

FUNÇÕES REAIS DE UMA VARIÁVEL REAL: DERIVADAS E SUAS APLICAÇÕES

AUGUSTO EUSÉBIO E LUÍS COTRIM

POLITÉCNICO DE LEIRIA

FICHA TÉCNICA

Título:

Funções reais de uma variável real:
derivadas e suas aplicações

Autores:

Augusto Eusébio e Luís Cotrim

Editor:

Politécnico de Leiria
Leiria

Composição e imagem:

Augusto Eusébio (ORCID ID:[0000-0002-6800-2016](https://orcid.org/0000-0002-6800-2016))

Luís Cotrim (ORCID ID:[0000-0001-9256-9349](https://orcid.org/0000-0001-9256-9349))

ISBN:

978-972-99023-8-3

DOI:

<https://doi.org/10.25766/y1cp-ng33>

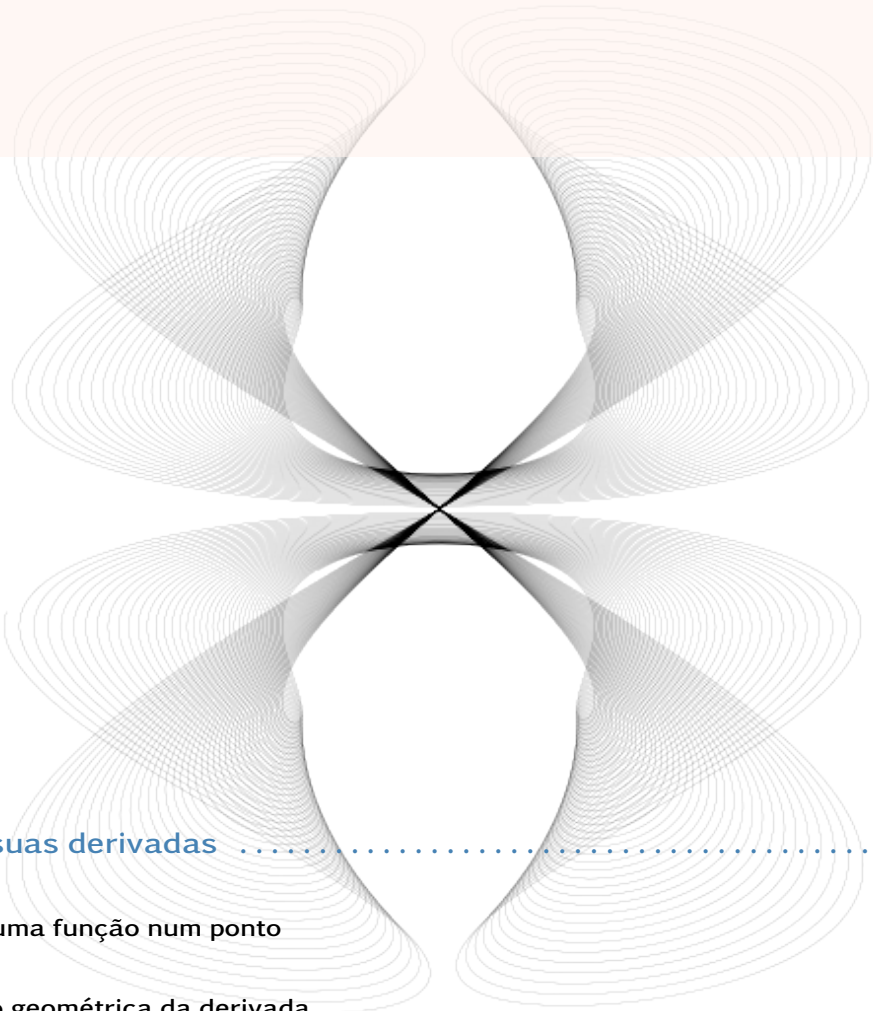
Ano de edição:

2024

Funções reais de uma variável real: derivadas e suas aplicações © 2024 Augusto Eusébio e Luís Cotrim

Cópia ilegal

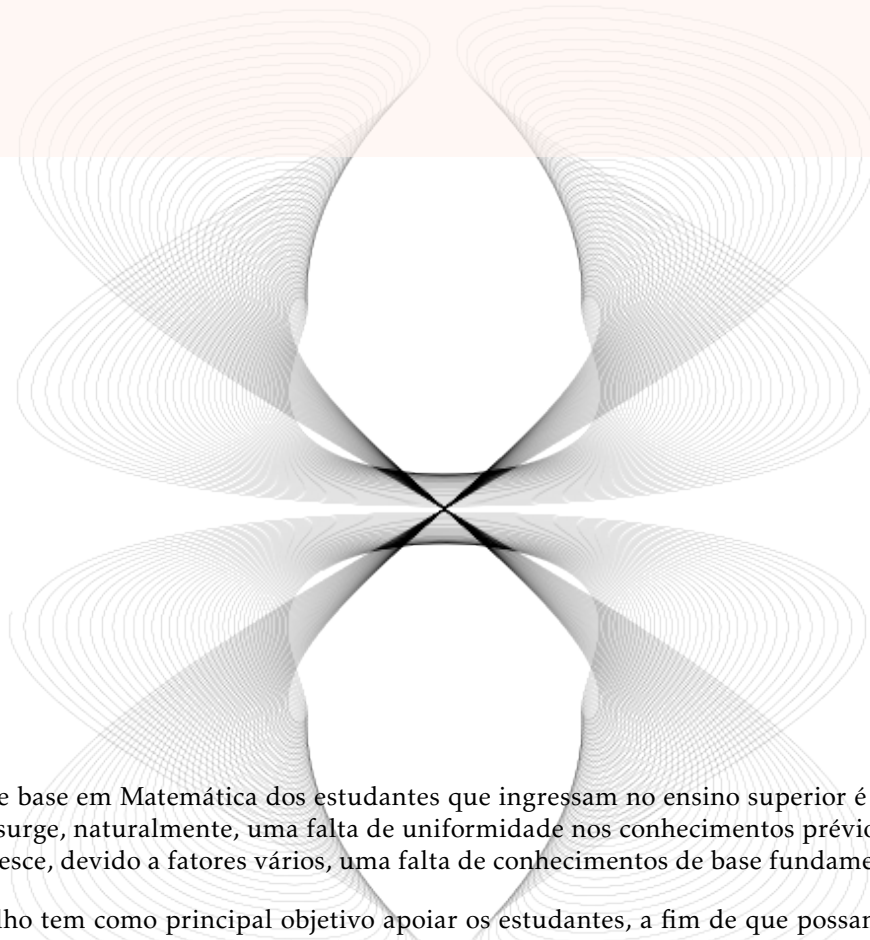
Funções reais de uma variável real: derivadas e suas aplicações © 2024 por Augusto Eusébio e Luís Cotrim licenciado sob CC BY-NC-ND 4.0. Para ver uma cópia desta licença, visite <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>



1	Funções e suas derivadas	8
1.1	Derivada de uma função num ponto	8
1.2	Interpretação geométrica da derivada	8
1.3	Derivadas laterais	10
1.4	Diferenciabilidade e continuidade	10
	1.4.1 Exercícios resolvidos	11
1.5	Função derivada	20
2	Regras de derivação	21
2.1	Derivadas de funções elementares	21
	2.1.1 Derivada da função constante	21
	2.1.2 Derivada da função identidade	21
	2.1.3 Derivada da soma e diferença	21
	2.1.4 Derivada do produto	22
	2.1.5 Derivada da potência de expoente natural	22
	2.1.6 Derivada do quociente	22
	2.1.7 Exercícios resolvidos	22
	2.1.8 Exercícios propostos	25

2.2	Derivada das funções composta e inversa	26
2.2.1	Função composta	26
2.2.2	Função inversa	26
2.2.3	Exercícios resolvidos	27
2.2.4	Exercícios propostos	27
2.3	Derivada das funções exponencial e logarítmica	28
2.3.1	Derivada da função $y = e^x$	28
2.3.2	Derivada da função $y = a^x$	28
2.3.3	Derivada da função $y = \ln x$	28
2.3.4	Derivada da função $y = \log_a f$	29
2.3.5	Exercícios resolvidos	29
2.3.6	Exercícios propostos	30
2.4	Derivadas das funções circulares	31
2.4.1	Derivada da função $y = \text{sen } x$	31
2.4.2	Derivada da função $y = \text{cos } x$	31
2.4.3	Derivada da função $y = \text{tg } x$	31
2.4.4	Derivada da função $y = \text{cotg } x$	32
2.4.5	Exercícios resolvidos	32
2.4.6	Exercícios propostos	34
2.5	Derivadas das funções trigonométricas inversas	35
2.5.1	Derivada da função $y = \text{arcsen } x$	35
2.5.2	Derivada da função $y = \text{arccos } x$	35
2.5.3	Derivada da função $y = \text{arctg } x$	36
2.5.4	Derivada da função $y = \text{arccotg } x$	36
2.5.5	Exercícios resolvidos	36
2.5.6	Exercícios propostos	37
2.6	Derivadas sucessivas	38
2.6.1	Exercícios resolvidos	38
2.6.2	Exercícios propostos	40
3	Aplicações das derivadas	41
3.1	Regra de Cauchy	41

3.2	Extremos relativos e derivada de uma função	49
3.3	Exercícios resolvidos	50
3.4	Exercícios propostos	69
4	Diferenciais	75
4.1	Diferencial de uma função	75
4.2	Interpretação geométrica	76
4.3	Regras de diferenciação	77
4.4	Diferenciais de diferentes ordens	77
	4.4.1 Exercícios resolvidos	78
	4.4.2 Exercícios propostos	81
5	Fórmula de Taylor	83
5.1	Aproximação de funções reais de uma variável real por funções polinomiais	83
5.2	A fórmula do resto de Lagrange	85
	5.2.1 Exercícios resolvidos	85
	5.2.2 Exercícios propostos	88
	Literature	89



A formação de base em Matemática dos estudantes que ingressam no ensino superior é muito variada. Desta forma, surge, naturalmente, uma falta de uniformidade nos conhecimentos prévios dos estudantes, à qual acresce, devido a fatores vários, uma falta de conhecimentos de base fundamentais.

Este trabalho tem como principal objetivo apoiar os estudantes, a fim de que possam ultrapassar o mais possível as suas lacunas. Vamos abordar, de forma sucinta, a noção de derivada de uma função real de uma variável real e algumas das suas aplicações, cujo estudo uma parte dos estudantes iniciou no ensino secundário. Foi nossa preocupação apresentar alguns exemplos resolvidos para, posteriormente, apresentar exercícios cuja resolução ficará a cargo dos estudantes. Alguns dos exercícios apresentados foram retirados de provas de avaliação das UC de Análise Matemática e Métodos Quantitativos da Escola Superior de Tecnologia e Gestão do Politécnico de Leiria.

Ao longo deste trabalho, não foram propositadamente fundamentados muitos dos conceitos matemáticos apresentados, dado que o nosso intuito principal é fornecer aos estudantes um guia sobre o tema em questão que seja útil para um melhor acompanhamento das aulas. Para uma formação de base, mais teórico, os estudantes poderão consultar os livros apresentados na bibliografia [5, 1, 3, 2, 4, 6].

Expressamos o nosso agradecimento Ao Politécnico de Leiria, por todo o apoio facultado na publicação deste trabalho.

1. Funções e suas derivadas



1.1	Derivada de uma função num ponto	8
1.2	Interpretação geométrica da derivada	8
1.3	Derivadas laterais	10
1.4	Diferenciabilidade e continuidade	10
1.5	Função derivada	20

1.1 Derivada de uma função num ponto

Consideremos uma função $y = f(x)$, real de variável real, definida num intervalo aberto $]a, b[$ de \mathbb{R} . Damos o nome de *derivada* da função f em $x_0 \in]a, b[$ ao limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

caso exista, designada, em geral, por $f'(x_0)$ ou $y'(x_0)$.

Se fizermos $x - x_0 = h$ isto é, $x = x_0 + h$, obtém-se a fórmula:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

visto que se $x \rightarrow x_0$, isto é, $x - x_0 \rightarrow 0$, então $h \rightarrow 0$. Esta fórmula torna o cálculo do limite, por vezes, mais simples.

A derivada de uma função num ponto pode ser finita ou infinita. Uma função diz-se *diferenciável* num ponto se tem derivada finita nesse ponto.

1.2 Interpretação geométrica da derivada

Consideremos uma função real de variável real $y = f(x)$, cuja representação gráfica está na figura 1.1, um ponto A de coordenadas $(x_0, f(x_0))$, um outro ponto P genérico de coordenadas $(x, f(x))$ e a reta que passa pelos pontos A e P .

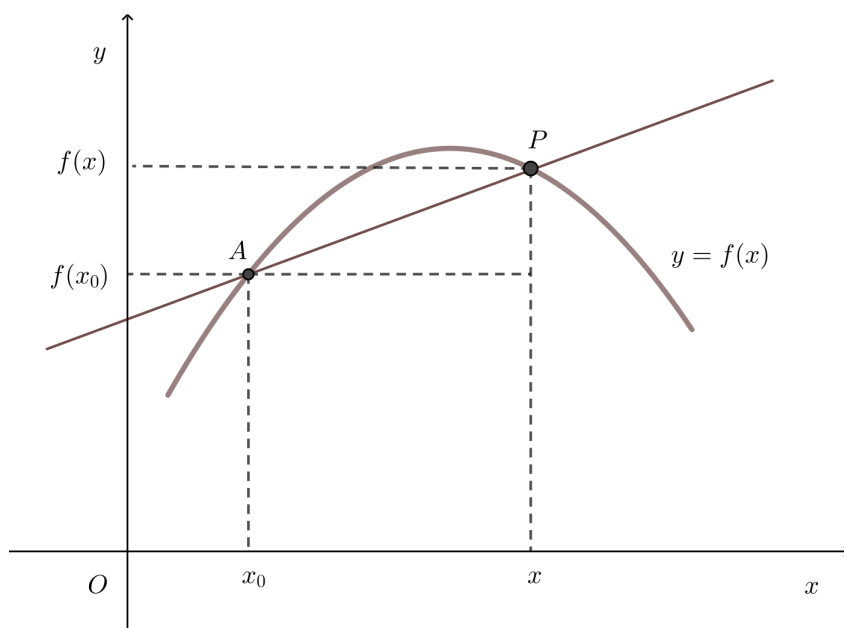


Figura 1.1: Representação gráfica de uma curva $y = f(x)$ e uma reta, AP , secante à curva.

O declive da reta AP é:

$$m_{AP} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Na figura 1.2 representamos várias retas secantes à curva que representa a função $y = f(x)$, simulando o que acontece quando consideramos um ponto P , sobre a curva, com abscissa, x , cada vez mais próxima de x_0 (a abscissa do ponto A). No limite, quando x tende para x_0 , temos a reta tangente.

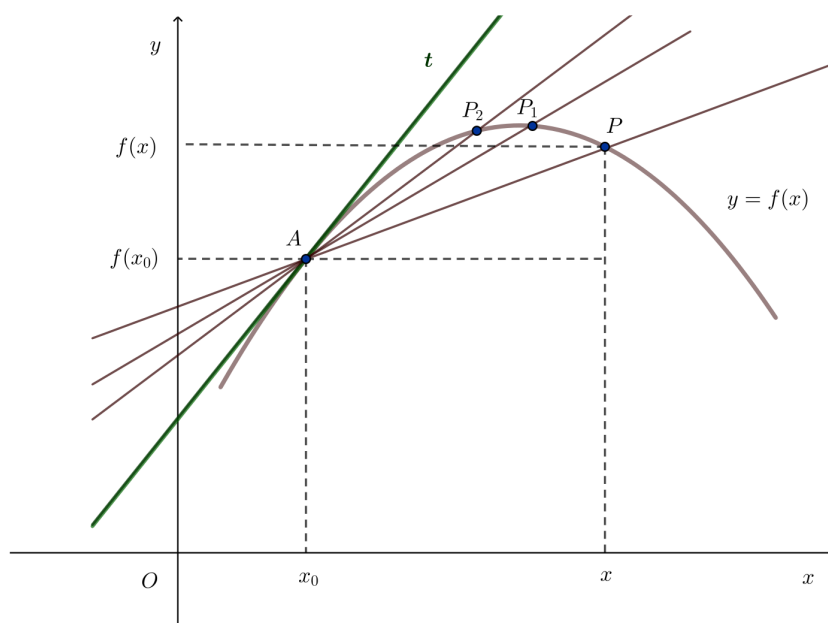


Figura 1.2: Representação gráfica de várias retas, secantes à curva $y = f(x)$, sendo t a reta tangente à curva no ponto A .

Definição 1.1 (Reta tangente) Designamos por reta tangente ao gráfico da função, real de variável real, $y = f(x)$, no ponto A de coordenadas $(x_0, f(x_0))$, a reta que passa no ponto A e tem declive

$$m_t = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Definição 1.2 (Derivada) O declive da reta tangente designa-se por derivada da função f em x_0 e representa-se por $f'(x_0)$.

Uma equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto A , é dada por

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

1.3 Derivadas laterais

Consideremos uma função real de variável real f , um número real x_0 , pertencente ao domínio da função f e $h = x - x_0$.

Definição 1.3 (Derivada lateral à esquerda) Designa-se por derivada *lateral à esquerda* da função f em x_0 o limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

caso exista. Esta derivada representa-se por $f'(x_0^-)$.

Definição 1.4 (Derivada lateral à direita) Designa-se por derivada *lateral à direita* da função f em x_0 o limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

caso exista. Esta derivada representa-se por $f'(x_0^+)$.

Definição 1.5 (Derivada) Diz-se que uma função f , real de variável real, tem derivada num ponto x_0 se e só se existirem e forem iguais as derivadas laterais $f'(x_0^-)$ e $f'(x_0^+)$. Neste caso

$$f'(x_0) = f'(x_0^-) = f'(x_0^+).$$

Geometricamente a derivada lateral à esquerda de x_0 representa o declive da semitangente à esquerda e a derivada lateral à direita de x_0 representa o declive da semitangente à direita.

1.4 Diferenciabilidade e continuidade

Teorema 1.1 Toda a função diferenciável num ponto é contínua nesse ponto.

Em consequência do teorema anterior, podemos afirmar que se uma função é descontínua num ponto então não é diferenciável nesse ponto.

O recíproco do teorema anterior não é verdadeiro. Há funções contínuas num ponto que não têm, nesse ponto, derivada finita. Por exemplo na função real de variável real f definida por $f(x) = |x|$, as

derivadas laterais no ponto $x = 0$ são:

$$f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x| - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

$$f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x| - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1.$$

A função $f(x) = |x|$ é contínua em $x = 0$, no entanto não é diferenciável em $x = 0$.

1.4.1 Exercícios resolvidos

Exercício 1.1 Considere a função f , real de variável real, definida por $f(x) = x - x^2$. Utilizando a definição de derivada, calcule a derivada da função em $x = 3$.

Resolução:

Por definição

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Neste caso $x_0 = 3$ e $f(x) = x - x^2$. Assim, temos,

$$f'(3) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - x^2 + 6}{x - 3} = \frac{0}{0}$$

Trata-se de uma indeterminação. Para levantar a indeterminação fatorizamos o polinômio $-(x^2 - x - 6)$, determinando as raízes de $x^2 - x - 6$, que são -2 e 3 . Assim, $-(x^2 - x - 6) = -(x + 2)(x - 3)$. Podemos então escrever,

$$f'(3) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-(x - 3)(x + 2)}{x - 3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} -(x + 2) = -5.$$

Deste modo a derivada da função f em 3 é $f'(3) = -5$.

Exercício 1.2 Considere a função g , real de variável real, definida por $g(x) = \frac{1}{x}$.

- Utilizando a definição de derivada, calcule o valor de $g'(4)$.
- Utilizando a definição de derivada, calcule o valor de $g'(a)$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Resolução:

a) Por definição temos,

$$g'(4) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{g(x) - g(4)}{x - 4}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{4}}{x - 4}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\frac{4-x}{4x}}{x - 4}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{4-x}{4x(x-4)} = \frac{0}{0}$$

Trata-se de uma indeterminação. Como é fácil ver, temos um fator comum no numerador e no denominador. Assim, simplificando, temos,

$$\begin{aligned} g'(4) &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-(x-4)}{4x(x-4)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} -\frac{1}{4x} = -\frac{1}{16} \end{aligned}$$

Podemos então escrever que a derivada da função g em 4 é $g'(4) = -\frac{1}{16}$.

b) Como na alínea anterior, temos por definição

$$\begin{aligned} g'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{a}}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{a-x}{4x}}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{a-x}{4x(x-a)} = \frac{0}{0} \end{aligned}$$

Trata-se de uma indeterminação, que se levanta facilmente simplificando a fração.

$$\begin{aligned} g'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{-(x-a)}{ax(x-a)} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} -\frac{1}{ax} = -\frac{1}{a^2} \end{aligned}$$

Podemos então escrever que a derivada da função g em a é $g'(a) = -\frac{1}{a^2}$, para $a \neq 0$. Por exemplo, se $a = 5$ podemos escrever $g'(5) = -\frac{1}{5^2} = -\frac{1}{25}$ ou se $a = -2$, $g'(-2) = -\frac{1}{(-2)^2} = -\frac{1}{4}$.

Exercício 1.3 Considere a função h , real de variável real, definida por $h(x) = x^2 + x$.

- a) Utilizando a definição de derivada, calcule o valor de $h'(a)$, $a \in \mathbb{R}$.
- b) Sabendo que a reta $y = 7x - 9$ é tangente ao gráfico de h no ponto de abscissa $x = a$, calcule as coordenadas do ponto de tangência.

Resolução:

a)

Aplicando a definição de derivada, temos

$$\begin{aligned} h'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{h(x) - h(a)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 + x - (a^2 + a)}{x - a} = \frac{0}{0} \end{aligned}$$

Temos uma indeterminação. Uma vez que tanto o numerador como o denominador são polinómios isso significa que a é raiz de ambos os termos. Utilizando a regra de Ruffini dividamos o numerador pelo denominador (ver cálculos auxiliares abaixo).

Assim temos,

$$\begin{aligned} h'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)(x+a+1)}{x-a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} (x+a+1) = 2a+1 \end{aligned}$$

C.A.: Regra de Ruffini para a divisão do polinómio $x^2 + x - (a^2 + a)$ por $x - a$:

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & 1 & -a^2 - a \\ a & & a & a^2 + a \\ \hline & 1 & a+1 & R=0 \end{array}$$

Temos como resultado $\frac{x^2 + x - (a^2 + a)}{x - a} = x + a + 1$ ou $x^2 + x - (a^2 + a) = (x - a)(x + a + 1)$

- b) O declive da reta $y = 7x - 9$ é 7. Sendo a reta tangente, como sabemos o declive é igual à derivada da função no ponto de tangência. Assim,

$$h'(a) = 7 \Leftrightarrow 2a + 1 = 7 \Leftrightarrow a = 3$$

e o ponto de tangência é:

$$P = (3, h(3)) = (3, 12).$$

Exercício 1.4

Considere a função f , real de variável real, definida por $f(x) = 2x^3$.

- Utilizando a definição de derivada, calcule o valor de $f'(2)$.
- Escreva uma equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa $x = 2$.

Resolução:

- a) Por definição de derivada num ponto, temos

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^3 - 16}{x - 2} \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = \frac{0}{0} \end{aligned}$$

Chegamos a uma indeterminação. Trata-se de uma fração. Se efetuarmos a divisão (ver cálculos auxiliares), temos,

$$\begin{aligned} f'(2) &= 2 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{x-2} \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 2x + 4) = 24 \end{aligned}$$

Assim, podemos concluir que $f'(2) = 24$.

C.A.: Regra de Ruffini para a divisão do polinómio $x^3 - 8$ por $x - 2$:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & 0 & -8 \\ 2 & & 2 & 4 & 8 \\ \hline & 1 & 2 & 4 & 0 = R \end{array}$$

Temos então

$$\frac{x^3 - 8}{x - 2} = x^2 + 2x + 4.$$

b) Sendo $f(2) = 16$ e $f'(2) = 24$, vem

$$y - f(2) = f'(2)(x - 2) \Leftrightarrow y - 16 = 24(x - 2) \Leftrightarrow y = 24x - 32.$$

Exercício 1.5 Considere a função f , real de variável real, definida por $f(x) = \sqrt{2x - 4}$.

- a) Utilizando a definição de derivada, calcule o valor de $f'(3)$.
 b) Escreva uma equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa $x = 3$.

Resolução:

a)

$$\begin{aligned} f'(3) &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x - 4} - \sqrt{2}}{x - 3} = \frac{0}{0} \end{aligned}$$

Temos uma indeterminação. Para a levantar multiplicamos ambos os termos da fração pelo conjugado do numerador, isto é, por $\sqrt{2x - 4} + \sqrt{2}$. Assim,

$$\begin{aligned} f'(3) &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{2x - 4} - \sqrt{2})(\sqrt{2x - 4} + \sqrt{2})}{(x - 3)(\sqrt{2x - 4} + \sqrt{2})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{2x - 4})^2 - (\sqrt{2})^2}{(x - 3)(\sqrt{2x - 4} + \sqrt{2})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2(x - 3)}{(x - 3)(\sqrt{2x - 4} + \sqrt{2})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2}{\sqrt{2x - 4} + \sqrt{2}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

Desta forma, $f'(3) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) Sendo $f(3) = \sqrt{2}$ e $f'(3) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, vem

$$\begin{aligned} y - f(3) &= f'(3)(x - 3) \\ \Leftrightarrow y - \sqrt{2} &= \frac{\sqrt{2}}{2}(x - 3) \\ \Leftrightarrow y &= \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Exercício 1.6 Seja g uma função contínua em \mathbb{R} e f a função definida pela igualdade

$$f(x) = 2 + xg(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

- a) Prove que f é diferenciável em $x = 0$.
 b) Determine uma equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de interseção com o eixo das ordenadas.

Resolução:

a) Temos,

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 + xg(x) - 2}{x} \\ &= g(0). \end{aligned}$$

Sendo g uma função contínua em \mathbb{R} , $g(0)$ é finito e, por conseguinte, f é diferenciável em $x = 0$.

b) Como $f(0) = 2$ e $f'(0) = g(0)$, vem

$$y - f(0) = f'(0)x \Leftrightarrow y - 2 = g(0)x \Leftrightarrow y = g(0)x + 2.$$

Exercício 1.7 Seja t a função, de domínio \mathbb{R} , definida por

$$t(x) = \begin{cases} x - 5 & \text{se } x \geq 4 \\ x^2 - 6x + 7 & \text{se } x < 4 \end{cases}.$$

Estude a função quanto à existência de derivada em $x = 4$.

Resolução:

Calculemos as derivadas laterais da função em $x = 4$.

$$\begin{aligned} t'(4^+) &= \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{t(x) - t(4)}{x - 4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x - 5 - (-1)}{x - 4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x - 4}{x - 4} = \frac{0}{0} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t'(4^-) &= \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{t(x) - t(4)}{x - 4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x^2 - 6x + 7 - (-1)}{x - 4} = \frac{0}{0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{(x - 2)(x - 4)}{x - 4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4^-} (x - 2) = 2 \end{aligned}$$

Como $t'(4^+) \neq t'(4^-)$, não existe $t'(4)$.

Exercício 1.8 Consideremos a função h , de domínio \mathbb{R} , definida por

$$h(x) = \begin{cases} x^3 - 2 & \text{se } x \geq 1 \\ 3x - 4 & \text{se } x < 1 \end{cases}.$$

Estude a função quanto à existência de derivada em $x = 1$.

Resolução:

Calculemos as derivadas laterais da função em $x = 1$.

$$\begin{aligned} h'(1^+) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{h(x) - h(1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \frac{0}{0} \end{aligned}$$

Trata-se de uma indeterminação. Para a levantar dividamos o polinómio do numerador pelo do denominador.

$$\begin{aligned} h'(1^+) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2+x+1) \\ &= 3 \end{aligned}$$

C.A.: Regra de Ruffini para a divisão de $x^3 - 1$ por $x - 1$:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 0 = R \end{array}$$

$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$$

$$\begin{aligned} h'(1^-) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{h(x) - h(1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x - 3}{x - 1} = \frac{0}{0} \text{ (Indeterminação)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3(x-1)}{x-1} \\ &= 3 \end{aligned}$$

Sendo $h'(1^+) = h'(1^-)$, então existe derivada da função em $x = 1$, tendo-se $h'(1) = 3$.

Exercício 1.9 Considere a função f , real de variável real, definida por $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Mostre que $f'(0) = +\infty$.

Resolução:

Calculemos as derivadas laterais da função em $x = 0$.

$$\begin{aligned}f'(0^-) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \frac{0}{0}\end{aligned}$$

Trata-se de uma indeterminação. Podemos simplificar a fração atendendo a que se trata da divisão de potências com a mesma base. Assim,

$$\begin{aligned}f'(0^-) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} x^{-\frac{2}{3}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{0^+} \\ &= +\infty\end{aligned}$$

Calculemos agora a derivada à direita.

$$\begin{aligned}f'(0^+) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \frac{0}{0}\end{aligned}$$

Temos, novamente, uma indeterminação. Como no caso anterior, trata-se da divisão de potências com a mesma base. Desta forma temos,

$$\begin{aligned}f'(0^+) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{0^+} \\ &= +\infty\end{aligned}$$

Sendo, $f'(0^-) = +\infty$ e $f'(0^+) = +\infty$, vem $f'(0) = +\infty$. Assim, o gráfico da função tem por tangente na origem o eixo das ordenadas (figura 1.3).

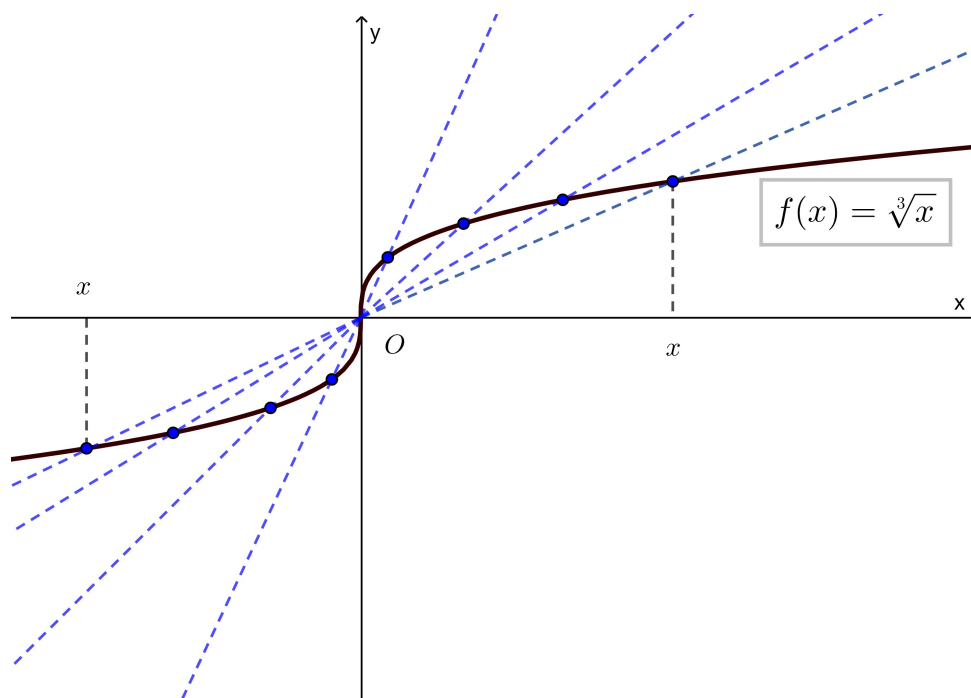


Figura 1.3: Representação gráfica de $f(x) = \sqrt[3]{x}$ e de várias retas secantes à curva aproximando a tangente à curva em $x = 0$.

Exercício 1.10 Considere a função f , real de variável real, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}.$$

Mostre que $f'(0) = +\infty$.

Resolução:

Sendo

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x > 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

tem-se,

$$f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-1}{x} = +\infty$$

$$f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty,$$

e, portanto, $f'(0) = +\infty$.

Exercício 1.11 Considere a função f , real de variável real, definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{se } |x| \leq 2 \\ 4 - x^2 & \text{se } |x| > 2 \end{cases}.$$

- a) Calcule as derivadas laterais de f em $x = -2$ e $x = 2$.
 b) Esboce o gráfico de f' .

Resolução:

- a) Temos, sucessivamente,

$$f'(2^-) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$$

$$f'(2^+) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{4 - x^2}{x - 2} = -4$$

$$f'(-2^-) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{4 - x^2}{x + 2} = 4$$

$$f'(-2^+) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = -4$$

- b) Sendo,

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } |x| < 2 \\ -2x & \text{se } |x| > 2 \end{cases},$$

podemos desenhar o gráfico da figura 1.4.

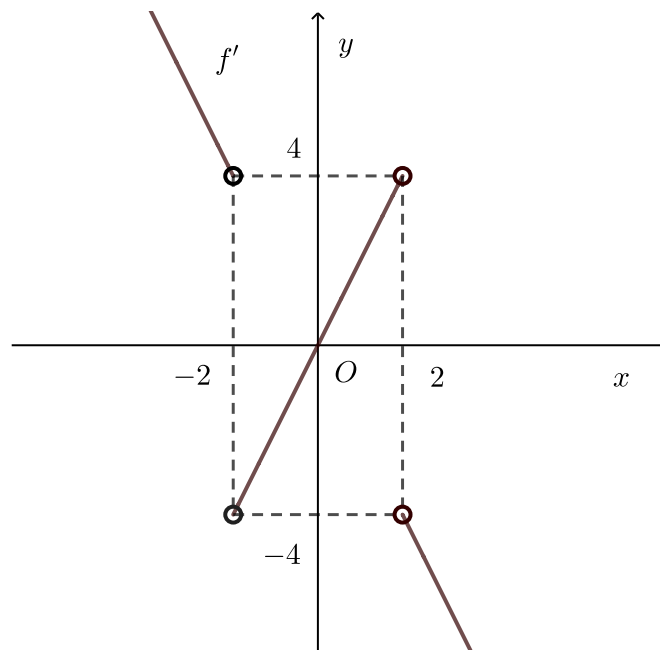


Figura 1.4: Gráfico da função derivada da função do exercício 1.11.

1.5 Função derivada

Consideremos a função f , real de variável real, definida por $f(x) = 2x^2 + 1$. Temos, por exemplo,

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + 1 - 1}{x} = 0$$

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + 1 - 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x-1)(x+1)}{x-1} = 4.$$

Calculemos agora $f'(x_0)$ sendo x_0 um ponto qualquer pertencente ao domínio de f . Temos:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2x^2 + 1 - (2x_0^2 + 1)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2x^2 - 2x_0^2}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} 2(x + x_0) \\ &= 4x_0. \end{aligned}$$

Assim, podemos escrever

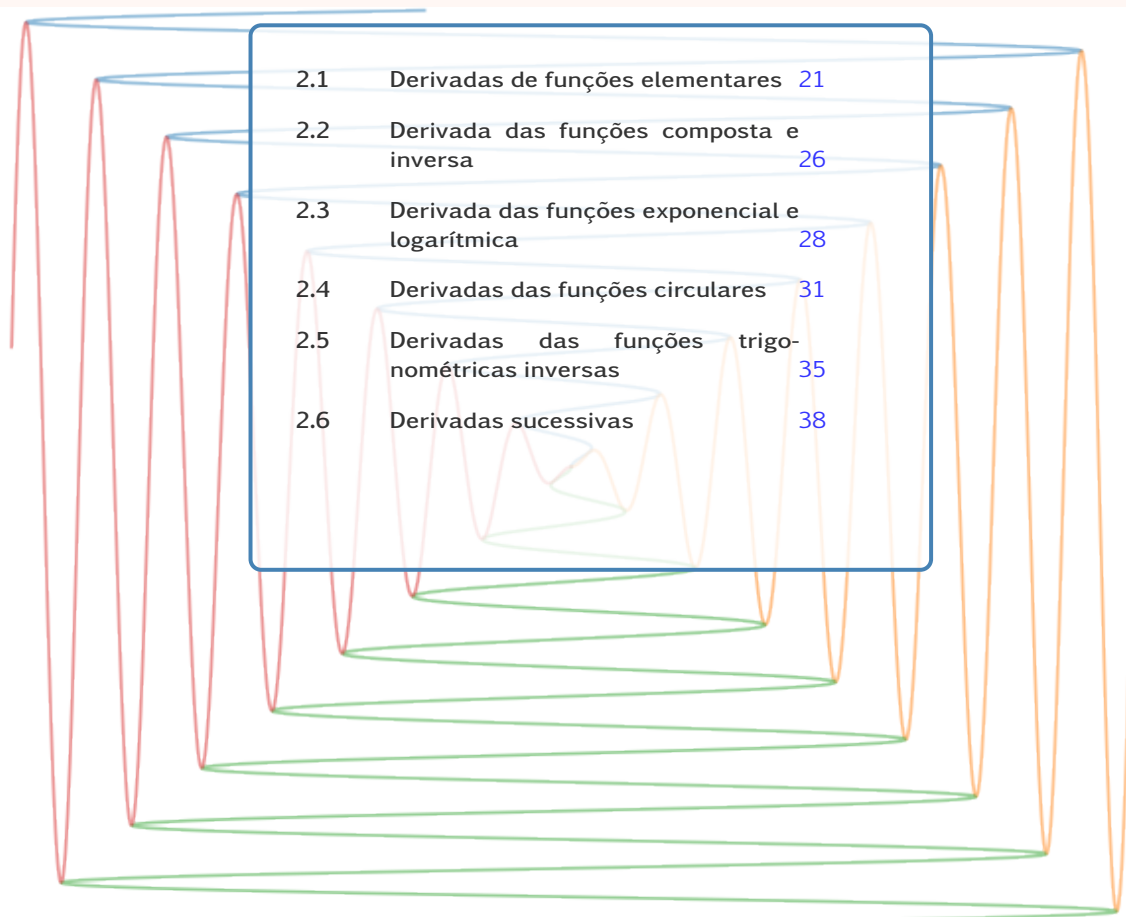
$$f'(x_0) = 4x_0 \quad \text{ou} \quad f'(x) = 4x.$$

À função $f'(x) = 4x$, dá-se o nome de *função derivada* de $f(x) = 2x^2 + 1$.

Definição 1.6 (Função derivada) Seja f uma função real de variável real que admite derivada finita em todos os pontos de um conjunto D . Assim, a cada $x_0 \in D$ vai corresponder um e só um número real $f'(x_0)$, ficando assim definida em D uma nova função, $f'(x)$, a que se dá o nome de *função derivada* de f em ordem a x .

Uma função diz-se diferenciável num intervalo $]a, b[$ quando admite derivada finita em todos os pontos do intervalo. Diz-se diferenciável num intervalo $[a, b]$ quando é diferenciável em $]a, b[$ e diferenciável à esquerda de b e à direita de a .

2. Regras de derivação



2.1	Derivadas de funções elementares	21
2.2	Derivada das funções composta e inversa	26
2.3	Derivada das funções exponencial e logarítmica	28
2.4	Derivadas das funções circulares	31
2.5	Derivadas das funções trigonométricas inversas	35
2.6	Derivadas sucessivas	38

2.1 Derivadas de funções elementares

2.1.1 Derivada da função constante

Consideremos a função f , real de variável real, definida por $f(x) = k$, $k \in \mathbb{R}$. Tem-se:

$$f'(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

2.1.2 Derivada da função identidade

Consideremos a função f , real de variável real, definida por $f(x) = x$. Tem-se:

$$f'(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}.$$

2.1.3 Derivada da soma e diferença

Se f e g são funções diferenciáveis no ponto x_0 , as funções $f + g$ e $f - g$ também são diferenciáveis no mesmo ponto e tem-se:

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

$$(f - g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0).$$

2.1.4 Derivada do produto

Se f e g são funções diferenciáveis no ponto x_0 , a função fg também é diferenciável no mesmo ponto e tem-se:

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

Pela regra anterior, no caso do produto de uma constante k por f , tem-se:

$$(kf)'(x_0) = k'f(x_0) + kf'(x_0) = kf'(x_0).$$

2.1.5 Derivada da potência de expoente natural

Se f é diferenciável no ponto x_0 , a função f^n também é diferenciável no mesmo ponto e tem-se:

$$(f^n)'(x_0) = nf^{n-1}(x_0)f'(x_0).$$



A regra anterior generaliza-se a qualquer expoente racional.

2.1.6 Derivada do quociente

Se f e g são funções diferenciáveis no ponto x_0 e $g(x_0) \neq 0$, a função $\frac{f}{g}$ também é diferenciável no mesmo ponto e tem-se:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

2.1.7 Exercícios resolvidos

Exercício 2.1 Utilizando as regras de derivação, calcule a derivada das seguintes funções.

a) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 1.$

b) $f(x) = (x-1)(x^2 + 3x).$

c) $f(x) = (4x-3)^5.$

d) $f(x) = 7(2x-3)^4.$

e) $f(x) = (x^3 - 3x^2 + x)^{-2}.$

f) $f(x) = \sqrt{x}.$

g) $f(x) = \frac{x+3}{2x-1}.$

h) $f(x) = \frac{2x+1}{x^2-3x}.$

Resolução:

a) Neste caso,

$$f'(x) = (x^3)' - (5x^2)' + (1)'$$

A derivada da soma é a soma das derivadas e a derivada da diferença é a diferença das derivadas

$$= 3x^2 - 2 \times 5x^1 + 0$$

A derivada de x^n é nx^{n-1} e a derivada de uma constante é zero.

$$= 3x^2 - 10x.$$

b) Temos:

$$f'(x) = (x-1)'(x^2+3x) + (x-1)(x^2+3x)'$$

A derivada do produto de duas funções é a soma da derivada da primeira vezes a segunda com a primeira vezes a derivada da segunda

$$= x^2 + 3x + (x-1)(2x+3)$$

$$3x^2 + 4x - 3.$$

c)

$$f'(x) = 5(4x-3)^4(4x-3)'$$

A derivada da potência de expoente natural, 5, é igual ao expoente, 5, vezes a potência de expoente 5 - 1 vezes a derivada da base, 4x - 3

$$= 20(4x-3)^4.$$

$$d) f'(x) = 7[(2x-3)^4]' = 56(2x-3)^3.$$

e) Temos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2(x^3 - 3x^2 + x)^{-2-1}(x^3 - 3x^2 + x)' \\ &= -2(x^3 - 3x^2 + x)^{-3}(3x^2 - 6x + 1) \\ &= \frac{-6x^2 + 12x - 2}{(x^3 - 3x^2 + x)^3}. \end{aligned}$$

$$f) f'(x) = (\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}x' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

g)

$$f'(x) = \frac{(x+3)'(2x-1) - (x+3)(2x-1)'}{(2x-1)^2}$$

A derivada do quociente é o quociente da diferença entre o produto da derivada do numerador pelo denominador e o produto do numerador pela derivada do denominador e o quadrado do denominador

$$= -\frac{7}{(2x-1)^2}.$$

h) Temos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x+1)'(x^2-3x) - (2x+1)(x^2-3x)'}{(x^2-3x)^2} \\ &= \frac{2(x^2-3x) - (2x+1)(2x-3)}{(x^2-3x)^2} \\ &= \frac{-2x^2 - 2x + 3}{(x^2-3x)^2}. \end{aligned}$$

Exercício 2.2 Considere as funções f e g , reais de variável real, tais que:

$$f(-1) = 5, \quad g(-1) = 4, \quad f'(-1) = 2 \quad \text{e} \quad g'(-1) = -8.$$

Qual é o valor de $(fg)'(-1)$?

$$(A) -32 \quad (B) 32 \quad (C) -40 \quad (D) 30$$

Resolução:

Sendo,

$$(fg)'(-1) = f'(-1)g(-1) + f(-1)g'(-1) = 2 \times 4 + 5 \times (-8) = -32,$$

a opção correta é a (A).

Exercício 2.3 Considere as funções f e g , reais de variável real, tais que:

$$f(1) = 2, \quad f'(1) = 3, \quad g(1) = -2 \quad \text{e} \quad g'(1) = 5.$$

Seja h a função definida por $h(x) = \frac{xf(x)}{g(x)}$.

Qual é o valor de $h'(1)$?

$$(A) -4 \quad (B) -5 \quad (C) 4 \quad (D) 5$$

Resolução:

Sendo,

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{(xf(x))'g(x) - xf(x)g'(x)}{g^2(x)} \\ &= \frac{[f(x) + xf'(x)]g(x) - xf(x)g'(x)}{g^2(x)}, \end{aligned}$$

vem,

$$\begin{aligned} h'(1) &= \frac{[f(1) + 1 \times f'(1)]g(1) - 1 \times f(1)g'(1)}{g^2(1)} \\ &= \frac{(2+3)(-2) - 2 \times 5}{4} = \frac{-20}{4} = -5 \end{aligned}$$

e a opção correta é a (B).

Exercício 2.4 Determine as coordenadas dos pontos da curva $y = x^3 - 6x$, em que a tangente nesses pontos é uma reta horizontal.

Resolução:

Uma reta horizontal tem declive igual a zero. Assim resolvendo a equação $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$, as coordenadas dos pontos são $(\sqrt{2}, -4\sqrt{2})$ e $(-\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$.

Exercício 2.5 Sendo a reta de equação $y = -x$ tangente ao gráfico da função f , real de variável real, definida por $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$, determine as coordenadas do ponto de tangência.

Resolução:

A reta $y = -x$ só pode ser tangente à curva dada nos pontos onde a derivada é igual a -1 , o declive dessa reta. Como,

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 8$$

vem,

$$f'(x) = -1 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 3.$$

Assim, as coordenadas do ponto de tangência são $(3, f(3)) = (3, -3)$ ou $(1, f(1)) = (1, 3)$. O ponto $(3, -3)$ também pertence à reta $y = -x$ e, por isso, a reta $y = -x$ é tangente à curva em $(3, -3)$. O ponto $(1, 3)$ não pertence à reta $y = -x$, assim esta reta não pode ser tangente à curva naquele ponto.

2.1.8 Exercícios propostos

Exercício 2.6 Utilizando as regras de derivação, calcule a derivada das seguintes funções.

a) $y = x^5 + 4x^2 - 7$.

b) $y = 5x^3 - x^2 + \sqrt{7}$.

c) $y = \frac{x^3 - x^2 + 1}{7}$.

d) $y = 6x^{\frac{7}{2}} + 4x^{\frac{5}{2}} + 3x$.

e) $y = \sqrt{3x} + \sqrt[3]{x} + \frac{2}{x}$.

f) $y = \sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt{x} + 8$.

g) $y = (1 + 4x^3)(1 + 2x^2)$.

h) $y = x(2x - 1)(3x + 2)$.

i) $f(t) = \frac{t^3}{1 + t^2}$.

j) $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 - x - 2}$.

k) $y = (2x^2 - 3)^2$.

l) $y = \sqrt{x^2 + a^2}$, $a \in \mathbb{R}$.

m) $y = (a + x)\sqrt{a - x}$, $a \in \mathbb{R}$.

n) $y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

Resultados:

a) $y' = 5x^4 + 8x.$

b) $y' = 15x^2 - 2x.$

c) $y' = \frac{3x^2 - 2x}{7}.$

d) $y' = 21x^{\frac{5}{2}} + 10x^{\frac{3}{2}} + 3.$

e) $y' = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{2}{x^2}.$

f) $y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}}.$

g) $y' = 4x(10x^3 + 3x + 1).$

h) $y' = 2(9x^2 + x - 1).$

i) $y' = \frac{t^2(t^2 + 3)}{(1 + t^2)^2}.$

j) $y' = \frac{x^4 - 2x^3 - 6x^2 - 2x + 1}{(x^2 - x - 2)^2}.$

k) $y' = 8x(2x^2 - 3).$

l) $y' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}.$

m) $y' = \frac{-3x + a}{2\sqrt{a-x}}.$

n) $y' = \frac{1}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}.$

2.2 Derivada das funções composta e inversa

2.2.1 Função composta

Se $y = f \circ g$ uma função composta, se g é uma função diferenciável em x_0 e f é diferenciável em $g(x_0)$, a função $y = f \circ g$ é diferenciável em x_0 e

$$y'(x_0) = (f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \times g'(x_0).$$

2.2.2 Função inversa

Se f uma função bijetiva e diferenciável em $x_0 \in]a, b[$, a função bijetiva inversa f^{-1} é diferenciável em $y_0 = f(x_0)$ e

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

2.2.3 Exercícios resolvidos

Exercício 2.7 Considere as funções f e g , reais de variável real, definidas por $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = \frac{2x+5}{x-1}$.

1. Calcule $(f \circ g)'(2)$.
2. Determine uma expressão designatória de $(f \circ g)'(x)$.

Resolução:

1. Sendo,

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ e } g'(x) = -\frac{7}{(x-1)^2},$$

pela derivada da função composta, vem

$$(f \circ g)'(2) = f'[g(2)]g'(2) = \frac{1}{2\sqrt{9}} \cdot (-7) = -\frac{7}{6}.$$

2. Pela derivada da função composta, vem

$$\begin{aligned} (f \circ g)'(x) &= f'[g(x)]g'(x) \\ &= f'\left(\frac{2x+5}{x-1}\right)\left(-\frac{7}{(x-1)^2}\right) \\ &= -\frac{7\sqrt{x-1}}{(x-1)^2\sqrt{2x+5}}. \end{aligned}$$

Exercício 2.8 De uma função f , real de variável real, sabe-se que $f(2) = 4$ e $f'(2) = -6$. Calcule $(f^{-1})'(4)$.

Resolução:

Pela derivada da função inversa, vem

$$(f^{-1})'(4) = \frac{1}{f'(2)} = -\frac{1}{6}.$$

2.2.4 Exercícios propostos

Exercício 2.9 Das funções reais de variável real, f e g , sabe-se que $f(x) = 2x^2 + 1$, $g(5) = 4$ e $g'(5) = 3$. Calcule:

1. $(g^{-1})'(4)$ sendo g uma função invertível;
2. $(f \circ g)'(5)$ e $(f \circ f)'(-1)$.

Resultados:

1. $(g^{-1})'(4) = \frac{1}{3}$;
2. $(f \circ g)'(5) = 48$ e $(f \circ f)'(-1) = -48$.

Exercício 2.10 Considere as funções f e g , reais de variável real, definidas por

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1} \text{ e } g(x) = x^2 - 1.$$

1. Calcule $(f \circ g)'(2)$ e $(g \circ f)'(-2)$.
2. Determine uma expressão designatória de $(f \circ g)'(x)$ e outra de $(g \circ f)'(x)$.

Resultados:

1. $(f \circ g)'(2) = -2$ e $(g \circ f)'(-2) = -\frac{4}{27}$.
2. $(f \circ g)'(x) = -\frac{4x}{(x^2-2)^2}$ e $(g \circ f)'(x) = -\frac{4x+4}{(x-1)^3}$.

2.3 Derivada das funções exponencial e logarítmica

2.3.1 Derivada da função $y = e^x$

A função $y = e^x$ é diferenciável em \mathbb{R} , tendo-se:

$$y' = e^x.$$

Se f uma função diferenciável, na variável x , a derivada da função $y = e^f$ é dada por:

$$y' = f' e^f.$$

2.3.2 Derivada da função $y = a^x$

A função $y = a^x$, com $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, é diferenciável em \mathbb{R} , tendo-se:

$$y' = a^x \ln a.$$

Se f uma função diferenciável, na variável x , a derivada da função $y = a^f$, com $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, é dada por:

$$y' = f' a^f \ln a.$$

2.3.3 Derivada da função $y = \ln x$

A função $y = \ln x$ é diferenciável em \mathbb{R}^+ , tendo-se:

$$y' = \frac{1}{x}.$$

Se f uma função diferenciável, na variável x , a derivada da função $y = \ln f$ é dada por:

$$y' = \frac{f'}{f}.$$

2.3.4 Derivada da função $y = \log_a f$

Seja f uma função diferenciável, na variável x , a derivada da função $y = \log_a f$ com $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, é dada por:

$$y' = \frac{f'}{f \ln a}.$$

2.3.5 Exercícios resolvidos

Exercício 2.11 Utilizando as regras de derivação, calcule a derivada das seguintes funções.

1. $y = e^{4x+3}$.
2. $y = e^{a^2-x^3}$, $a \in \mathbb{R}$.
3. $y = 4e^{\sqrt{x}}$.
4. $y = e^x(1-x^2)$.
5. $y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$.
6. $y = 7^{x^2+2x}$.
7. $y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right)$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
8. $y = \ln x$.
9. $y = \ln(x^2 + 1)$.
10. $y = \log_2\left(\frac{1}{3}x^3 + 4x^2 + 4x + 2\right)$.
11. $y = \ln \frac{1+x}{1-x}$.
12. $y = \ln \frac{1+x^2}{1-x^2}$.

Resolução:

1. $y' = (4x+3)' e^{4x+3} = 4e^{4x+3}$.
2. $y' = (a^2 - x^2)' e^{a^2-x^2} = -2xe^{a^2-x^2}$.
3. $y' = 4(\sqrt{x})' e^{\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}$.
4. $y' = e^x(1-x^2)' + e^x(-2x) = e^x(-x^2 - 2x + 1)$.
5. $y' = \frac{(e^x - 1)'(e^x + 1) - (e^x - 1)(e^x + 1)'}{(e^x + 1)^2}$.
 $= \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2}$.
6. $y' = (x^2 + 2x)' e^{x^2+2x} \ln 7$
 $= (2x + 1)e^{x^2+2x} \ln 7$.

$$\begin{aligned}
 7. \quad y' &= \frac{a}{2} \left[\left(\frac{x}{a} \right)' e^{\frac{x}{a}} - \left(-\frac{x}{a} \right)' e^{-\frac{x}{a}} \right] \\
 &= \frac{a}{2} \left(\frac{1}{a} e^{\frac{x}{a}} + \frac{1}{a} e^{-\frac{x}{a}} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right).
 \end{aligned}$$

$$8. \quad y' = \frac{x'}{x} = \frac{1}{x}.$$

$$9. \quad y' = \frac{(x^2 + 1)'}{x^2 + 1} = \frac{2x}{x^2 + 1}.$$

$$\begin{aligned}
 10. \quad y' &= \frac{\left(\frac{1}{3}x^3 + 4x^2 + 4x + 2 \right)'}{\left(\frac{1}{3}x^3 + 4x^2 + 4x + 2 \right) \ln 2} \\
 &= \frac{x^2 + 8x + 4}{\left(\frac{1}{3}x^3 + 4x^2 + 4x + 2 \right) \ln 2}.
 \end{aligned}$$

$$11. \quad y' = \frac{\left(\frac{1+x}{1-x} \right)'}{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{\frac{2}{(1-x)^2}}{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{2}{1-x^2}.$$

$$12. \quad y' = \frac{\left(\frac{1+x^2}{1-x^2} \right)'}{\frac{1+x^2}{1-x^2}} = \frac{\frac{4x}{(1-x^2)^2}}{\frac{1+x^2}{1-x^2}} = \frac{4x}{1-x^4}.$$

2.3.6 Exercícios propostos

Exercício 2.12 Utilizando as regras de derivação, calcule a derivada das seguintes funções.

$$1. \quad y = e^x (x^2 - 2).$$

$$2. \quad y = e^{-2x} + x^4 + \sqrt{3}.$$

$$3. \quad y = \frac{e^x + 1}{e^x}.$$

$$4. \quad y = \sqrt[3]{e^x + x}.$$

$$5. \quad y = (e^x - x)^5.$$

$$6. \quad y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

$$7. \quad y = 2^x + e^x + 5^{2x}.$$

$$8. \quad y = 4 - 2(e^{3x} + e^{-3x}).$$

$$9. \quad y = \frac{e^x}{(e^x + 1)^5}$$

$$10. \quad y = \ln(1 + x^2).$$

$$11. \quad y = \ln(x - 2)^2.$$

$$12. \quad y = \log_2(x^2 \ln x).$$

Resultados:

1. $y' = e^x(x^2 + 2x - 2)$.
2. $y' = -2e^{-2x} + 4x^3$.
3. $y' = -e^{-x}$.
4. $y' = \frac{e^x + 1}{3\sqrt[3]{(e^x + x)^2}}$.
5. $y' = 5(e^x - x)^4(e^x - 1)$.
6. $y' = \frac{e^{2x} - 1}{2e^x}$.
7. $y' = 2^x \times \ln 2 + e^x + 2 \times 5^{2x} \times \ln 5$.
8. $y' = -6 \frac{e^{6x} - 1}{e^{3x}}$.
9. $y' = \frac{e^x(1 - 4e^x)}{(e^x + 1)^6}$.
10. $y' = \frac{2x}{1 + x^2}$.
11. $y' = \frac{2}{x - 2}$.
12. $y' = \frac{2 \ln x + 1}{x \ln x \ln 2}$.

2.4 Derivadas das funções circulares

2.4.1 Derivada da função $y = \sin x$

A função $y = \sin x$ é diferenciável em \mathbb{R} , tendo-se:

$$y' = \cos x.$$

Sendo f uma função diferenciável, na variável x , a derivada da função $y = \sin f$ é dada por:

$$y' = f' \cos f.$$

2.4.2 Derivada da função $y = \cos x$

A função $y = \cos x$ é diferenciável em \mathbb{R} , tendo-se:

$$y' = -\sin x.$$

Sendo f uma função diferenciável, na variável x , a derivada da função $y = \cos f$ é dada por:

$$y' = -f' \sin f.$$

2.4.3 Derivada da função $y = \operatorname{tg} x$

A função $y = \operatorname{tg} x$ é diferenciável em $D = \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$, tendo-se:

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x} \right)' = \frac{1}{\operatorname{cos}^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x = \operatorname{sec}^2 x.$$

Se f uma função diferenciável, na variável x , a derivada da função $y = \operatorname{tg} f$ é dada por:

$$(\operatorname{tg} f)' = \frac{f'}{\operatorname{cos}^2 f} = f' (1 + \operatorname{tg}^2 f) = f' \operatorname{sec}^2 f.$$

2.4.4 Derivada da função $y = \operatorname{cotg} x$

A função $y = \operatorname{cotg} x$ é diferenciável em $D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, tendo-se:

$$(\operatorname{cotg} x)' = \left(\frac{\operatorname{cos} x}{\operatorname{sen} x} \right)' = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = -1 - \operatorname{cotg}^2 x = -\operatorname{cosec}^2 x.$$

Se f uma função diferenciável, na variável x , a derivada da função $y = \operatorname{cotg} f$ é dada por:

$$(\operatorname{cotg} f)' = -\frac{f'}{\operatorname{sen}^2 f} = -f' (1 + \operatorname{cotg}^2 f) = -f' \operatorname{cosec}^2 f.$$

2.4.5 Exercícios resolvidos

Exercício 2.13 Utilizando as regras de derivação, calcule a derivada das seguintes funções.

1. $y = 4 \operatorname{sen} x + \operatorname{cos}(2x)$.
2. $y = \operatorname{sen}(x^2 + 3x)$.
3. $y = \operatorname{sen}^2 x$.
4. $y = \operatorname{sen} x^2$.
5. $y = \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \operatorname{cos} x}$.
6. $y = t \operatorname{sen} t + \operatorname{cos} t$.
7. $y = \operatorname{sen}(2x) \operatorname{cos}(3x)$.
8. $y = \operatorname{sen}^3 x \operatorname{cos} x$.
9. $y = \operatorname{cos}(x^2 + 4) + \operatorname{sen}^5(2x)$.
10. $y = \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{cos} x}{\operatorname{sen} x + \operatorname{cos} x}$.
11. $y = \operatorname{tg}(2x + 3)$.
12. $y = \frac{1}{4} \operatorname{tg}^2 x$.
13. $y = e^x \ln(\operatorname{sen} x)$.
14. $y = \frac{1}{\operatorname{cotg}(6x)}$.

Resolução:

$$1. y' = 4 \cos x - 2 \operatorname{sen}(2x).$$

$$2. y' = (x^2 + 3x)' \cos(x^2 + 3x) = (2x + 3) \cos(x^2 + 3x).$$

$$3. y' = 2 \operatorname{sen} x (\operatorname{sen} x)' = 2 \operatorname{sen} x \cos x = \operatorname{sen}(2x).$$

$$4. y' = (x^2)' \cos(x^2) = 2x \cos(x^2).$$

$$\begin{aligned} 5. y' &= \frac{(\operatorname{sen} x)'(1 + \cos x) - \operatorname{sen} x(1 + \cos x)'}{(1 + \cos x)^2} \\ &= \frac{1 + \cos x}{(1 + \cos x)^2} \\ &= \frac{1}{1 + \cos x}. \end{aligned}$$

$$6. y' = t' \operatorname{sen} t + t (\operatorname{sen} t)' + (\cos t)' = t \cos t.$$

$$7. y' = 2 \cos(2x) \cos(3x) - 3 \operatorname{sen}(2x) \operatorname{sen}(3x).$$

$$\begin{aligned} 8. y' &= 3 \operatorname{sen}^2 x \cos x \cos x - \operatorname{sen}^3 x \operatorname{sen} x \\ &= \operatorname{sen}^2 x (3 \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x). \end{aligned}$$

9. Temos:

$$\begin{aligned} y' &= -2x \operatorname{sen}(x^2 + 4) + 5 \operatorname{sen}^4(2x) [\operatorname{sen}(2x)]' \\ &= -2x \operatorname{sen}(x^2 + 4) + 10 \operatorname{sen}^4(2x) \cos(2x). \end{aligned}$$

10. Temos:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(\operatorname{sen} x - \cos x)'(\operatorname{sen} x + \cos x) - (\operatorname{sen} x - \cos x)(\operatorname{sen} x + \cos x)'}{(\cos x + \cos x)^2} \\ &= \frac{(\cos x + \operatorname{sen} x)^2 + (\operatorname{sen} x - \cos x)^2}{(\operatorname{sen} x + \cos x)^2} \\ &= \frac{2}{1 + \operatorname{sen}(2x)}. \end{aligned}$$

$$11. y' = \frac{2}{\cos^2(2x + 3)} = 2 \sec^2(2x + 3).$$

$$12. y' = \frac{2}{4} \operatorname{tg} x (\operatorname{tg} x)' = \frac{2}{4} \operatorname{tg} x \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} x \sec^2 x.$$

$$13. y' = e^x \ln(\operatorname{sen} x) + e^x \frac{(\operatorname{sen} x)'}{\operatorname{sen} x} = e^x (\ln(\operatorname{sen} x) + \operatorname{cotg} x).$$

$$14. y' = \frac{-(\operatorname{cotg}(6x))'}{\operatorname{cotg}^2(6x)} = \frac{6}{\cos^2(6x)} = 6 \sec^2(6x).$$

Exercício 2.14 Considere as funções f e g , reais de variável real, definidas por:

$$f(x) = \ln x \quad \text{e} \quad g(x) = \frac{\cos x}{1 - \operatorname{sen} x}.$$

Usando a derivada da função composta, calcule $(f \circ g)'(x)$.

Resultados:

Sendo,

$$f'(x) = \frac{1}{x} \text{ e } g'(x) = \frac{1}{1 - \operatorname{sen} x},$$

temos,

$$\begin{aligned} (f \circ g)'(x) &= [f(g(x))]'(x) \\ &= f'(g(x)) g'(x) \\ &= f'\left(\frac{\cos x}{1 - \operatorname{sen} x}\right) \frac{1}{1 - \operatorname{sen} x} \\ &= \frac{1}{\cos x}. \end{aligned}$$

2.4.6 Exercícios propostos

Exercício 2.15 Utilizando as regras de derivação, calcule a derivada das seguintes funções.

1. $y = 2\sqrt{\cos(2x)}$.
2. $y = a \cos^3\left(\frac{x}{3}\right)$, $a \neq 0$.
3. $y = \operatorname{tg}\left(\frac{4}{x}\right)$.
4. $y = e^{\operatorname{sen} x}$.
5. $y = \operatorname{sen}(\ln x)$.
6. $y = \operatorname{sen} \sqrt{1 - 3^x}$.

Resultados:

1. $y' = -\frac{2 \sin(2x)}{\sqrt{\cos(2x)}}$.
2. $y' = -a \cos^2\left(\frac{x}{3}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{x}{3}\right)$.
3. $y' = -\frac{4}{x^2} \sec^2\left(\frac{4}{x}\right)$.
4. $y' = \cos x e^{\operatorname{sen} x}$.
5. $y' = \frac{\cos(\ln x)}{x}$.
6. $y' = (\sqrt{1 - 3^x})' \cos \sqrt{1 - 3^x} = -\frac{\cos \sqrt{1 - 3^x}}{2\sqrt{1 - 3^x}} 3^x \ln 3$.

Exercício 2.16 Seja f uma função diferenciável num intervalo I que contenha os pontos -1 e 1 e $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = f(\cos x)f(\operatorname{sen} x)$.

1. Calcule a derivada da função g .
2. Mostre que, em qualquer ponto (a, b) do gráfico de g tal que $\operatorname{tg} a = 1$, a reta tangente ao gráfico nesse ponto é horizontal.

Resultados:

1. Usando a regra de derivação do produto e da função composta, vem

$$\begin{aligned} g'(x) &= (f(\cos x))' f(\sin x) + f(\cos x) (f(\sin x))' \\ &= f'(\cos x)(-\sin x) f(\sin x) + f(\cos x) f'(\sin x) \cos x. \end{aligned}$$

2. Sendo,

$$\operatorname{tg} a = 1 \Leftrightarrow \sin a = \cos a,$$

pela alínea anterior $g'(a) = 0$. Assim, a reta tangente ao gráfico de g no ponto de abscissa a é horizontal.

Exercício 2.17 Seja g uma função diferenciável no seu domínio. Considere a função f , real de variável real, definida por $f(x) = -\frac{2}{xg(\sqrt{x})}$. Mostre que a expressão analítica da derivada da função f é dada por

$$f'(x) = \frac{2g(\sqrt{x}) + \sqrt{x}g'(\sqrt{x})}{x^2g^2(\sqrt{x})}.$$

2.5 Derivadas das funções trigonométricas inversas

2.5.1 Derivada da função $y = \arcsen x$

A derivada da função $y = \arcsen x$, com $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$, é dada por:

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Sendo f uma função diferenciável, na variável x , a derivada da função $y = \arcsen f$ é dada por:

$$y' = \frac{f'}{\sqrt{1-f^2}}.$$

2.5.2 Derivada da função $y = \arccos x$

A derivada da função $y = \arccos x$, com $0 < y < \pi$, é dada por:

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Sendo f uma função diferenciável, na variável x , a derivada da função $y = \arccos f$ é dada por:

$$y' = -\frac{f'}{\sqrt{1-f^2}}.$$

2.5.3 Derivada da função $y = \operatorname{arctg} x$

A derivada da função $y = \operatorname{arctg} x$, com $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$, é dada por:

$$y' = \frac{1}{1+x^2}.$$

Se f for uma função diferenciável, na variável x , a derivada da função $y = \operatorname{arctg} f$ é dada por:

$$y' = \frac{f'}{1+f^2}.$$

2.5.4 Derivada da função $y = \operatorname{arccotg} x$

A derivada da função $y = \operatorname{arccotg} x$, com $0 < y < \pi$, é dada por:

$$y' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Se f for uma função diferenciável, na variável x , a derivada da função $y = \operatorname{arctg} f$ é dada por:

$$y' = -\frac{f'}{1+f^2}.$$

2.5.5 Exercícios resolvidos

Exercício 2.18 Utilizando as regras de derivação, calcule a derivada das seguintes funções.

1. $y = \operatorname{arcsen}(x^2)$.
2. $y = (\operatorname{arcsen} x)^2$.
3. $y = \arccos\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)$.
4. $y = \operatorname{arctg}(1 + \cos x)$.
5. $y = \operatorname{arccotg}\left(\frac{3x}{x+1}\right)$.

Resultados:

1. $y' = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$.
2. $y' = 2 \operatorname{arcsen} x (\operatorname{arcsen} x)' = \frac{2 \operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1-x^2}}$.
3. $y' = \frac{\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)'}{\sqrt{1-\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{1-\frac{(x+1)^2}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{-x^2-2x+1}}$.
4. $y' = \frac{(1+\cos x)'}{1+(1+\cos x)^2} = -\frac{\operatorname{sen} x}{1+(1+\cos x)^2}$.

$$5. y' = -\frac{\left(\frac{3x}{x+1}\right)'}{1 + \left(\frac{3x}{x+1}\right)^2} = -\frac{\frac{3}{(x+1)^2}}{1 + \frac{9x^2}{(x+1)^2}} = -\frac{3}{(x+1)^2 + 9x^2}.$$

Exercício 2.19 Considere a função f , real de variável real, definida por:

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \arcsen(1-x).$$

1. Calcule a derivada da função f .
2. Escreva uma equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$.

Resultados:

$$1. f'(x) = -\frac{2}{3} \frac{(1-x)'}{\sqrt{1-(1-x)^2}} = \frac{2}{3\sqrt{1-(1-x)^2}}.$$

2. Sendo,

$$f(1) = \frac{\pi}{2} \text{ e } f'(1) = \frac{2}{3},$$

vem,

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y = \frac{2}{3}x + \frac{3\pi - 4}{6}.$$

Exercício 2.20 Considere a função f , real de variável real, definida por:

$$f(x) = \pi - \arccos(x+1).$$

1. Calcule $f'(-1)$.
2. Sendo $f(-1) = \frac{\pi}{2}$, indique, justificando, o valor de $\left[f^{-1}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]'$.

Resultados:

$$1. \text{ De } f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(x+1)^2}} \text{ vem } f'(-1) = 1.$$

2. Pela derivada da função inversa, vem

$$\left[f^{-1}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]' = \frac{1}{f'(-1)} = 1.$$

2.5.6 Exercícios propostos

Exercício 2.21 Utilizando as regras de derivação, calcule a derivada das seguintes funções.

1. $y = x \arccos x$.
2. $y = \frac{\arcsen x}{x}$.
3. $y = \text{arctg}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$.
4. $y = \arcsen(\ln x)$.

$$5. y = e^{\operatorname{arccotg} x}.$$

$$6. y = \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{5}x}{1-x^2} \right).$$

$$7. y = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}, \quad 0 < x < \pi.$$

Resultados:

$$1. y' = \arccos x - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$2. y' = \frac{x - \sqrt{1-x^2} \operatorname{arcsen} x}{x^2 \sqrt{1-x^2}}.$$

$$3. y' = \frac{2x}{1+x^2}.$$

$$4. y' = \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}.$$

$$5. y' = -\frac{e^{\operatorname{arccotg} x}}{1+x^2}.$$

$$6. y' = \frac{x^2+1}{x^4+3x^2+1}.$$

$$7. y' = \frac{1}{2}.$$

2.6 Derivadas sucessivas

Seja f uma função real de variável real definida em $I \subset \mathbb{R}$ cuja derivada é uma função f' também definida em I . Se a função f' admitir por sua vez uma função derivada, esta é dita segunda derivada ou derivada de segunda ordem de f e representa-se por f'' . Do mesmo modo, define-se a derivada de ordem três ou de terceira ordem, a derivada da segunda derivada, e representa-se por f''' . Generalizando chama-se derivada de ordem n da função f à derivada de primeira ordem da derivada de ordem $n-1$ e designa-se por $f^{(n)}$. Temos:

$$f, \quad f', \quad f'' = (f')', \quad f''' = (f'')' \quad \dots \quad f^{(n)} = (f^{(n-1)})'.$$

2.6.1 Exercícios resolvidos

Exercício 2.22 Seja $y = \ln(x+1)$. Determine $y^{(4)}(x)$.

Resultados:

Temos:

$$y'(x) = \frac{1}{x+1},$$

$$y''(x) = -\frac{1}{(x+1)^2},$$

$$y'''(x) = \frac{2}{(x+1)^3},$$

$$y^{(4)}(x) = -\frac{6}{(x+1)^4}.$$

Exercício 2.23 Sendo Sendo $y = e^x \cos x$, mostre que $y'' - 2y' + 2y = 0$.

Resultados:

Sendo,

$$y'(x) = e^x(\cos x - \operatorname{sen} x) \text{ e } y''(x) = -2e^x \operatorname{sen} x,$$

por substituição na igualdade, obtém-se o pretendido.

Exercício 2.24 Seja $y = \cos(2x)$. Determine a expressão da derivada de ordem n de y .

Resultados:

Observando as derivadas sucessivas,

$$y'(x) = -2 \operatorname{sen}(2x) = 2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y''(x) = -4 \cos(2x) = 4 \cos\left(2x + 2 \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y'''(x) = 8 \operatorname{sen}(2x) = 8 \cos\left(2x + 3 \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y^{(4)}(x) = 16 \cos(2x) = 16 \cos\left(2x + 4 \frac{\pi}{2}\right)$$

verificamos que,

$$y^{(n)}(x) = 2^n \cos\left(2x + n \frac{\pi}{2}\right), \quad n = 1, 2, \dots$$

Exercício 2.25 Seja $y = \ln(x+1)$. Determine a expressão da derivada de ordem n de y .

Resultados:

Observando as derivadas sucessivas,

$$y'(x) = \frac{1}{x+1}$$

$$y''(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}$$

$$y'''(x) = \frac{2}{(x+1)^3}$$

$$y^{(4)}(x) = -\frac{6}{(x+1)^4} = -\frac{3 \times 2 \times 1}{(x+1)^4}$$

$$y^{(5)}(x) = \frac{24}{(x+1)^5} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{(x+1)^5}$$

verificamos que,

$$y^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{(x+1)^n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

2.6.2 Exercícios propostos

Exercício 2.26 Sendo $y = 2\sqrt{x}$, mostre que $y^{(4)}(x) = -\frac{15}{8\sqrt{x^7}}$.

Exercício 2.27 Sendo $y = \ln(\operatorname{sen} x)$, mostre que $y'''(x) = 2 \operatorname{cotg} x \operatorname{cosec}^2 x$.

Exercício 2.28 Sendo $y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right)$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, mostre que $y'' = \frac{y}{a^2}$.

Exercício 2.29 Seja $y = xe^x$. Determine a expressão da derivada de ordem n de y .

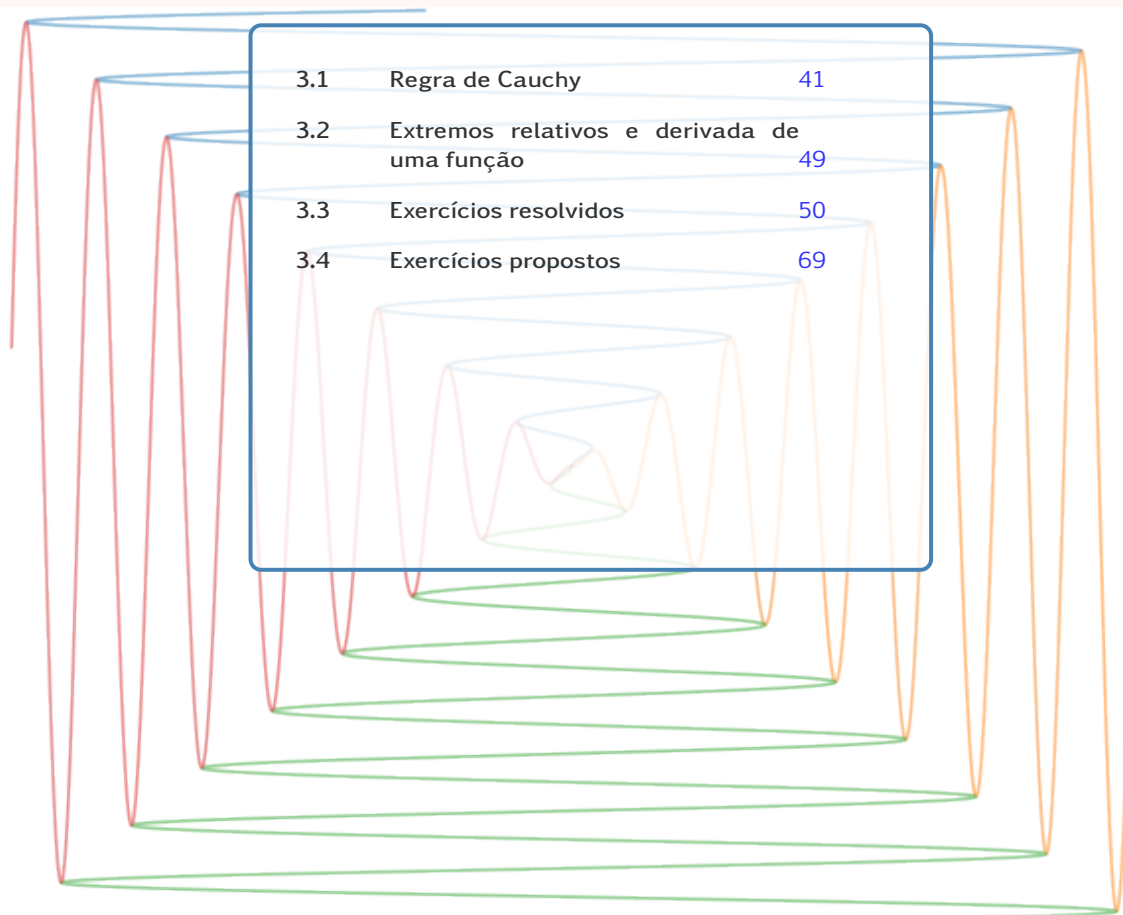
Resultados:

$$y^{(n)}(x) = (x+n)e^x, \quad n = 1, 2, \dots$$

Exercício 2.30 Considere a função f , real de variável real, definida por $f(x) = \frac{1}{2} \cos(2 \arccos x)$. Mostre que a função f verifica a igualdade:

$$(1-x^2)f''(x) - xf'(x) + 4f(x) = 0.$$

3. Aplicações das derivadas



3.1	Regra de Cauchy	41
3.2	Extremos relativos e derivada de uma função	49
3.3	Exercícios resolvidos	50
3.4	Exercícios propostos	69

3.1 Regra de Cauchy

A regra de Cauchy é de grande utilidade no cálculo de limites. Esta regra pode ser usada no levantamento de indeterminações dos tipos $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$. Esta regra pode ser enunciada da seguinte forma:

Se as funções f e g admitem derivada numa vizinhança de um ponto a e se

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0,$$

e existir,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

então,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

- A regra de Cauchy é aplicável quando $a = \pm\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

- É igualmente aplicável no levantamento de indeterminações do tipo $\frac{\infty}{\infty}$, seja a finito ou infinito.
- Se $f'(x)$ e $g'(x)$ tendem conjuntamente para zero, quando x tende para a e se a $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ é aplicável a regra de Cauchy, vem:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(x)}{g''(x)}.$$



Exercícios resolvidos

Exercício 3.1 Calcule os seguintes limites.

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1}.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x^2 - 9}.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4^x - 3^x}{x}.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x}}{\ln(x+1)}.$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1} - x}{(x-1)^2}.$$

$$7. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{xe^x + x}.$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}.$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \ln(x+1) - x - 1}{\operatorname{sen} x}.$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arcsen} x}{\operatorname{tg} x}.$$

Resolução:

Vamos usar a regra de Cauchy no cálculo dos limites.

1.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^3}{1}$$

$$= 1.$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x^2 - 9} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2}{2x}$$

$$= \frac{9}{2}.$$

3.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} &= \frac{0}{0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} \\ &= e^0 \\ &= 1.\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4^x - 3^x}{x} &= \frac{0}{0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (4^x \ln 4 - 3^x \ln 3) \\ &= \log 4 - \log 3 \\ &= \ln\left(\frac{4}{3}\right).\end{aligned}$$

5. Tendo em conta que o domínio da função é $]0, +\infty[$, temos que calcular o limite lateral à direita. Assim,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x}}{\ln(x+1)} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{\ln(x+1)} = \frac{0}{0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{x+1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+1}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{1}{0^+} = +\infty.\end{aligned}$$

6. No cálculo do limite seguinte após a aplicação da regra de Cauchy a indeterminação $\frac{0}{0}$ mantém-se. Assim, iremos aplicar duas vezes a regra de Cauchy. Temos:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1} - x}{(x-1)^2} &= \frac{0}{0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1} - 1}{2(x-1)} = \frac{0}{0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1}}{2} \\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

7.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{xe^x+x} &= \frac{\infty}{\infty} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{(x+1)e^x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{+\infty} \\ &= 0.\end{aligned}$$

8.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} &= \frac{0}{0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \cos x \\ &= 1.\end{aligned}$$

9.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \ln(x+1) - x - 1}{\sin x} &= \frac{0}{0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \frac{1}{x+1} - 1}{\cos x} \\ &= -1.\end{aligned}$$

10.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arcsen} x}{\operatorname{tg} x} &= \frac{0}{0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{1}{\cos^2 x}} \\ &= 1.\end{aligned}$$

Exercício 3.2 Calcule, caso exista, $\lim_{x \rightarrow 0} xe^{\frac{1}{x}}$.

Resolução:

Começamos por calcular o limite da função quando x se aproxima de 0 por valores inferiores a 0. Temos:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} xe^{\frac{1}{x}} = 0 \times e^{-\infty} = 0 \times 0 = 0 \quad (\text{não temos indeterminação}).$$

Calculemos agora o limite da função quando x se aproxima de 0 por valores superiores

a 0. Temos:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} x e^{\frac{1}{x}} &= 0 \times \infty \text{ (Indeterminação)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \frac{\infty}{\infty} \text{ (Indeterminação)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} \\ &= +\infty. \end{aligned}$$

Conclui-se que existem ambos os limites laterais. Como são diferentes, diz-se que não existe $\lim_{x \rightarrow 0} x e^{\frac{1}{x}}$.

Exercício 3.3 Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x - \operatorname{tg} x}$.

Resolução:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x - \operatorname{tg} x} &= \frac{0}{0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{1 - \frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{0}{0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\frac{\cos^2 x - 1}{\cos^2 x}} \quad \text{(simplificando)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x (\cos x - 1)}{(\cos x - 1)(\cos x + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x}{\cos x + 1} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

De notar que em vez de simplificar os cálculos, era também possível aplicar de novo a regra de Cauchy. Em geral, em vez de aplicar várias vezes a regra de Cauchy, devemos simplificar as expressões.

Exercício 3.4 Considere a função g , real de variável real definida por

$$g(x) = \begin{cases} \ln x - e^{x-1} & \text{se } x \geq 1 \\ x^2 - 2x & \text{se } x < 1 \end{cases}.$$

- Determine a derivada da função g .
- Calcule $g'(-1)$ e indique, justificando o valor de $[g^{-1}(3)]'$.

Resolução:

- Vamos calcular a derivada de g para $x > 1$, $x < 1$ e verificar se existe derivada em $x = 1$.

- $x > 1$: $g'(x) = \frac{1}{x} - e^{x-1}$.
- $x < 1$: $g'(x) = 2x - 2$.
- $x = 1$: Calculemos as derivadas laterais em $x = 1$.

$$\begin{aligned} g'(1^+) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln x - e^{x-1} + 1}{x - 1} = \frac{0}{0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{x} - e^{x-1} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g'(1^-) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} = \frac{0}{0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x - 2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Sendo $g'(1^+) = g'(1^-) = 0$, temos $g'(1) = 0$. Assim,

$$g'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - e^{x-1} & \text{se } x \geq 1 \\ 2x - 2 & \text{se } x < 1 \end{cases}.$$

2. Pela alínea anterior, $g'(-1) = -4$. Sendo $g(-1) = 3$, pela derivada da função inversa, vem

$$[g^{-1}(3)]' = \frac{1}{g'(-1)} = -\frac{1}{4}.$$

Exercício 3.5 Considere a função f , real de variável real definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \ln x & \text{se } x > 0 \\ x + \sin(2x) & \text{se } x \leq 0 \end{cases}.$$

1. A função f é diferenciável em $x = 0$?
2. Defina a derivada da função f .

Resolução:

1. Calculemos as derivadas laterais em $x = 0$.

$$\begin{aligned}
 f'(0^+) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 \ln x}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0 \times \infty \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log x}{\frac{1}{x}} = \frac{\infty}{\infty} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} \\
 &= - \lim_{x \rightarrow 0^+} x \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f'(0^-) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x + \operatorname{sen}(2x)}{x} = \frac{0}{0} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^-} [1 + 2 \cos(2x)] \\
 &= 3
 \end{aligned}$$

Sendo $f'(0^+) = 0$ e $f'(0^-) = 3$, não existe $f'(0)$. Assim, a função f não é diferenciável em $x = 0$.

2. Sendo,

- $x > 0$: $g'(x) = 2x \ln x + \frac{x^2}{x} = 2x \ln x + x$
- $x < 0$: $g'(x) = 1 + 2 \cos(2x)$

vem,

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \ln x + x & \text{se } x > 0 \\ 1 + 2 \cos(2x) & \text{se } x < 0 \end{cases} .$$

Exercícios propostos

Exercício 3.6 Calcule os seguintes limites.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{e^x - 4x}$.
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x}$.
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{3x}$.
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 4}{xe^x + x}$.
5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$.

6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x^2}$.
7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x^2}$.
8. $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 e^{\frac{1}{x^2}}$.
9. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\operatorname{sen} x)}{(\pi - 2x)^2}$.
10. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\operatorname{arccotg} x}$.
11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos x\right)}$.
12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(2x) - 2e^x \operatorname{sen} x}{x \operatorname{arctg}(2x)}$.
13. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \operatorname{sen} x}$.

Resultados:

1. 0 (não existe indeterminação).
2. 2.
3. $\frac{2}{3}$.
4. 0.
5. 1.
6. 0.
7. 0.
8. $+\infty$.
9. $-\frac{1}{8}$.
10. 1.
11. $\frac{4}{\pi}$.
12. -1.
13. 2.

Exercício 3.7 Considere a função f , real de variável real, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-x} & \text{se } x < 0 \\ \operatorname{arctg} x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}.$$

1. Mostre que $f'(0) = 1$.
2. Determine a derivada da função f .

Resultados:

1. Sendo $f'(0^-) = f'(0^+) = 1$, vem $f'(0) = 1$.
- 2.

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{(1-x)^2} & \text{se } x < 0 \\ \frac{1}{1+x^2} & \text{se } x \geq 0 \end{cases} .$$

3.2 Extremos relativos e derivada de uma função

Definição 3.1 Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in]a, b[$. Diz-se que:

- f tem um máximo relativo em x_0 (respetivamente mínimo relativo) se e só se $\exists \epsilon > 0: f(x) \leq f(x_0)$ (respetivamente, $f(x) \geq f(x_0)$), $\forall x \in]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[$.
- f tem um máximo relativo em $x = a$ (respetivamente mínimo relativo) se e só se $\exists \epsilon > 0: f(x) \leq f(a)$ (respetivamente, $f(x) \geq f(a)$), $\forall x \in [a, a + \epsilon[$.
- f tem um máximo relativo em $x = b$ (respetivamente mínimo relativo) se e só se $\exists \epsilon > 0: f(x) \leq f(b)$, (respetivamente, $f(x) \geq f(b)$), $\forall x \in]b - \epsilon, b]$.

Um extremo relativo $f(x_0)$ é absoluto se $\forall x \in D_f, f(x) \leq f(x_0)$ ou $f(x) \geq f(x_0)$.



Consideremos, na figura 3.1, o gráfico de uma função real de variável real definida em $[a, b]$ e diferenciável em todos os pontos exceto em x_2, x_3 e x_4 .

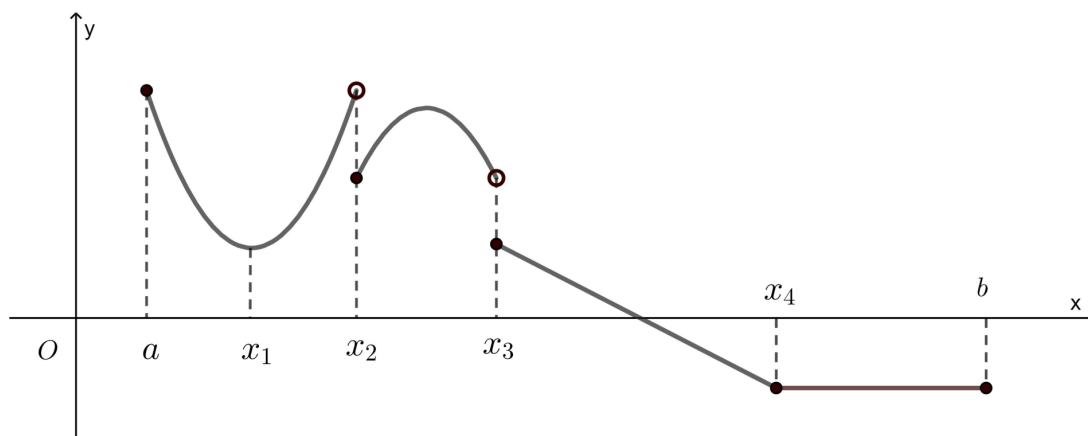


Figura 3.1: Gráfico de uma função definida em $[a, b]$, para análise da existência de derivada em a, b, x_1, x_2, x_3 e x_4 .

- Mínimos relativos em $x = x_1, x = x_2$ e $x \in [x_4, b]$.
- Máximos relativos em $x = a$ e $x \in]x_4, b]$.
- Em $x = x_3$ não existe extremo.

Definição 3.2 Seja f uma função real de variável real definida em $]a, b[$ e $x_0 \in]a, b[$. Diz-se que x_0 é um ponto ou valor crítico de f se $f'(x_0) = 0$.

Teorema 3.1 (Fermat) Seja $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in]a, b[$ um ponto onde f atinge um extremo relativo. Se f é diferenciável em x_0 então $f'(x_0) = 0$.



O teorema anterior não é reversível, ou seja, para que haja extremo relativo é necessário que $f'(x_0) = 0$ mas esta condição não é suficiente. Por exemplo, a função real de variável real f definida por $f(x) = x^3$ tem derivada nula em $x = 0$, no entanto nesse ponto a função não tem extremo.

Definição 3.3 Seja f uma função real de variável real definida em $]a, b[$ e $x_0 \in]a, b[$. Diz-se que x_0 é um *ponto singular* de f se f não for diferenciável em x_0 .



Nas singularidades, a existência de extremo relativo implica a necessidade das derivadas laterais não serem do mesmo sinal.

Resumo

1. Num intervalo aberto $]a, b[$ os extremos relativos de uma função f só podem surgir:
 - nos zeros da função derivada, isto é, nos pontos críticos;
 - nos pontos onde não há derivada, isto é, nos pontos singulares.
2. Num intervalo fechado $[a, b]$ os extremos relativos de uma função f são:
 - os que existem em $]a, b[$;
 - $f(a)$ e $f(b)$ se f decresce ou cresce à direita de a e à esquerda de b .

Determinação dos extremos relativos

1. Seja $x_0 \in]a, b[$ um *ponto crítico* para f , isto é, $f'(x_0) = 0$. Temos:
 - Se $f'(x) < 0 \forall x \in]a, x_0[$ e $f'(x) > 0 \forall x \in]x_0, b[$, então f atinge um mínimo relativo em x_0 .
 - Se $f'(x) > 0 \forall x \in]a, x_0[$ e $f'(x) < 0 \forall x \in]x_0, b[$, então f atinge um máximo relativo em x_0 .
2. Seja $x_0 \in]a, b[$ um *ponto singular* para f , isto é, f não é diferenciável x_0 . Temos:
 - Se $f'(x_0^+) > 0$ ou $(+\infty)$ e $f'(x_0^-) < 0$ ou $(-\infty)$, então f atinge um mínimo relativo em x_0 .
 - Se $f'(x_0^+) < 0$ ou $(-\infty)$ e $f'(x_0^-) > 0$ ou $(+\infty)$, então f atinge um máximo relativo em x_0 .

Determinação dos extremos relativos recorrendo à 2.ª derivada

Seja $y = f(x)$ uma função cuja primeira derivada se anula em x_0 , isto é, $f'(x_0) = 0$. Então, a função tem um máximo relativo em x_0 se $f''(x_0) < 0$ e um mínimo relativo se $f''(x_0) > 0$.

3.3 Exercícios resolvidos

Exercício 3.8 Considere a função f , real de variável real, definida por $f(x) = \frac{1}{2} e^{1-2x}$.

1. Determine a derivada da função f .
2. Determine as coordenadas do ponto P do gráfico da função f , de modo que a reta tangente

ao gráfico nesse ponto tenha declive -1 .

3. Estude o sentido de variação da função f em todo o seu domínio.

Resolução:

$$1. f'(x) = \left(\frac{1}{2} e^{1-2x}\right)' = \frac{1}{2} (e^{1-2x})' = \frac{1}{2} (1-2x)' e^{1-2x} = -e^{1-2x}.$$

2. Sendo,

$$f'(x) = -1 \Leftrightarrow -e^{1-2x} = -1 \Leftrightarrow e^{1-2x} = e^0 \Leftrightarrow 1-2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

vem,

$$P\left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

3. Sendo $f'(x) = -e^{1-2x} < 0, \forall x \in D_f = \mathbb{R}$, a função é estritamente decrescente em todo o seu domínio.

Exercício 3.9 Uma empresa iniciou a sua produção em 2017 com 8 colaboradores. A direção da empresa estima que o crescimento do número de colaboradores nos próximos 10 anos é dado pela função N , real de variável real, definida por

$$N(t) = 8\left(1 + \frac{160t}{t^2 + 16}\right), \quad t \in [0, 10],$$

onde $N(t)$ representa o número de colaboradores t anos após 2017. Determine o ano em que o número de colaboradores será máximo e calcule o seu valor.

Resolução:

De,

$$\begin{aligned} N'(t) &= \left[8\left(1 + \frac{160t}{t^2 + 16}\right)\right]' \\ &= 8\left(1 + \frac{160t}{t^2 + 16}\right)' \\ &= 8 \times 160 \frac{-t^2 + 16}{(t^2 + 16)^2} \end{aligned}$$

vem,

$$N'(t) = 0 \Leftrightarrow t^2 - 16 = 0 \wedge t^2 + 16 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(t = -4 \vee \underbrace{t = 4}_{>0} \right) \wedge t \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow t = 4.$$

t	0	4	10
N'	+	0	-
N	\nearrow	$N(4)$	\searrow

Assim, o número de colaboradores é máximo em 2021, sendo o seu valor:

$$N(4) = 8\left(1 + \frac{160 \times 4}{4^2 + 16}\right) = 168.$$

Exercício 3.10 Pretende-se construir uma caixa, sem tampa, em que a base seja um retângulo cujo comprimento é o dobro da largura.

1. Mostre que, se o volume é de 36 dm^3 (decímetros cúbicos), a área total A da superfície da caixa em dm^2 (decímetros quadrados), é dada por:

$$A(x) = \frac{108 + 2x^3}{x},$$

sendo x a medida da largura do retângulo da base, em dm (decímetros), com $x > 0$.

2. Calcule o valor de x de modo que área total da superfície da caixa seja mínima.

Resolução:

1. Sendo,

$$V = A_{base} \times h \Leftrightarrow 36 = 2x^2 h \Leftrightarrow h = \frac{18}{x^2},$$

vem,

$$\begin{aligned} A(x) &= 2x^2 + x \frac{18}{x^2} + x \frac{18}{x^2} + 2x \frac{18}{x^2} + 2x \frac{18}{x^2} \\ &= \frac{108 + 2x^3}{x}. \end{aligned}$$

2. De,

$$\begin{aligned} A'(x) &= \frac{(108 + 2x^3)'x - (108 + 2x^3)x'}{x^2} \\ &= \frac{4x^3 - 108}{x^2}, \end{aligned}$$

vem,

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 108 = 0 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow x = 3.$$

x	0	3	$+\infty$
A'	-	0	+
A	\searrow	Mínimo	\nearrow

Assim, o valor para o qual a área total da superfície da caixa seja mínima é 3 dm.

Exercício 3.11 Dado o número real positivo S , prove que entre todos os pares possíveis de números reais positivos x e y tais que $x + y = S$, o produto xy é máximo quando $x = y = \frac{1}{2}S$.

Resolução:

De,

$$S = x + y \Leftrightarrow y = S - x,$$

vem,

$$P = xy \Leftrightarrow P = x(S - x) \Leftrightarrow P = Sx - x^2.$$

Assim,

$$P' = 0 \Leftrightarrow S - 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{S}{2} = \frac{1}{2}S.$$

x	0	$\frac{1}{2}S$	$+\infty$
P'	+	0	-
P	\nearrow	$P\left(\frac{1}{2}S\right)$	\searrow

Assim, O produto, P , é máximo em $x = \frac{1}{2}S$. Por fim, de $S = x + y$, vem

$$y = S - x \Leftrightarrow y = S - \frac{1}{2}S \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}S.$$

Mostrámos assim que o produto é máximo quando $x = y = \frac{1}{2}S$.

Exercício 3.12 Um estudo económico concluiu que o consumo de combustível de um determinado automóvel depende da sua velocidade de acordo com o seguinte modelo matemático:

$$C(x) = \frac{180}{x} + \frac{x}{20}, \quad x \in [20, 180],$$

onde $C(x)$ representa o número de litros de combustível consumidos por cada 100 quilómetros percorridos à velocidade constante x (expressa em quilómetros por hora).

1. Determine a derivada da função C .
2. Determine a qual velocidade, entre os 20 km/h e os 180 km/h, deve o automóvel circular para que o seu consumo de combustível seja o menor possível.

Resolução:

$$1. \quad C'(x) = -\frac{180}{x^2} + \frac{1}{20}.$$

2. Determinemos a solução da equação $C'(x) = 0$. Temos:

$$\begin{aligned} C'(x) = 0 &\Leftrightarrow -\frac{180}{x^2} + \frac{1}{20} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{-20 \times 180 + x^2}{20x^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 = 3600 \wedge 20x^2 \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \left(x = -60 \vee x = \underbrace{60}_{>0} \right) \wedge x \neq 0 \\ &\Leftrightarrow x = 60 \text{ km/h.} \end{aligned}$$

Vamos recorrer à 2.^a derivada para classificar o ponto crítico. Para tal, calculemos a segunda derivada da função C , isto é, $C''(x)$. Temos:

$$C''(x) = -\frac{180'x^2 - 180(x^2)'}{x^4} = -\frac{0 - 360x}{x^4} = \frac{360}{x^3}.$$

Sendo, $C''(x) = \frac{360}{60^3} > 0$, a função C atinge o seu valor mínimo em $x = 60$ km/h.

Exercício 3.13 Considere as funções reais de variável real, f , e a sua derivada f' , definidas e contínuas em todo o \mathbb{R} . Suponha que a segunda derivada de f é $f''(x) = e^x(x^2 - 7x + 10)$. Justifique a afirmação:

“Se a função f tem um extremo no intervalo $]2, 5[$ então esse extremo é um máximo”.

Resolução:

Sendo $f''(x) < 0, \forall x \in]2, 5[$, a afirmação é verdadeira.

Exercício 3.14 Uma empresa estima que o volume de negócios, em milhares de euros, efetuado t anos após iniciar a sua atividade é dado pela função real de variável real V , definida por

$$V(t) = \frac{1}{3}t^3 - 4t^2 + 15t, t \geq 0.$$

Se a empresa iniciou a sua atividade no ano 2007, em que ano é que registou o maior volume de negócios? E o menor?

Resolução:

Sendo,

$$V'(t) = t^2 - 8t + 15$$

temos,

$$V'(t) = 0 \Leftrightarrow t^2 - 8t + 15 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{8 \pm \sqrt{4}}{2} \Leftrightarrow t = 3 \vee t = 5.$$

t	0		3		5	$+\infty$
V'	+	+	0	-	0	+
V	$V(0) = 0$	\nearrow	$V(3)$	\searrow	$V(5)$	\nearrow

A empresa registou o menor volume de negócios em 2012 e o maior volume de negócios em 2010.

Exercício 3.15 Considere a função f , real de variável real, definida por $f(x) = \frac{-x^2 - x + 11}{e^x}$.

1. Mostre que $f'(x) = e^{-x}(x^2 - x - 12)$.
2. A função f tem pontos singulares? Justifique.
3. Estude a função f quanto à sua monotonia e existência de extremos relativos.
4. Escreva uma equação da recta tangente ao gráfico de f em $x = 1$.
5. Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Resolução:

1. Pelas regras de derivação, vem

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(-x^2 - x + 11)' e^x - (-x^2 - x + 11)(e^x)'}{(e^x)^2} \\ &= \frac{(-2x - 1)e^x - (-x^2 - x + 11)e^x}{e^{2x}} \\ &= \frac{(-2x - 1 + x^2 + x - 11)e^x}{e^{2x}} \\ &= \frac{x^2 - x - 12}{e^x} \\ &= e^{-x}(x^2 - x - 12). \end{aligned}$$

2. Sendo $D'_f = \mathbb{R} = D_f$, não existem pontos singulares.

3. Calculando os zeros da derivada, vem:

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow e^{-x}(x^2 - x - 12) = 0 \\ &\Leftrightarrow \underbrace{e^{-x} = 0}_{\text{Equação Impossível}} \vee x^2 - x - 12 = 0 \\ &\Leftrightarrow x \in \{\} \vee x = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{2} \\ &\Leftrightarrow x = -3 \vee x = 4. \end{aligned}$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função f , temos:

x	$-\infty$	-3		4	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	\nearrow	$f(-3)$	\searrow	$f(4)$	\nearrow

Assim, podemos concluir que a função f :

- é crescente em $]-\infty, 3]$ e em $[4, +\infty[$;
- é decrescente em $[-3, 4]$;
- atinge um máximo relativo em $x = -3$;
- atinge um mínimo relativo em $x = 4$.

$$\begin{aligned} 4. \quad y - f(1) = f'(1)(x - 1) &\Leftrightarrow y - \frac{9}{e} = -\frac{12}{e}(x - 1) \\ &\Leftrightarrow y = -\frac{12}{e}x + \frac{21}{e}. \end{aligned}$$

5. Temos:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2 - x + 11}{e^x} \\ &= \frac{\infty}{\infty} \text{ (Indeterminação)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x - 1}{e^x} \\ &= \frac{\infty}{\infty} \text{ (Indeterminação)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{e^x} \\ &= \frac{-2}{+\infty} = 0.\end{aligned}$$

Obs.: Usamos duas vezes a regra de Cauchy.

Exercício 3.16 Considere a função f , real de variável real, definida por $f(x) = x^2 e^{1-x} + 1$.

1. Determine a derivada da função f .
2. A função f tem pontos singulares? Justifique.
3. Estude a função f quanto à sua monotonia e existência de extremos relativos.
4. Escreva uma equação da reta tangente ao gráfico de f em $x = 1$.
5. Calcule $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{x - 1}$.

Resolução:

$$\begin{aligned}1. \quad f'(x) &= (x^2)'e^{1-x} - x^2(1-x)'e^{1-x} \\ &= 2xe^{1-x} - x^2e^{1-x} \\ &= (2x - x^2)e^{1-x}.\end{aligned}$$

2. Sendo $D'_f = \mathbb{R} = D_f$, não existem pontos singulares.
3. Calculando os zeros da derivada, vem:

$$\begin{aligned}f'(x) = 0 &\Leftrightarrow (2x - x^2)e^{1-x} = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x - x^2 = 0 \vee \underbrace{e^{1-x} = 0}_{\text{Equação impossível}} \\ &\Leftrightarrow x(2 - x) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2.\end{aligned}$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da

função f , vem:

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	\searrow	$f(0)$	\nearrow	$f(2)$	\searrow

Assim, podemos concluir que a função f :

- é decrescente em $]-\infty, 0]$ e $[2, +\infty[$;
- é crescente em $[0, 2]$;
- atinge um mínimo relativo em $x = 0$;
- atinge um máximo relativo em $x = 2$.

4. $y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y - 2 = x - 1 \Leftrightarrow y = x + 1$.

5. Temos:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 e^{1-x} + 1 - 2}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 e^{1-x} - 1}{x - 1} \\ &= \frac{0}{0} \text{ (Indeterminação)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (2x - x^2) e^{1-x} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Exercício 3.17 Considere a função f , real de variável real, definida por $f(x) = \frac{e^x}{2x - 1}$.

1. Determine a derivada da função f .
2. Estude a função f quanto à sua monotonia e existência de extremos relativos.
3. Escreva a equação reduzida da recta que passa pelo ponto $A(3,0)$ e que é paralela à reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa $x = 0$.
4. Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Resolução:

$$\begin{aligned} 1. \quad f'(x) &= \frac{e^x(2x - 1) - 2e^x}{(2x - 1)^2} \\ &= \frac{e^x(2x - 1 - 2)}{(2x - 1)^2} \\ &= \frac{e^x(2x - 3)}{(2x - 1)^2}. \end{aligned}$$

2. Calculando os zeros da derivada, vem:

$$\begin{aligned}
 f'(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{e^x(2x-3)}{(2x-1)^2} = 0 \\
 &\Leftrightarrow e^x(2x-3) = 0 \wedge (2x-1)^2 \neq 0 \\
 &\Leftrightarrow \left(\underbrace{e^x = 0}_{\text{Eq. impossível}} \vee 2x-3=0 \right) \wedge x \neq \frac{1}{2} \\
 &\Leftrightarrow \left(x \in \{\} \vee x = \frac{3}{2} \right) \wedge x \neq \frac{1}{2} \\
 &\Leftrightarrow x = \frac{3}{2}.
 \end{aligned}$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função f , vem:

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$	$+\infty$
f'	-	N.D.	-	0	+
f	\searrow	N.D.	\searrow	$f\left(\frac{3}{2}\right)$	\nearrow

Assim, podemos concluir que a função f :

- é decrescente em $\left] -\infty, \frac{1}{2} \right[$ e $\left] \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right]$;
- é crescente em $\left[\frac{3}{2}, +\infty \right[$;
- atinge um mínimo relativo em $x = \frac{3}{2}$.

- 3.
- $y = mx + b \Leftrightarrow y = f'(0)x + b \Leftrightarrow y = -3x + b$
 - $0 = -3 \times 3 + b \Leftrightarrow b = 9$
 - $y = -3x + 9$

4.

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2x-1} = \frac{\infty}{\infty} \text{ (Indeterminação)} \\
 &= \frac{e^x}{2} \text{ (Regra de Cauchy)} \\
 &= \frac{e^{+\infty}}{2} = +\infty.
 \end{aligned}$$

Exercício 3.18 Seja f a função definida em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ por $f(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^2 \left[\ln(x^2) - 1 \right]$.

1. Determine a derivada da função f .
2. Estude a função f quanto à sua monotonia e existência de extremos relativos.
3. Escreva uma equação da reta tangente ao gráfico de f em $x = 2$.
4. Calcule $\lim_{x \rightarrow \sqrt{e}} \frac{f(x)}{x - \sqrt{e}}$.

Resolução:

$$\begin{aligned}
 1. \quad f'(x) &= 2 \frac{x}{2} \frac{1}{2} [\ln(x^2) - 1] + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \frac{2x}{x^2} \\
 &= \frac{x}{2} [\ln(x^2) - 1] + \frac{x}{2} \\
 &= \frac{x}{2} \ln(x^2).
 \end{aligned}$$

2. Calculando os zeros da derivada, vem:

$$\begin{aligned}
 f'(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{x}{2} \ln(x^2) = 0 \\
 &\Leftrightarrow \frac{x}{2} = 0 \vee \ln(x^2) = 0 \\
 &\Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 = e^0 \\
 &\Leftrightarrow \underbrace{x = 0 \vee x = -1 \vee x = 1}_{\notin D_f} \\
 &\Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1.
 \end{aligned}$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função f , vem:

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$N.D.$	$-$	0	$+$
$f(x)$	\searrow	$f(-1)$	\nearrow	$N.D.$	\searrow	$f(1)$	\nearrow

Assim, podemos concluir que a função f :

- é decrescente em $]-\infty, -1]$ e $]0, 1]$;
- é crescente em $[-1, 0[$ e $[1, +\infty[$;
- atinge um mínimo relativo em $x = -1$ e $x = 1$.

$$3. \quad y - f(2) = f'(2)(x - 2) \Leftrightarrow y + 1 - \ln 4 = \ln 4(x - 2)$$

$$\Leftrightarrow y = \ln 4x - \ln 4 - 1.$$

4. Temos:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \sqrt{e}} \frac{f(x)}{x - \sqrt{e}} &= \lim_{x \rightarrow \sqrt{e}} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2 [\ln(x^2) - 1]}{x - \sqrt{e}} \\
 &= \frac{0}{0} \text{ (Indeterminação)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \sqrt{e}} \frac{x}{2} \ln(x^2) \text{ (Regra de Cauchy)} \\
 &= \frac{\sqrt{e}}{2}.
 \end{aligned}$$

Exercício 3.19 Considere a função f , real de variável real, definida por $f(x) = \sqrt{-x^3 + 3x}$.

1. Determine o domínio da função f .
2. Calcule a função derivada f' .
3. Estude a função f quanto à existência de extremos relativos, em todo o seu domínio.
4. Determine uma equação da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abscissa $x = 2$.
5. Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(f(x))^2}{x}$.

Resolução:

$$1. D_f = \{x \in \mathbb{R} : -x^3 + 3x \geq 0\} =]-\infty, -\sqrt{3}] \cup [0, \sqrt{3}[.$$

Cálculos auxiliares:

$$-x^3 + 3x \geq 0 \Leftrightarrow x(-x^2 + 3) \geq 0$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$	$+\infty$
x	-	-	-	0	+	+	+
$-x^3 + 3$	-	0	+	+	+	0	-
$x(-x^3 + 3)$	+	0	-	0	+	0	-

$$2. f'(x) = \left[(-x^3 + 3x)^{\frac{1}{2}} \right]'$$

$$= \frac{1}{2} (-x^3 + 3x)^{1-\frac{1}{2}} (-x^3 + 3x)'$$

$$= \frac{-3x^2 + 3}{2\sqrt{-x^3 + 3x}}.$$

3. Calculando os zeros da derivada, vem:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 3 = 0 \wedge -x^3 + 3x > 0$$

$$\Leftrightarrow (x = -1 \vee x = 1) \wedge x \in]-\infty, -\sqrt{3}[\cup]0, \sqrt{3}[$$

$$\Leftrightarrow x = 1.$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$		0		1		$\sqrt{3}$
f'	-	<i>N.D.</i>	<i>N.D.</i>	+	0	-	<i>N.D.</i>	
f	\searrow	$f(-\sqrt{3})$	$f(0)$	\nearrow	$f(1)$	\searrow	$f(\sqrt{3})$	

A função f admite mínimos relativos em $x = -\sqrt{3}$, $x = 0$, $x = \sqrt{3}$ e admite um máximo relativo em $x = 1$.

$$4. y - f(-2) = f'(-2)(x + 2)$$

$$\Leftrightarrow y - \sqrt{2} = -\frac{9\sqrt{2}}{4}(x + 2)$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{9\sqrt{2}}{4}x - \frac{7\sqrt{2}}{2}.$$

5. Temos:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(f(x))^2}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^3 + 3x}{x} \\ &= \frac{0}{0} \text{ (Indeterminação)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (-3x^2 + 3) \text{ (Regra de Cauchy)} \\ &= 3. \end{aligned}$$

Exercício 3.20 Considere a função f , real de variável real, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \ln(1-x) & \text{se } x < 0 \\ 2xe^{-\frac{1}{2}x} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}.$$

1. Determine a derivada da função f .
2. A função f atinge um extremo relativo em $x = 0$? Justifique.
3. Estude a função f quanto à sua monotonia e existência de extremos relativos.
4. Escreva uma equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa $x = -1$.

Resolução:

1. Vamos calcular a derivada da função f para $x < 0$, $x > 0$ e verificar se existe derivada em $x = 0$.

$$\bullet x < 0: f'(x) = \frac{(1-x)}{1-x} = -\frac{1}{1-x}.$$

$$\begin{aligned} \bullet x > 0: f'(x) &= 2\left(xe^{-\frac{1}{2}x}\right)' \\ &= 2\left(e^{-\frac{1}{2}x} - \frac{1}{2}xe^{-\frac{1}{2}x}\right) \\ &= (2-x)e^{-\frac{1}{2}x}. \end{aligned}$$

- $x = 0$ (calculemos as derivadas laterais em $x = 0$):

$$\begin{aligned} f'(0^-) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\ln(1-x)}{x} = \frac{0}{0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} -\frac{1}{1-x} \text{ (Regra de Cauchy)} \\ &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f'(0^+) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \\
 &= \frac{2xe^{-\frac{1}{2}x}}{x} = \frac{0}{0} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} 2e^{-\frac{1}{2}x} \\
 &= 2
 \end{aligned}$$

Sendo $f'(0^-) \neq f'(0^+)$, não existe $f'(0)$. Assim,

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{1-x} & \text{se } x < 0 \\ (2-x)e^{-\frac{1}{2}x} & \text{se } x > 0 \end{cases}.$$

2. Sendo $f'(0^-) < 0$ e $f'(0^+) > 0$, a função f admite um mínimo relativo em $x = 0$.

3.

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 0 \\
 \Leftrightarrow &\underbrace{\left(-\frac{1}{1-x} = 0 \wedge x < 0\right)}_{\text{Eq. Impossível}} \vee \left[\left((2-x)e^{-\frac{1}{2}x} = 0 \wedge x > 0\right)\right] \\
 \Leftrightarrow &\left(2-x = 0 \vee \underbrace{e^{-\frac{1}{2}x} = 0}_{\text{Eq. Impossível}}\right) \wedge x > 0 \\
 \Leftrightarrow &x = 2.
 \end{aligned}$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função f , vem:

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
f'	-	N.D.	+	0	-
f	\searrow	$f(0)$	\nearrow	$f(2)$	\searrow

Assim,

- a função f é decrescente nos intervalos de números reais $]-\infty, 0]$ e $[2, +\infty[$;
- a função f é crescente no intervalo de números reais $[0, 2]$;
- a função f atinge um mínimo relativo em $x = 0$ (ponto singular);
- a função f atinge um máximo relativo em $x = 2$.

4. $y - f(-1) = f'(-1)(x+1) \Leftrightarrow y - \ln 2$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{2}(x+1) \Leftrightarrow y \\
 &= -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \ln 2.
 \end{aligned}$$

Exercício 3.21 Considere a função f , real de variável real, definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{2x} - e^x + 2 & \text{se } x \leq 0 \\ x - \ln(x+2) & \text{se } x > 0 \end{cases}.$$

1. Determine a derivada da função f .
2. Averigue se a função f atinge um extremo relativo em $x = 0$ e, em caso afirmativo, classifique-o.
3. Estude a função f quanto à existência de extremos relativos no intervalo $]-\infty, 0[$.
4. Escreva uma equação da reta tangente ao gráfico de f em $x = 1$.
5. Calcule o limite: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x e^x + x + 4}{2x + 4}$.

Resolução:

1. Vamos calcular a derivada da função f para $x < 0$, $x > 0$ e verificar se existe derivada em $x = 0$.
 - $x < 0$: $f'(x) = 2e^{2x} - e^x$.
 - $x > 0$: $f'(x) = 1 - \frac{1}{x+2}$.
 - $x = 0$: (calculemos as derivadas laterais em $x = 0$)

$$\begin{aligned} f'(0^-) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{2x} - e^x + 2 - 2}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{2x} - e^x}{x} = \frac{0}{0} \\ &= \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0^-} (2e^{2x} - e^x)}_{\text{regra de Cauchy}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(0^+) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \ln(x+2) - 2}{x} = \frac{0}{0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{0 - \ln 2}{0^+} \\ &= -\infty \end{aligned}$$

Sendo $f'(0^-) \neq f'(0^+)$, não existe $f'(0)$. Assim,

$$f'(x) = \begin{cases} 2e^{2x} - e^x & \text{se } x < 0 \\ 1 - \frac{1}{x+2} & \text{se } x > 0 \end{cases}.$$

2. Sendo $f'(0^-) = 1 > 0$ e $f'(0^+) = -\infty$, a função f atinge um máximo relativo em $x = 0$.

3. Calculemos os zeros da derivada para $x < 0$:

$$\begin{aligned}
 f'(x) = 0 &\Leftrightarrow 2e^{2x} - e^x = 0 \\
 &\Leftrightarrow e^x(2e^x - 1) = 0 \\
 &\Leftrightarrow \underbrace{e^x = 0}_{\text{Eq. Impossível}} \vee 2e^x - 1 = 0 \\
 &\Leftrightarrow 2e^x - 1 = 0 \\
 &\Leftrightarrow e^x = \frac{1}{2} \\
 &\Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \\
 &\Leftrightarrow x = \ln 1 - \ln 2 \\
 &\Leftrightarrow x = -\ln 2.
 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	$-\ln 2$	0
f'	$-$	0	$+$
f	\searrow	$f(-\ln 2)$	\nearrow

A função f atinge um mínimo relativo em $x = -\ln 2$.

$$\begin{aligned}
 4. \quad y - f(1) &= f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y - (1 - \ln 3) = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3} \\
 &\Leftrightarrow y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3} - \ln 3.
 \end{aligned}$$

5. Temos:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xe^x + x + 4}{2x + 4} &= \frac{\infty}{\infty} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)e^x + 1}{2} \quad (\text{regra de Cauchy}) \\
 &= \frac{+\infty}{2} \\
 &= +\infty.
 \end{aligned}$$

Exercício 3.22 Considere a função f , real de variável real, definida por $f(x) = xe^{|1-x^2|}$.

1. A função f é diferenciável em $x = -1$ e $x = 1$? Justifique.
2. Determine a derivada da função f .
3. Estude a função f quanto à existência de extremos relativos.

Resolução:

1. Começemos por desdobrar o módulo na função f .

$$f(x) = \begin{cases} xe^{1-x^2} & \text{se } x \in [-1, 1] \\ xe^{-1+x^2} & \text{se } |x| > 1 \end{cases}.$$

Cálculo das derivadas laterais em $x = -1$.

$$\begin{aligned} f'(-1^-) &= \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{xe^{-1+x^2} + 1}{x + 1} = \frac{0}{0} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^-} (1 + 2x^2)e^{-1+x^2} \\ &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(-1^+) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{xe^{1-x^2} + 1}{x + 1} = \frac{0}{0} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^+} (1 - 2x^2)e^{1-x^2} \\ &= -1 \end{aligned}$$

Cálculo das derivadas laterais em $x = 1$.

$$\begin{aligned} f'(1^-) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{xe^{1-x^2} - 1}{x - 1} = \frac{0}{0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \underbrace{(1 - 2x^2)e^{1-x^2}}_{\text{Regra de Cauchy}} \\ &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(1^+) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{xe^{1-x^2} - 1}{x - 1} = \frac{0}{0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \underbrace{(1 + 2x^2)e^{-1+x^2}}_{\text{Regra de Cauchy}} \\ &= 3 \end{aligned}$$

Sendo $f'(-1^-) \neq f'(-1^+)$, a função não é diferenciável em $x = -1$. Do mesmo modo, sendo $f'(1^-) \neq f'(1^+)$, a função não é diferenciável em $x = 1$.

2. Tendo em conta os cálculos efetuados na alínea anterior, vem

$$f'(x) = \begin{cases} (1 - 2x^2)e^{1-x^2} & \text{se } x \in]-1, 1[\\ (1 + 2x^2)e^{-1+x^2} & \text{se } |x| > 1 \end{cases}.$$

3. Calculemos os zeros da derivada da função f .

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow & \left((1 - 2x^2)e^{1-x^2} = 0 \wedge x \in]-1, 1[\right) \vee \\ & \underbrace{\left((1 + 2x^2)e^{-1+x^2} = 0 \wedge |x| > 1 \right)}_{\text{Condição Impossível}} \\ \Leftrightarrow & (1 - 2x^2)e^{1-x^2} = 0 \wedge x \in]-1, 1[\\ \Leftrightarrow & (1 - 2x^2 = 0 \vee e^{1-x^2} = 0) \wedge x \in]-1, 1[\\ \Leftrightarrow & x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \wedge x \in]-1, 1[\\ \Leftrightarrow & x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

x	$-\infty$	-1		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		1	$+\infty$
f'	$+$	$N.D.$	$-$	0	$+$	0	$-$	$N.D.$	$+$
f	\nearrow	$f(-1)$	\searrow	$f(-\frac{\sqrt{2}}{2})$	\nearrow	$f(\frac{\sqrt{2}}{2})$	\searrow	$f(1)$	\nearrow

Assim, concluímos que a função f atinge máximos relativos em $x = -1$ e $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e mínimos relativos em $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $x = 1$. De notar que os pontos $x = \pm 1$ são pontos singulares.

Exercício 3.23 Considere a função f , real de variável real, definida por

$$f(x) = \begin{cases} -1 + 4x + x^2 & \text{se } x \leq 0 \\ -\operatorname{arctg} x & \text{se } x > 0 \end{cases}.$$

1. A função f é diferenciável em $x = 0$? Justifique.
2. A função f atinge um extremo relativo em $x = 0$? Justifique.
3. Determine a derivada da função f .
4. Estude a função f quanto à existência de extremos relativos.

Resolução:

1. Calculemos as derivadas laterais em $x = 0$.

$$\begin{aligned} f'(0^-) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-1 + 4x + x^2 + 1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{4x + x^2}{x} = \frac{0}{0} \\ &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(0^+) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\arctan x + 1}{x} = \frac{0}{0} \\ &= \frac{1}{0^+} \\ &= +\infty \end{aligned}$$

Sendo $f'(0^-) \neq f'(0^+)$, a função não é diferenciável em $x = 0$.

2. Sendo $f'(0^-) = 4 > 0$ e $f'(0^+) = +\infty$, a função f não atinge um extremo relativo em $x = 0$ (as derivadas laterais não mudam de sinal).
 3. Tendo em conta que a função f não tem derivada em $x = 0$, vem

$$f'(x) = \begin{cases} 4 + 2x & \text{se } x < 0 \\ -\frac{1}{1 + x^2} & \text{se } x > 0 \end{cases}.$$

4. Calculemos os zeros da derivada da função f' .

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow (4 + 2x = 0 \wedge x < 0) \vee \underbrace{\left(-\frac{1}{1 + x^2} = 0 \wedge x > 0\right)}_{\text{Condição Impossível}} \\ \Leftrightarrow 4 + 2x = 0 \wedge x < 0 \\ \Leftrightarrow x = -2. \end{aligned}$$

x	$-\infty$	-2		0	$+\infty$
f'	$-$	0		N.D.	$-$
f	\searrow	$f(-2)$	\nearrow		\searrow

Conclui-se que a função f atinge um mínimo relativo em $x = -2$. De notar que na singularidade $x = 0$ não há extremo.

Exercício 3.24 Considere a função g , real de variável real, definida por

$$g(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(x-1) & \text{se } x \leq 1 \\ x e^{-\frac{1}{x}} & \text{se } x > 1 \end{cases}.$$

1. Indique, justificando, se a função g é contínua em $x = 1$.
2. Determine a derivada lateral à esquerda e à direita da função g em $x = 1$.
3. A função g atinge um extremo relativo em $x = 1$? Justifique.
4. Mostre que, no intervalo $]1, +\infty[$, a função g é estritamente crescente.

Resolução:

1. g é contínua em $x = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = g(1)$. Sendo, $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \frac{1}{e}$, não existe $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$. Assim, g não é contínua em $x = 1$.
2. $g'(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = 1$ e $g'(1^+) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = +\infty$.
3. Pela alínea anterior a função g não atinge um extremo relativo em $x = 1$ (as derivadas laterais não mudam de sinal).
4. Sendo $g'(x) = (1 + \frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x}} > 0$, para $x > 1$, a função g é estritamente crescente no intervalo $]1, +\infty[$.

Exercício 3.25 Considere a função g , real de variável real, definida por

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}(x) & \text{se } x \leq 0 \\ \ln(2e^x - 1) & \text{se } x > 0 \end{cases}.$$

1. Averigue se g é contínua em $x = 0$.
2. A função g é diferenciável em $x = 0$? Justifique.
3. Prove que g atinge um máximo relativo em $x = 0$.
4. Mostre que g é estritamente crescente no intervalo $]0, +\infty[$.
5. Calcule o valor de $(f \circ g)'(0)$.
6. Calcule $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.

Resolução:

1. g é contínua em $x = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = g(0)$. Sendo, $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \frac{\pi}{2}$ e $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 0$, não existe $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$. Assim, g não é contínua em $x = 0$.
2. g não é diferenciável em $x = 0$ porque não é contínua em $x = 0$.
3. Sendo $g'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g(x) - g(0)}{x} = 1 > 0$ e $g'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x} = -\infty$, a função g atinge um máximo relativo em $x = 0$.

4. Para $x \in]0, +\infty[$, $g'(x) = \frac{2e^x}{2e^x - 1} > 0$, portanto g é estritamente crescente em $]0, +\infty[$.
5. $(f \circ g)'(0) = f'[g(0)]g'(0) = f'(-2) \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{10}$.
6. $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}(x) \right]$
 $= \frac{\pi}{2} + \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg}(x) = \frac{\pi}{2} + \left(-\frac{\pi}{2} \right) = 0$.

3.4 Exercícios propostos

Exercício 3.26 Estude a monotonia e a existência de extremos relativos das funções reais, de variável real, definidas por:

1. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$.
2. $f(x) = 2x^2 - x^4$.
3. $g(x) = \frac{x^4 + 1}{x^2}$.
4. $h(x) = 1 + 3x^2 e^{-x}$.
5. $f(x) = x^2(3 - 2 \ln x)$.
6. $f(x) = e^x(x^2 - 4x + 5)$.
7. $f(x) = \frac{x}{\ln x}$.
8. $f(x) = x - 1 + e^{-\frac{x}{2}}$.
9. $f(x) = \begin{cases} x \ln x & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$.
10. $f(x) = 1 - x + \operatorname{sen}(2x)$, $x \in [0, \pi]$.

Resultados:

1. f é crescente em $]-\infty, 0]$ e $[2, +\infty[$, decrescente em $[0, 2]$, atinge um máximo relativo em $x = 0$ e um mínimo relativo em $x = 2$.
2. f é crescente em $]-\infty, -1]$ e $[0, 1]$, decrescente em $[-1, 0]$ e $[1, +\infty[$, atinge um mínimo relativo em $x = 0$ e máximos relativos em $x = -1$ e $x = 1$.
3. g é decrescente em $]-\infty, -1]$ e $[0, 1]$, crescente em $[-1, 0[$ e $[1, +\infty[$, tem mínimos relativos em $x = -1$ e $x = 1$.
4. h é decrescente em $]-\infty, 0]$ e $[2, +\infty[$, crescente em $[0, 2]$, atinge um mínimo relativo em $x = 0$ e um máximo relativo em $x = 2$.
5. f é crescente em $]0, e]$, decrescente em $[e, +\infty[$ e atinge um máximo relativo em $x = e$.
6. f é estritamente crescente em \mathbb{R} , f não tem extremos relativos.

7. f é decrescente em $]0, 1[$ e $]1, e[$, crescente em $[e, +\infty[$ e atinge um mínimo relativo em $x = e$.
8. f é decrescente em $] -\infty, -\ln 4[$ e crescente em $[-\ln 4, +\infty[$, f atinge um mínimo relativo em $x = -\ln 4$.
9. f é decrescente em $\left]0, \frac{1}{e}\right[$ e crescente em $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right[$, f atinge um máximo relativo em $x = 0$ e um mínimo relativo em $x = \frac{1}{e}$.
10. f é crescente em $\left]0, \frac{\pi}{6}\right[$ e $\left[\frac{5\pi}{6}, \pi\right[$, decrescente em $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$, f tem mínimos relativos em $x = 0$ e $x = \frac{5\pi}{6}$, f tem máximos relativos em $x = \frac{\pi}{6}$ e $x = \pi$.

Exercício 3.27 Numa fábrica, o custo total da produção mensal de x centenas de peças, expresso em milhares de euros, é dado pela função C , real de variável real, definida por

$$C(x) = \frac{1}{3}x^3 - 5x^2 + 24x + 10, \quad x \geq 0.$$

1. Usando as regras de derivação, determine a derivada da função C e calcule o seu valor para $x = 1$.
2. Indique o número de peças que o fabricante tem de produzir mensalmente para que o custo total da produção seja mínimo.

Resultados:

1. $C'(1) = 15$.
2. 6 centenas de peças.

Exercício 3.28 Numa fábrica, o lucro mensal obtido na produção de x centenas de peças, expresso em milhares de euros, é dado pela função L , real de variável real, definida por

$$L(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 6x, \quad x \geq 0.$$

Sabe-se que a capacidade máxima de produção é de quatro centenas de peças.

1. Calcule a derivada da função L .
2. Determine o número de peças a produzir de forma a maximizar o lucro mensal.

Resultados:

1. $L'(x) = -x^2 + x + 6$.
2. 3 centenas de peças.

Exercício 3.29 Considere a função f , real de variável real, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x} & \text{se } x < 0 \\ xe^{-x^2} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}.$$

1. Determine a derivada da função f .
2. Averigue se a função f atinge um extremo relativo em $x = 0$ e, em caso afirmativo, classifique-o.

3. Estude a função f quanto à existência de extremos relativos no intervalo $]0, +\infty[$.
4. Escreva uma equação da reta tangente ao gráfico de f em $x = -1$.
5. Calcule o limite: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{xe^x+x}$.

Resultados:

$$1. f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\sqrt{1-x}} & \text{se } x < 0 \\ (1-2x^2)e^{-x^2} & \text{se } x > 0 \end{cases}.$$

2. Sendo $f'(0^-) = -\infty$ e $f'(0^+) = 1 > 0$, a função f atinge um mínimo relativo em $x = 0$.

3. A função f atinge um máximo relativo em $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$4. y = -\frac{\sqrt{2}}{4}x + \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

5. 0.

Exercício 3.30 Considere a função real de variável real definida por

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{arctg}(x+1) + k\pi}{x-1} & \text{se } x \leq 0 \\ x \ln(x) & \text{se } x > 0 \end{cases}, \quad \text{com } k \in \mathbb{R}.$$

1. Mostre que $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 0$.
2. Calcule o valor da constante k de modo que g seja contínua em $x = 0$.
3. Considerando o valor de k tal que $g(0) = 0$, calcule a derivada à direita de g em $x = 0$.
4. Mostre que, no intervalo $]0, +\infty[$, a função g atinge um extremo relativo e determine-o.

Resultados:

$$1. \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0.$$

$$2. k = -\frac{1}{4}.$$

$$3. g'(0^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{g(h) - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \ln h = -\infty.$$

$$4. g\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e} \text{ é um mínimo relativo de } g.$$

Exercício 3.31 Considere a função h , real de variável real, definida por

$$h(x) = \begin{cases} k(e^x - 1) + x & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{\ln(2x+1)}{2} & \text{se } x > 0 \end{cases} \quad \text{com } k \in \mathbb{R}.$$

1. Mostre que a função h é contínua em $x = 0$, para qualquer que seja o valor de $k \in \mathbb{R}$.
2. Determine, se possível, o valor de k de modo que a função h seja diferenciável em $x = 0$.
Nas alíneas seguintes, considere $k = -2$.
3. Determine uma equação da reta tangente ao gráfico da função h no ponto de abscissa $x = 2$.
4. Averigüe se a função h admite um extremo relativo em $x = 0$ e, em caso afirmativo, classifique-o e determine o seu valor.

Resultados:

1. h é contínua em $x = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} h(x) = h(0)$. Sendo, $\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = h(0) = 0$, para qualquer que seja o valor de $k \in \mathbb{R}$, mostrámos o pretendido.
2. $h'(0^+) = h'(0^-) \Leftrightarrow k = 0$.
3. $y = \frac{1}{5}x + \frac{\ln 5}{2} - \frac{2}{5}$.
4. Como $h'(0^-) = -1$ e $h'(0^+) = 1$, não existe $h'(0)$. Assim, h tem um ponto singular em $x = 0$. Sendo $h'(0^-) < 0$ e $h'(0^+) > 0$, a função h atinge um mínimo relativo em $x = 0$, tendo-se $h(0) = 0$.

Exercício 3.32 Seja g a função, real de variável real, definida por

$$g(x) = \begin{cases} \frac{6}{\pi} \operatorname{arctg}(2-x^2) & \text{se } x < 1 \\ \frac{3}{2} e^{3x-3} & \text{se } x \geq 1 \end{cases}.$$

1. Prove que a função g é contínua em $x = 1$.
2. Mostre que a função g tem um ponto singular em $x = 1$.
3. Averigüe se a função g tem pontos críticos.
4. Estude a função g quanto à existência de extremos relativos e determine os seus valores.

Resultados:

1. A função g é contínua em $x = 1$ pois $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = g(1) = \frac{3}{2}$.
2. Sendo $g'(1^-) = -\frac{6}{\pi} \neq g'(1^+) = \frac{9}{2}$ não existe $g'(1)$. Assim, a função g tem um ponto singular em $x = 1$.
3. A função g tem um ponto crítico em $x = 0$.
4. A função g admite um máximo relativo em $x = 0$ igual a $g(0) = \frac{6}{\pi} \operatorname{arctg}(2)$ e admite um mínimo relativo em $x = 1$ igual a $g(1) = \frac{3}{2}$.

Exercício 3.33 Seja g a função, real de variável real, definida por

$$g(x) = \begin{cases} xe^x & \text{se } x \leq 0 \\ x \ln^4 x & \text{se } x > 0 \end{cases}.$$

1. Mostre que a função g tem um ponto singular em $x = 0$.
2. Determine a derivada da função g .
3. Averigüe se a função g tem pontos críticos.
4. Estude a função g quanto à existência de extremos relativos.

Resultados:

1. Sendo $g'(0^-) = 1$ e $g'(0^+) = +\infty$, a função g não tem derivada finita em $x = 0$. Assim, a função tem um ponto singular em $x = 0$.

$$2. g'(x) = \begin{cases} (x+1)e^x & \text{se } x < 0 \\ \ln^3 x (4 + \ln x) & \text{se } x > 0 \end{cases}.$$

3. Para $x < 0$, a derivada anula-se para $x = -1$. Para $x > 0$, a derivada anula-se para $x = e^{-4}$ e $x = 1$.
4. A função g admite um máximo relativo em $x = e^{-4}$ e mínimos relativos em $x = \pm 1$. Para $x = 0$ não há extremo (as derivadas laterais não mudam de sinal).

Exercício 3.34 De todos os retângulos inscritos num triângulo retângulo isósceles cujos catetos medem a unidades, quais as dimensões do que tem área máxima?

Resultados:

O retângulo de área máxima obtém-se para $x = y = \frac{a}{2}$.

Exercício 3.35 De todos os retângulos inscritos numa circunferência de raio r , quais as dimensões do que tem área máxima?

Resultados:

O retângulo de área máxima obtém-se para $a = b = \sqrt{2}r$

Exercício 3.36 De todos os cilindros retos inscritos num cone reto de altura a e raio da base b , quais as dimensões do que tem volume máximo?

Resultados:

Dimensões do cilindro de volume máximo: $r = \frac{2}{3}b$ e $h = \frac{1}{3}a$.

Exercício 3.37 Determinar as dimensões do prisma quadrangular regular, de volume máximo, inscrito numa pirâmide quadrangular regular cuja aresta da base é b e a altura é a .

Resultados:

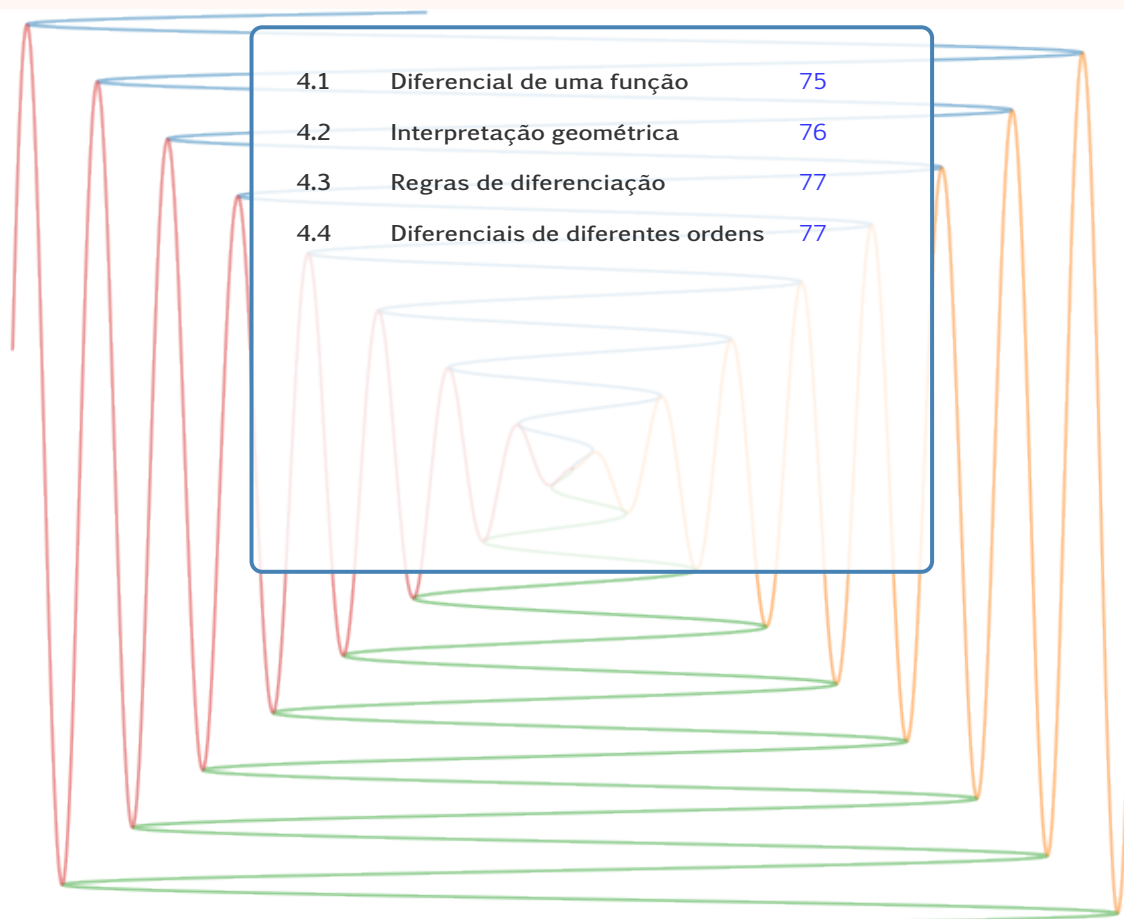
Dimensões do prisma quadrangular regular: a aresta da base é $\frac{2}{3}b$ e a altura é $\frac{1}{3}a$.

Exercício 3.38 Considere um cone de altura 4 e raio r inserido num cilindro com a mesma altura e raio 3. Mostre que o volume do sólido que está dentro do cilindro, mas fora do cone, atinge o valor mínimo quando as bases do cilindro e do cone são iguais.

Resultados:

- $V(r) = 36\pi - \frac{4}{3}\pi r^2$, $0 \leq r \leq 3$.
- Sendo $V'(r) = -\frac{8}{3}\pi r < 0$, a função V é decrescente e, portanto, atinge o seu valor mínimo em $r = 3$.

4. Diferenciais



4.1	Diferencial de uma função	75
4.2	Interpretação geométrica	76
4.3	Regras de diferenciação	77
4.4	Diferenciais de diferentes ordens	77

4.1 Diferencial de uma função

Definição 4.1 Seja $y = f(x)$ uma função real de uma variável real. Sendo $\Delta x \in \mathbb{R}$, chama-se *diferencial de f em x , com acréscimo Δx* , ao número real

$$df(x) = dy = f'(x)\Delta x. \quad (4.1)$$

Seja $i : x \rightarrow y = x$ (função identidade). Por (4.1), vem

$$di(x) = dy = dx = i'(x)\Delta x = x'\Delta x = \Delta x, \text{ isto é, } dx = \Delta x.$$

Assim, (4.1) pode escrever-se na forma

$$dy = f'(x)dx. \quad (4.2)$$

Por (4.2), vem

$$f'(x) = \frac{dy}{dx},$$

a que se dá o nome de *notação de Leibniz* para a derivada de f em ordem a x .

4.2 Interpretação geométrica

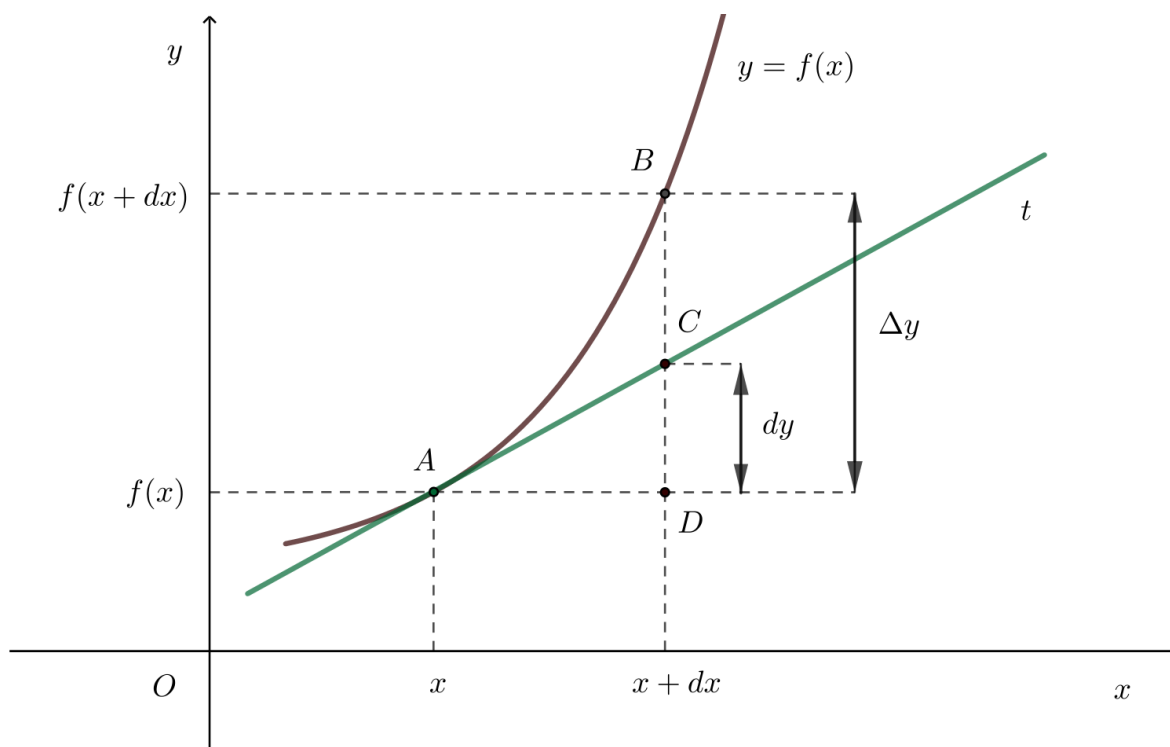


Figura 4.1: Interpretação geométrica da notação de Leibniz.

Sendo AC a reta tangente ao gráfico de f no ponto $A = (x, f(x))$ (ver figura 4.1), vem

$$m_t = f'(x) = \frac{\overline{CD}}{\overline{AD}} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{\overline{CD}}{dx} \Leftrightarrow \overline{CD} = f'(x) dx.$$

Então, por (4.2), vem

$$dy = \overline{CD},$$

obtendo-se a interpretação geométrica pretendida.



O diferencial de f em x , dy , é o valor do acréscimo da ordenada da tangente à curva no ponto $A = (x, f(x))$ correspondente a um acréscimo, dx , da variável independente.

Seja,

$$\Delta y = f(x + dx) - f(x)$$

isto é,

$$\Delta y = \overline{BC} + \overline{CD} \Leftrightarrow \Delta y = \overline{BC} + dy.$$

Quando,

$$dx \rightarrow 0 \text{ vem } \overline{BC} \rightarrow 0$$

e, por conseguinte,

$$\Delta y \approx dy$$

ou ainda,

$$f(x + dx) - f(x) \approx f'(x) dx.$$

4.3 Regras de diferenciação

Sejam u e v duas funções diferenciáveis. Tem-se:

1. $d(u \pm v) = du \pm dv$.
2. $d(uv) = u dv + v du$.
3. $d(u^p) = p u^{p-1} du$, $p \in \mathbb{R}$.
4. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v du - u dv}{v^2}$, $v \neq 0$.
5. $d(\sqrt[n]{u}) = \frac{du}{n \sqrt[n]{u^{n-1}}}$, $n \in \mathbb{N}$ com $u > 0$ se n par.

4.4 Diferenciais de diferentes ordens

Seja $y = f(x)$ uma função real de variável real. Pela definição de diferencial de uma função, temos

$$dy = f'(x)dx.$$

Iremos designar o diferencial de 2.^a ordem de $y = f(x)$ com acréscimo dx por:

$$d^2y = d(dy). \quad (4.3)$$

Vamos obter uma expressão para (4.3). Temos:

$$\begin{aligned} d^2y &= d(dy) \\ &= d[f'(x)dx] && \text{(definição de diferencial)} \\ &= d[f'(x)]dx + f'(x)d(dx) && \text{(diferencial do produto)} \\ &= [f''(x)dx]dx + f'(x) \times 0 \\ &= [f''(x)dx]dx \\ &= f''(x)(dx)^2. \end{aligned}$$

Considerando, $(dx)^2 = dx^2$, vem

$$d^2y = f''(x)dx^2,$$

obtendo-se uma expressão para o diferencial de 2.^a ordem da função $y = f(x)$ com acréscimo dx .

Generalizando, tem-se:

$$d^n y = f^{(n)}(x) dx^n, \quad n = 1, 2, \dots$$

considerando $(dx)^n = dx^n$.

Verificamos assim que os diferenciais de diferentes ordens permitem exprimir as derivadas de qualquer ordem sob a forma do quociente dos diferenciais das respetivas ordens (notação de Leibniz para a derivada de ordem n):

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}; \quad f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}; \quad \dots \quad f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

4.4.1 Exercícios resolvidos

Exercício 4.1 Sendo f uma função real, de variável real, definida por $f(x) = x^2$, calcule $|\Delta y - dy|$ em $x = 1$ para $dx = 0.1$ e $dx = 0.01$.

Resolução:

Sendo $f(x) = x^2$, tem-se para cada x , $dy = f'(x)dx = 2xdx$.

- $x = 1, dx = 0.1$

$$\Delta y = f(x + dx) - f(x) \quad dy = f'(x)dx$$

$$\Delta y = f(1 + 0.1) - f(1) \quad dy = f'(1) \times 0.1$$

$$\Delta y = f(1.1) - f(1) \quad dy = 2 \times 1 \times 0.1$$

$$\Delta y = (1.1)^2 - 1^2 \quad dy = 0.2$$

$$\Delta y = 0.21$$

$$\therefore |\Delta y - dy| = |0.21 - 0.2| = 0.01 = 10^{-2}$$

- $x = 1, dx = 0.01$

$$\Delta y = f(x + dx) - f(x) \quad dy = f'(x)dx$$

$$\Delta y = f(1 + 0.01) - f(1) \quad dy = f'(1) \times 0.01$$

$$\Delta y = f(1.01) - f(1) \quad dy = 2 \times 1 \times 0.01$$

$$\Delta y = (1.01)^2 - 1^2 \quad dy = 0.02$$

$$\Delta y = 0.0201$$

$$\therefore |\Delta y - dy| = |0.0201 - 0.02| = 0.0001 = 10^{-4}$$

Exercício 4.2 Para cada uma das seguintes funções reais, de variável real, escreva uma expressão de dy .

1. $y = x^3 - 7$;

2. $y = \frac{1}{x^2}$;

3. $y = e^{3x}$;

4. $y = \text{sen } x$;

5. $y = \ln(x^2 + 1)$;

6. $y = \text{tg}(2x)$.

Resolução:

1. $dy = 3x^2 dx;$
2. $dy = -\frac{2}{x^3} dx;$
3. $dy = 3e^{3x} dx;$
4. $dy = \cos x dx;$
5. $dy = \frac{2x}{x^2 + 1} dx;$
6. $dy = \frac{2}{\cos^2(2x)} dx.$

Exercício 4.3 Determine o diferencial da função f , real da variável real, definida por

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{3x+1}{\sqrt{2}}\right),$$

em $x = 1$.

Resolução:

Sendo,

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\left(\frac{3x+1}{\sqrt{2}}\right)'}{1 + \left(\frac{3x+1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{1}{3x^2 + 2x + 1},$$

vem, $f'(1) = \frac{1}{6}$.

Assim,

$$dy = f'(1) dx = \frac{1}{6} dx.$$

Exercício 4.4 Utilizando diferenciais, determine o aumento de volume de um cubo, cuja a aresta varia de 5 cm para 5.1 cm.

Resolução:

Sendo o volume do cubo de aresta x dado por $V = x^3$, vem:

$$dV = V'(x) dx \Leftrightarrow dV = 3x^2 dx.$$

Para $x = 5$ cm e $dx = 0.1$ cm, vem:

$$dV = 3 \times 5^2 \times 0.1 \Leftrightarrow dV = 7.5 \text{ cm}^3.$$

Pelos cálculos efetuados, o aumento do volume do cubo foi aproximadamente 7.5 cm^3 .

Exercício 4.5 Calcule um valor aproximado de tinta necessário para pintar um depósito esférico com 2 m de raio, de modo que a camada de tinta tenha 3 mm de espessura.

Resolução:

Sendo o volume da esfera de raio r dado por $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, vem:

$$dV = V'(r)dr \Leftrightarrow dV = 4\pi r^2 dr.$$

Assim, para $r = 2$ m e $dr = 0.003$ mm, temos:

$$dV = 4 \times \pi \times 4 \times 0.003 = 0.15 \text{ m}^3.$$

Exercício 4.6 Calcule um valor aproximado de $\sin 31^\circ$.

Resolução:

Considerando a função f , real de variável real, definida por $f(x) = \sin x$ e, ainda, a aproximação, $\Delta y \simeq dy$, vem

$$\Delta y \simeq dy \Leftrightarrow f(x+dx) - f(x) \simeq f'(x) dx$$

$$\Leftrightarrow f(x+dx) \simeq f(x) + f'(x) dx$$

$$\Leftrightarrow \sin(x+dx) \simeq \sin x + \cos x dx.$$

Sendo,

$$31^\circ = 30^\circ + 1^\circ = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{180},$$

vem,

$$\begin{aligned} \sin(31^\circ) &= \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{180}\right) \\ &\simeq \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \times \frac{\pi}{180} \\ &\simeq 0.5 + 0.866 \times 0.017 \\ &\simeq 0.5147. \end{aligned}$$

Exercício 4.7 Calcule um valor aproximado de $e^{0.3}$.

Resolução:

Considerando a função f , real de variável real, definida por $f(x) = e^x$ e, ainda, a aproximação, $\Delta y \simeq dy$, vem

$$\Delta y \simeq dy \Leftrightarrow f(x+dx) - f(x) \simeq f'(x) dx$$

$$\Leftrightarrow f(x+dx) \simeq f(x) + f'(x) dx$$

$$\Leftrightarrow e^{x+dx} \simeq e^x + e^x dx.$$

Considerando, $x = 0$ e $dx = 0.3$, vem

$$\begin{aligned} e^{0.3} &= e^{0+0.3} \\ &\simeq e^0 + e^0 \times 0.3 \\ &\simeq 1.3. \end{aligned}$$

4.4.2 Exercícios propostos

Exercício 4.8 Sendo f uma função real, de variável real, definida por $f(x) = 2x^2 - x$, calcule Δy e dy em $x = 1$ para $dx = 0.01$.

Resultados:

$$\Delta y = 0.0302, \quad dy = 0.03.$$

Exercício 4.9 Calcule o diferencial das seguintes funções:

1. $y = x^2 + \ln x$.
2. $y = e^{x^2-1}$.
3. $y = e^{x^2} \cos(3x)$.
4. $y = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}\right) \arcsen x + \frac{x}{4} \sqrt{1-x^2}$.

Resultados:

1. $dy = \left(2x + \frac{1}{x}\right) dx$.
2. $dy = 2xe^{x^2-1} dx$.
3. $dy = [2x \cos(3x) - 3 \operatorname{sen}(3x)] e^{x^2} dx$.
4. $dy = x \arcsen x dx$.

Exercício 4.10 Sabe-se que o volume de uma esfera de raio r é dado por $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ e que a área da superfície da esfera é $A = 4\pi r^2$.

1. Mostre que $dV = A dr$.
2. Obtenha um resultado semelhante entre a área da superfície do círculo e o comprimento P da circunferência, ambos de raio igual a r .

Resultados:

1. $dV = \left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)' dr = A dr$.
2. $dA = (\pi r^2)' dr = P dr$.

Exercício 4.11 Calcule um valor aproximado de $\cos 46^\circ$.

Resultados:

$$\cos 46^\circ \approx 0.6951.$$

Exercício 4.12 Calcule um valor aproximado de $\sqrt{26}$.

Resultados:

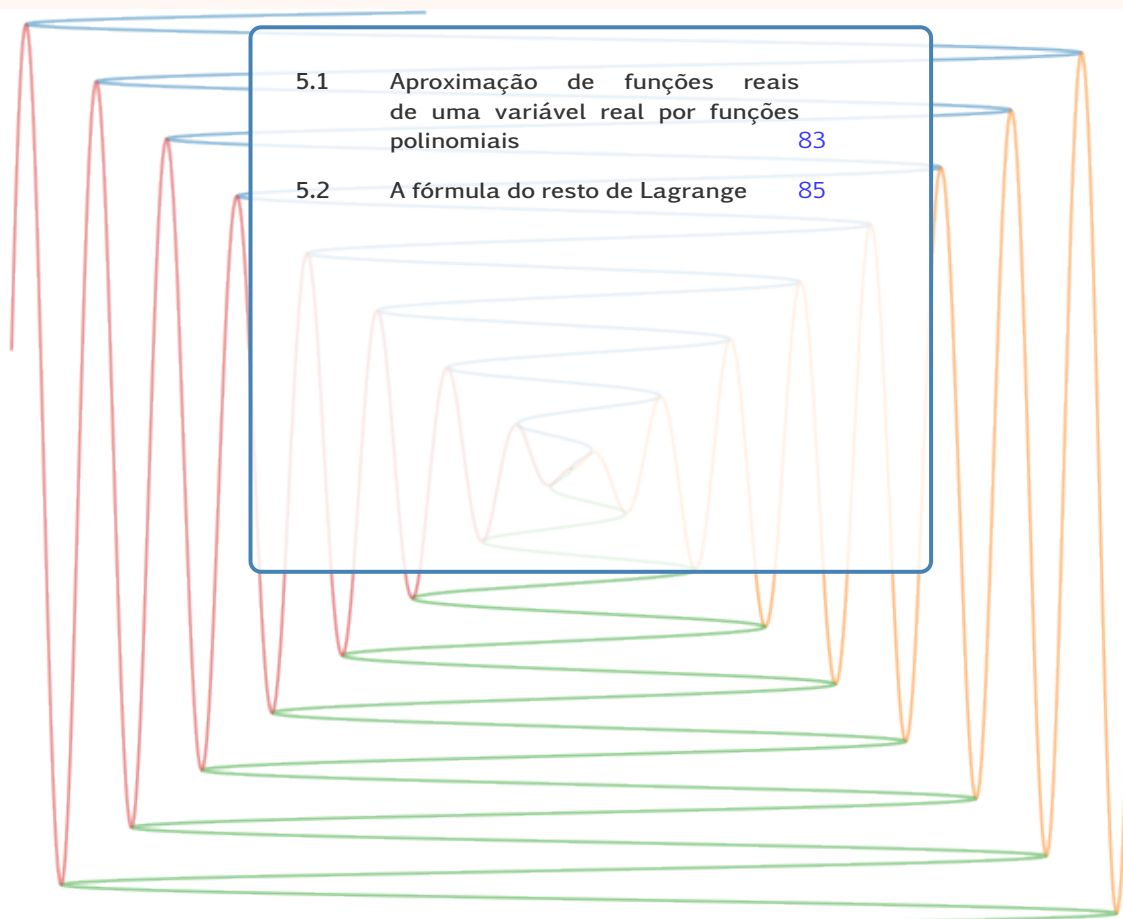
Considerando $f(x) = \sqrt{x}$, $x = 25$ e $dx = 1$, obtemos $\sqrt{26} \approx 5.1$.

Exercício 4.13 Determine um valor aproximado do aumento do volume de um cilindro de 10 dm de altura e 3 dm de raio, quando o raio da base aumenta de 1 mm, considerando a altura constante.

Resultados:

$$0.6\pi \text{ dm}^3.$$

5. Fórmula de Taylor



5.1 Aproximação de funções reais de uma variável real por funções polinomiais

Seja f uma função real de uma variável real, $y = f(x)$, diferenciável num ponto $x = a$ do seu domínio, o polinómio do 1.º grau que melhor se aproxima de f numa vizinhança do ponto a é aquele que define a equação da reta tangente ao gráfico de f , isto é, $P_1(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$ (ver figura 5.1).

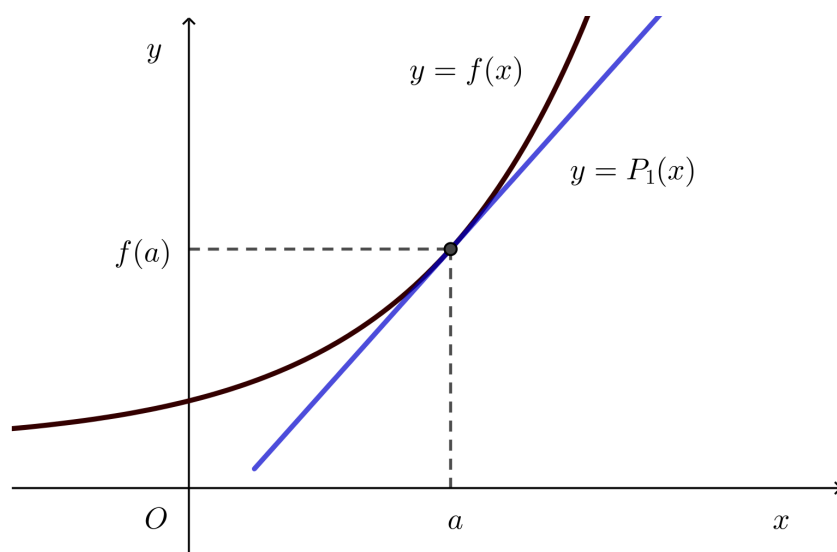


Figura 5.1: Aproximação de uma função real de variável real por um polinómio.

Em termos analíticos, o polinómio do 1.º grau que melhor se aproxima de f numa vizinhança do ponto $x = a$ é aquele que satisfaz as condições

$$\begin{cases} P_1(a) = f(a) \\ P_1'(a) = f'(a) \end{cases}$$

Caso a função f seja duas vezes diferenciável num ponto $x = a$ do seu domínio, o polinómio do 2.º grau, $P_2(x)$, que melhor aproxima f numa vizinhança de $x = a$ é aquele que satisfaz as condições

$$\begin{cases} P_2(a) = f(a) \\ P_2'(a) = f'(a) \\ P_2''(a) = f''(a) \end{cases}$$

obtendo-se,

$$P_2(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2.$$

Generalizando, se f é uma função n vezes diferenciável num ponto $x = a$ do seu domínio, então o polinómio de grau n , $P_n(x)$, que melhor aproxima f numa vizinhança de $x = a$ é aquele que satisfaz as condições

$$\begin{cases} P_n(a) = f(a) \\ P_n'(a) = f'(a) \\ P_n''(a) = f''(a) \\ \dots \\ P_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a) \end{cases}$$

obtendo-se,

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \\ &\quad \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \end{aligned}$$

a que se dá nome de *Polinómio de Taylor de grau n gerado por f no ponto $x = a$* .

À diferença $r_n(x) = f(x) - P_n(x)$ chama-se *resto de ordem n da função f* . Assim, dada uma função $y = f(x)$, n vezes diferenciável em $x = a$, a *fórmula de Taylor de ordem n da função f* é $f(x) = P_n(x) + r_n(x)$, isto é,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + r_n(x) \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \\ &\quad \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + r_n(x). \end{aligned}$$

No caso particular de $a = 0$ obtém-se a fórmula de Mac-Laurin:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + r_n(x).$$

5.2 A fórmula do resto de Lagrange

Existem várias fórmulas para o resto da fórmula de Taylor. Vamos apresentar uma dessas fórmulas, denominada por *resto de Lagrange*.

Teorema 5.1 (Fórmula do Resto de Lagrange) Seja f uma função $n + 1$ vezes diferenciável nalgum intervalo $\mathcal{V}_\varepsilon(a) =]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$, com $\varepsilon > 0$. Para dado ponto $x \in \mathcal{V}_\varepsilon(a)$, existe c , situado entre a e x , tal que

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}.$$

Tendo em conta que o valor de c está compreendido entre a e x , podemos escrever em vez de c a expressão,

$$c = a + \theta(x-a), \text{ com } \theta \in]0, 1[.$$

No caso da fórmula de Mac-Laurin, isto é, $a = 0$, temos,

$$c = \theta x, \text{ com } \theta \in]0, 1[.$$

5.2.1 Exercícios resolvidos

Exercício 5.1 Considere a função f , real de variável real, definida por $f(x) = e^x$.

1. Determine o polinómio de Taylor de grau n gerado por f em torno do ponto $x = 0$.
2. Escreva a fórmula de Mac-Laurin de f , com resto de Lagrange de ordem n .

Resolução:

1. Sendo,

$$f^{(n)}(x) = e^x, \forall x \in \mathbb{N},$$

vem,

$$f^{(n)}(0) = 1, \forall x \in \mathbb{N}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} P_n(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}. \end{aligned}$$

2. Usando alínea anterior, vem

$$\begin{aligned} f(x) &= P_n(x) + r_n(x) \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}, \theta \in]0, 1[\end{aligned}$$

Exercício 5.2 Considere a função f , real de variável real, definida por $f(x) = \sin x$.

1. Determine o polinómio de Taylor de grau 7 gerado por f em torno do ponto $x = 0$.

- Usando a alínea anterior, determine um valor aproximado de $\text{sen } 10^\circ$.
- Escreva a fórmula de Mac-Laurin de f , com resto de Lagrange de ordem 7.

Resolução:

- Sendo,

$$f(x) = \text{sen } x; \quad f(0) = 0$$

$$f'(x) = \text{cos } x; \quad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -\text{sen } x; \quad f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = -\text{cos } x; \quad f'''(0) = -1$$

$$f^{(4)}(x) = \text{sen } x; \quad f^{(4)}(0) = 0$$

$$f^{(5)}(x) = \text{cos } x; \quad f^{(5)}(0) = 1$$

$$f^{(6)}(x) = -\text{sen } x; \quad f^{(6)}(0) = 0$$

$$f^{(7)}(x) = -\text{cos } x; \quad f^{(7)}(0) = -1$$

vem,

$$P_7(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 \\ + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5 + \frac{f^{(6)}(0)}{6!}x^6 + \frac{f^{(7)}(0)}{7!}x^7$$

isto é,

$$P_7(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}.$$

- $\text{sen } 10^\circ = \text{sen } \frac{\pi}{18}$
 $\approx P_7\left(\frac{\pi}{18}\right) = \frac{\pi}{18} - \frac{\pi^3}{18^3 \times 3!} + \frac{\pi^5}{18^5 \times 5!} - \frac{\pi^7}{18^7 \times 7!}$
 $\approx 0.174.$

- Usando a alínea anterior, vem

$$\text{sen } x = P_7(x) + r_7(x) \\ = P_7(x) + \frac{f^{(8)}(\theta x)}{8!}x^8 \\ = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{\text{sen}(\theta x)}{8!}x^8, \quad \theta \in]0, 1[.$$

Exercício 5.3 Considere a função f , real de variável real, definida por $f(x) = \cos x$.

- Determine o polinómio de Taylor de grau 7 gerado por f em torno do ponto $x = 0$.
- Escreva a fórmula de Mac-Laurin de f , com resto de Lagrange de ordem 7.
- Usando a alínea anterior, mostre que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{2} = \frac{1}{2}$.

Resolução:

1. Sendo,

$$f(x) = \cos x; \quad f(0) = 1$$

$$f'(x) = -\operatorname{sen} x; \quad f'(0) = 0$$

$$f''(x) = -\cos x; \quad f''(0) = -1$$

$$f'''(x) = \operatorname{sen} x; \quad f'''(0) = 0$$

$$f^{(4)}(x) = \cos x; \quad f^{(4)}(0) = 1$$

$$f^{(5)}(x) = -\operatorname{sen} x; \quad f^{(5)}(0) = 0$$

$$f^{(6)}(x) = -\cos x; \quad f^{(6)}(0) = -1$$

$$f^{(7)}(x) = \operatorname{sen} x; \quad f^{(7)}(0) = 0$$

vem,

$$P_7(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 \\ + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5 + \frac{f^{(6)}(0)}{6!}x^6 + \frac{f^{(7)}(0)}{7!}x^7$$

isto é,

$$P_7(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}.$$

2. Usando a alínea anterior, vem

$$\begin{aligned} \cos x &= P_7(x) + r_7(x) \\ &= P_7(x) + \frac{f^{(8)}(\theta x)}{8!}x^8 \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{\cos(\theta x)}{8!}x^8, \\ &\theta \in]0, 1[. \end{aligned}$$

3. Pela alínea anterior, vem

$$1 - \cos x = \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} - \frac{\cos(\theta x)}{8!}x^8.$$

Dividindo ambos os membros da igualdade anterior por x^2 , vem

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2!} - \frac{x^2}{4!} + \frac{x^4}{6!} - \frac{\cos(\theta x)}{8!}x^6.$$

Assim,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2!} - \frac{x^2}{4!} + \frac{x^4}{6!} - \frac{\cos(\theta x)}{8!}x^6 \right)$$

isto é,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{2} = \frac{1}{2}.$$

Exercício 5.4 Considere a função f , real de variável real, definida por $f(x) = \ln x$. Determine o polinômio de Taylor de grau 3 gerado por f em torno do ponto $x = 3$.

Resolução:

Sendo,

$$f(x) = \ln x; \quad f(3) = \ln 3$$

$$f'(x) = \frac{1}{x}; \quad f'(3) = \frac{1}{3}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2}; \quad f''(3) = -\frac{1}{9}$$

$$f'''(x) = \frac{2}{x^3}; \quad f'''(3) = \frac{2}{27}$$

vem,

$$\begin{aligned} P_3(x) &= f(3) + f'(3)(x-3) + \frac{f''(3)}{2!}(x-3)^2 + \frac{f'''(3)}{3!}(x-3)^3 \\ &= \ln 3 + \frac{1}{3}(x-3) - \frac{1}{18}(x-3)^2 + \frac{2}{42}(x-3)^3. \end{aligned}$$

5.2.2 Exercícios propostos

Exercício 5.5 Considere a função f , real de variável real, definida por $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Determine o polinômio de Taylor de grau 4 gerado por f em torno do ponto $x = 0$.

Resultados:

$$P_4(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4.$$

Exercício 5.6 Considere a função f , real de variável real, definida por $f(x) = \sqrt{x}$.

1. Determine o polinômio de Taylor de grau 2 (aproximação quadrática) gerado por f em torno do ponto $x = 1$.
2. Usando a alínea anterior, obtenha uma aproximação de $\sqrt{1.1}$.

Resultados:

$$1. P_2(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2.$$

$$2. \sqrt{1.1} \approx P_2(1.1) = 1.04975.$$

Exercício 5.7 Considere a função f , real de variável real, definida por $f(x) = \sin x$.

1. Determine o polinômio de Taylor de grau 3 gerado por f em torno do ponto $x = 0$.
2. Usando a alínea anterior, obtenha uma aproximação de $\sin 20^\circ$.

Resultados:

1. $P_3(x) = x - \frac{x^3}{3!}$.
2. $\text{sen } 20^\circ = \text{sen } \frac{\pi}{9} \approx P_3\left(\frac{\pi}{9}\right) = 0.343$.

Exercício 5.8 Considere a função f , real de variável real, definida por $f(x) = x \text{sen } x$. Determine o polinômio de Taylor de grau 4 gerado por f em torno do ponto $x = 0$.

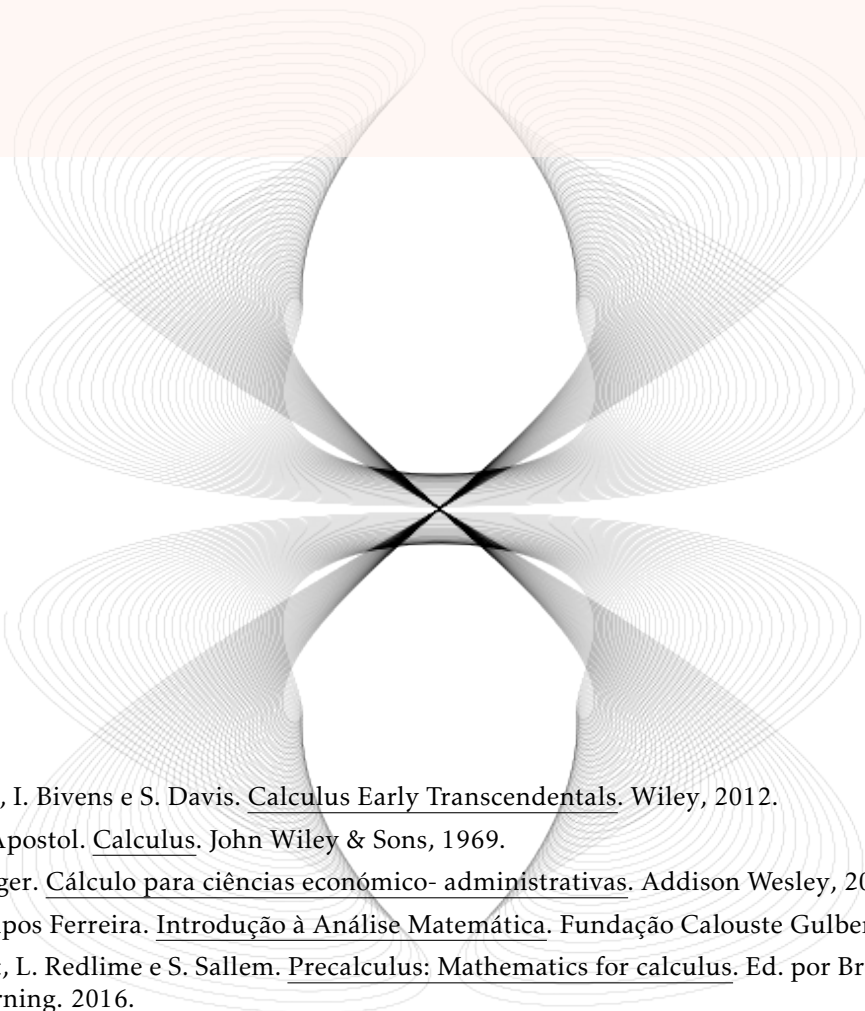
Resultados:

$$P_4(x) = x^2 - \frac{x^4}{6}.$$

Exercício 5.9 Considere a função f , real de variável real, definida por $f(x) = \text{arctg } x$. Determine o polinômio de Taylor de grau 3 gerado por f em torno do ponto $x = 0$.

Resultados:

$$P_3(x) = x - \frac{x^3}{3}.$$



- [1] H. Anton, I. Bivens e S. Davis. Calculus Early Transcendentals. Wiley, 2012.
- [2] Tom M. Apostol. Calculus. John Wiley & Sons, 1969.
- [3] M. Bittinger. Cálculo para ciências económico- administrativas. Addison Wesley, 2002.
- [4] João Campos Ferreira. Introdução à Análise Matemática. Fundação Calouste Gulbenkian, 2011.
- [5] J. Stewart, L. Redlime e S. Sallem. Precalculus: Mathematics for calculus. Ed. por Brooks/ColeCengage Learning. 2016.
- [6] James Stewart, Lothar Redlin e Sleem Watson. Precalculus: Mathematics for Calculus. Cengage Learning, 2017. ISBN: 978-1305701618.

