal da parede de um perfil e uma chapa de extremidade rígida (i.e., está impedido o empenamento na secção extrema): (i) rotação global impedida e rotação local livre (figura 33 (a)), (ii) rotação global livre e rotação local impedida (figura 33 (b)), (iii) as duas rotações livres (figura 33 (c)).



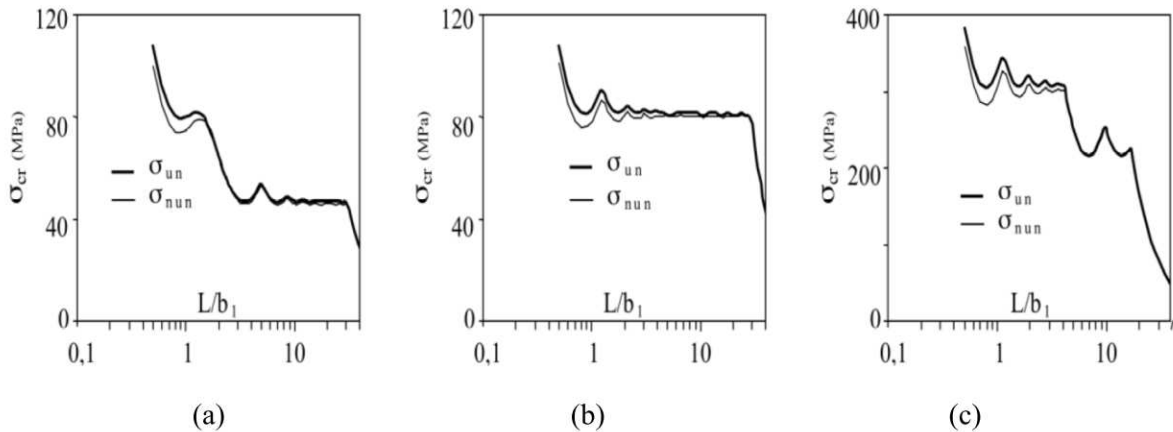
**Figura 33** - Ilustração da diferença entre as rotações de flexão globais e locais [55].

Nesta dissertação foram consideradas as secções extremas como simplesmente apoiadas, permitindo às secções empenarem livremente. Foi permitido o deslocamento axial e as rotações de flexão como indica a Figura 34. Devido a problemas de análise numérica causados pelo movimento de corpo rígido, considerou-se impedido o deslocamento longitudinal do nó central da secção a meio vão.



**Figura 34** - Condições de apoio modeladas.

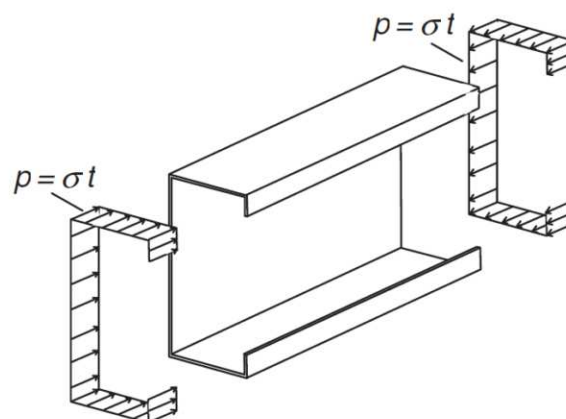
Importa referir que a modelação da condição de secção simplesmente apoiada, através da imposição de deslocamentos transversais nulos, provoca o fenómeno de concentração de tensões nas extremidades que pode ter consequências na análise de estabilidade de perfis enformados a frio pelo MEF. Os resultados apresentados na Figura 35 ilustram essa influência em um estudo de Dinis e Camotim [55] realizado para as colunas de secção C, Z e "Rack". São representados pares de curvas  $\sigma_{cr}/(L/b_1)$  (com  $\sigma_{cr}$  a tensão crítica,  $b_1$  a altura da alma e  $L$  o comprimento do perfil) relativas a colunas sob estados de tensão uniformes ( $\sigma_{um}$ ) e não uniformes ( $\sigma_{num}$  com concentração de tensões), gerados por duas modelações distintas para as condições de apoio: (i) impedindo todos os deslocamentos ao longo dos bordos do perfil( procedimento que gera o referido estado de tensão não uniforme  $\sigma_{num}$  e adotado no presente trabalho) ou (ii) libertando alguns deles, de forma seletiva (procedimento que conduz a  $\sigma_{um}$ ). Observando as curvas da Figura 35 verifica-se que: (i) a concentração de tensões afeta (reduz) o valor de  $\sigma_{cr}$  apenas na colunas "curtas", i.e, nas que instabilizam em MLP, (ii) o efeito da concentração de tensões diminui rapidamente com o comprimento da coluna, mas só desaparece totalmente quando o modo crítico passa a ser distorcional e (iii) os valores mínimos relativos à instabilidade em modos locais de placa com o número crescente de semi-ondas vai aumentando e tendendo para o "valor ideal", i.e., o valor obtido com um estado de tensão uniforme.



**Figura 35** - Influência da concentração de tensões no valor de  $\sigma_{cr}$ : perfis (a) em C, (b) em Z e (c) em "Rack" [55].

### 3.3.5 Carregamentos

O carregamento aplicado para obtenção das tensões críticas, consiste na aplicação de um conjunto de forças nodais nas secções extremas dos perfis, segundo a direção longitudinal dos perfis. Introduziram-se ao longo das linhas médias das secções extremas, forças distribuídas de valor numericamente igual à espessura da parede do perfil tal como demonstra a Figura 36. Como essas forças geram um estado de tensão uniforme de valor igual a 1 MPa, o valor crítico do parâmetro de carga fornecido pelo ABAQUS é a tensão crítica ( $\sigma_{cr}$ ) da coluna em MPa. O valor da carga aplicada pode ser obtida multiplicando o valor obtido pela área da secção transversal.



**Figura 36** - Carregamento aplicado na análise linear de estabilidade por elementos finitos [57].

### 3.4 Análise linear elástica de estabilidade

A análise linear de estabilidade compreende a resolução de problemas de valores e vetores próprios, definido pelas matrizes de rigidez elástica e geometria da discretização do elemento estrutural, sendo essa resolução feita no ABAQUS através do método da iteração em subespaços (Bathe [58]). A análise de estabilidade de um problema de valores e vetores próprios é realizada para determinar o modo de instabilidade e para determinar a tensão crítica ( $\sigma_{cr}$ ). O Método do Subespaço é o adequado para quando se determina um número reduzido de modos "menos de". O número de modos pretendidos é definido pelo utilizador, o menor dos modos é o modo crítico de instabilidade, com a menor tensão de encurvadura, logo, será este modo o utilizado para gerar imperfeições no perfil na análise de pós encurvadura. Na análise de valores próprios, o modelo define-se a partir da rigidez elástica, ignorando a não linearidade geométrica e considerando as propriedades elásticas do material. As cargas obtidas são as cargas críticas e correspondem aos autovalores clássicos de encurvadura. Os modos de encurvadura reproduzem a configuração deformada da estrutura instabilizada, não fornecendo entretanto os valores numéricos dos deslocamentos. O que se obtém na análise linear é a relação entre as deformadas dos vários pontos discretos das estruturas.

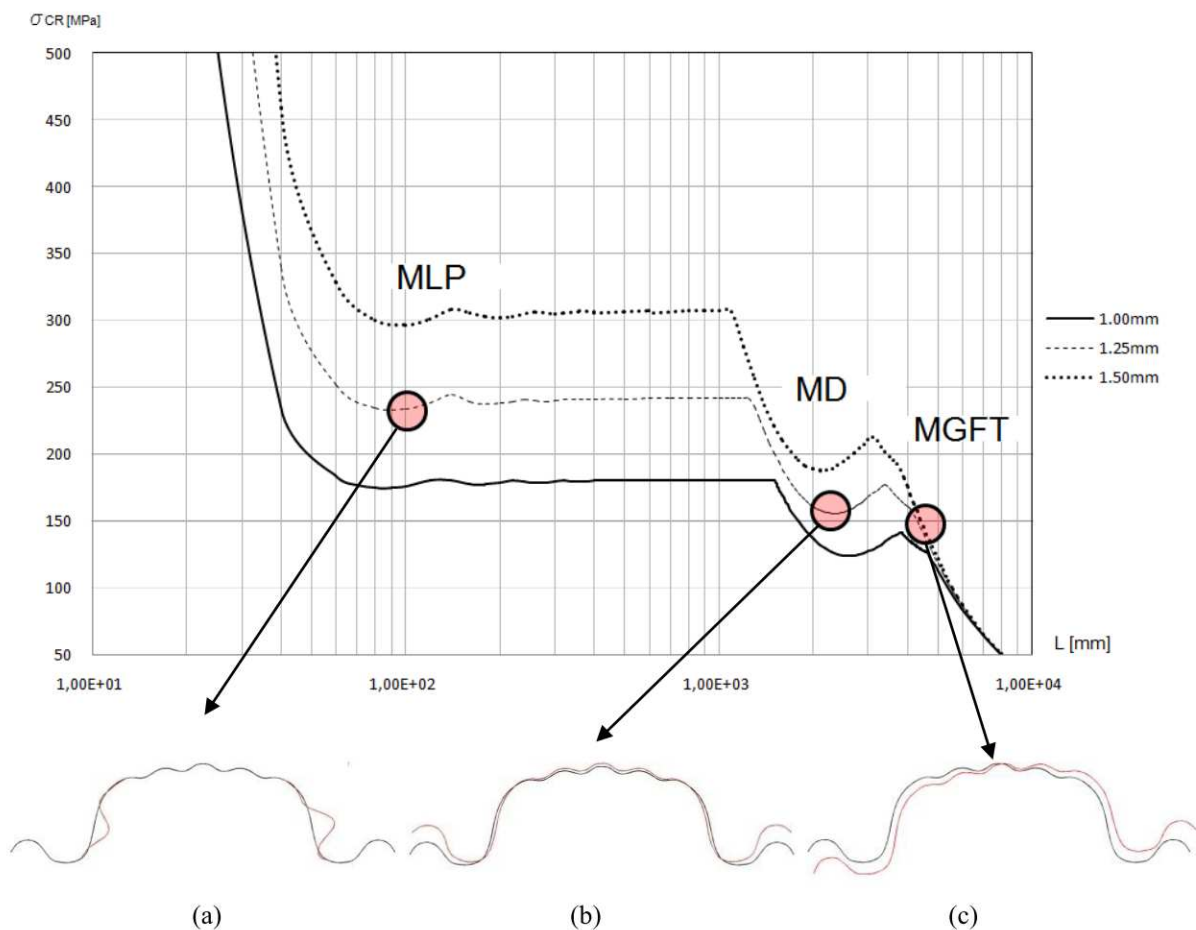
O valor da tensão de bifurcação ( $\sigma_b$ ) num perfil e a natureza do respetivo modo de instabilidade dependem: (i) das condições de apoio (ii) do carregamento, (iii) da geometria do perfil e (iv) das constantes elásticas adotadas para o material. No estudo da análise linear elástica de estabilidade deste trabalho consideraram-se perfis (i) secção BT900, (ii) apoiado nas secções extremas e livre de empenar, (iii) submetido a compressão uniforme e (iv) constituídos por aço com  $E=210$  GPa e  $\nu=0,3$ . Admitindo estas condições, o valor da tensão crítica e a natureza do modo de instabilidade só depende dos comprimentos do elemento e das espessuras da secção transversal.

Na análise linear de estabilidade, os perfis com comprimentos  $0,02 \text{ m} \leq L \leq 30 \text{ m}$  foram analisados à compressão pura, sem quaisquer tipo de imperfeições geométricas iniciais tendo como principal objetivo:

- i) determinar o valor da carga crítica para cada comprimento e espessura do perfil produzido pelo fabricante;
- ii) identificar a localização dos modos de instabilidade local, distorcional, global e a respetiva tensão crítica;

- iii) obter a configuração deformada dos modos, para introdução de imperfeições geométricas iniciais na análise do comportamento de pós-encurvadura dos perfis em estudo.

Na Figura 37 são apresentadas as curvas de instabilidade do perfil em estudo, representando os valores obtidos a partir da análise linear de estabilidade à compressão pura. As curvas representadas, fornecem a variação da tensão crítica  $\sigma_{cr}$  (a menor das tensões de bifurcação do equilíbrio) em função do comprimento dos perfis L (em escala logarítmica), para as espessuras de chapa comercializadas pelo fabricante, designadamente 1,00 mm, 1,25 mm e 1,50 mm. Na parte de baixo desta figura estão representados os modos de instabilidade relevantes.



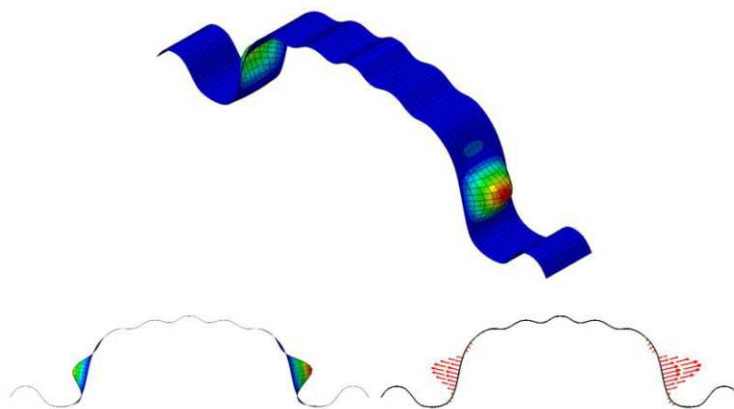
**Figura 37** - Curva de encurvadura dos perfis analisados: (a) MLP, (b) MD e (c) MGFT.

Os resultados obtidos na análise linear de estabilidade à compressão pura, para as curvas representadas da Figura 37, permitem as seguintes observações:

- i) a configuração das curvas de comportamento das várias espessuras da secção BT900 apresenta uma simetria na configuração;

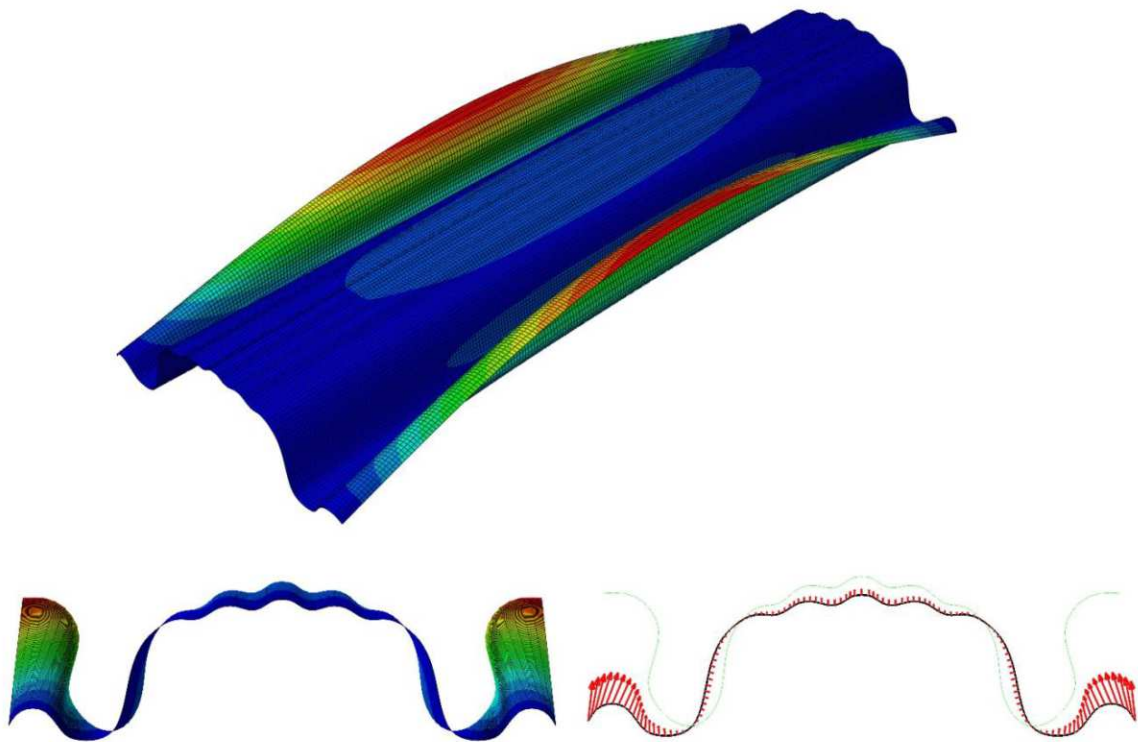
- ii) a tensão crítica de bifurcação em algumas zonas não apresenta um decréscimo constante com o aumento do comprimento;
- iii) as curvas de encurvadura apresentam três zonas distintas, associadas aos modos críticos MLP, MD e MGFT;
- iv) a localização dos modos de instabilidade assinalados no gráfico, são relativos às secções com 1,25 mm de espessura, por ser a espessura de perfil comercializada pelo fabricante, embora exista possibilidade de produzir as restantes espessuras apresentadas. Deeste modo, os próximos resultados apresentados são alusivos à espessura de 1,25 mm;
- v) o elemento instabiliza num modo local com o primeiro valor mínimo a ocorrer para  $L \approx 100$  mm ( $L_L$ ) com configuração deformada com um comprimento de onda. Depois, com o aumento do comprimento o modo crítico continua a ser o MLP com vários semi-comprimentos de onda. O valor da tensão crítica é menor para o modo com um semi-comprimento de onda, como foi explicado na secção 3.3.4 desta dissertação;
- vi) um segundo mínimo ocorre para um comprimento  $L \approx 2350$  mm e está associado a um modo distorcional ( $L_D$ ) com uma semi-onda.
- vii) no comprimento  $L \approx 4200$  mm, o modo de instabilidade passa de um MD com duas semi-ondas para um MGFT;

O elemento com espessura de 1,25 mm tem uma tensão de bifurcação igual a  $\sigma_{bL} = 233,97$  MPa para um comprimento  $L=100$  mm. Para valores de  $L < 1440$  mm, o elemento apresenta uma variação da configuração de 1 a 14 semi-ondas precipitadas pela instabilidade da alma, como ilustra a Figura 38.

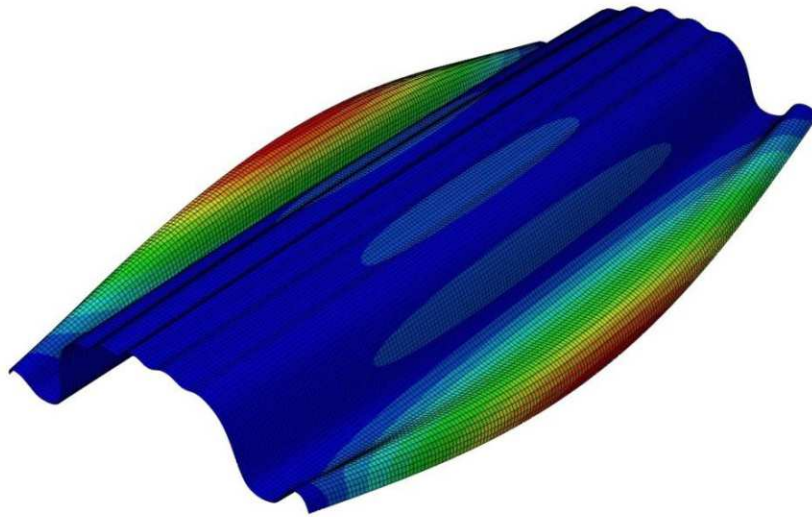


**Figura 38** - Configuração do MLP.

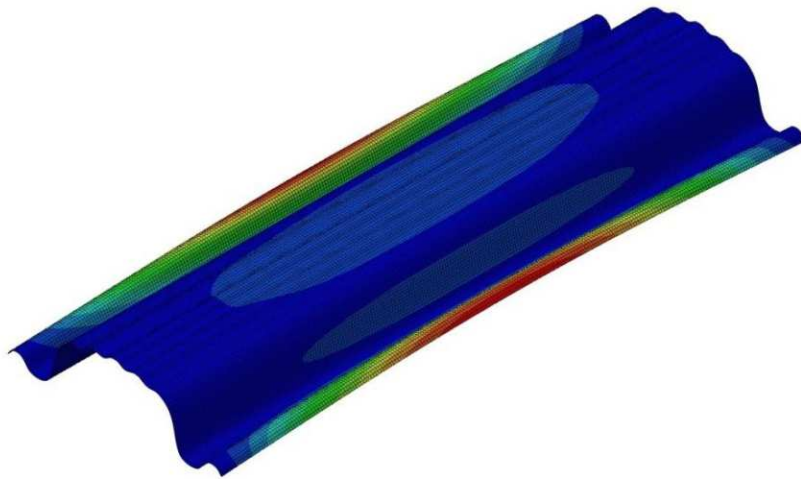
Na figura 39 está representado o MD associado a um segundo valor mínimo da tensão crítica  $\sigma_{b D} = 155,57$  MPa para um comprimento de  $L = 2350$  mm. Este modo apresenta a particularidade de: (i) para comprimentos de  $1270 \text{ mm} < L < 1880 \text{ mm}$  a instabilidade é precipitada pelas abas laterais assumindo estas, uma configuração de deformação em sentidos opostos com comprimento de uma semi-onda Figura 40 (a), (ii) para comprimentos de  $1440 \text{ mm} < L < 3500 \text{ mm}$  a instabilidade é precipitada pelas abas laterais com a configuração de deformação no mesmo sentido com o comprimento de uma semi-onda (Figura 40 (b)), (iii) para comprimentos de  $3500 \text{ mm} \leq L < 4130 \text{ mm}$ , a configuração da deformação das abas, o modo de instabilidade assume 2 semi-ondas, (Figura 40 (c)).



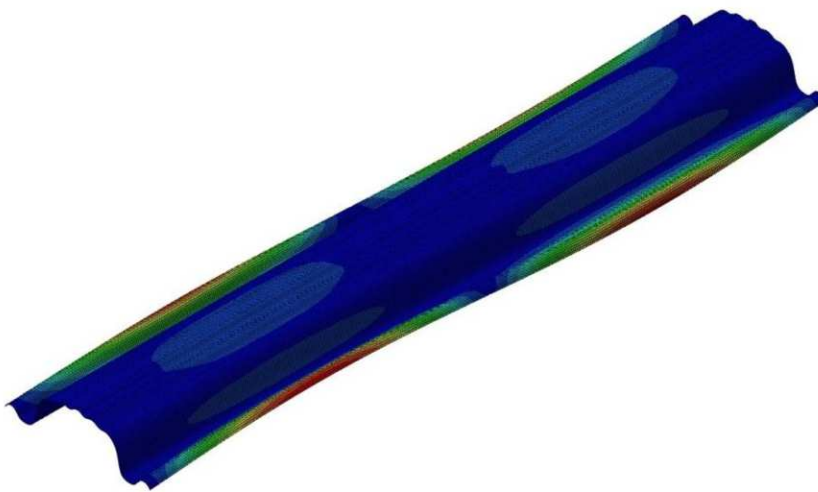
**Figura 39** - Configuração do MD para  $L = 2350$  mm.



(a)



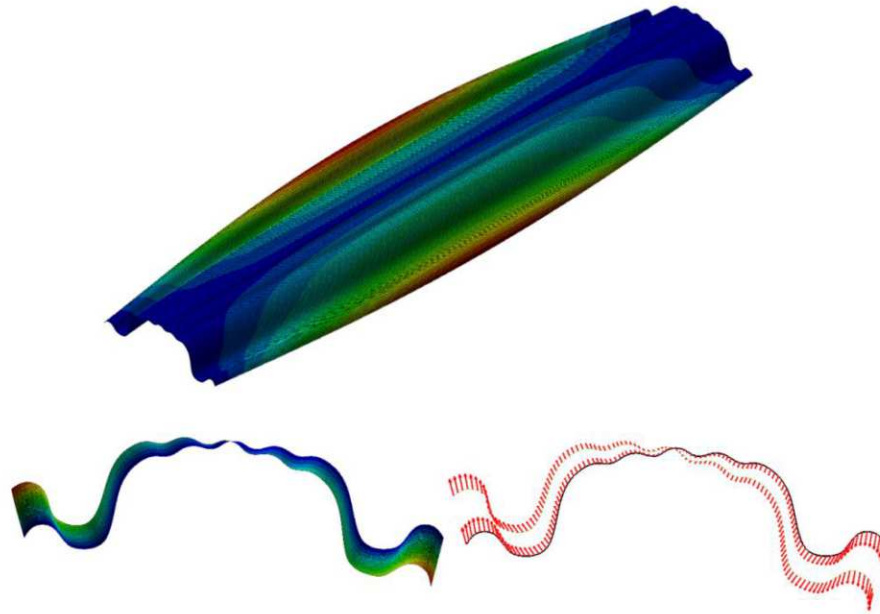
(b)



(c)

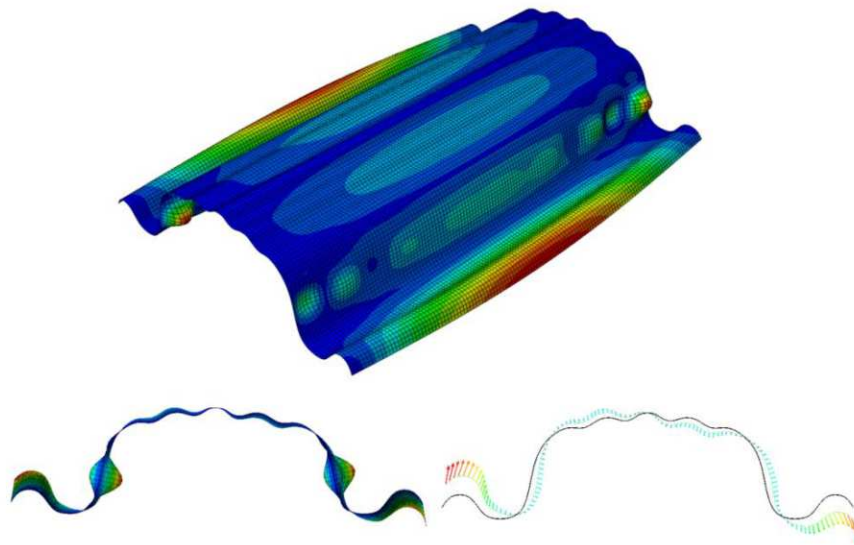
**Figura 40** - Configuração do MD: (a) abas em sentidos opostos, (b) abas no mesmo sentido e (c) duas semi-ondas.

Nas barras longas a instabilidade dá-se por MGFT para  $L > 4130$  mm (a tensão de bifurcação é  $\sigma_{b_G} = 157,91$  MPa para o comprimento  $L=4130$  mm), com a configuração de uma semi-onda mostrada na Figura 41, apresentando uma torção das abas com flexão a meio vão.



**Figura 41** - Configuração do MGFT

Analisando as configurações das deformadas, é de salientar que para comprimentos de  $1260 \text{ mm} \leq L < 1270 \text{ mm}$ , existe um acoplamento entre configuração de modos, local e distorcional ( $L_{L-D}$ ) representado na Figura 42.



**Figura 42** - Configuração do acoplamento ( $L_{L-D}$ ).



## Capítulo 4 – Análise de Pós-encurvadura

---

### 4.1 Introdução

No presente capítulo efetua-se a análise de pós-encurvadura, em regime elástico e elasto-plástico, dos perfis retos afetados por fenómenos de instabilidade nos modos MLP, MD e MGFT. A análise de pós-encurvadura é muito mais complexa do que a linear de estabilidade e, tem como objetivo, determinar as trajetórias de equilíbrio não lineares descritas por um relacionamento entre tensões e deslocamentos. Para análise do fenómeno há que ter em conta o aparecimento de pequenas deformações provocadas pela presença de imperfeições iniciais. Outro aspeto importante é o comportamento não linear dos materiais. O método *Riks* disponível no ABAQUS, foi o método escolhido para a análise do comportamento de pós encurvadura. Este método determina a resistência última, podendo obter trajetórias de equilíbrio não lineares de força/deslocamento à medida que a solução evolui. Para a análise deste tipo de problemas, o método utiliza equações de equilíbrio não lineares, recorrendo à utilização de procedimentos incrementais iterativos de Newton-Raphson e, a técnica do controle de comprimento de arco nas iterações de equilíbrio estático para melhorar a convergência da solução ao longo do caminho de equilíbrio estático no espaço carga-deslocamento. Este procedimento foi descrito em detalhe por Lourenço [59].

### 4.2 Imperfeições geométricas iniciais

As imperfeições geométricas estão presentes em qualquer elemento estrutural. No caso de perfis metálicos, as imperfeições podem afetar significativamente a capacidade resistente última dos elementos e, no estudo do comportamento de pós-encurvadura de perfis de aço enformados a frio, é fundamental tomá-las em consideração.

O programa ABAQUS permite a introdução de imperfeições geométricas iniciais, definindo na linha de comandos um código específico de chamada dos modos de encurvadura obtidos da análise linear de estabilidade e definir o coeficiente da magnitude da configuração do modo pretendido. Assim sendo, torna-se necessário encontrar

trajetórias de equilíbrio de elementos com imperfeições iniciais que (i) cubram um vasto leque de possibilidades e (ii) possam ser comparadas no sentido de identificar a mais desfavorável [14, 53, 60].

Apesar da investigação da influência das amplitudes de imperfeições geométricas iniciais no comportamento de pós-encurvadura estar fora da finalidade deste trabalho, um número muito limitado de imperfeições foi considerado, com o intuito de se verificar a sua importância na análise do comportamento do perfil.

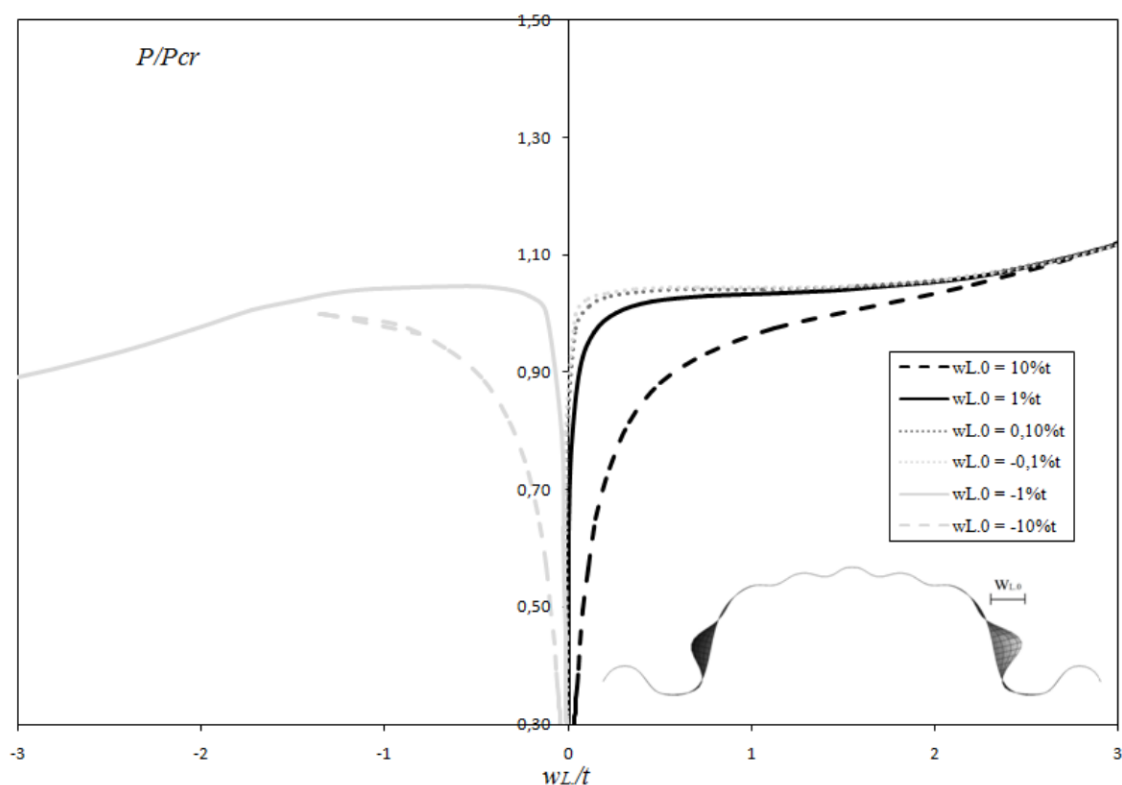
Na análise de pós-encurvadura em regime elástico foram impostas imperfeições iniciais, através da sobreposição do primeiro modo de bifurcação obtido na análise linear elástica, para os três modos puros, representados na Figura 37. Para i) MLP considerou-se três valores de amplitude dos deslocamentos para uma coluna com  $L=100$  mm, iguais a 10%, 1% e 0,1% da espessura ( $t=1,25$  mm), ii) no MD para um comprimento de  $L=2350$  mm, considerou-se 10%, 5%, 1%, 0,4%, 0,1%, -0,1%, -1% e -10% da espessura ( $t=1,25$  mm) e iii) para o MGFT foram admitidas imperfeições iniciais com valores de  $L/750$ ,  $L/1000$ ,  $L/1500$  e  $L/2000$ .

Das análises de sensibilidade às imperfeições geométricas iniciais realizadas, observa-se que:

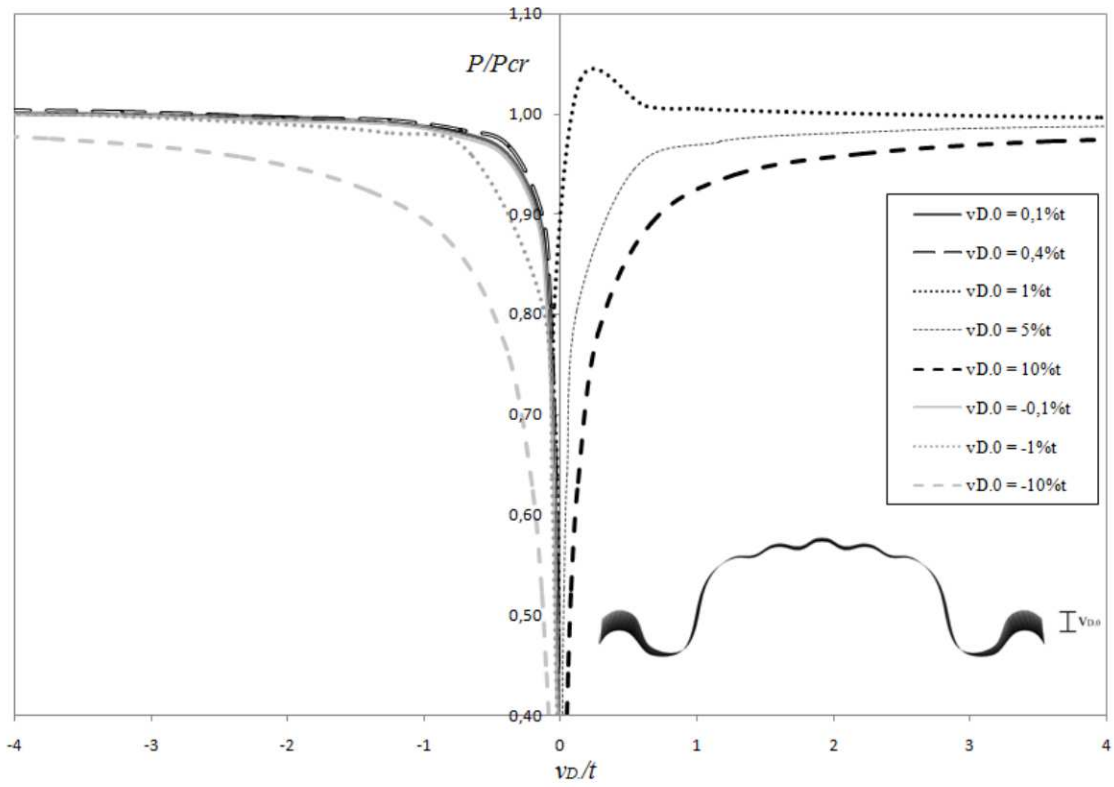
- i) Como é óbvio, as magnitudes da imperfeição inicial de menor valor apresentam um comportamento mais próximo ao de uma coluna ideal;
- ii) As imperfeições geométricas iniciais analisadas no MLP mostram que o sentido da imperfeição determina a evolução da configuração deformada de pós-encurvadura para as imperfeições de maior magnitude. Quando as imperfeições assumem valores de menor magnitude ( $-0,1\% t$ ), a configuração de pós-encurvadura assume um comportamento similar para valores de magnitudes pequenos de ( $0,1\% t$ ), i.e. para magnitudes pequenas de  $w_L < 0$  a configuração de pós-encurvadura muda e assemelha-se à configuração de  $w_L > 0$  para valores de baixa magnitude da imperfeição, como representado na Figura 43;
- iii) No MD, as curvas da Figura 44 indicam que as imperfeições geométricas iniciais com valores de magnitude mais pequenos não condicionam a configuração da deformação de pós-encurvadura. Para os valores de  $0,4\% t$  e  $0,1\% t$  a configuração da deformada de pós-encurvadura assume a configuração oposta à imperfeição inicial, aproximando-se dos valores obtidos na análise com magnitude de imperfeição ( $-0,1\% t$ ). Para os valores superiores de

magnitude da imperfeição geométrica inicial, a configuração da deformação de pós-encurvadura é condicionada pela imperfeição;

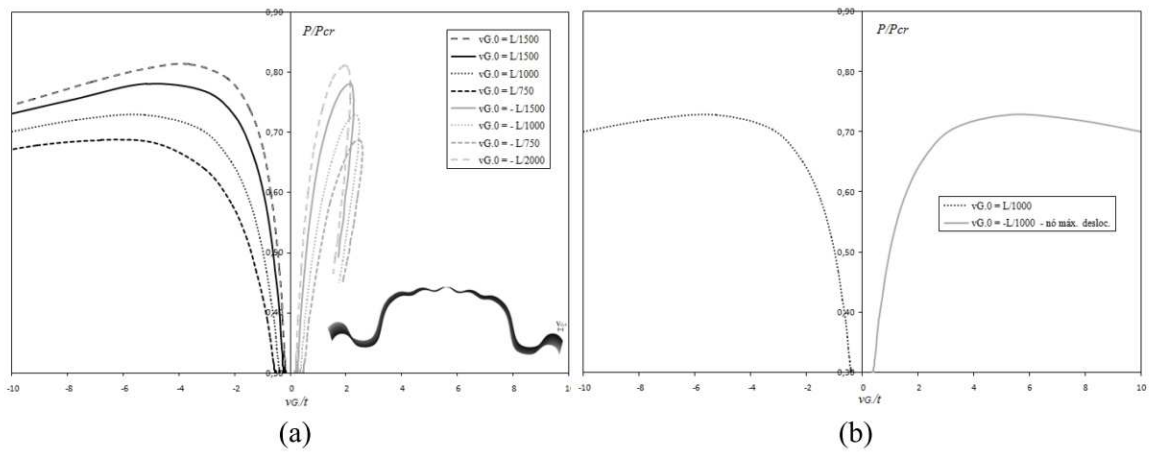
- iv) A magnitude da imperfeição geométrica inicial para valores negativos ( $-L/750$ ), ( $-L/1000$ ), ( $-L/1500$ ) e ( $-L/2000$ ) apresentam uma menor resistência de pós-encurvadura, comparando com magnitudes de igual valor mas positivas para o modo de instabilidade MGFT medidas no mesmo ponto como está mostrado nas curvas da Figura 45 (a). Todavia se a curva de comportamento de pós-encurvadura retratar os valores de deslocamentos máximos do perfil analisado nas mesmas condições, verifica-se uma simetria de resultados e que a influência da configuração e magnitude apenas altera o lado onde ocorre a rotura do elemento (Figura 45 (b)).



**Figura 43** - Curvas de pós-encurvadura elástica do MLP com diferentes magnitudes de imperfeições.



**Figura 44** - Curvas de pós-encurvadura elástica do MD com diferentes magnitudes de imperfeições.

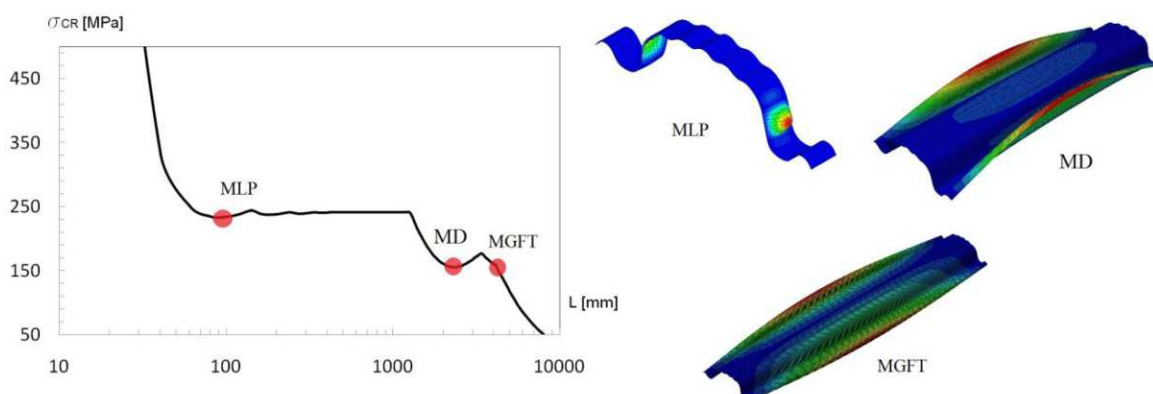


**Figura 45** - Curvas de pós-encurvadura elástica do MGFT com diferentes magnitudes de imperfeições (a) resultados no nó 26446 e (b) valores máximos na estrutura para  $|L|/1000$ .

### 4.3 Análise de Pós-encurvadura em regime elástico

A análise linear de estabilidade por elementos finitos realizada no capítulo anterior, como já foi referido, teve como objetivo (i) determinar o valor da carga crítica por comprimento de perfil, (ii) identificar a localização dos modos de instabilidade e (iii) obter a configuração deformada dos modos de instabilidade, para introdução de imperfeições geométricas iniciais na análise de pós-encurvadura.

A Figura 46 mostra novamente, a curva de variação da tensão de bifurcação ( $\sigma_b$ ) em função do comprimento  $L$  para elementos submetidos à compressão, de secção transversal com 1,25 mm de espessura. A análise linear de estabilidade por elementos finitos no ABAQUS, para além das tensões críticas de bifurcação, também permite a identificação da configuração dos modos de instabilidade.

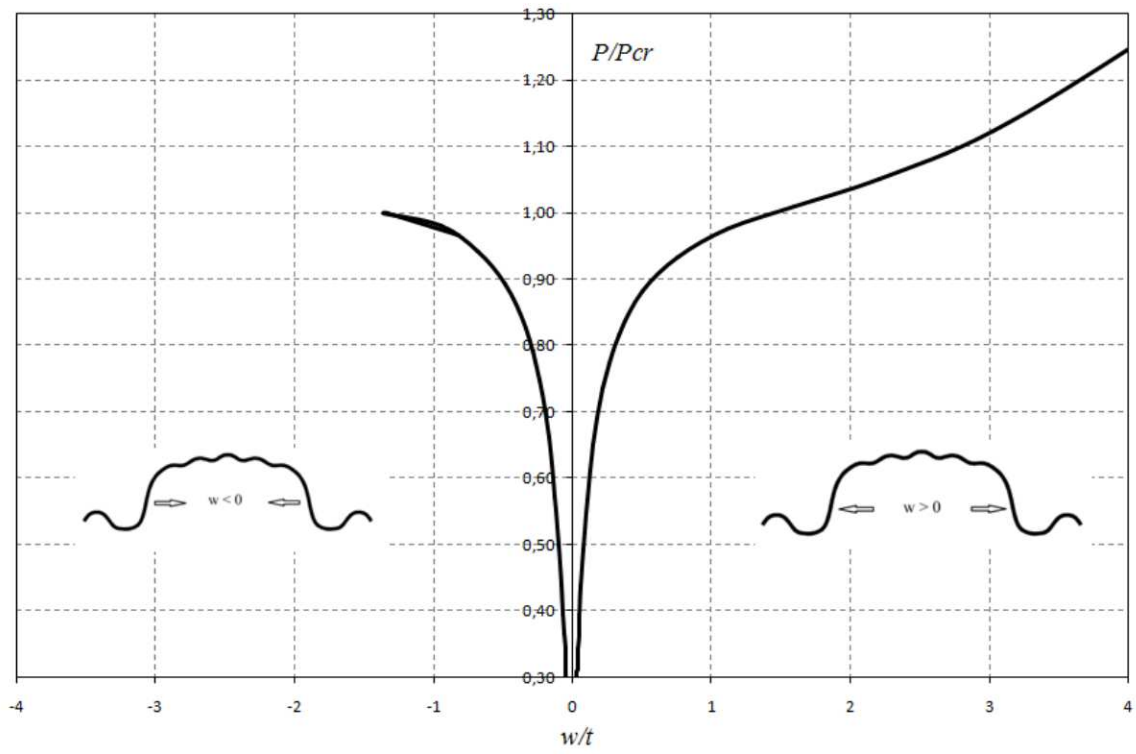


**Figura 46** - Curva de instabilidade elástica para secções com 1,25mm, com identificação da localização e configuração do modo.

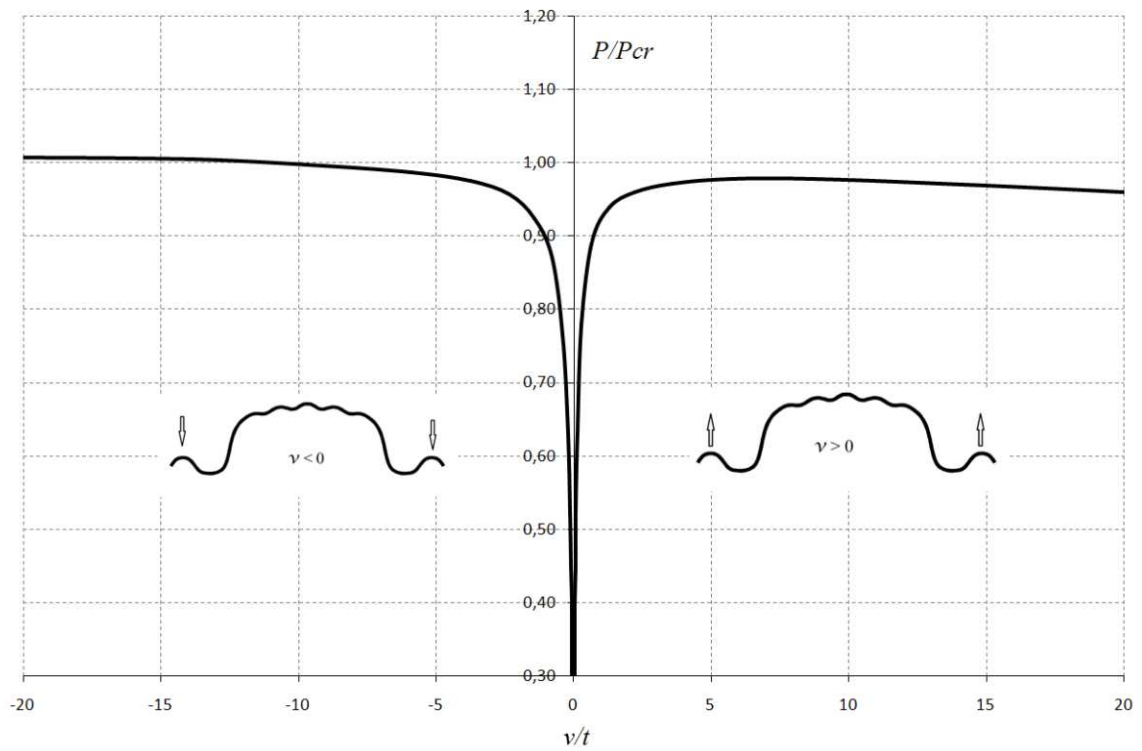
Na modelação da análise de pós-encurvadura em regime elástico considerou-se o modelo descrito no capítulo anterior, ou seja, (i) os perfis foram discretizados com elementos S4, (ii) nas secções extremas os deslocamentos transversais consideraram-se impedidos, (iii) para obtenção de um estado de compressão uniforme, aplicou-se nos nós de extremidade o equivalente a um conjunto de forças nodais longitudinais, (iv) aços constituídos por  $E=210$  GPa e  $\nu=0,3$  e (v) imperfeições geométricas iniciais com amplificação da magnitude dos modos de instabilidade puros com  $10\% t$  para os modos locais MLP, MD e para o modo global MGFT  $L/1000$ , com a configuração representada na Figura 46.

As trajetórias de equilíbrio de pós-encurvadura em regime elástico  $P/P_{cr}$  vs  $w/t$  e  $P/P_{cr}$  vs  $v/t$  apresentadas na Figura 47 a 49, determinadas com o presente modelo de elementos finitos, permite retirar as seguintes conclusões:

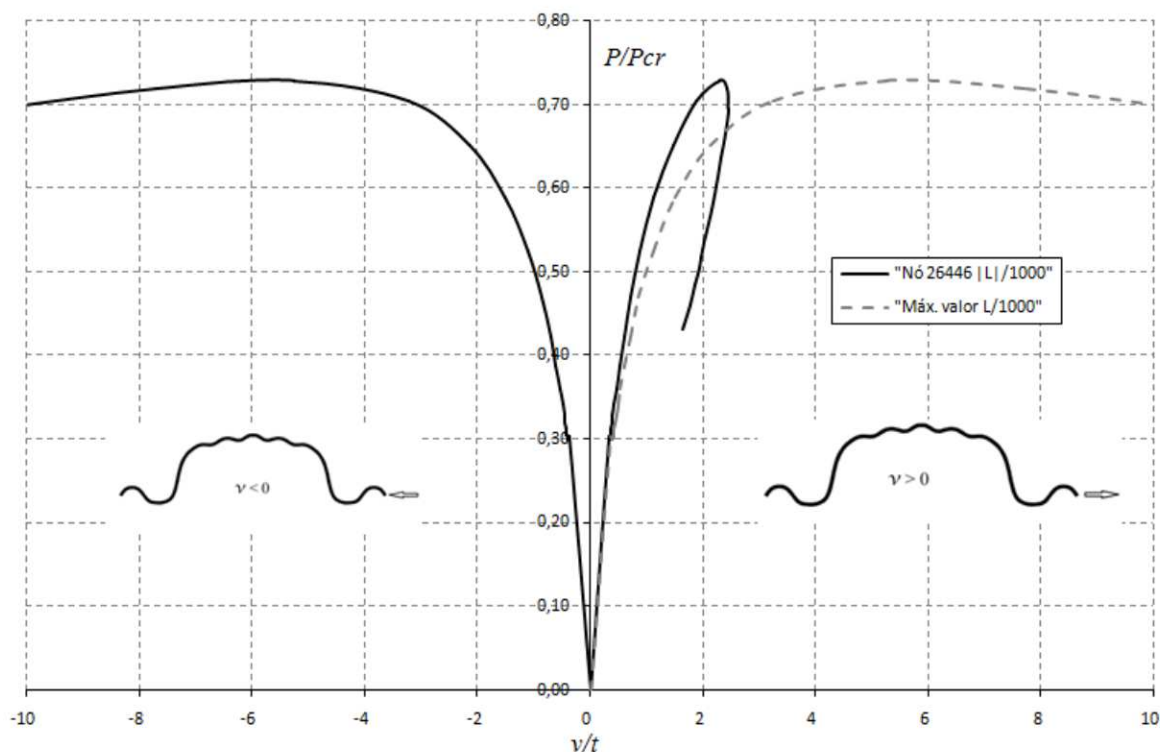
- i) Da observação das curvas de equilíbrio  $P/P_{cr}$  vs  $w/t$  para o modo local de placa representado na Figura 47, nota-se que apresentam uma simetria de comportamento para valores de carga até à carga crítica  $P=P_{cr}$ . Para valores de carga superiores à carga crítica elástica  $P>P_{cr}$  associados a  $w_0<0$  (abertura interna das almas) ocorreu problema de convergência numérica da solução que não se conseguiu superar;
- ii) A Figura 48 indica que para o modo distorcional há uma maior resistência de pós-encurvadura para  $v_0<0$  (deslocamento vertical das abas), com o valor da carga maior que a carga crítica elástica  $P>P_{cr}$  numa fase avançada de deformação. No caso de  $v_0>0$  os valores da carga nunca atingem o valor da carga crítica  $P>P_{cr}$ ;
- iii) Da análise dos resultados do comportamento de pós-encurvadura no modo MGFT apresentado na Figura 49, analisando o mesmo ponto para imperfeições ( $L/1000$  e  $-L/1000$ ), representados pela curva a cheio, verifica-se que os valores da carga máxima são iguais ( $P/P_{cr}= 0,73$ ) para as configurações da imperfeição  $v_0>0$  e  $v_0<0$ . Entretanto no caso de  $v_0<0$ , desenvolvem-se deformações 57% superiores ao verificado para  $v_0>0$ . A curva a tracejado representa a variação da carga no ponto simetricamente oposto da secção para imperfeições  $v_0>0$  que tem um andamento simétrico ao caso de  $v_0>0$  no ponto oposto.



**Figura 47** - Análise de pós-encurvadura elástica - MLP.



**Figura 48** - Análise de pós-encurvadura elástica - MD.



**Figura 49** - Análise de pós-encurvadura elástica - MGFT.

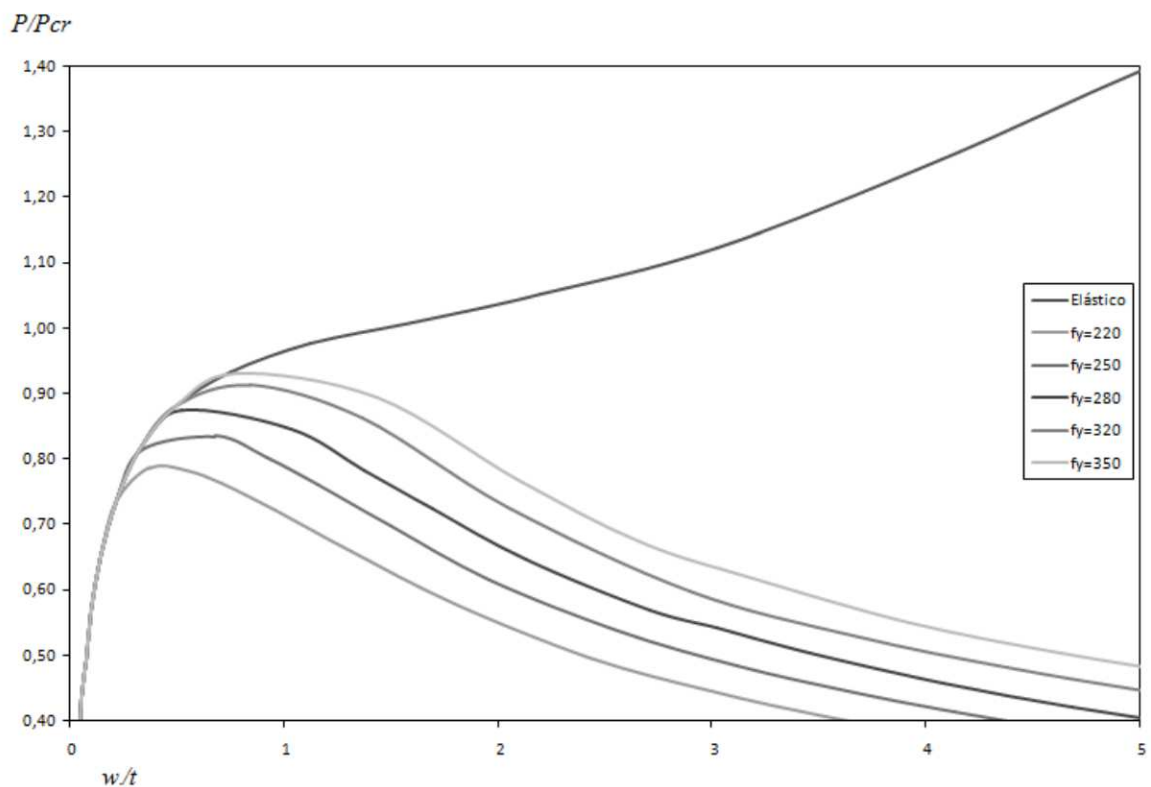
#### 4.4 Análise de Pós-encurvadura em regime elásto-plástico

O objetivo da análise elasto-plástica é estudar a influência da não linearidade física no comportamento dos perfis analisados no subcapítulo anterior, determinando a resistência última e o modo de colapso em regime elasto-plástico. Analisam-se as mesmas secções consideradas no estudo elástico de pós-encurvadura, com as imperfeições geométricas iniciais (i) com uma magnitude igual a 10% da espessura da parede  $t$  dos perfis, para os MLP e MD, (ii) uma magnitude de  $L/1000$  para o MGFT. É admitido o comportamento elástico perfeitamente plástico para o aço, não considerando o endurecimento e analisando o efeito que o valor da tensão de cedência do material tem na resistência última dos elementos analisados. Consideraram-se os valores de tensão de cedência do aço presentes na EN1993-1-3 [6],  $f_y=220, 250, 280, 320$  e  $350$  MPa e apresentam-se as trajetórias de equilíbrio elasto-plásticas determinadas para os modos locais MLP, MD e MGFT puros, com condições iguais às apresentadas no subcapítulo anterior.

Na Figura 50, representam-se as trajetória de equilíbrio em regime elásto-plástico,  $P_u/P_{cr}$  vs  $w/t$ , com  $P_u$  a designar o valor máximo do parâmetro de carga determinado pelo

ABAQUS para um comprimento de 100 mm, cuja a instabilidade é precipitada pelo banzo no MLP em compressão pura conforme apresentado no subcapítulo anterior, Figura 47. As trajetórias assumem a configuração deformada da imperfeição, variando de acordo com o valor da classe de resistência do aço, o que permite retirar as seguintes conclusões:

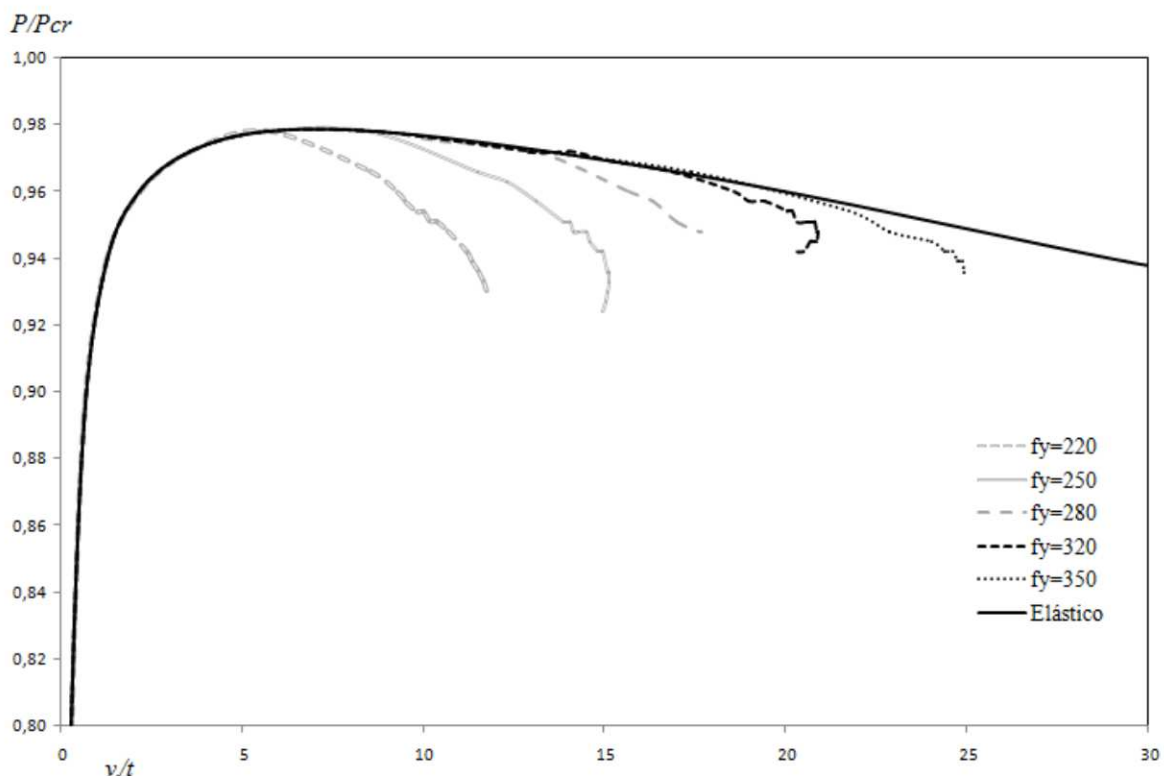
- i) ainda que as colunas apresentem uma resistência elasto-plástica significativa, neste caso a separação com as curvas das trajetórias elásticas, dá-se com uma divergência muito rápida;
- ii) as trajetórias de pós-encurvadura elasto-plásticas evoluem de forma semelhante, com o aumento da tensão de cedência do aço a aumentar o valor da resistência última das colunas, como seria esperado. Verifica-se que o aumento de  $f_y$  de 220 para 350 MPa dá origem a um aumento da resistência última de 18%;



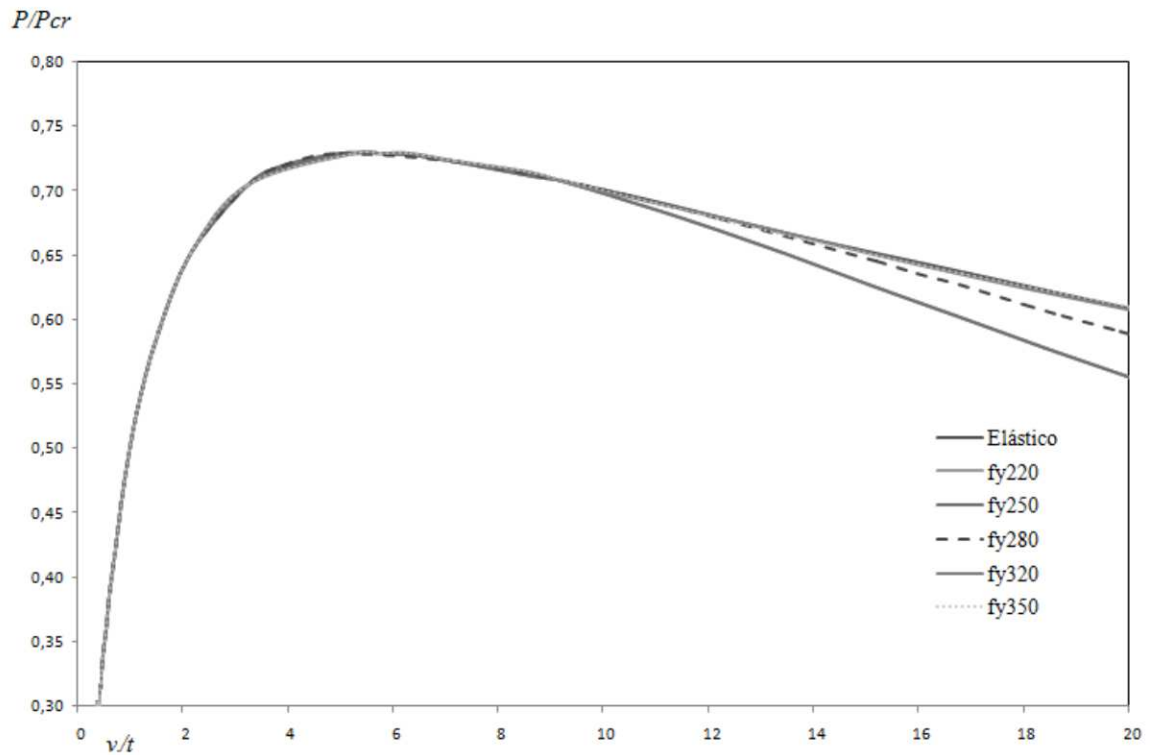
**Figura 50** - Trajetória de Pós-encurvadura elasto-plástica com  $L=100\text{mm}$ .

Na Figura 51 representam-se as trajetória de equilíbrio em regime elásto-plástico,  $P_u/P_{cr}$  vs  $v/t$ , para um comprimento de 2300 mm, cuja instabilidade é precipitada pela aba no MD em compressão pura. Na Figura 52 as mesmas trajetórias são apresentadas, mas para um comprimento de 4200 mm, com a instabilidade associada a um MGFT. Da análise destas curvas observa-se que:

- i) as trajetórias de pós-encurvadura elasto-plásticas para  $L = 2350$  e  $4200$  mm, evoluem de forma igual à trajetória elástica, com a separação destas a ocorrer em estados avançados de deformação;
- ii) para  $L = 2350$  mm o aumento da tensão de cedência do aço, não aumenta o valor da resistência última das colunas, (o valor de  $P_u/P_{cr}$  mantém-se inalterável), independentemente de se tratar da trajetória de pós-encurvadura em regime elástico ou, elasto-plástico com variação da tensão de cedência. A separação das curvas de trajetória elásticas e elasto-plásticas ocorre em deformações mais avançadas para valores de  $f_y$  mais altos (Figura 51);
- iii) na análise da Figura 52 para  $L = 4200$  mm verifica-se o mesmo comportamento descrito na alínea anterior, com a trajetória de pós-encurvadura a não ser influenciada pela tensão de resistência do aço, distinguindo-se a separação de algumas das trajetórias elasto-plásticas em estados de avançada deformação.

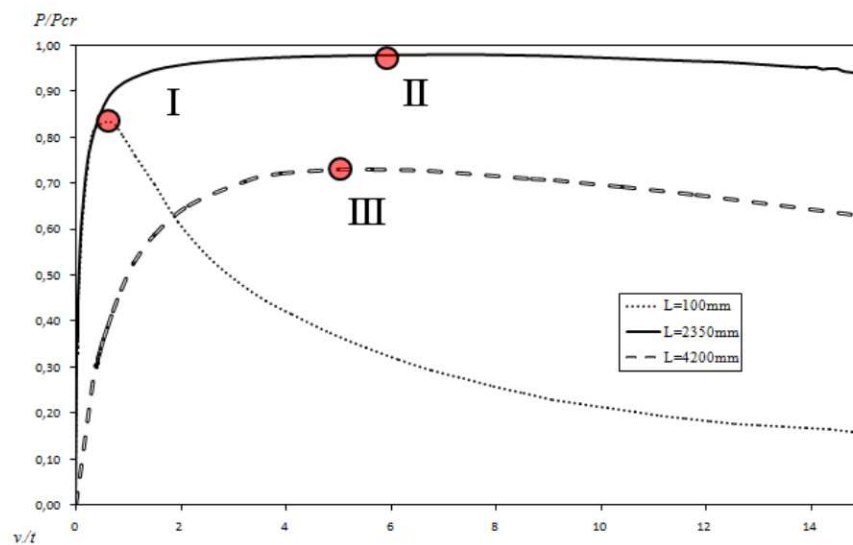


**Figura 51** - Trajetória de Pós-encurvadura elasto-plástica com  $L=2350$  mm.

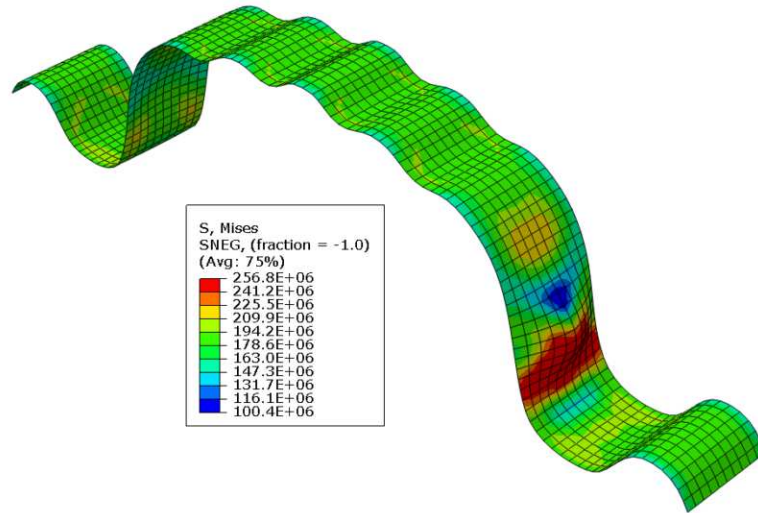


**Figura 52** - Trajectória de Pós-encurvadura elasto-plástica com  $L=4200$  mm.

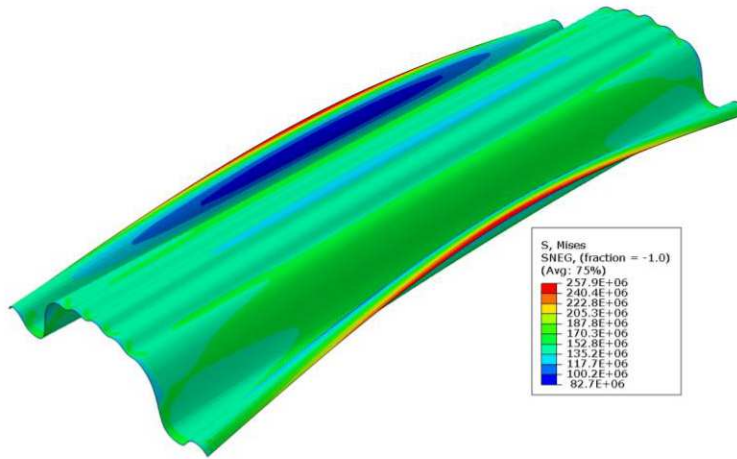
Na Figura 53 e 54 estão comparadas as curvas de equilíbrio elasto-plástico para os três modos de instabilidade (I-MLP, II-MD e III-MGFT) para um aço com  $f_y=250$  MPa. Os pontos marcados nas curvas referem-se à resistência última elasto-plástica, verificando-se que a plasticidade exerce uma pequena influência nos seus valores.



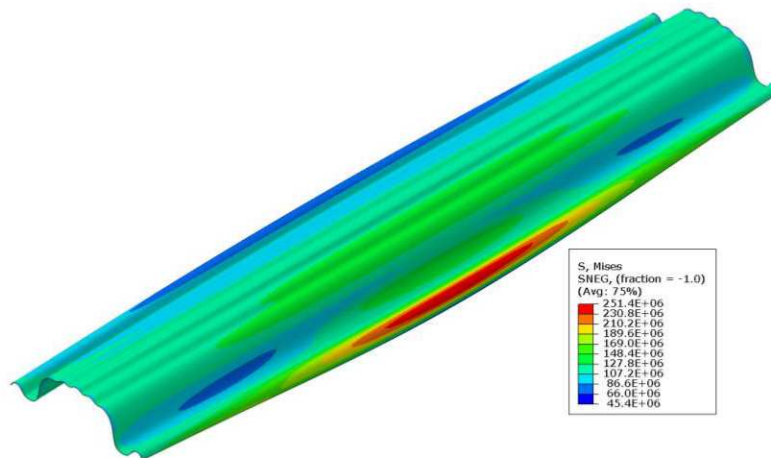
**Figura 53** - Evolução da deformação plástica e configuração deformada no colapso das colunas com  $L=100$  mm,  $L=2350$  mm e  $L=4200$  mm.



(a)



(b)



(c)

**Figura 54** - Pontos da Figura 53: (a) ponto I, (b) ponto II e (c) ponto III.

## **Capítulo 5 – Análise numérica de ensaio**

---

### **5.1 Introdução**

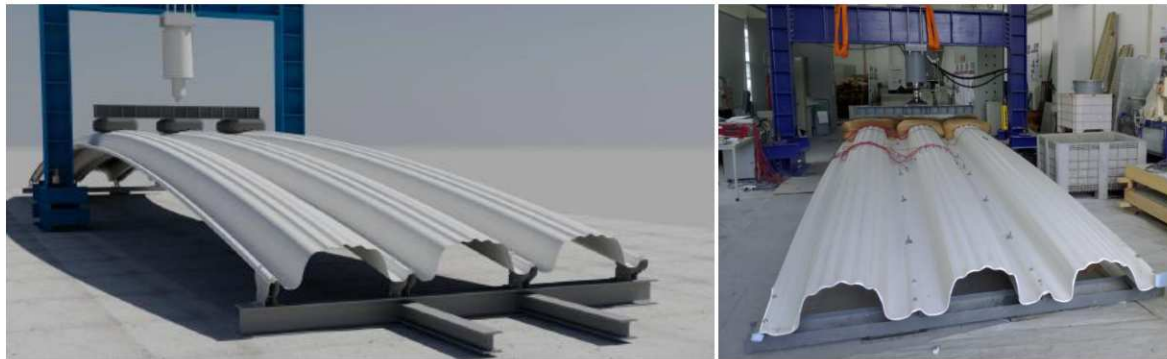
Neste capítulo, faz-se a simulação numérica por meio do programa de cálculo automático ABAQUS, de um modelo de telha de aço autoportante fabricado pela empresa BLOCOTELHA e ensaiado experimentalmente por Baptista [46] no Laboratório de Estruturas e Betão Armado da Escola Superior de Tecnologia e Gestão do Instituto Politécnico de Leiria.

O objetivo é mostrar os resultados de análises lineares e não lineares (física e geometricamente), comparando-os com os resultados experimentais. Para cumprir este objetivo descreve-se sucintamente o ensaio realizado por Baptista [46], explicam-se os passos seguidos na modelação numérica e apresentam-se os resultados encontrados.

Durante o ensaio de Baptista [46] houve uma interação com o andamento desta dissertação, quer no planeamento da escolha dos parâmetros experimentais, quer na aferição dos resultados encontrados.

### **5.2 Descrição geral do modelo do ensaio**

O modelo de estudo considerado, tem como objetivo simular um modelo de ensaio de telhas de aço autoportantes realizado por Baptista [46] às telhas de aço autoportante comercializadas pela empresa BLOCOTELHA [48]. Os ensaios realizados pelo autor supracitado, consistiram em analisar o comportamento do conjunto de três telhas de aço autoportantes justapostas, com 12 m de vão submetidas a uma força aplicada a 1/2 vão, distribuída numa faixa de 1,00 m como ilustram as imagens da Figura 54, com a secção BC900 com 1,25 mm de espessura.



(a)

(b)

**Figura 55** - Ensaio: (a) esquema de ensaio [46] e (b) estrutura para ensaio.

As telhas de aço autoportante utilizadas no estudo, foram fixas diretamente nos aparelhos de apoio pelas abas, como se observa na Figura 55 (a). Ao longo do comprimento das telhas, as abas são sobrepostas com as das telhas contíguas e fixas com parafusos afastados de aproximadamente um metro, conferindo uma costura entre os elementos (Figura 55 (b)).



(a)

(b)

**Figura 56** - Condições de apoio das telhas de aço autoportantes: (a) aparelhos de apoio e (b) Costura longitudinal entre telhas [46].

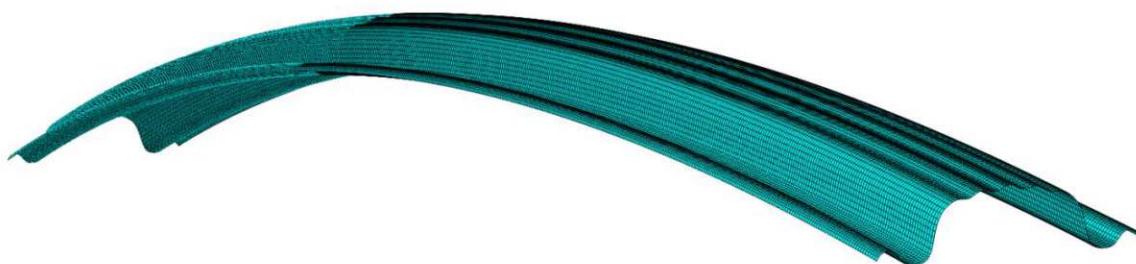
A carga concentrada foi aplicada a meio vão sobre um perfil metálico colocado transversalmente ao longo de toda a largura do conjunto de três telhas justapostas, que se apoiava em sacos de areia usados para distribuir o carregamento sobre as partes curvas da secção.

O conjunto foi instrumentado com a colocação de extensómetros a  $1/2$  e  $1/4$  do vão, onde também foram medidos os deslocamentos por meio de deflectómetros. Os medidores foram conectados a um *Data Logger* que registou e processou os sinais eléctricos dos instrumentos.

Toda a descrição do ensaio pode ser consultada na dissertação de Baptista [46].

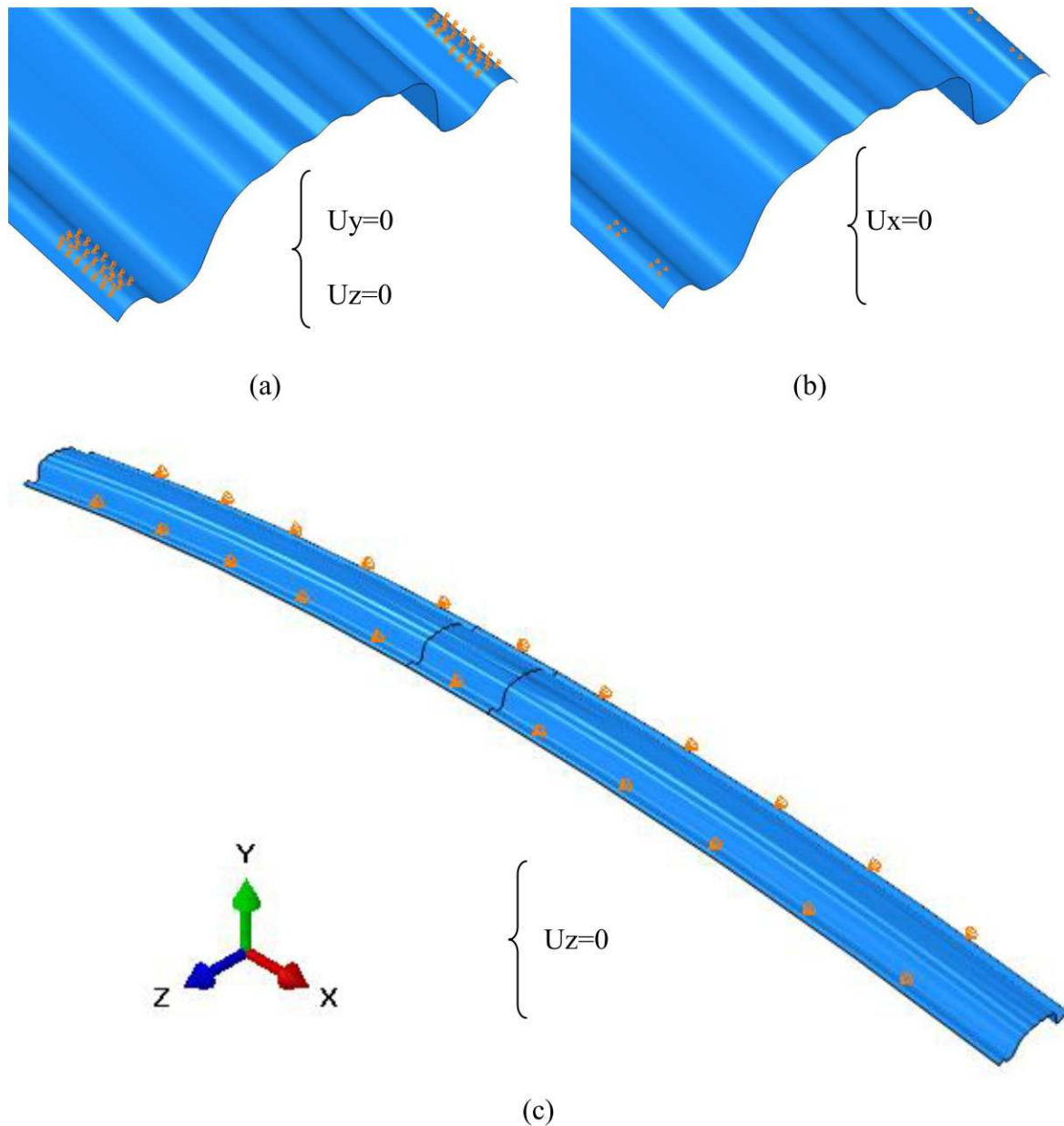
### 5.3 Modelação por elementos finitos

A análise de elementos finitos realizada na modelação do ensaio, foi efetuada com recurso ao Software ABAQUS. De forma a evitar problemas de contactos entre elementos, foi modelada uma telha única e impostas condições de fronteira. A telha foi modelada através do modelo tridimensional de elementos finitos, discretizado com elementos de casca S4 isoparamétricos de 4 nós. A Figura 56 retirada do programa ABAQUS mostra o modelo tridimensional discretizado. De acordo com o fabricante o aço utilizado é o S250GD+Z, sendo admitidos para o módulo de elasticidade o valor de  $E = 210$  GPa e para o coeficiente de Poisson  $\nu = 0,30$ . Para a caracterização das propriedades mecânicas do aço no ABAQUS, admitiu-se o material como homogéneo e isotrópico, com os valores de  $E$ ,  $\nu$  e  $f_Y$  assim definidos para aplicar-se o modelo de comportamento elásto-plástico.



**Figura 57** - Discretização com elementos finitos.

Foram seleccionados um conjunto de nós da malha, previamente identificados e referenciados, com o objetivo de simular as condições de apoio, atribuindo-se restrições aos deslocamentos. Os apoios dividem-se em 3 grupos: (i) aparelho de apoio da telha mostrado na Figura 57, (ii) parafusos de fixação da telha aos aparelhos de apoio e (iii) costura lateral das telhas. No caso dos aparelhos de apoio, foram impostas restrições aos deslocamentos verticais e deslocamentos perpendiculares ao plano longitudinal do perfil, como se nota na Figura 57 (a). As restrições atribuídas aos parafusos de fixação da telha aos aparelhos de apoio, foram simuladas impedindo os deslocamentos no plano longitudinal, da forma como mostra a Figura 57 (b). A costura entre telhas foi simulada, introduzindo restrições com afastamento de 1,00 m, aos deslocamentos perpendiculares ao eixo longitudinal da telha, como está esquematizado na Figura 57 (c).



**Figura 58** - Condições de apoio: (a) aparelhos de apoio, (b) parafusos de fixação aos aparelhos de apoio e (c) costura entre telhas.

O carregamento, mostrado na Figura 58, foi introduzido no modelo numa faixa de 1,00 m de largura longitudinal a meio vão, utilizado o método *Riks* disponível no ABAQUS. Este método determina a resistência última, podendo-se obter trajetórias de equilíbrio não lineares de força/deslocamento à medida que a solução evolui. Para a análise deste tipo de problemas, o método utiliza equações de equilíbrio não lineares, recorrendo à utilização de procedimentos incrementais iterativos de *Newton-Raphson* e a técnica do controle de comprimento de arco.

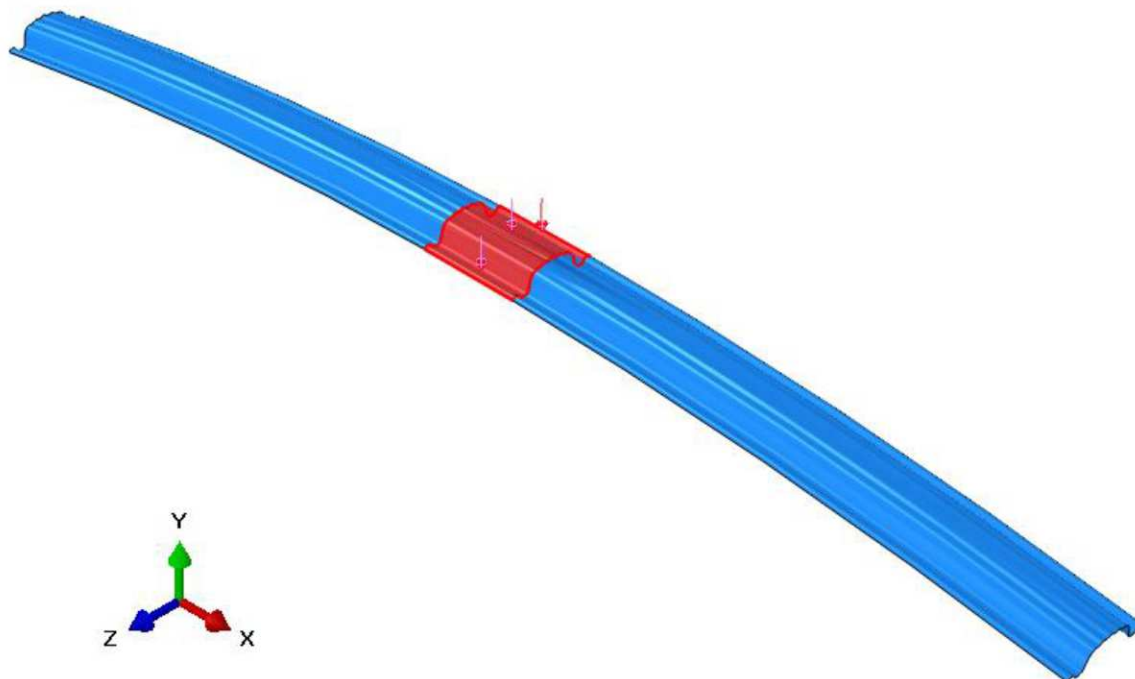


Figura 59 - Carregamento aplicado na modelação do ensaio.

## 5.4 Resultados da análise numérica

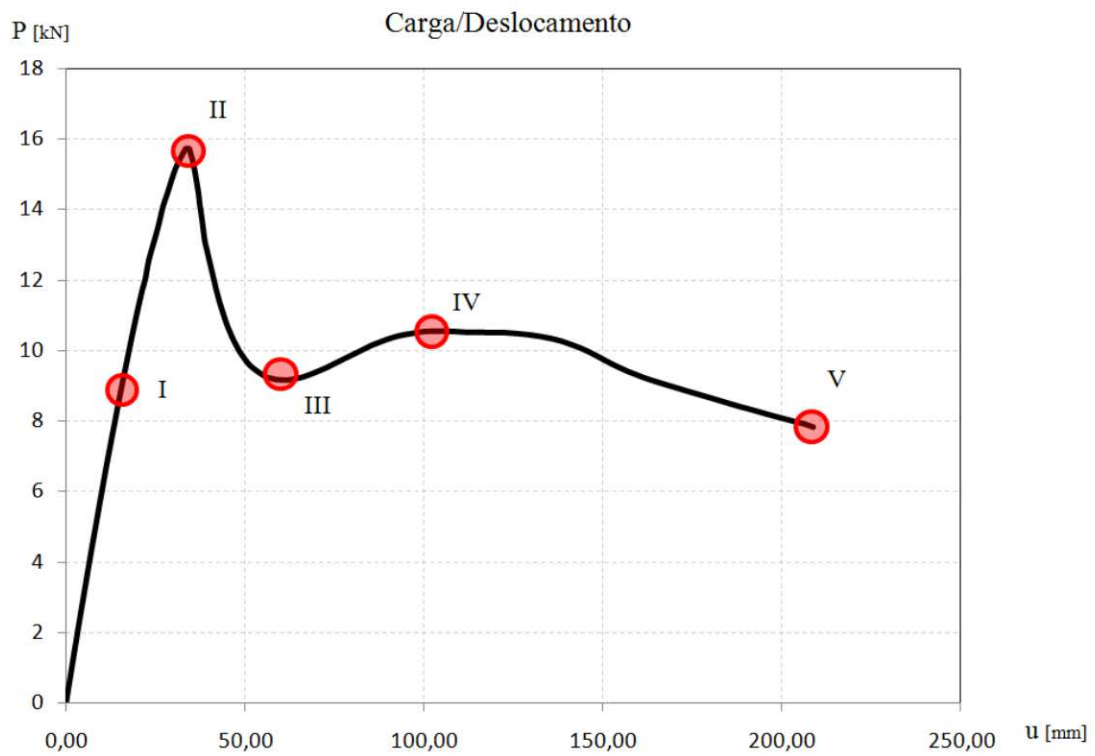
São apresentados três tipos de resultados:

- (i) curvas de equilíbrio carga/deslocamento considerando um comportamento elasto-plástico do material na secção a meio vão da telha;
- (ii) variação das tensões longitudinais ao longo da largura em uma secção a meio vão da telha;
- (iii) identificação dos modos de deformação relevantes na telha.

Nos três casos são feitas comparações dos resultados das simulações numéricas efetuadas com os testes experimentais de Baptista [32].

Na Figura 59 está representada a curva carga/deslocamento do ponto central a meio vão de uma telha isolada. Neste caso os bordos laterais da telha foram impedidos de se deslocarem lateralmente nos nós superiores da aba com afastamento de aproximadamente 1,00 m, simulando a continuidade da costura entre telhas, que acontece em situação de uso. O ponto I assinalado na curva, e mostrado em pormenor na Figura 60 (a), refere-se ao início da plastificação, onde a tensão atinge aproximadamente o valor da tensão de cedência do material ( $f_y = 250$  MPa). Num estágio mais avançado da curva atinge-se a resistência última, com  $P_u = 15,72$  kN marcada pelo ponto II (Figura 60 (b)). Os pontos III

e IV mostrados nas Figuras 60 (c) e (d)) são inflexões da curva quando começa a aumentar a resistência (ponto III) e diminuí-la (ponto IV) em regime plástico. O ponto V (Figura 60 (e)) marca o final (arbitrário) da análise no programa de cálculo automático.



**Figura 60** - Gráfico carga/deslocamento no ponto central a 1/2 vão.

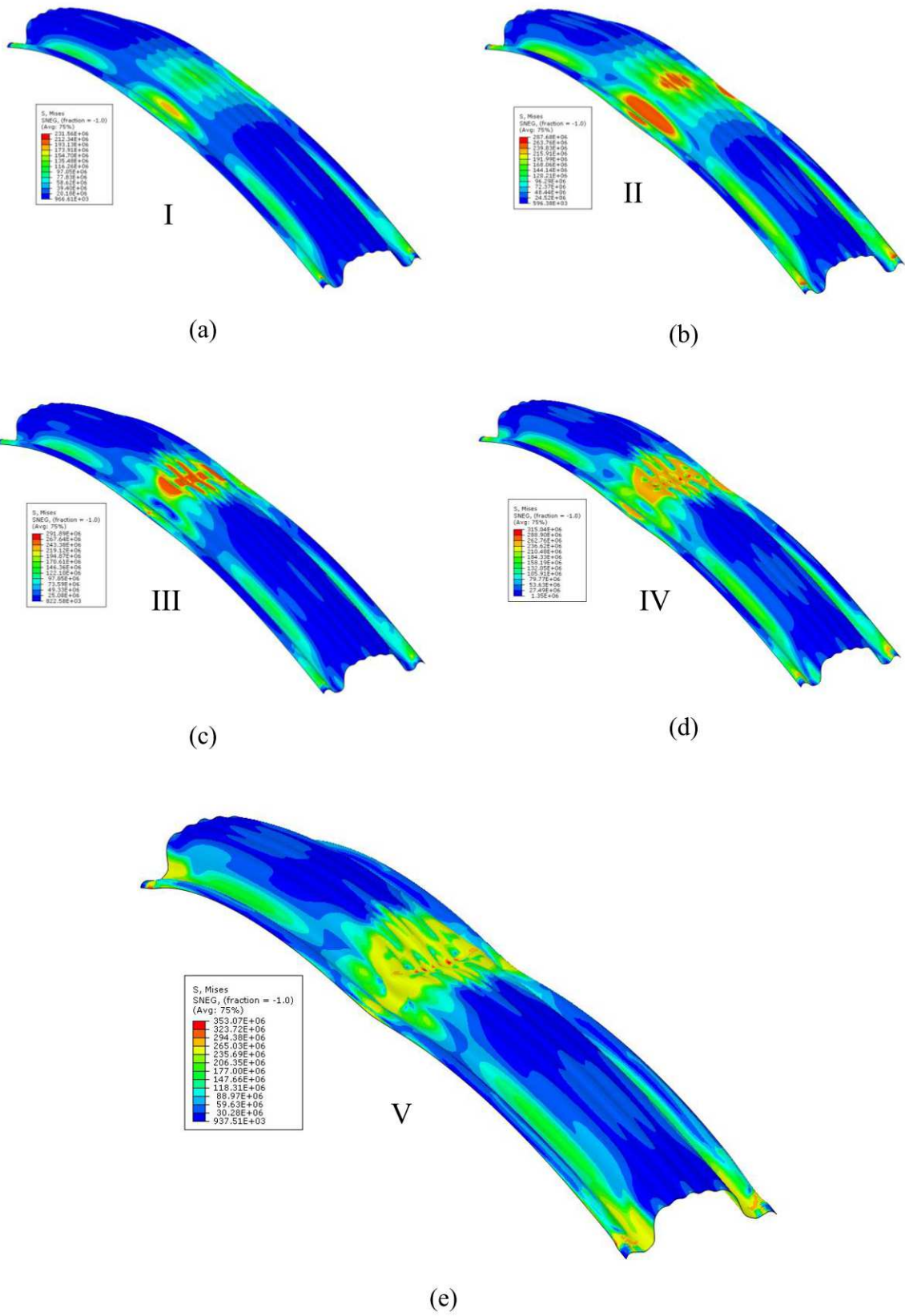
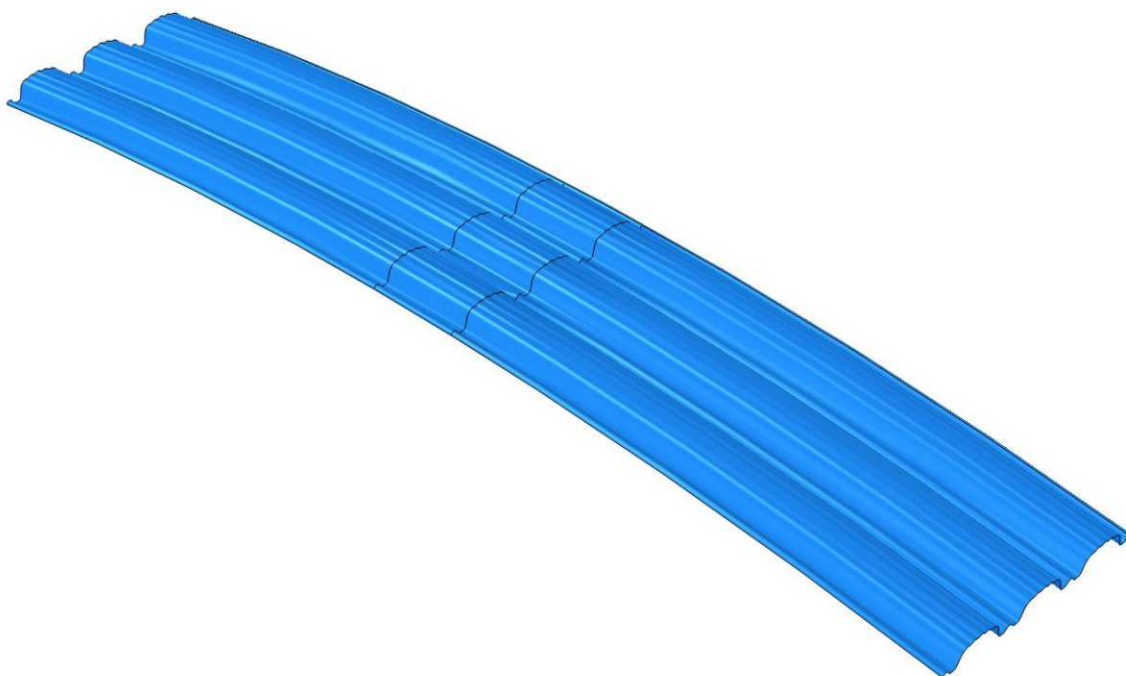


Figura 61 - Gráfico Carga/Deslocamento a meio vão.

O mesmo estudo foi elaborado para um conjunto de três telhas unidas umas às outras de forma contínua, como ilustra a Figura 61.



**Figura 62** - Conjunto de três telhas.



**Figura 63** - Discretização do conjunto de três telhas, com elementos finitos.

Os resultados desta simulação numérica, juntamente com a curva apresentada para uma telha, são comparados nas figuras seguintes com os ensaios de Batista [46].

Na Figura 63 a curva a preto refere-se ao conjunto de três telhas solidamente unidas e a curva a azul é a mesma da Figura 59. As curvas representadas pelas cores vermelho e verde são os resultados dos dois testes experimentais de Batista [46]. A aplicação dos incrementos de carga nos testes experimentais tiveram início após o conjunto de três telhas unidas por parafusos afastados por um metro (costura) ao longo dos seus bordos longitudinais, submetidas a uma carga dos sacos de areia utilizados nos ensaios para distribuir a carga transversalmente por toda a superfície numa largura de 1 m. Ou seja, a aplicação de carga pelo atuador iniciou-se em um estágio onde as cargas dos sacos de areia já tinham atuado, com deformação considerável. Este fato, está na origem da diferença das curvas obtidas numericamente que se referem aos ensaios experimentais, dado que as curvas experimentais tiveram em conta o peso dos sacos de areia. Observa-se que os resultados experimentais apresentam diferenças na deformação inicial (curvas vermelha e verde) , causada pelo peso da areia.

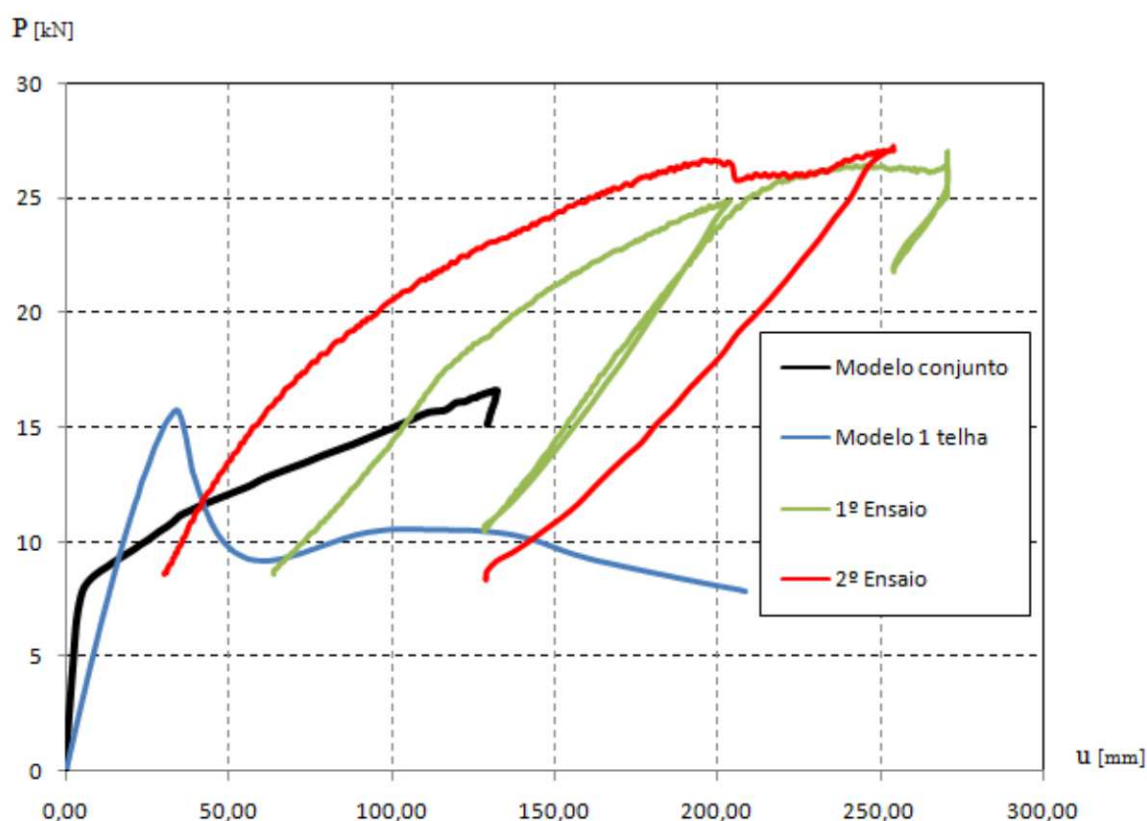
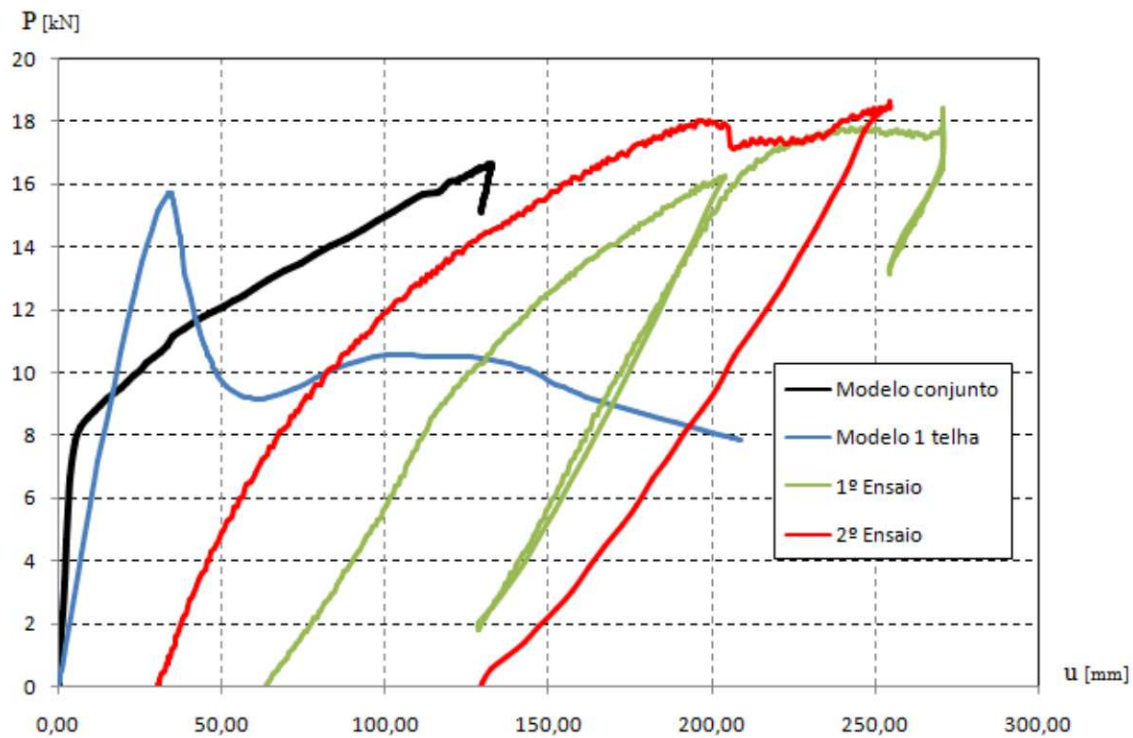


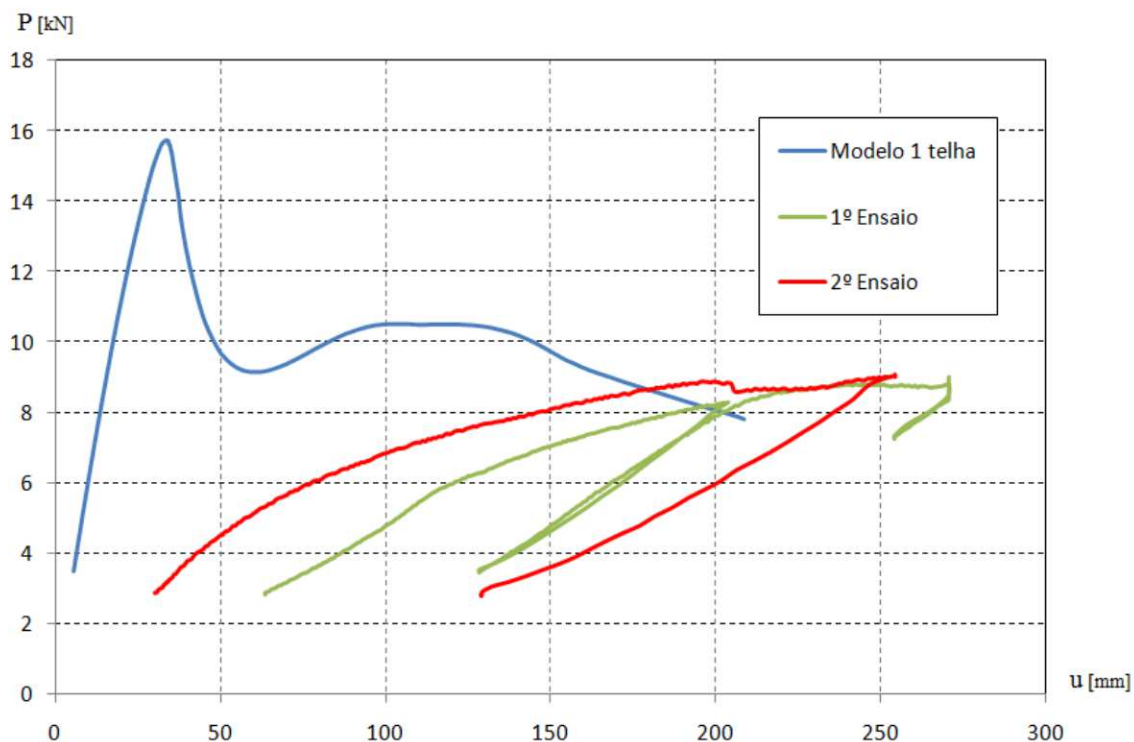
Figura 64 - Gráfico carga/deslocamento com peso da areia.

A Figura 64 apresenta os mesmos gráficos da Figura 63 onde o peso dos sacos de areia é descontado no valor da carga. Assim, calculadas as curvas das simulações numéricas (em particular do conjunto de três telhas – cor preta) apresentam uma melhor correlação com os resultados experimentais, à exceção da deformação inicial causada pelo peso da areia.



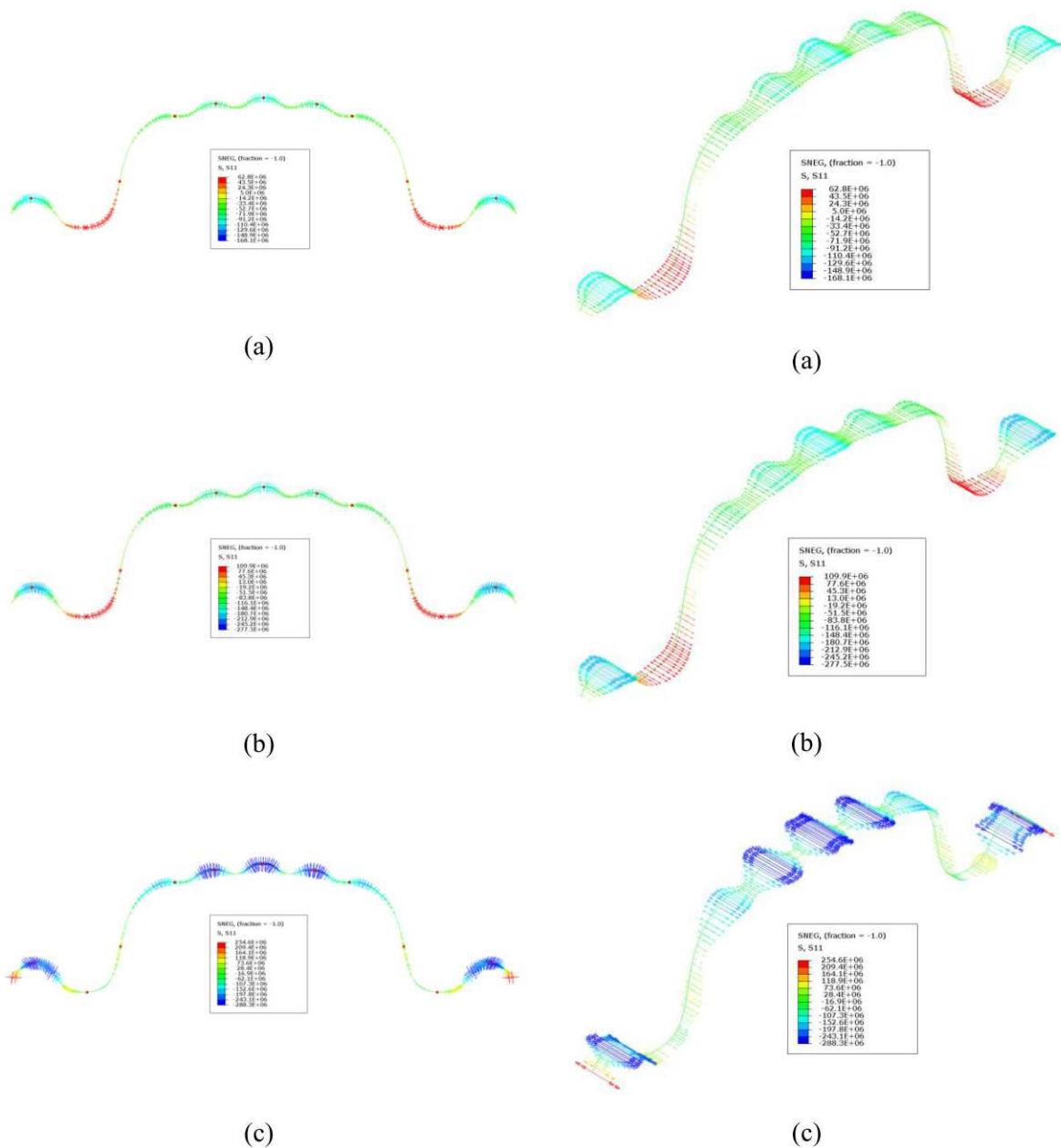
**Figura 65** - Gráfico Carga/deslocamento sem o peso da areia.

A Figura 65 apresenta o comportamento de carga/deslocamento para uma telha isolada, com as condições já referidas, variando unicamente o valor da carga inicial da simulação numérica, com  $P_i = 3$  kN. O valor da carga medida nos ensaios de Baptista [46] foi dividida por três, admitindo que a carga do atuador se distribuiu uniformemente pelas 3 telhas.



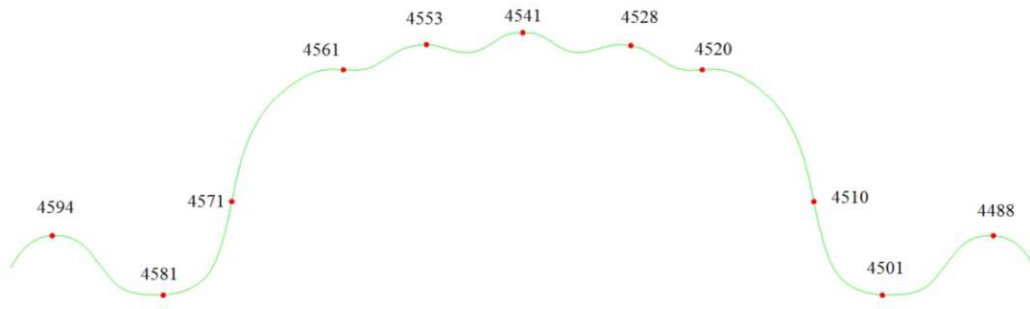
**Figura 66** - Modelação numérica com  $P_i = 3$  kN e valores de carga dos ensaios divididos por três.

Os resultados numéricos da variação das tensões longitudinais ao longo da largura da telha isolada na secção de meio vão estão apresentadas na Figura 66 para três níveis de carregamento: (i)  $P = 4,21$  kN (Figura 66 (a)), (ii)  $P = 9,45$  kN (figura 66 (b)) e (iii)  $P = 15,72$  kN (figura 66 (c)). Observa-se que se desenvolvem tensões baixas de tração (a vermelho) no banzo inferior. As tensões de compressão são maiores na região central do banzo superior da secção (por causa da carga concentrada) e nos bordos da telha (por fenómenos de instabilidade distorcional). Estas tensões de compressão aumentam progressivamente com o aumento da carga aplicada, enquanto a zona tracionada vai ficando cada vez menos solicitada. Nas demais partes da secção, muito por causa da rigidez fornecida pelas suas dobras, não se instalam tensões de magnitude significativa.

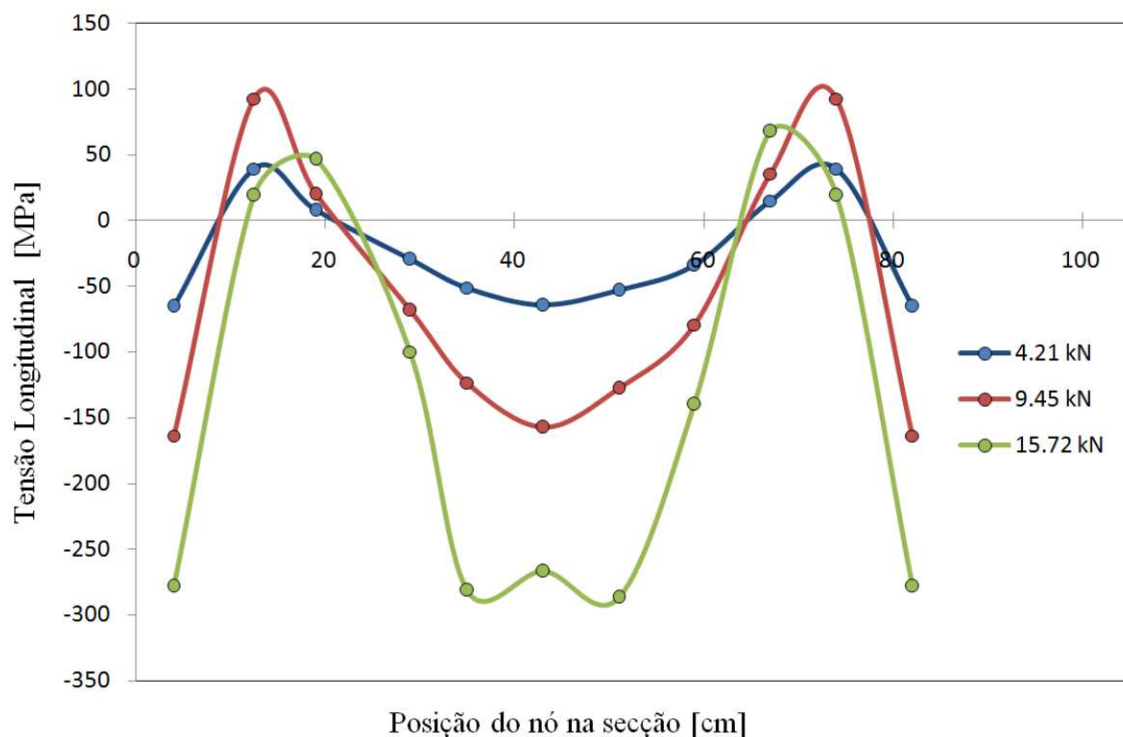


**Figura 67** - Variação das tensões longitudinais a meio vão: (a)  $P= 4,21$  kN, (b)  $P= 9,45$  kN e (c)  $P= 15,72$  kN.

Estas mesmas variações de tensões são representadas na Figura 68, mas agora demonstradas para a secção retificada, para os pontos discretos mostrados na Figura 67, com objetivo de mostrar a evolução das tensões com os aumentos da carga em um mesmo gráfico.



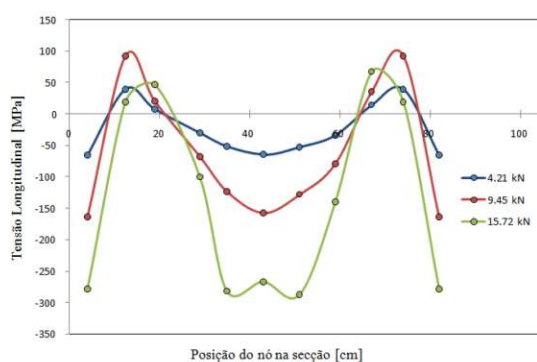
**Figura 68** - Pontos discretos da secção a 1/2 vão.



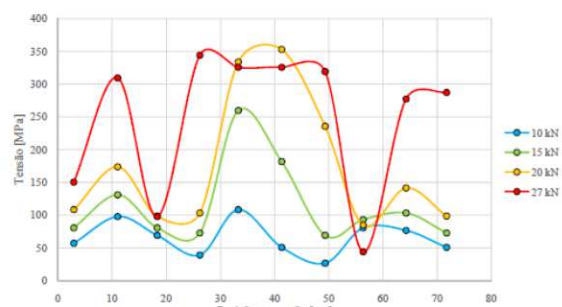
**Figura 69** - Variação de tensões da secção retificada a 1/2 vão.

A Figura 69 compara o gráfico já apresentado da modelação numérica (Figura 68) com os resultados experimentais de Baptista [46]. Não foi possível estabelecer comparações para valores exatamente iguais das cargas em virtude de, incrementos no procedimento numérico serem um pouco diferentes do experimental. Refira-se que o controle foi de cargas na simulação numérica e de deslocamentos nos ensaios experimentais. Devidos às imperfeições assim presentes nos testes experimentais, não consideradas na modelação numérica, a distribuição das tensões apresentam algumas assimetrias nos resultados dos ensaios experimentais. No entanto, os andamentos das

curvas numéricas e experimentais são semelhantes com valores com boa correlação (são apresentados nos gráficos os módulos dos valores das tensões obtidas experimentalmente por Baptista [46], não se diferenciando a tração da compressão) . Há uma diferença nas tensões das bordas da telha que é causada pelas diferentes condições de fronteira aplicadas nos testes e na modelação. Pois as telhas foram aparafusadas na zona de sobreposição de metro a metro, enquanto na modelação foi imposto a restrição ao deslocamento lateral nestes pontos. Na modelação numérica não foi considerada a sobreposição das telhas nos bordos, o que justifica um maior valor das tensões que os encontrados nos testes experimentais.



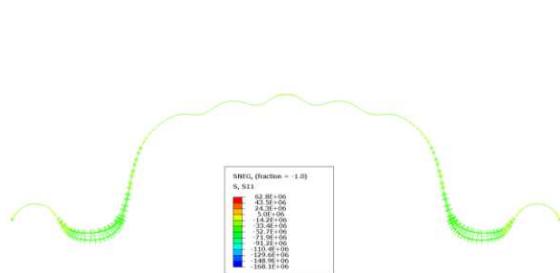
(a)



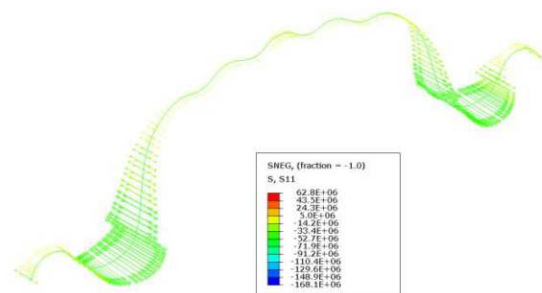
(b)

**Figura 70** - Variação de tensões da secção retificada a 1/2 vão: (a) modelação numérica, (b) 2º ensaio experimental de Baptista [46].

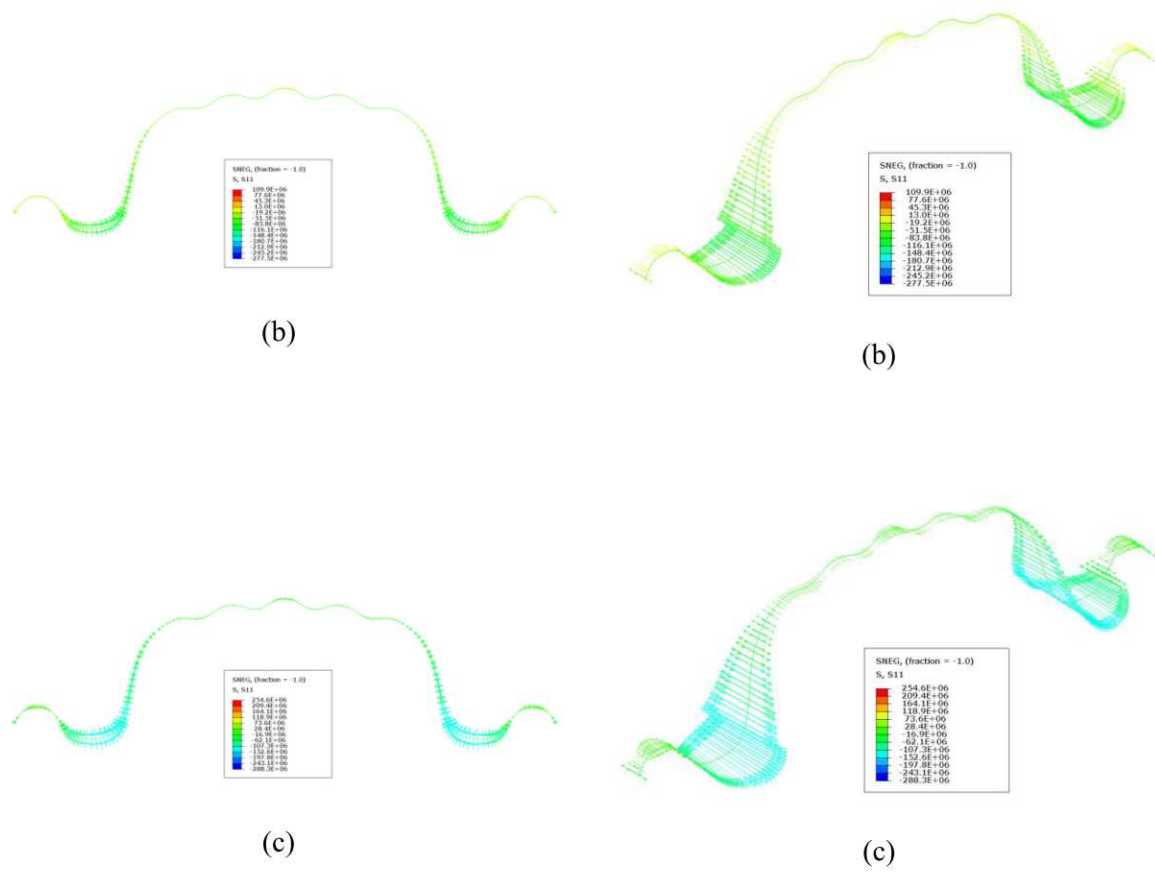
Para uma secção localizada a um quarto do vão, as três Figuras seguintes (Figura 70,71 e 72), mostram o mesmo tipo de resultados numéricos apresentados para a secção do meio vão. É de se observar que as tensões maiores de compressão instalam-se nas proximidades do banzo inferior, causadas pelo fenómeno de instabilidade distorcional, enquanto que no banzo superior, na região central da secção, desenvolvem-se tensões muito baixas, dado que não há carga concentrada aplicada nesta parte da telha.



(a)



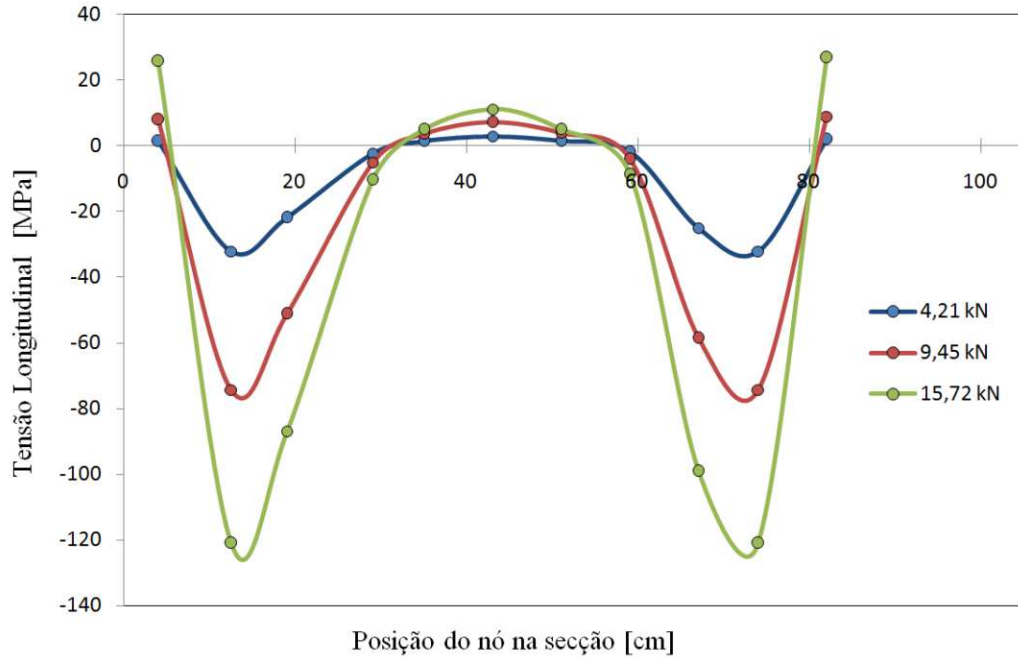
(a)



**Figura 71** - Variação das tensões longitudinais a um quarto do vão: (a)  $P= 4,21$  kN, (b)  $P= 9,45$  kN e (c)  $P= 15,72$  kN.

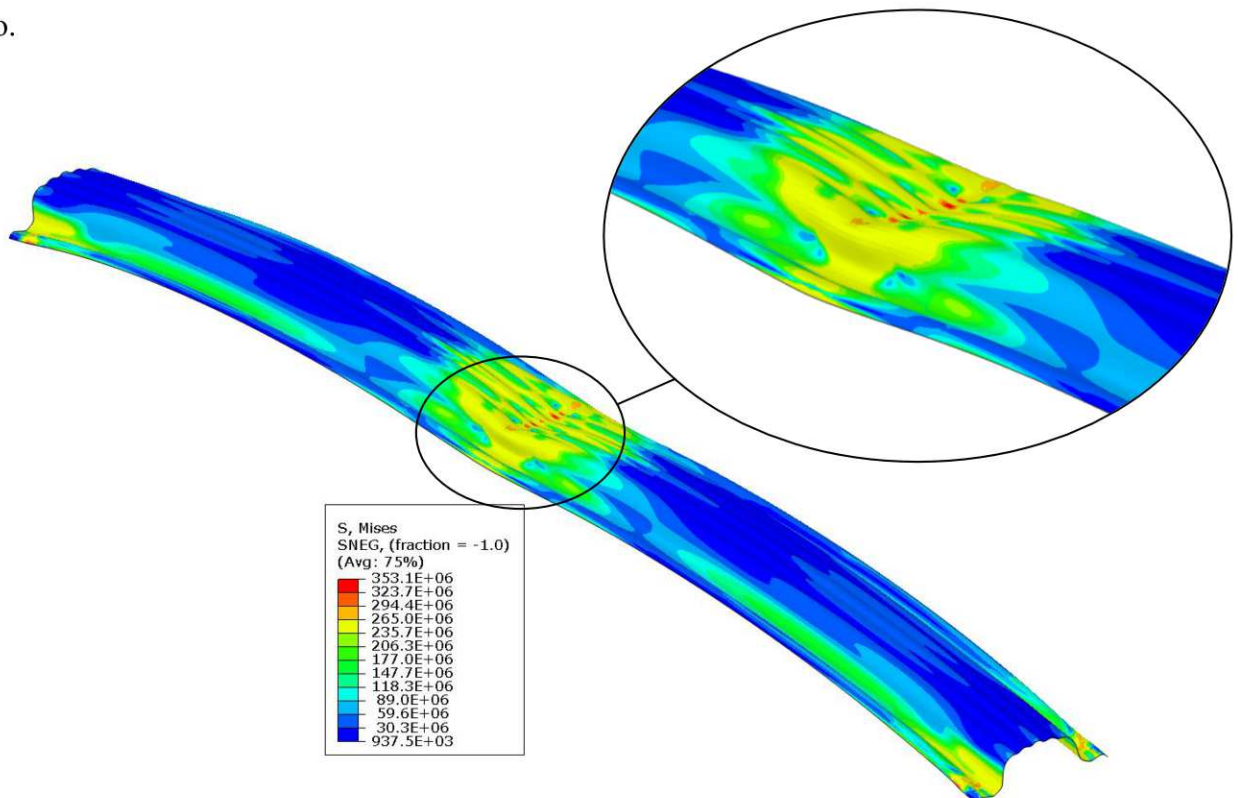


**Figura 72** - Pontos discretos da secção a 1/4 vão.



**Figura 73** - de tensões da secção retificada a 1/4 vão.

Por fim apresenta-se a comparação das configurações deformadas obtidas na simulação numérica com as deformações obtidas nos ensaios experimentais de Batista [46]. Na figura 73 e 74 é demonstrado o mecanismo de rotura para os dois tipos de abordagem, onde a rotura ocorre por plastificação na zona de aplicação da carga a meio vão.



**Figura 74** - Mecanismo de rotura na modelação numérica.

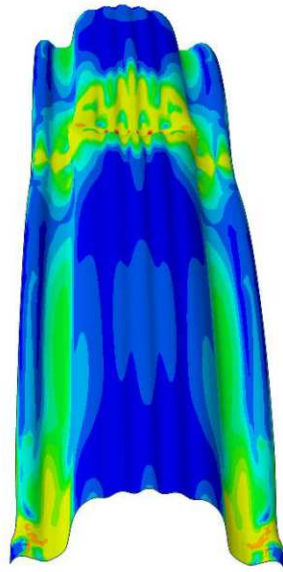


**Figura 75** - Mecanismo de rotura nos ensaios experimentais [46].

Das deformações observadas nos ensaios experimentais e na modelação numérica, conforme demonstrado nas Figuras 75 e 76, os bordos laterais sofrem deformações provocados pela instabilidade distorcional da secção da telha.



**Figura 76** - Ensaios experimentais: Deformação dos bordos [46].



**Figura 77** - Modelação numérica: Deformação dos bordos.

## **Capítulo 6 – Conclusões**

---

### **6.1 Conclusões**

A presente dissertação foi motivada pelo fato das telhas de aço autoportantes curvas terem vasta utilização no mercado da construção civil, e de existir uma pequena quantidade de trabalhos técnicos e científicos sobre o seu comportamento estrutural. Da regulamentação existente para o dimensionamento de estruturas, não existem prescrições que se apliquem com rigor ao comportamento estrutural destes elementos, devido à complexidade da geometria e caracterização dos fenómenos de instabilidade característicos dos aços enformados a frio.

Esta dissertação fez parte de um programa de colaboração com a empresa BLOCOTELHA, em conjunto com a dissertação de Baptista [46], ambas desenvolvidas na Escola Superior de Tecnologia e Gestão do Instituto Politécnico de Leiria. Tendo em consideração os complexos fenómenos de instabilidade local e as condições reais de uso da telha, e optou-se por desenvolver dois estudos:

(i) Perfis retos: foram analisados numericamente troços retos, para identificar a susceptibilidade da secção a fenómenos de instabilidade locais. A forma mais simples e adequada de obtenção destes fenómenos é a de submissão de perfis de eixo reto a compressão uniforme. Nas modelações numéricas e experimentais, observam-se claramente a existência destes fenómenos localizados;

(ii) Telha curva com 12 m de comprimento: o modelo numérico teve como objetivo simular as condições de laboratório dos ensaios experimentais de Baptista [46]. As propriedades materiais e geométricas foram modeladas de acordo com as prescrições do fabricante, BLOCOTELHA. A aplicação da carga de ensaio foi a meio vão, distribuída numa faixa de 1,00 m. Procuraram-se aproximar as condições de apoio e costura dos elementos justapostos, introduzindo-se restrições nodais no modelo numérico.

Nos resultados obtidos na modelação numérica dos troços retos, apresentou-se o gráfico que traduz a curva de comportamento da secção e identificaram-se os modos locais. Para os modos identificados, verificou-se a configuração deformada que é precipitada pela

alma para o MLP, enquanto que para o MD, a configuração deformada é precipitada pelos bordos laterais da secção. As configurações dos modos que foram escaladas à dimensão de uma percentagem da espessura, foram utilizadas na análise de pós-encurvadura como forma de imperfeição geométrica inicial.

Foi efetuada uma análise de sensibilidade às imperfeições geométricas iniciais dos troços retos, para várias magnitudes da deformação inicial. Verifica-se que para maiores magnitudes das imperfeições, a configuração deformada de pós-encurvadura é condicionada pelo sentido da imperfeição geométrica inicial, como era esperado.

Na análise de pós-encurvadura em regime elasto-plástico dos troços retos, para diferentes tipos de classe de resistência do aço, verificou-se que:

(i) para o MLP, as trajetórias de pós-encurvadura para diferentes classes de aço, evoluem de forma semelhante às curvas relativas ao comportamento elástico, com a separação entre elas a dar-se de uma forma divergente rápida. Verificou-se que, como se esperava, que o aumento da classe de resistência do aço, aumenta o valor da resistência última das colunas;

(ii) para o MD e MGFT, entretanto, verificou-se que o aumento da tensão de cedência do aço, não aumentou a resistência última das colunas, revelando que a resistência é condicionada pelo comportamento elástico. As trajetórias de pós-encurvadura não são influenciadas pela tensão de cedência do aço, distinguindo-se a separação de algumas trajetórias elasto-plásticas em estados avançados de deformação;

As simulações numéricas realizadas para as telhas autoportantes curvas foram comparadas com os resultados experimentais, permitindo observar o seguinte:

(i) as análises numéricas realizadas, quando comparadas com os resultados experimentais, admitindo que a força medida experimentalmente se divide pelas três telhas uniformemente, o andamento da curva carga/deslocamento, atingem valores próximos de carga no colapso;

(ii) na distribuição de tensões analisadas numericamente para meio vão, verifica-se as maiores tensões de compressão na região central do banzo superior e nos bordos, enquanto que as tensões de tração desenvolvem-se no banzo inferior. À medida que o carregamento aumenta, as tensões de compressão aumentam progressivamente e as tensões

de tracção vão diminuindo. Devido à rigidez da secção não se instalam em outras zonas tensões significativas. Os resultados experimentais quando comparados com os resultados numéricos graficamente, apresentam assimetrias, muito por causa das imperfeições geométricas, não consideradas na modelação numérica. As tensões verificadas nos bordos da telha apresentam diferenças, muito por força da modelação das condições de fronteira, impondo restrições ao deslocamento lateral e não contabilizando a sobreposição dos bordos das telhas justapostas nos ensaios experimentais, o que justifica um maior valor das tensões encontradas no modelo numérico. A correlação do andamento das curvas são semelhantes, com boa correlação, no entanto não é possível comparar os mesmos valores de forma exata entre ambos, pelo fato de a modelação numérica ser feita em controlo de força e o ensaio experimental em controlo de deslocamento;

(iii) as configurações deformadas do modelo numérico e experimental apresentam muito boa correlação, com o mecanismo de rotura para os dois tipos de abordagem a ocorrer por plastificação da zona de aplicação da carga e ocorrência de distorção dos bordos do perfil.

## **6.2 Desenvolvimentos futuros**

Sendo este o primeiro estudo numérico sobre comportamento estrutural de telhas de aço autoportantes, com a secção BC900 da BLOCOTELHA muitos trabalhos podem ser desenvolvidos a partir daqui.

Após desenvolver a sensibilidade sobre o comportamento das telhas autoportante curvas aquando da realização desta dissertação, sugere-se para estudos futuros, um estudo pormenorizado das condições de apoio, tentando aproximar os resultados numéricos da realidade de utilização. Estudar o comportamento das telhas a outros tipos de carregamento, como por exemplo a sucção provocada pelo vento. Também analisar exaustivamente a influência das imperfeições geométricas e a sua influência no comportamento estrutural das telhas curvas, assim como a utilização de outros tipos de elementos finitos disponíveis da biblioteca do ABAQUS.

Estas coberturas são produzidas para vãos até 30 m, o que seria interessante efetuar simulações e testes para vãos superiores, analisando o seu comportamento e exequibilidade.

A geometria da secção transversal é complexa e bastante rígida, pelo que se poderia desenvolver estudos de otimização e de viabilidade.

Por fim, desenvolver métodos simplificados para o adequado dimensionamento deste tipo de secções, dado que as especificações relevantes sobre estruturas de aço leve não contemplam especificações sobre sua verificação de segurança nem de dimensionamento.

## **Bibliografia**

---

- [1] Yu, W.-W., "*Cold-Formed Steel Design*" (3rd Edition). John Wiley & Sons, New York, 2000.
- [2] Prola, L.C., "*Estabilidade Local e Global de elementos estruturais de aço enformado a frio*". Tese de Doutoramento, Universidade Técnica de Lisboa, Portugal, 2001.
- [3] American Iron and Steel Institute, "*Specification for the Design of Light Gage Steel Structural Members*". New York, 1946.
- [4] Peköz, T., "*Possible Future Developments in the Design and Application of Cold-Formed Steel*". Artigo apresentado na 4<sup>th</sup> International conference Light-weight steel and aluminium structures (ICSAS'99), Espoo, Finland, 1999.
- [5] Hancock, G.J., "*Design of Cold-Formed Steel Structures*" 4<sup>th</sup> edition. Australian Institute of Steel Construction, Sydney, 2007.
- [6] CEN, "*Eurocode 3 - Design of Steel Structures, Part 1.3: General Rules – Supplementary Rules for Cold Formed Members and Sheeting*". ENV 1993-1-3, Brussels, 2004.
- [7] *AISI S100-12, "North American Specification for the Design of Cold-Formed Steel Structural Members"*.
- [8] Standards Association Australia, "*The Australian/New Zealand Cold-Formed Steel Structures Standard*". AS/NZS 4600, 1996.
- [9] SCHAFER, B., "*Cold-formed steel design by the direct strength method: bye-bye effective width*". Proceedings of SSRC Annual Technical Session & Meeting, Baltimore, 2–5/4, 2003.
- [10] SCHAFER, B., "*Direct Strength Method (DSM) Design Guide*". American Iron and Steel Institute (AISI) – Design Guide CF06–1, Washington DC, 2006.

- [11] Kwon, Y.B. and G.J. Hancock, "*Post-buckling analysis of thin-walled channel sections undergoing local and distortional buckling*". Computers & Structures, 1993. 49(3): p. 507-516.
- [12] Hancock, G.J., Y.B. Kwon, and E. Stefan Bernard, "*Strength design curves for thin-walled sections undergoing distortional buckling*". Journal of Constructional Steel Research, 1994. 31(2–3): p. 169-186.
- [13] Ungureanu, V. and D. Dubina, "*Recent research advances on ECBL approach.: Part I: Plastic–elastic interactive buckling of cold-formed steel sections*". Thin-Walled Structures, 2004. 42(2): p. 177-194.
- [14] Borges Dinis, P., D. Camotim, and N. Silvestre, "*FEM-based analysis of the local-plate/distortional mode interaction in cold-formed steel lipped channel columns*". Computers & Structures, 2007. 85(19–20): p. 1461-1474.
- [15] Dinis, P.B. and D. Camotim, "*Cold-formed steel columns undergoing local–distortional coupling: Behaviour and direct strength prediction against interactive failure*". Computers & Structures, 2015. 147(0): p. 181-208.
- [16] Becque, J. and K.J.R. Rasmussen, "*A numerical investigation of local–overall interaction buckling of stainless steel lipped channel columns*". Journal of Constructional Steel Research, 2009. 65(8–9): p. 1685-1693.
- [17] Silvestre, N., D. Camotim, and P.B. Dinis, "*Post-buckling behaviour and direct strength design of lipped channel columns experiencing local/distortional interaction*". Journal of Constructional Steel Research, 2012. 73(0): p. 12-30.
- [18] Dinis, P.B., B. Young, and D. Camotim, "*Local–distortional interaction in cold-formed steel rack-section columns*". Thin-Walled Structures, 2014. 81(0): p. 185-194.
- [19] Borges Dinis, P. and D. Camotim, "*Local/distortional mode interaction in cold-formed steel lipped channel beams*". Thin-Walled Structures, 2010. 48(10–11): p. 771-785.
- [20] Haidarali, M.R. and D.A. Nethercot, "*Local and distortional buckling of cold-formed steel beams with edge-stiffened flanges*". Journal of Constructional Steel Research, 2012. 73(0): p. 31-42.
- [21] Camotim, D. and P.B. Dinis, "*Coupled instabilities with distortional buckling in cold-formed steel lipped channel columns*". Thin-Walled Structures, 2011. 49(5): p. 562-575.

- [22] dos Santos, E.S., E.M. Batista, and D. Camotim, "*Experimental investigation concerning lipped channel columns undergoing local–distortional–global buckling mode interaction*". *Thin-Walled Structures*, 2012. 54(0): p. 19-34.
- [23] Dinis, P.B., et al., "*Local–distortional–global interaction in lipped channel columns: Experimental results, numerical simulations and design considerations*". *Thin-Walled Structures*, 2012. 61(0): p. 2-13.
- [24] Niu, S., K.J.R. Rasmussen, and F. Fan, "*Distortional–global interaction buckling of stainless steel C-beams: Part I — Experimental investigation*". *Journal of Constructional Steel Research*, 2014. 96(0): p. 127-139.
- [25] Niu, S., K.J.R. Rasmussen, and F. Fan, "*Distortional–global interaction buckling of stainless steel C-beams: Part II — Numerical study and design*". *Journal of Constructional Steel Research*, 2014. 96(0): p. 40-53.
- [26] Jorgenson, J.L. and C. Chern., "*Bending strength of deep corrugated steel panels*". *Proceedings of the Second Specialty Conference on Cold-Formed Steel Structures*, Missouri, 22/10/1973.
- [27] Bergfelt, A., B. Edlund, and H. Larsson, "*Experiments on trapezoidal steel sheets in bending*", *Proceedings of the Third International Specialty Conference on Cold-Formed Steel Structures*, St. Louis, Missouri, November, 1975.
- [28] Jorgenson, J.L. and A. H. Chowdhury, "*Buckling strength of cold-formed steel curved panels*" 6<sup>th</sup> *International Specialty Conference on Cold-Formed Steel Structures*, Missouri, 16/11/1982.
- [29] Bernard, E.S.B., R.Q. Brudge, and G.J. Hancock, "*Design of Decking Panels with Intermediate Stiffeners*", *Research Report n° 676*, Center for Advanced Structural Engineering, School of Civil and Mining Engineering, University of Sydney, March, 1993.
- [30] Bernard, E.S.B., R.Q. Brudge, and G.J. Hancock, "*Intermediate Stiffeners in Cold-Formed Profiled Steel Decks. Part 1: “V” Shaped Stiffeners*", *Research Report n° 653*, Center for Advanced Structural Engineering, School of Civil and Mining Engineering, University of Sydney, April, 1992.
- [31] Bernard, E.S.B., R.Q. Brudge, and G.J. Hancock, "*Intermediate Stiffeners in Cold-Formed Profiled Steel Decks. Part 2: “Flat Hat” Shaped Stiffeners*". *Research Report n° 658*, Center for Advanced Structural Engineering, School of Civil and Mining Engineering, University of Sydney, August, 1992.

- [32] Wu, S., W.W. Yu, and R.A. LaBoube, "*Strength of flexural members using structural grade 80 of A653 and grade E of A611 steels*", University of Missouri-Rolla, 1995.
- [33] Papazian, R.P., et al. , "*Multiple Stiffened Deck Profiles*". Twelfth International Conference on Cold-Formed Steel Structures, St. Louis ,Missouri, USA, October 18-19, 1994, pp. 217-228. .
- [34] Landolfo, R. and F.M. Mazzolani, "*Ultimate Behaviour of Trapezoidal Steel Sheets in Bending*". *Twelfth International Conference on Cold-Formed Steel Structures, St. Louis , Missouri, USA, October 18-19, 1994, pp. 205-215. .*
- [35] Fonseca, N.D.R., "*Avaliação do comportamento teórico e experimental em espécimes de telhas metálicas autoportantes submetidas à flexão*". Dissertação de Mestrado, UFRGS, Porto Alegre, 2000.
- [36] Mezzomo, G., "*Análise Estrutural de Telhas de Aço Trapezoidais Formadas a Frio*". Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2007.
- [37] Biegus, A. and D. Czepizak, "*Research on the interactive resistance of corrugated sheets under combined bending and contact pressure*". *Thin-Walled Structures*, 2006. 44(8): p. 825-831.
- [38] Biegus, A. and D. Czepizak, "*Experimental investigations on combined resistance of corrugated sheets with strengthened cross-sections under bending and concentrated load*". *Thin-Walled Structures*, 2008. 46(3): p. 303-309.
- [39] Liew, K.M., L.X. Peng, and S. Kitipornchai, "*Nonlinear analysis of corrugated plates using a FSDT and a meshfree method*". *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2007. 196(21–24): p. 2358-2376.
- [40] Peng, L.X., K.M. Liew, and S. Kitipornchai, "*Analysis of stiffened corrugated plates based on the FSDT via the mesh-free method*". *International Journal of Mechanical Sciences*, 2007. 49(3): p. 364-378.
- [41] Caramelli, S., P. Croce, and W. Salvatore, "*Multiple stiffened cold-formed steel profiles for cylindrical vault roofing systems*". *Journal of Constructional Steel Research*, 2001. 57(8): p. 831-854.
- [42] Biegus, A. and A. Kowal, "*Collapse of halls made from cold-formed steel sheets*". *Engineering Failure Analysis*, 2013. 31(0): p. 189-194.

- [43] Mezzomo, G.P., et al., "*Investigation of the mechanical behavior of trapezoidal roofing sheets using genetic algorithms*". Expert Systems with Applications, 2010. 37(2): p. 939-948.
- [44] Mezzomo, G.P., et al., "*Influence of the fixing type in the optimization of trapezoidal roofing sheets*". Journal of Constructional Steel Research, 2014. 96(0): p. 26-39.
- [45] Lu, W. and P. Mäkeläinen, "*Fuzzy optimization of cold-formed steel sheeting using genetic algorithms*". Journal of Constructional Steel Research, 2006. 62(12): p. 1276-1281.
- [46] Baptista, J., "*Análise Experimental de telha de aço autoportante*". Dissertação de Mestrado, IPLeiria, 2015.
- [47] Dubina, D., V. Ungureanu, and R. Landolfo, "*Design of Cold-Formed Steel Structures*" (1st Edition). ECCS - European Convention for Constructional Steelwork, 2012.
- [48] BLOCOTELHA SA, "*Catálogo comercial BLOCOTELHA*". 2014.
- [49] Silvestre, N. and D. Camotin, "*Comportamento de estruturas de aço enformadas a frio e dimensionamento de acordo com o EC3-1-3*". Jornada Técnica LSK, EXPONOR, Porto, Outubro 2006.
- [50] Reis, A.J. and D. Camotim, "*Estabilidade Estrutural*". McGraw-Hill de Portugal, 2000.
- [51] Galambos, T.V., "*Guide to stability design criteria for metal structures*" (5a. edition). John Willey & Sons, 1998.
- [52] Dubina, D. and V. Ungureanu, "*Effect of imperfections on numerical simulation of instability behaviour of cold-formed steel members*". Thin-Walled Structures, 2002. 40(3): p. 239-262.
- [53] Schafer, B.W. and T. Peköz, "*Computational modeling of cold-formed steel: characterizing geometric imperfections and residual stresses*". Journal of Constructional Steel Research, 1998. 47(3): p. 193-210.
- [54] SIMULIA Inc., ABAQUS Standard (version 6.10), 2010.

- [55] Dinis, P.B. and D. Camotim, "*Estabilidade de perfis de aço enformados a frio: Modelação por Elementos Finitos e estudo da influência das condições de apoio*". VII Congresso de Mecânica Aplicada e Computacional, Universidade de Évora, 14-16/04/2003.
- [56] CEN, "*Eurocode 3 – Design of Steel Structures – Part 1-5: General rules – Plated structural elements*". prEN 1993-1-5, 2006.
- [57] Dinis, P.B. and D. Camotim, "*Post-buckling behaviour and strength of cold-formed steel lipped channel columns experiencing distortional/global interaction*". Computers & Structures, 2011. 89(3–4): p. 422-434.
- [58] Bathe, K.J., "*Finite element procedures*". Revision of: Finite element procedures in engineering analysis 1982, Prentice-Hall, 1996.
- [59] Lourenço, P.B., "*Métodos computacionais na mecânica dos sólidos não linear*". Relatório 99-DEC/E-1. Universidade do Minho, Portugal, 02/1999.
- [60] Rasmussen, K.J.R. and G.J. Hancock, "*Geometric imperfections in plated structures subject to interaction between buckling modes*". Thin-Walled Structures, 1988. 6(6): p. 433-452.