



# **Determinação de Propriedades de materiais compósitos através do método de homogeneização**

Mestrado em Engenharia Mecânica-Produção Industrial

João Filipe Veríssimo Rodrigues

Leiria, Setembro de 2020



# **Determinação de Propriedades de materiais compósitos através do método de homogeneização**

Mestrado em Engenharia Mecânica-Produção Industrial

João Filipe Veríssimo Rodrigues

Dissertação realizada sob a orientação do Professor Doutor Rui Miguel Barreiros Ruben e do Professor Doutor Carlos Alexandre Bento Capela

Leiria, Setembro de 2020

# **Originalidade e Direitos de Autor**

A/O presente dissertação/relatório de projeto é original, elaborada/o unicamente para este fim, tendo sido devidamente citados todos os autores cujos estudos e publicações contribuíram para a/o elaborar.

Reproduções parciais deste documento serão autorizadas na condição de que seja mencionado/a o/a Autor/a e feita referência ao ciclo de estudos no âmbito do qual a/o mesma/o foi realizado, a saber, Curso de Mestrado em 2020, no ano letivo 2019/2020, da Escola Superior de Tecnologia e Gestão do Instituto Politécnico de Leiria, Portugal, e, bem assim, à data das provas públicas que visaram a avaliação destes trabalhos.



# Agradecimentos

Gostaria de começar por agradecer, a todos que contribuíram, diretamente e indiretamente para a conclusão deste trabalho, nomeadamente:

- Aos orientadores, Professor Doutor Rui Ruben e Professor Doutor Carlos Capela, pela oportunidade dada para desenvolver este tema, pela cooperação prestada e pela disponibilidade.
- À minha família, em especial aos meus pais e irmão, pelo apoio dado durante a realização deste trabalho.
- Aos meus amigos, que me deram apoio e companhia nos momentos mais difíceis.
- Aos meus colegas de mestrado em Engenharia Mecânica – Produção Industrial, pela ajuda prestada e companheirismo durante o mestrado.

A todos um muito obrigado.

João Rodrigues



# Resumo

O presente trabalho tem como objetivo verificar a aplicabilidade do método de homogeneização em materiais compósitos. Para esse fim, foram comparados valores de módulo de Young, obtidos através da análise de resistência à flexão e pelo método de homogeneização. Nesta comparação, foram usados três tipos de materiais compósitos, sendo eles, material de polipropileno com reforço em fibra de vidro, material de resina epóxida com reforço em partículas de argila e material de resina epóxida com reforço de fibra de vidro e partículas de argila. Com estes três materiais, pretende-se verificar para o qual, o método é mais eficaz a caracterizar as propriedades mecânicas.

O método de homogeneização consiste num método matemático que permite o cálculo das propriedades mecânicas do meio homogêneo, equivalente ao material heterógeno em estudo. Neste método, é assumido que o material em estudo é constituído por uma repetição de células iguais.

Foi observado que os valores do módulo de elasticidade dos materiais com reforço de fibra de vidro, obtidos com o método de homogeneização, aumentam com o incremento da fração de volume do reforço.

Com a comparação dos valores, dos dois métodos, foi possível verificar que o método de homogeneização é capaz de obter resultados com um erro relativo abaixo dos 22% para materiais com reforço em fibra. Verificou-se que os valores adquiridos com o método são no geral superiores aos valores obtidos através da análise de resistência à flexão.

Na comparação dos valores do módulo de elasticidade do material compósito com reforço de partículas, obtidos com o método de homogeneização, foi possível constatar que o valor do módulo, aumenta com o crescimento da fração de volume, ao contrário dos valores obtidos através da análise de resistência à flexão.

**Palavras-chave:** Material compósito, Homogeneização, Módulo de Young, Resistência à flexão



# Abstract

The present paper has the objective to verify the application of the homogenization method in composite materials. To these end, the Young modulus values, obtained by flexural strength analysis and homogenization method, were compared. In this comparison, three types of composite materials were used, being them, polypropylene material with fiberglass reinforcement, epóxida resin material with clay particles reinforcement and epóxida resin material with fiberglass and clay particles reinforcement. With these three materials, it is intended to verify for which, the method is more effective to characterize the mechanic properties.

The homogenization method consists of a mathematical method that allow the calculation of the mechanical properties of the homogeneous medium, equivalent to the heterogeneous material under study. In this study is assumed that the material under study, consist of a repetition of the same cell.

It was observed that the elastic modulus values of the material with fiberglass reinforcement, obtained with the homogenization method, increase with the rise of the volume fraction of the reinforcement.

By comparing the values from the two methods, it was possible to ascertain that the homogenization method is capable to obtain results with a relative error below 22%, for composite materials with fiber reinforcement. It was found that the values acquired with the method are in general higher than the values obtained through the flexural strength analysis.

In comparing the elastic modulus values of the composite materials with particles reinforcement, obtained with homogenization method, it was possible to verify that the modulus value, increase with the growth of the volume fraction, in contrast to the values obtained through the flexural strength analysis.

**Keywords:** Composite Materials; Homogenization; Young Modulus, Flexural Strength



# Índice

<b>Originalidade e Direitos de Autor .....</b>	<b>iii</b>
<b>Agradecimentos .....</b>	<b>v</b>
<b>Resumo .....</b>	<b>vii</b>
<b>Abstract .....</b>	<b>ix</b>
<b>Lista de Figuras .....</b>	<b>xiii</b>
<b>Lista de tabelas .....</b>	<b>xv</b>
<b>Lista de siglas e acrónimos.....</b>	<b>xvi</b>
<b>Nomenclatura.....</b>	<b>xvii</b>
<b>1. Introdução .....</b>	<b>1</b>
<b>1.1. Considerações Iniciais .....</b>	<b>1</b>
<b>1.2. Objetivo Principal .....</b>	<b>1</b>
<b>1.3. Estrutura do trabalho .....</b>	<b>1</b>
<b>2. Revisão bibliográfica .....</b>	<b>3</b>
<b>2.1. Introdução .....</b>	<b>3</b>
<b>2.2. Materiais Compósitos.....</b>	<b>3</b>
2.2.1. Aplicações dos materiais compósitos .....	4
2.2.2. Tipos de Matriz .....	7
2.2.3. Tipos de reforços.....	8
2.2.4. Processos de Fabricação .....	9
<b>2.3. Classificação das propriedades mecânicas dos compósitos .....</b>	<b>10</b>
2.3.1. Classificação de propriedades mecânicas através da análise da resistência à flexão	10
2.3.2. Lei constitutiva para materiais anisotrópicos.....	11
2.3.3. Homogeneização assintótica .....	13
2.3.4. Método da energia de deformação .....	16
2.3.5. Método de homogeneização computacional baseada na transformada rápida de Fourier	19
2.3.6. Exemplo de um problema 2D/3D resolvido pelo método de homogeneização computacional.....	22
<b>3. Análise dos materiais compósitos.....</b>	<b>33</b>
<b>3.1. Material compósito com polipropileno e fibra de vidro.....</b>	<b>33</b>

3.1.1. Materiais utilizados.....	33
3.1.2. Processo de fabricação de provetes .....	34
<b>3.2. Material compósito com resina epóxida, partículas de argila e fibra de vidro</b>	<b>35</b>
3.2.1. Materiais usados na fabricação dos provetes.....	35
<b>3.3. Resultados obtidos através do método de homogeneização .....</b>	<b>36</b>
3.3.1. Criação dos inputs para caracterização das propriedades.....	36
3.3.2. Resultados das propriedades do material compósito de resina, partículas de argila e fibra de vidro. ....	39
<b>4. Comparação de valores do módulo de Young .....</b>	<b>41</b>
<b>4.1. Comparação dos módulos de Young do material compósito com polipropileno e fibra de vidro.....</b>	<b>41</b>
<b>4.2. Comparação dos módulos de Young do material compósito com resina epóxida, partículas de argila e fibra de vidro .....</b>	<b>43</b>
<b>5. Conclusões e Trabalhos Futuros .....</b>	<b>47</b>
<b>5.1. Conclusões.....</b>	<b>47</b>
<b>5.2. Trabalhos Futuros.....</b>	<b>48</b>
<b>Bibliografia .....</b>	<b>49</b>

# Lista de Figuras

Figura 1 - Materiais compósitos (Imagem adaptada de [4]).	4
Figura 2 - Exemplo de monocoque em fibra de carbono (Imagem retirada de [6]).	5
Figura 3 - Fabricação de uma fuselagem de um avião com fibra de carbono e epóxida (Imagem retirada de [7]).	5
Figura 4 - Componentes de um satélite fabricados em material compósito (Imagem retirada de [8]).	6
Figura 5 - Fabricação de um casco de barco em fibra de vidro e epóxida (Imagem retirada de [9]).	6
Figura 6 - Taco de basebol e remo fabricado em fibra de carbono (Imagem retirada de [10] e [11]).	7
Figura 7 – Exemplos de tipos de reforço, sendo que em (a) o reforço é unidirecional em (b) é multidirecional e em (c) as fibras estão entrelaçadas (Imagem retirada de [4]).	9
Figura 8 - Exemplo de um corte de um compósito de partícula (Imagem retirada de [15]).	9
Figura 9 - Processos de fabrico para compósitos de matriz polimérica (Imagem adaptada de [2]).	10
Figura 10 - Esquema de análise de resistência à flexão.	11
Figura 11- Material compósito em duas escalas (Imagem retirada de [19]).	14
Figura 12 - Célula unitária do exemplo 1.	22
Figura 13 - Imagem dos deslocamentos em x na CU.	23
Figura 14 – Imagem dos deslocamentos em y na CU.	23
Figura 15 – Imagens dos deslocamentos em xy na CU.	24
Figura 16 - Célula Unitária do exemplo 2.	26
Figura 17 – Imagem do deslocamento em x do CU.	26
Figura 18 - Imagem dos deslocamentos em y da CU.	27
Figura 19 - Imagem dos deslocamentos em xy da CU.	27
Figura 20 - Figura da célula unitária do caso 3.	29
Figura 21 - Imagem da célula unitária com deslocamento em x	30
Figura 22 - Desenho do molde para fabricação dos provetes (Imagem retirada de [2]).	34
Figura 23 - Célula Unitária de material compósito de resina e fibra de vidro com diferentes frações de volume de fibra de vidro.	37
Figura 24 - Corte da célula unitária de resina epóxida com partículas de argila e fibra de	38
Figura 25 – Gráfico de comparação entre o erro relativo e a diferença de fração de volume entre análises.	42

Figura 26 – Gráfico de comparação de resultados obtidos através da análise de resistência à flexão e pelo método de homogeneização. ....	44
Figura 27 – Gráfico de comparação do módulo de elasticidade obtido com análise de resistência à flexão com o método de homogeneização. ....	46

# Lista de tabelas

Tabela 1 - Tabela de propriedades do polipropileno [3].....	33
Tabela 2 - Tabela de propriedades de fibra de vidro [26].....	34
Tabela 3 - Tabela de propriedades da resina epóxida SR1500 [27], [28].	35
Tabela 4 - Tabela de propriedades das partículas de argila. ....	36
Tabela 5 - Tabela de comparação de valores do módulo de Young, com diferente tamanho de malha. ....	38
Tabela 6 - Tabela das propriedades obtidas de material compósito de resina e partículas de argila. ....	39
Tabela 7 - Tabela das propriedades obtidas do material compósito de resina, partículas de argila e fibra de vidro. ....	39
Tabela 8 – Tabela de comparação das propriedades mecânicas do material compósito de resina e fibra de vidro, obtidas com o método de homogeneização em malha de 35x35x35 e de análise de resistência à flexão. ....	41
Tabela 9 - Tabela de propriedades do material compósito com partículas de argila com diâmetro de 0.7 mm. ....	43
Tabela 10 - Tabela de propriedades do material compósito com partículas de argila com diâmetro de 0.7 mm e fibra de vidro. ....	45

## Lista de siglas e acrónimos

CU	Célula Unitária
ESTG	Escola Superior de Tecnologia e Gestão
FFT	<i>Fast Fourier Transform</i> (Transformada Rápida de Fourier)
FV	Fibra de vidro
PP	Polipropileno

# Nomenclatura

bar	Pressão
C <sup>0</sup>	Temperatura (Grau Celsius)
GPa	Gigapascal
MPa	Megapascal
%	Porcentagem



# 1. Introdução

## 1.1. Considerações Iniciais

Os materiais compósitos têm vindo a ter cada vez mais importância na indústria, devido às suas excelentes propriedades mecânicas, ao seu baixo peso específico e à sua vasta utilidade. Estes tipos de materiais têm sido usados em inúmeras indústrias tais como, aeronáutica, aeroespacial, automóvel, saúde e desporto.

Apesar das suas excelentes propriedades, estes tipos de materiais são difíceis de prever o seu comportamento sem realizar uma análise de caracterização das propriedades mecânicas. Para analisar materiais compósitos é possível usar o método de homogeneização, no qual se caracterizam as suas propriedades mecânicas. O método de homogeneização é vantajoso por ser um método matemático rigoroso que consegue obter soluções fidedignas para alguns problemas, onde os dados experimentais não estão disponíveis.

Ao longo do tempo vários investigadores apresentaram outros métodos de caracterização mecânica dos materiais, tais como, o método de energia de deformação e a transformada rápida de Fourier (FFT – *Fast Fourier Transform* no inglês), as quais serão explicadas no capítulo 3.

## 1.2. Objetivo Principal

O principal objetivo desta dissertação é verificar a aplicabilidade e fiabilidade do método de homogeneização na caracterização das propriedades mecânicas de compósitos. Para este efeito, os resultados experimentais obtidos pelo método numérico serão comparados com os homólogos obtidos através da análise de resistência à flexão em três pontos.

## 1.3. Estrutura do trabalho

No capítulo 1 apresentam-se os objetivos principais da dissertação e uma introdução ao tema do trabalho. No capítulo seguinte faz-se uma introdução aos materiais compósitos, aos métodos de classificação de propriedades mecânicas, nomeadamente, a lei constitutiva de materiais anisotrópicos, o método de homogeneização, o método de energia de deformação

e o método de homogeneização baseado na transformada rápida de Fourier. Por fim, é feita uma comparação de resultados com exemplos apresentados no artigo científico, *Using strain energy-based prediction of effective elastic properties in topology optimization of material microstructures* [1].

No capítulo 3 são apresentados os materiais usados para as análises com o método de homogeneização, como foram criados as células unitárias e também são mostrados os resultados.

No quarto capítulo é realizada uma comparação entre os valores do módulo de Young homogeneizados e os resultados experimentais publicados na dissertação *Estudo de materiais compósitos com fibras processados por injeção*, realizada por Natália Ferreira [2] e da dissertação *Processamento e Caracterização de Compósitos com Fillers de Argila Expandida*, de Tiago Branquinho [3].

Por fim, no capítulo 5 são apresentadas as conclusões do trabalho.

## **2. Revisão bibliográfica**

### **2.1. Introdução**

Neste capítulo faz-se uma revisão bibliográfica sobre os materiais compósitos, em que é explicado o que é um material compósito e que tipos existem, que tipos de matrizes e reforços é possível usar para a fabricação deste e serão também apresentados alguns exemplos de aplicações e possíveis processos de fabrico.

Seguidamente, será relatado como se poderão calcular as propriedades mecânicas do material compósito através do método de homogeneização. Será apresentada a lei constitutiva de materiais anisotrópicos em regime elástico. Ainda neste capítulo, serão igualmente explicadas outras abordagens de homogeneização de materiais, propostas por outros investigadores.

### **2.2. Materiais Compósitos**

Um material compósito é uma união de dois ou mais materiais, com propriedades mecânicas e químicas diferentes, a fim de criar um material com melhores propriedades. Para fabricar um material compósito é necessário um material de reforço e um material de matriz. O material de reforço é o elemento que suporta os esforços impostos no compósito e o material de matriz é o que transmite os esforços mecânicos aos reforços e, ao mesmo tempo mantendo-os no mesmo lugar. Os materiais compósitos podem ser classificados em diferentes tipos, sendo eles compósitos com partículas, compósitos de fibras e compósitos estruturais, onde ramificam em outros tipos como se ilustra na figura 1.

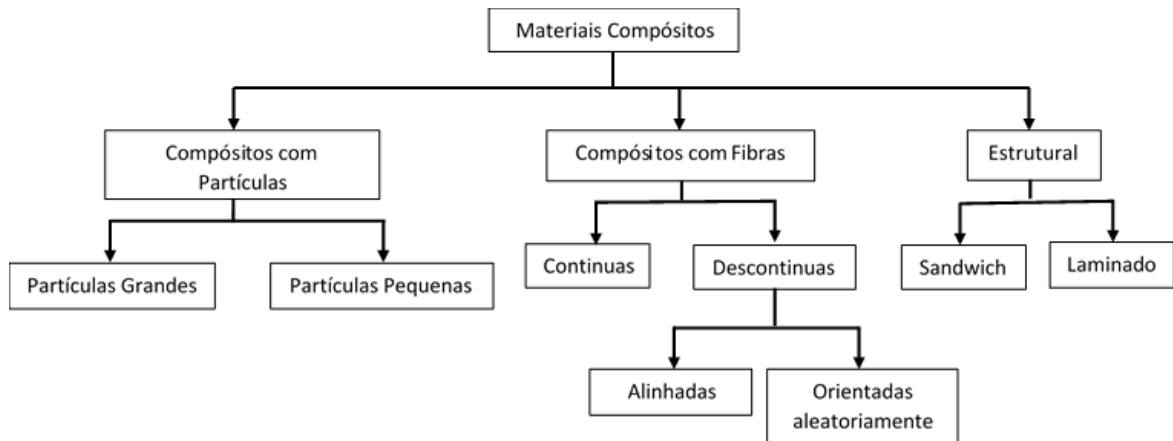


Figura 1 - Materiais compósitos (Imagem adaptada de [4]).

Os materiais compósitos têm como principais vantagens o facto de ter uma elevada resistência e rigidez, de ter um excelente isolamento térmico e acústico, uma boa resistência ao impacto, boa resistência à corrosão e também por apresentar um baixo peso específico. Por outro lado, os materiais compósitos têm como principal desvantagem o facto de ter um custo muito elevado comparado a um material mais convencional, e baixa probabilidade de reciclagem.

### 2.2.1. Aplicações dos materiais compósitos

Os materiais compósitos têm uma vasta aplicabilidade, devido ao seu baixo peso e às suas excelentes propriedades mecânicas. De seguida, são mostrados alguns exemplos de aplicações dos materiais compósitos em diferentes indústrias.

#### Indústria Automóvel

A primeira utilização de materiais compósitos na indústria automóvel foi em 1953, pela *Chevrolet*, fabricando os painéis exteriores do seu Chevrolet Corvette em fibra de vidro criando um automóvel mais leve, do que os seus concorrentes. No desporto motorizado, pela primeira vez em 1981, a equipa *McLaren* criou um carro fórmula 1 com um corpo em fibra de carbono, dando assim um menor peso ao carro e, conseqüentemente mais veloz do que os seus adversários [5]. Atualmente, quase todos os automóveis de alta performance usam este tipo de material para reduzir o peso, como se mostra na figura 2.



Figura 2 - Exemplo de monocoque em fibra de carbono (Imagem retirada de [6]).

### Indústria Aeronáutica

Na indústria aeronáutica os materiais compósitos são usados, por exemplo, para a fabricação da fuselagem dos aviões, como mostra a figura 3. O avião Boing 787 usa cerca de 50% de material compósito na sua estrutura, dando assim um menor peso, que conseqüentemente reduz o seu consumo e dá uma maior resistência mecânica ao seu corpo.



Figura 3 - Fabricação de uma fuselagem de um avião com fibra de carbono e epóxida (Imagem retirada de [7]).

### Indústria Aeroespacial

Tal como na indústria aeronáutica o material compósito tem um papel muito importante na fabricação de equipamentos espaciais tais como satélites e foguetões. Na figura 4 são

apresentados alguns exemplos de aplicações de material compósito presentes num satélite espacial.

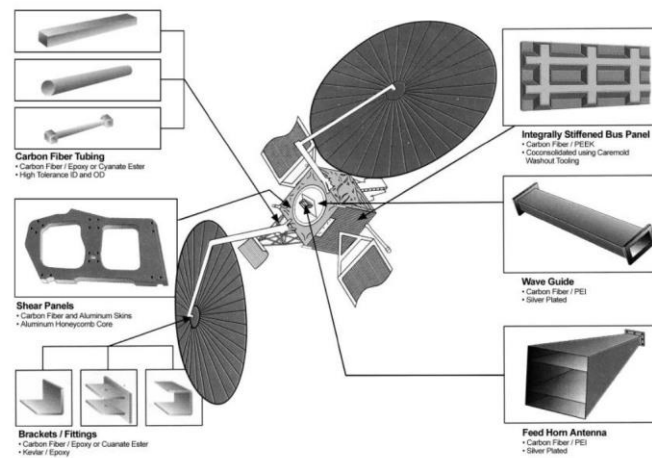


Figura 4 - Componentes de um satélite fabricados em material compósito (Imagem retirada de [8]).

### Indústria Naval

Na indústria naval, o material compósito é maioritariamente usado na fabricação dos cascos do barco, como mostra na figura 5, usando fibra de vidro ou então estruturas sandwich, com núcleo de espuma de PVC e kevlar como material exterior, dando assim ao barco uma maior resistência ao impacto e menor peso [4].



Figura 5 - Fabricação de um casco de barco em fibra de vidro e epóxida (Imagem retirada de [9]).

### Desporto

Nos desportos de alta competição, para tentar criar uma vantagem contra o adversário, alguns equipamentos desportivos começaram a ser fabricados com material compósito para reduzir

o seu peso e dar-lhes melhores propriedades. Neste momento, em quase todos os desportos são usados materiais compósitos nos seus equipamentos, tal como mostra na figura 6.



Figura 6 - Taco de basebol e remo fabricado em fibra de carbono (Imagem retirada de [10] e [11]).

### 2.2.2. Tipos de Matriz

Na fabricação de material compósito é possível escolher entre três tipos de matrizes, sendo elas: matriz metálica, matriz polimérica e matriz cerâmica.

#### Matriz Metálica

Na fabricação de compósitos é possível usar vários tipos de metais, tais como, ligas de cobre, ligas de titânio, ligas de alumínio, ligas de magnésio e ligas de ferro. Contudo, as mais usadas são as ligas de Alumínio e de Magnésio, pelas suas propriedades mecânicas, menor custo relativamente a outras e pela sua facilidade de processamento [12].

#### Matriz Cerâmica

Os materiais cerâmicos são uma excelente opção de utilização para matriz, quando se pretende fabricar um material compósito que necessite de uma elevada resistência à oxidação e uma boa resistência às temperaturas elevadas.

#### Matriz Polimérica

As matrizes poliméricas podem ser divididas em duas famílias, as matrizes termoendurecíveis e as matrizes termoplásticas.

### Matrizes termoendurecíveis

Uma característica deste tipo de matriz é o facto de só poder ser processado uma única vez. Perante a temperatura ambiente, este material apresenta-se no estado líquido, tendo uma viscosidade baixa, permitindo uma maior maneabilidade. Quando entra em contacto com um endurecedor, dá-se uma reacção química que implica a cura deste, ficando com a geometria pretendida [13].

Alguns exemplos de material termoendurecível para uso de matriz são, poliésteres insaturados, resina epóxida, vinilesteres e bismaleimidas [4].

### Matrizes Termoplásticas

Os materiais termoplásticos, ao contrário dos materiais termoendurecíveis, podem ser processados mais do que uma vez. Este material, à temperatura ambiente, apresenta-se no estado sólido, e habitualmente em grãos. A fabricação de materiais compósitos com este tipo de matriz é usualmente usado nos processos de injeção ou em termoformação.

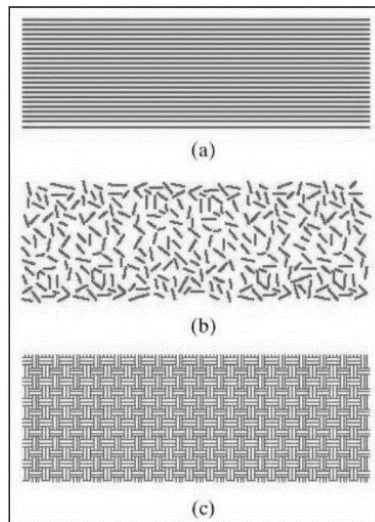
Os materiais termoplásticos, em comparação com os termoendurecíveis, têm melhor resistência ao impacto e melhor tenacidade.

Alguns exemplos de materiais termoplásticos são, Polipropileno, Poliamida, Policarbonato, Poli-éter-éter-cetona, Poliamidas termoplásticas e Polisulfureto de fenileno [13].

### **2.2.3. Tipos de reforços**

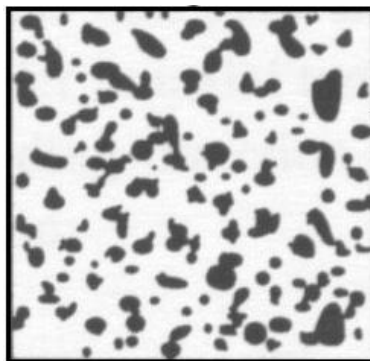
Os reforços para material compósito podem ser divididos em duas grandes famílias, sendo eles, os reforços por fibras e reforços por partículas.

As fibras podem ser classificadas por fibras longas ou fibras curtas. Estas, podem estar orientadas numa única direção, exemplificada na figura 7(a), ou em várias direções, ilustrada na figura 7(b) e ainda entrelaçadas, apenas no caso das fibras longas, para criar um tecido de reforço, como mostra a figura 7(c) [14].



**Figura 7 – Exemplos de tipos de reforço, sendo que em (a) o reforço é unidirecional em (b) é multidirecional e em (c) as fibras estão entrelaçadas (Imagem retirada de [4]).**

Nos reforços em partículas, os reforços são encontrados normalmente aleatoriamente dispersos na matriz, como mostra a figura 8.



**Figura 8 - Exemplo de um corte de um compósito de partícula (Imagem retirada de [15]).**

A adição de partículas de reforço num material compósito é menos eficaz, em termos de ganhos de propriedades mecânicas, do que reforços em fibras. Aumentando a percentagem de reforço neste material, este perde resistência mecânica, porém obtém maior rigidez [16].

Alguns exemplos de materiais mais usados para reforço de material compósito são, fibras de vidro, fibras de carbono, fibras de titânio, fibras de boro, fibras cerâmicas, fibras orgânicas, serradura de madeira, grafite e fibras de alumina [17].

#### **2.2.4. Processos de Fabricação**

Os materiais compósitos, de uma forma generalizada, podem ser fabricados de duas maneiras, através um molde aberto ou de um molde fechado. O que difere entre estes dois

processos de fabrico é o facto de quando se fabrica uma peça com molde aberto, as peças apresentarem bom acabamento superficial apenas na superfície que entra em contacto com o molde, já as peças fabricadas num molde fechado apresentam um bom acabamento superficial em todas a superfícies da mesma [13].

Na figura 9, estão apresentados alguns exemplos de processos de fabricação para peças com matriz polimérica.

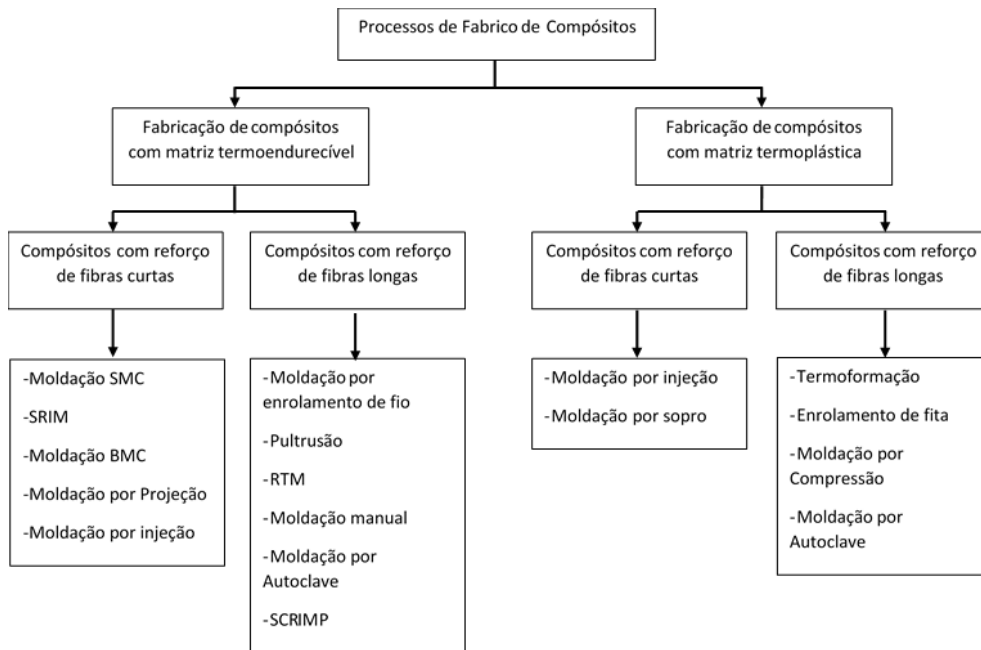


Figura 9 - Processos de fabrico para compósitos de matriz polimérica (Imagem adaptada de [2]).

## 2.3. Classificação das propriedades mecânicas dos compósitos

Os materiais compósitos têm como propriedade geral serem muito heterogéneos e anisotrópicos, o que significa que as propriedades dependem da direção, o que torna difícil a determinação correta das propriedades mecânicas dos materiais compósitos [18].

### 2.3.1. Classificação de propriedades mecânicas através da análise da resistência à flexão

Para determinar as propriedades mecânicas dos materiais compósitos, tais como o módulo de Young, é possível usar a análise de resistência à flexão. O ensaio experimental de flexão em três pontos consiste na aplicação de uma carga perpendicular ao provete, onde é dada a relação entre o valor da carga e o valor da deformação. Neste tipo de análise é possível calcular a tensão máxima de flexão e o módulo de elasticidade à flexão [2].

Para calcular a tensão máxima de resistência à flexão dada por  $\sigma_{Max Flexão}$  é usada a seguinte equação [2].

$$\sigma_{Max Flexão} = \frac{3PL}{2bh^2} \quad (1)$$

Na equação (1), P representa a carga aplicada no provete, L representa a distância entre os apoios, b é a largura do provete e h é a altura do provete, como mostra a figura 10.

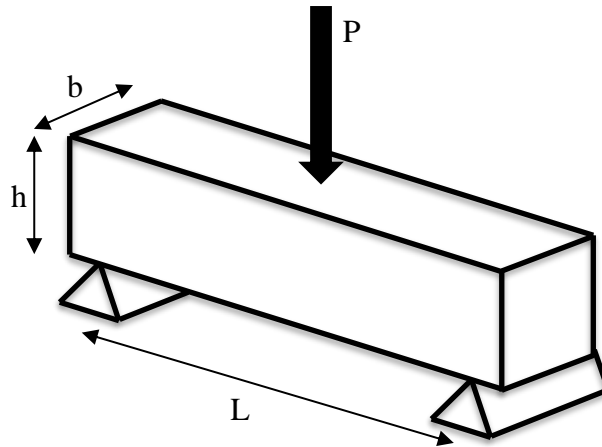


Figura 10 - Esquema de análise de resistência à flexão.

Para calcular o módulo de elasticidade à flexão, representada por  $E_{Flexão}$ , é usado a seguinte equação.

$$E_{Flexão} = \frac{PL^3}{48yI} \quad (2)$$

Na equação (2), y representa o deslocamento do provete no teste de resistência à flexão e I representa o momento de inércia inicial da secção transversal do provete.

### 2.3.2. Lei constitutiva para materiais anisotrópicos

A lei constitutiva para materiais anisotrópicos, com um comportamento elástico, é dado pela equação (3), onde  $\sigma_{kl}$  é o tensor das tensões,  $\varepsilon_{ij}$  das deformações e  $S_{ijkl}$  é o tensor de quarta ordem que relaciona tensões com as deformações [18]:

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl} \cdot \sigma_{kl} \quad (3)$$

A equação (3), mostra que cada tensão normal produz tensões de corte em todos os planos coordenados, para além das tensões normais. O recíproco também se verifica no caso das tensões de corte, onde produzem tensões normais em todos os planos coordenados, assim como tensões de corte nos restantes 2 planos perpendiculares ao plano de aplicação da tensão de corte [18].

A lei constitutiva na forma invertida é dada pela equação (4), onde  $C_{ijkl}$  é conhecido por tensor das constantes elásticas [18].

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl} \quad (4)$$

Existem 81 componentes independentes no tensor  $C$ , mas estas que podem ser reduzidas para 36, visto que tanto o tensor das tensões quer o das deformações gozam da propriedade de simetria,

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (5)$$

$$\varepsilon_{kl} = \varepsilon_{lk} \quad (6)$$

Sendo os índices  $i$  e  $j$  livres, é possível usar as equações (4) e (5) para mostrar que,

$$C_{ijkl} = C_{jikl} \quad (7)$$

É também possível combinar as equações (4) e (6) para mostrar que o tensor  $C$  é também simétrico nos índices  $k$  e  $l$ ,

$$C_{ijkl} = C_{ijlk} \quad (8)$$

Para se obter a forma expandida da Lei de Hooke generalizada  $\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$ .

Em primeiro lugar, é expandido o último índice de soma,  $l$ , obtendo-se:

$$\sigma_{ij} = [C_{ijk1}\varepsilon_{k1}] + [C_{ijk2}\varepsilon_{k2}] + [C_{ijk3}\varepsilon_{k3}] \quad (9)$$

Depois, é expandido o índice de soma k, resultando em

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} = [C_{ij11}\varepsilon_{11} + C_{ij21}\varepsilon_{21} + C_{ij31}\varepsilon_{31}] + [C_{ij12}\varepsilon_{12} + C_{ij22}\varepsilon_{22} + C_{ij32}\varepsilon_{32}] \\ + [C_{ij13}\varepsilon_{13} + C_{ij23}\varepsilon_{23} + C_{ij33}\varepsilon_{33}] \end{aligned} \quad (10)$$

De seguida, é imposta a equação (6), o que permite escrever

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} = C_{ij11}\varepsilon_{11} + C_{ij22}\varepsilon_{22} + C_{ij33}\varepsilon_{33} + (C_{ij23} + C_{ij32})\varepsilon_{23} \\ + (C_{ij13} + C_{ij31})\varepsilon_{13} + (C_{ij12} + C_{ij21})\varepsilon_{12} \end{aligned} \quad (11)$$

Impondo também a equação (8), obtém-se

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} = C_{ij11}\varepsilon_{11} + C_{ij22}\varepsilon_{22} + C_{ij33}\varepsilon_{33} + 2C_{ij23}\varepsilon_{23} + 2C_{ij13}\varepsilon_{13} \\ + 2C_{ij12}\varepsilon_{12} \end{aligned} \quad (12)$$

Aplicando na equação (12) todos os valores independentes que os índices i e j, obtém-se a matriz da forma generalizada de Cauchy da Lei constitutiva  $\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$ , apresentada na equação (13) [18].

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1113} & C_{1112} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2213} & C_{2212} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3323} & C_{3313} & C_{3312} \\ C_{2311} & C_{2322} & C_{2333} & C_{2323} & C_{2313} & C_{2312} \\ C_{1311} & C_{1322} & C_{1333} & C_{1323} & C_{1313} & C_{1312} \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & C_{1223} & C_{1213} & C_{1212} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (13)$$

### 2.3.3. Homogeneização assintótica

A homogeneização assintótica é um método matemático, que usa métodos computacionais, que permitem a determinação das propriedades mecânicas de materiais compósitos, sendo estes formados por uma repetição de uma célula unitária como mostra a figura 11. Para

resolver problemas de homogeneização é necessário a imposição de condições de fronteira e de periodicidade.

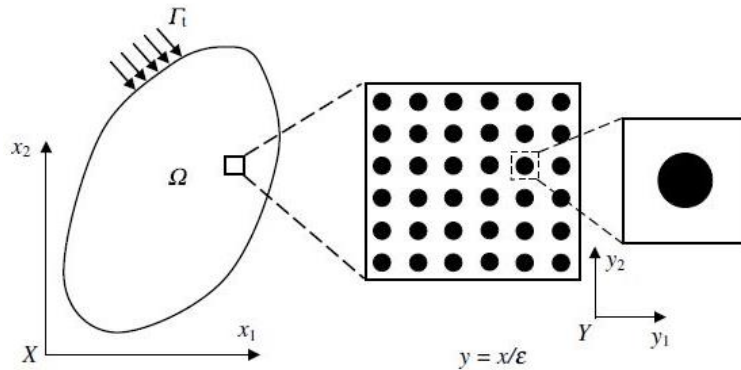


Figura 11- Material compósito em duas escalas (Imagem retirada de [19]).

Com este método é possível prever as propriedades locais e globais em materiais compósitos. Para isso, o primeiro passo para caracterizar as propriedades de um material, é resolver o problema na célula unitária do material. O passo seguinte, é resolver o problema de valor de fronteira para um material homogeneizado [20].

Um meio heterogêneo, diz-se que têm periodicidade, quando as suas funções satisfizerem a equação (14) [20].

$$\mathcal{F}(x + Y) = \mathcal{F}(x) \quad (14)$$

Onde

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}; \quad Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix} \quad (15)$$

Na equação (14), x é o vetor posição de um ponto, e Y é um vetor constante [20].

Se a área do material compósito é composta por uma repetição de células Y, o comportamento mecânico é dado pela equação (16) [20].

$$\bar{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}^H \bar{\epsilon}_{kl} \quad (16)$$

No método de homogeneização, as dimensões de  $Y$  são muito menores do que a área em estudo, conseqüentemente o resultado das deformações e das tensões vai variar de ponto para ponto, ou por outras palavras, varia de célula para célula. Por este facto é usado duas escalas diferentes neste método. Um sistema de coordenadas em escala micro,  $Y$ , e uma escala macro,  $X$ . A escala macroscópica é da ordem de grandeza das dimensões do corpo em estudo e é usada para variações de oscilações lentas, e a escala microscópica é da ordem de grandeza das células unitárias e é para usada para as oscilações rápidas, tal como é ilustrado na figura 11. O rácio do vetor entre a escala de coordenadas microscópica e a escala de coordenadas macroscópica é dada pela equação (17) [20].

$$\mathbf{y} = \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \quad (17)$$

Portanto, os deslocamentos de um ponto arbitrário no material podem ser aproximados por uma expansão assintótica em duas escalas, como se apresenta na equação (14) [1].

$$\mathbf{u}^\varepsilon(\mathbf{x}) = \mathbf{u}^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon \mathbf{u}^1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon^2 \mathbf{u}^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \dots \quad (18)$$

Com a imposição da equação (18) na equação de equilíbrio (16), é possível obter as propriedades homogeneizadas  $C_{ijkl}^H$  ou então indicada por  $E^H$ , tal como se mostra na equação (19) ou na equação (20), onde  $V$  é o volume de uma célula unitária [1].

$$C_{ijkl}^H = \frac{1}{|V|} \int_V (C_{ijkl} - C_{ijpq} \frac{\partial X_p^{kl}}{\partial y_q}) dV \quad (19)$$

Ou então,

$$E^H = \frac{1}{V} \int_V [E - E(\varepsilon^0 - \varepsilon^*)] dV \quad (20)$$

Na equação (19),  $X^{kl}$ , é um campo de deslocamentos periódico em  $Y$ , associado à carga  $kl$ , sobre uma célula unitária com condições de fronteira periódicas [1].

$$\int_Y C_{ijpq} \frac{\partial X_p^{kl}}{\partial y_q} \frac{\partial v_i}{\partial y_j} dY = \int_Y C_{ijkl} \frac{\partial v_i}{\partial y_j} dY, \quad \forall v \in Y \quad (21)$$

O valor de  $X^{kl}$  é calculado através da realização da análise de Elementos Finitos na célula unitária. Para problemas de tensões em 2D existem três casos de cargas, onde  $kl=11, 22, 12$  e para problemas em 3D existem seis casos de cargas, onde  $kl=11,22,33,12,13,23$ . Logo, a equação (19) pode ser aproximada pela equação (22) [1]:

$$\mathbf{C}_{ijkl}^H = \langle \mathbf{C}_{ijkl} \rangle - \langle \sigma_{ij}^{kl} \rangle \quad (22)$$

Na equação (22)  $\langle \mathbf{C}_{ijkl} \rangle$  significa o tensor elástico médio e  $\langle \sigma_{ij}^{kl} \rangle$  representa o tensor de tensão médio sobre a célula unitária na carga  $kl$ . O  $\langle \sigma_{ij}^{kl} \rangle$  é um termo de correção que reflete a influência da microestrutura do material da célula unitária [1].

#### 2.3.4. Método da energia de deformação

Este método de homogeneização foi apresentado no artigo de investigação “*Using strain energy-based prediction of effective elastic properties in topology optimization of material microstructures*” dos autores Weihong Zahng, Gaoming Dai, Fengwen Wang, Shiping Sun e Hichan Bassir [1].

Através de um estudo apresentado no artigo de investigação, *A comparison of homogenization and standard mechanics analyses for periodic porous composites*, realizado por S.J. Hollister e N. Kikuchi, verificou-se que o método da energia de deformação é capaz de obter resultados satisfatórios em problemas unidimensionais. Contudo, o uso deste método em problemas de duas ou em três dimensões, os resultados podem ter um erro relativo de 70%. Quando o método da energia de deformação é comparado com o método de homogeneização, este dá resultados muito menos satisfatórios, onde o método de homogeneização obtém resultados com um erro relativo de 30% [21].

Em seguida, será explicado o método de energia de deformação.

No estado de plano tenções, a equação da lei constitutiva pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \bar{\sigma}_{11} \\ \bar{\sigma}_{22} \\ \bar{\sigma}_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111}^H & C_{1122}^H & 0 \\ C_{2211}^H & C_{2222}^H & 0 \\ 0 & 0 & C_{1212}^H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\epsilon}_{11} \\ \bar{\epsilon}_{22} \\ \bar{\epsilon}_{12} \end{bmatrix} \quad (23)$$

O tensor elástico  $C_{ijkl}^H$  pode ser determinado, termo a termo através da imposição de periodicidade e de condições de fronteira, a cada caso de carga.

Caso de Carga 1 - Estado de deformação da unidade horizontal

Para o cálculo do tensor elástico  $C_{1111}^H$  é imposto que  $\bar{\varepsilon}_{11}^{(1)} = 1$ ;  $\bar{\varepsilon}_{22}^{(1)} = \bar{\varepsilon}_{12}^{(1)} = 0$  e condições de deslocamento na fronteira  $u_{1,i} = 0$ ;  $u_{1,j} = u_1 = 1$ ;  $u_{2,m} = u_{2,n} = 0$ .

Então, com a aplicação das condições obtém-se a equação da energia de deformação, que é dada por:

$$\bar{E}^{(1)} = \frac{1}{2} \bar{\sigma}_{11}^{(1)} \bar{\varepsilon}_{11}^{(1)} = \frac{1}{2} \bar{\sigma}_{11}^{(1)} \quad (24)$$

A partir da equação (23) e aplicando as condições da equação (24), obtém-se a equação (25).

$$C_{1111}^H = \frac{\bar{\sigma}_{11}^{(1)}}{\bar{\varepsilon}_{11}^{(1)}} = 2\bar{E}^{(1)} \quad (25)$$

Caso de Carga 2 – Estado de deformação vertical

Para calcular o tensor elástico  $C_{2222}^H$  é imposto que  $\bar{\varepsilon}_{22}^{(2)} = 1$ ;  $\bar{\varepsilon}_{11}^{(2)} = \bar{\varepsilon}_{12}^{(2)} = 0$  e as condições de fronteira  $u_{1,i} = u_{1,j} = 0$ ;  $u_{2,m} = u_{2,n} = u_2 = 1$ . Assim, a equação da energia de deformação é dada por:

$$\bar{E}^{(2)} = \frac{1}{2} \bar{\sigma}_{22}^{(2)} \bar{\varepsilon}_{22}^{(2)} = \frac{1}{2} \bar{\sigma}_{22}^{(2)} \quad (26)$$

Aplicando as condições anteriores é possível obter a seguinte equação:

$$C_{2222}^H = \bar{\sigma}_{22}^{(2)} \bar{\varepsilon}_{22}^{(2)} = 2\bar{E}^{(2)} \quad (27)$$

Caso de Carga 3 – Estado de deformação por corte

Para calcular o tensor elástico  $C_{1212}^H$  é imposto que  $2\bar{\varepsilon}_{12}^{(3)} = 1$ ;  $\bar{\varepsilon}_{11}^{(3)} = \bar{\varepsilon}_{22}^{(3)} = 0$  e as seguintes condições de fronteira  $u_{2,i} = u_{1,m} = -\frac{1}{4}$ ;  $u_{2,j} = u_{1,n} = \frac{1}{4}$ .

A equação de energia de deformação é dada por:

$$\bar{E}^{(3)} = \frac{1}{2} \bar{\sigma}_{12}^{(3)} 2\bar{\varepsilon}_{12}^{(3)} = \frac{1}{2} \bar{\sigma}_{12}^{(3)} \quad (28)$$

Aplicando as condições anteriores é obtida a seguinte equação.

$$C_{1212}^H = \frac{\bar{\sigma}_{12}^{(3)}}{2\bar{\varepsilon}_{12}^{(3)}} = 2\bar{E}^{(3)} \quad (29)$$

Caso de Carga 4 – Estado de deformação biaxial

Para calcular o tensor elástico  $C_{1122}^H$  e  $C_{2211}^H$  é imposto que  $\bar{\varepsilon}_{11}^{(4)} = \bar{\varepsilon}_{22}^{(4)} = 1$ ;  $\bar{\varepsilon}_{12}^{(4)} = 0$ .

Os termos de rigidez não diagonais são determinados pela imposição das seguintes condições de fronteira biaxiais:

$$\mathbf{u}_{1,i} = \mathbf{u}_{2,m} = \mathbf{0}; \mathbf{u}_{1,j} = \mathbf{u}_{2,n} = \mathbf{1} \quad (30)$$

Por meio da equação (23), os componentes de tensão são expressos da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{11}^{(4)} &= C_{1111}^H \bar{\varepsilon}_{11}^{(4)} + C_{1122}^H \bar{\varepsilon}_{22}^{(4)} = 2\bar{E}^{(1)} + C_{1122}^H \\ \bar{\sigma}_{22}^{(4)} &= C_{2211}^H \bar{\varepsilon}_{11}^{(4)} + C_{2222}^H \bar{\varepsilon}_{22}^{(4)} = C_{1122}^H + 2\bar{E}^{(2)} \end{aligned} \quad (31)$$

Por definição, a energia total de deformação de uma célula unitária é dada pela seguinte equação:

$$\bar{E}^{(4)} = \frac{1}{2} \bar{\sigma}_{11}^{(4)} \bar{\varepsilon}_{11}^{(4)} + \frac{1}{2} \bar{\sigma}_{22}^{(4)} \bar{\varepsilon}_{22}^{(4)} = \frac{1}{2} (\bar{\sigma}_{11}^{(4)} + \bar{\sigma}_{22}^{(4)}) \quad (32)$$

Pela substituição da equação (31) na equação (32), obtém-se a seguinte equação:

$$C_{1122}^H = \bar{E}^{(4)} - \bar{E}^{(1)} - \bar{E}^{(2)} \quad (33)$$

Para problemas em 3D, os tensores de elasticidade podem ser calculados através das equações representadas a seguir.

$$\begin{aligned}
 C_{1111}^H &= 2\bar{E}^{(1)} & (34) \\
 C_{2222}^H &= 2\bar{E}^{(2)} \\
 C_{3333}^H &= 2\bar{E}^{(3)} \\
 C_{1212}^H &= 2\bar{E}^{(4)} \\
 C_{2323}^H &= 2\bar{E}^{(5)} \\
 C_{1323}^H &= 2\bar{E}^{(6)} \\
 C_{1122}^H &= \bar{E}^{(7)} - \bar{E}^{(1)} - \bar{E}^{(2)} \\
 C_{1133}^H &= \bar{E}^{(8)} - \bar{E}^{(1)} - \bar{E}^{(3)} \\
 C_{2233}^H &= \bar{E}^{(9)} - \bar{E}^{(2)} - \bar{E}^{(3)}
 \end{aligned}$$

### 2.3.5. Método de homogeneização computacional baseada na transformada rápida de Fourier

O método de homogeneização computacional baseado na transformada rápida de Fourier foi apresentada no artigo de investigação “*A fast numerical method for computing the linear and nonlinear properties of composites.*” dos autores, Moulinec e Suquet, publicado em 1994 [22].

O método foi criado para evitar o problema do uso de malha, usando assim a transformada rápida de Fourier para resolver problemas de homogeneização de uma célula unitária. Para caracterizar um material, os algoritmos do método de homogeneização baseado na FFT necessitam dos dados apresentados em uma grelha com espaçamentos regulares, permitindo assim, o uso de imagens microscópicas dos materiais compósitos na resolução deste problema [23].

Neste método, as propriedades mecânicas do material em estudo são dadas pela sua microestrutura, onde as suas deformações e tensões são determinadas através da resolução de um problema local, ou por outras palavras, no seu elemento de volume representativo (EVR). No método, este EVR é representado por uma imagem microscópica da microestrutura do material, a qual vai ser dividida por  $N$  pixéis. Nesta imagem, cada pixel tem a propriedade mecânica associada à porção de material que representa visualmente [24].

O problema local na célula unitária consiste em equações de equilíbrio, equações constitutivas e condições de fronteira. Neste problema é assumido que a sua fronteira com outras células é perfeitamente definida, onde as deformações e as tensões são constantes. Neste método, são usadas condições de fronteira periódicas, como mostra a equação (35) [24].

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^*(\mathbf{x})) + \mathbf{T} \text{ ou } \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}^*(\mathbf{x}) + \mathbf{E}\mathbf{x} \quad (35)$$

Depois das condições de fronteiras serem impostas é considerado um problema linear de homogeneização preliminar com uma rigidez  $\mathbf{c}^0$ , sujeita a um campo polarizante  $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})$ , como mostra a equação (36) [24].

$$\left. \begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) &= \mathbf{c}^0 : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^*(\mathbf{x})) + \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in V \\ \text{div } \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) &= \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in V, \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{n} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

A solução para a equação anterior pode ser expressa no espaço real e no espaço de Fourier, por meio do operador periódico de Green  $\Gamma^0$  associado ao  $\mathbf{c}^0$ , como ilustrado nas equações (37) e (38), respetivamente [24].

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^*(\mathbf{x})) = -\Gamma^0 * \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in V \quad (37)$$

Ou,

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{\xi}) = -\hat{\Gamma}^0(\boldsymbol{\xi}) : \hat{\boldsymbol{\tau}}(\boldsymbol{\xi}) \quad \forall \boldsymbol{\xi} \neq \mathbf{0}, \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \quad (38)$$

Quando o material de referência é isotrópico,  $\Gamma^0$  toma a seguinte forma.

$$\hat{\Gamma}_{ijkl}^0(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{4\mu^0|\boldsymbol{\xi}|^2} (\delta_{ki}\xi_h\xi_j + \delta_{hi}\xi_k\xi_j + \delta_{kj}\xi_h\xi_i + \delta_{hj}\xi_k\xi_i) - \frac{\lambda^0 + \mu^0}{\mu^0(\lambda^0 + 2\mu^0)} \frac{\xi_i\xi_j\xi_k\xi_h}{|\boldsymbol{\xi}|^4} \quad (39)$$

Com o problema preliminar é possível resolver o problema de homogeneização de um material compósito, com uma rigidez  $c(x)$  num ponto  $x$  sob uma tensão  $T$  estabelecida, usando a equação (40) [24].

$$\left. \begin{aligned} \sigma(x) &= c(x) : \varepsilon(u^*(x)) + T \quad \forall x \in V \\ \text{div } \sigma(x) &= \mathbf{0} \quad \forall x \in V, u^* \#, \sigma \cdot n - \# \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

De seguida, é introduzido um material homogéneo de referência com uma rigidez elástica  $c^0$ , e um tensor polarizante, que é desconhecido, sendo definido da seguinte forma [24].

$$\tau(x) = \delta c(x) : \varepsilon(u(x)), \quad \delta c(x) = c(x) - c^0 \quad (41)$$

Por fim, o problema é reduzido à equação periódica de Lippmann-Schwinger, na qual se lê, no espaço real e no espaço de Fourier, respetivamente, como mostra nas equações (42) [24].

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon(u(x)) &= -\Gamma^0(x) * \tau(x) + T \\ \hat{\varepsilon}(\xi) &= -\hat{\Gamma}^0(\xi) : \hat{\tau}(x) \quad \forall \xi \neq, \quad \hat{\varepsilon}(0) = T \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

Resumindo, este método usa as equações (41) e (42) alternativamente no espaço real e no espaço de Fourier, para resolver iterativamente a equação (40), como mostra o esquema seguinte [24].

$$\left. \begin{array}{ll} \textit{Iniciação} & \varepsilon^0(x) = T, \quad \forall x \in V \\ & \sigma^0(x) = c(x) : \varepsilon^0(x), \quad \forall x \in V \\ \textit{Iteração } i + 1 & \varepsilon^i \text{ e } \sigma^i \text{ são desconhecidos} \\ \quad (a) & \tau^i(x) = \sigma^i(x) - c^0 : \varepsilon^i(x), \\ \quad (b) & \hat{\tau}^i = \mathfrak{F}(\tau^i), \\ \quad (c) & \textit{Teste de Convergência} \\ \quad (d) & \hat{\varepsilon}^{i+1}(\xi) = -\hat{\Gamma}^0(\xi) : \hat{\tau}^i(x) \quad \forall \xi \neq, \quad \hat{\varepsilon}^{i+1}(0) = T \\ \quad (e) & \varepsilon^{i+1} = \mathfrak{F}^{-1}(\hat{\varepsilon}^{i+1}), \\ \quad (f) & \sigma^{i+1}(x) = c(x) : \varepsilon^{i+1}(x). \end{array} \right\} \quad (43)$$

As letras  $\mathfrak{F}$  e  $\mathfrak{F}^{-1}$  representam a transformada de Fourier e a sua inversa.

### 2.3.6. Exemplo de um problema 2D/3D resolvido pelo método de homogeneização computacional

Neste subcapítulo serão apresentados três exemplos de problemas de homogeneização onde se pretende verificar se o programa computacional de homogeneização é capaz de obter resultados satisfatórios, comparando com os resultados mostrados no artigo de investigação *Using strain energy-based prediction of effective elastic properties in topology optimization of material microstructures* dos autores Weihong Zang, Gaoming Dai, Fengwen Wang, Shiping Sun e Hicham Bassir [1].

Para calcular as propriedades homogeneizadas do problema é usado um programa, programado em Python, onde se calcula a matriz de rigidez homogeneizada, o módulo de Young e o coeficiente de Poisson do material compósito. Este programa é baseado no programa apresentado no artigo de investigação *Preprocessing and Postprocessing for materials based on the homogenization method with adaptive finite element methods*, dos autores José Guedes e Nobori Kikuchi, no qual é usado o método de homogeneização com o método de elementos finitos, como meio de cálculo das propriedades mecânicas [25].

Exemplo 1 - Célula unitária com microestrutura simétrica

Este exemplo é de uma célula unitária de um material compósito com dois materiais com a geometria mostrada na figura 12, em que o material representado a vermelho tem um módulo de Young de 1 GPa e o material representado a azul tem um módulo de Young de 10 GPa. Ambos os materiais têm um coeficiente de Poisson de 0,3.

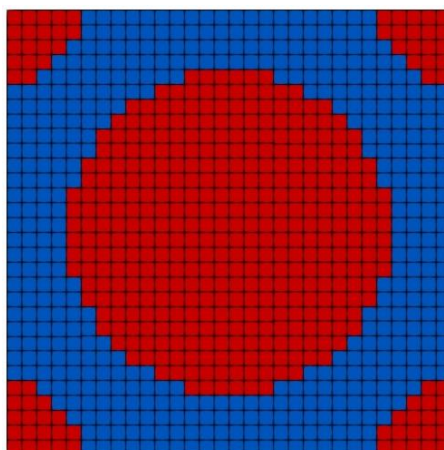
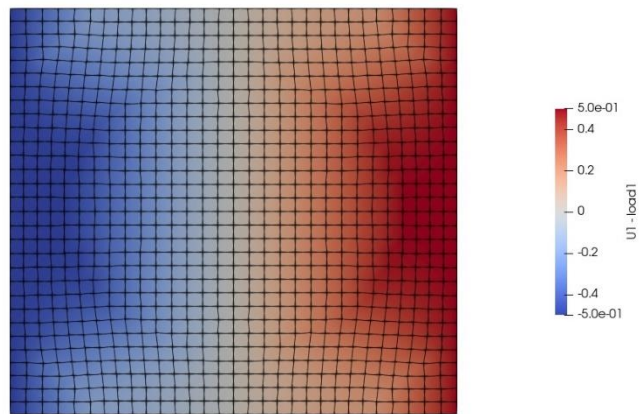
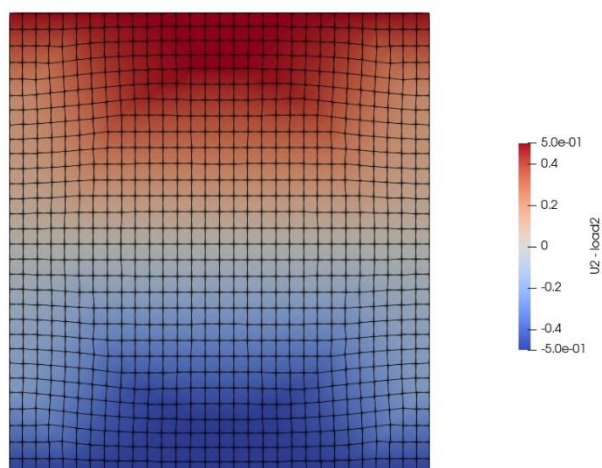


Figura 12 - Célula unitária do exemplo 1.

Depois de executar o programa de homogeneização, este devolve um ficheiro de output onde são dadas as matrizes da rigidez e a sua inversa, o módulo de Young médio e o coeficiente de Poisson homogeneizado. Ainda neste programa, é obtido um ficheiro que pode ser lido num software de visualização científica, tal como o *Paraview*, em que é possível visualizar imagens como na figura 12, assim como imagens das deformações da CU, consoante as condições de fronteira impostas, como ilustrado nas figuras 13, 14 e 15.



**Figura 13 - Imagem dos deslocamentos em x na CU.**



**Figura 14 – Imagem dos deslocamentos em y na CU.**

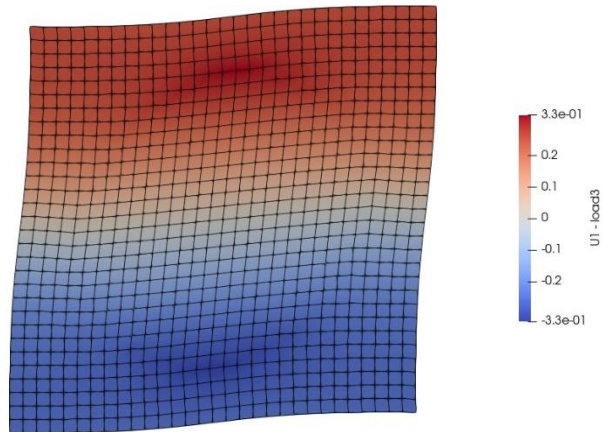


Figura 15 – Imagens dos deslocamentos em xy na CU.

De seguida, serão apresentados os resultados obtidos na análise deste exemplo, e comparados com os resultados apresentados no artigo de investigação.

Resultados obtidos na análise do exemplo:

$$D = \begin{bmatrix} 3,757527 & 1,370292 & 0 \\ 1,370292 & 3,757527 & 0 \\ 0 & 0 & 1,187139 \end{bmatrix} \quad (44)$$

$$C = \begin{bmatrix} 0,3069546 & -0,1119399 & 0 \\ -0,1119399 & 0,3069546 & 0 \\ 0 & 0 & 0,8423614 \end{bmatrix} \quad (45)$$

$$\bar{E} = \frac{452 \times 1 + 448 \times 10}{900} = 5,48 \text{ GPa} \quad (46)$$

$$E^H = 3,258 \text{ GPa} \quad (47)$$

$$\nu = 0,365 \quad (48)$$

Resultados do artigo de investigação.

$$D = \begin{bmatrix} 3,7459 & 1,3716 & 0 \\ 1,3716 & 3,7459 & 0 \\ 0 & 0 & 1,1832 \end{bmatrix} \quad (49)$$

$$C = D^{-1} = \begin{bmatrix} 0,3083 & -0,1129 & 0 \\ -0,1129 & 0,3083 & 0 \\ 0 & 0 & 0,8452 \end{bmatrix} \quad (50)$$

$$E^H = \frac{1}{0,3083} = 3,244 \text{ GPa} \quad (51)$$

$$v = 0,366 \quad (52)$$

Se arredondarmos os resultados da matriz D, obtidos através do programa, para duas casas decimais, é possível confirmar que o método de homogeneização computacional é bastante preciso para este exemplo. De seguida, é apresentado o erro relativo, entre o módulo de Young, apresentado no artigo, e o módulo obtido através do método de homogeneização computacional do material compósito.

$$\text{Erro Relativo} = \frac{E^Z - E^H}{E^Z} \times 100 = \frac{(3,258 - 3,244)}{3,244} \times 100 = 0,43\% \quad (53)$$

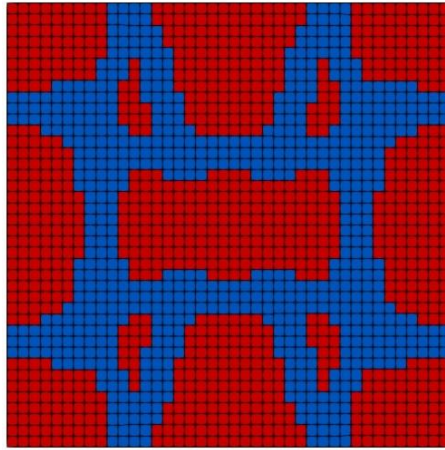
Neste exemplo, verifica-se que o método de homogeneização computacional para um problema 2D obteve bons resultados, com um erro relativo abaixo de 1%.

Caso 2 - Material com microestrutura com coeficiente de Poisson negativo

Para verificar veracidade do programa de homogeneização computacional, vai-se realizar uma comparação entre os resultados obtidos através do método e os resultados dados no artigo do caso 2.

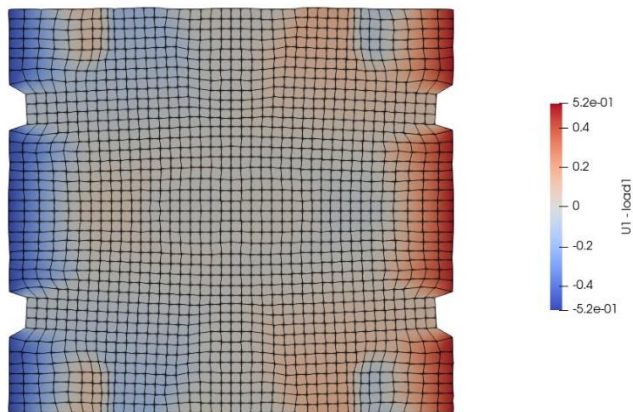
Igualmente ao caso 1, foi feito um ficheiro de input onde foram caracterizadas as propriedades mecânicas e os nós da malha deste CU com dois materiais diferentes, com a geometria mostrada na figura 16. Nesta CU, o material a vermelho tem um módulo de Young

de 1 GPa e o material representado a azul tem um módulo de Young de 1000 GPa. Ambos os materiais têm um coeficiente de Poisson de 0,333.



**Figura 16 - Célula Unitária do exemplo 2.**

Nas figuras 17, 18 e 19 é possível visualizar os deslocamentos na CU em x, y e xy.



**Figura 17 – Imagem do deslocamento em x do CU.**

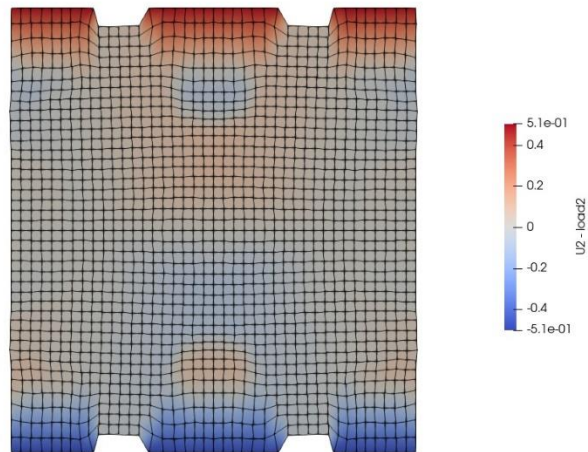


Figura 18 - Imagem dos deslocamentos em y da CU.

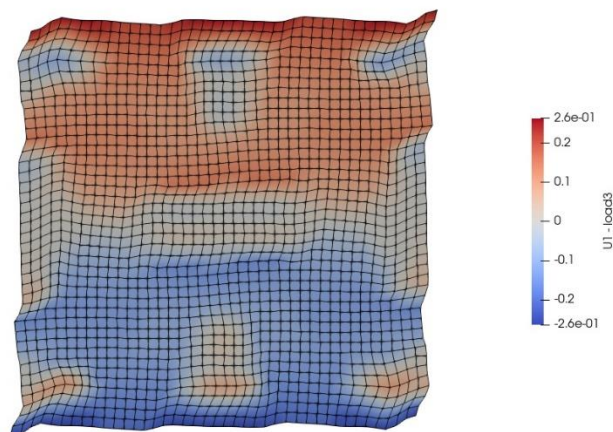


Figura 19 - Imagem dos deslocamentos em xy da CU.

Os resultados das propriedades homogeneizadas foram obtidos da mesma forma que o do exemplo anterior. Os resultados são os seguintes.

$$D = \begin{bmatrix} 94,5659 & -28,8442 & 0 \\ -28,8442 & 146,9193 & 0 \\ 0 & 0 & 13,5417 \end{bmatrix} \quad (54)$$

$$C = \begin{bmatrix} 0,012482 & 0,002208 & 0 \\ 0,002208 & 0,00724 & 0 \\ 0 & 0 & 0,073846 \end{bmatrix} \quad (55)$$

$$\bar{E} = 408,717 \text{ GPa} \quad (56)$$

$$E^H = 88,903 \text{ GPa} \quad (57)$$

$$v = -0,196 \quad (58)$$

A seguir serão apresentados os resultados do artigo de investigação.

$$D = \begin{bmatrix} 92,2876 & -33,3630 & 0 \\ -33,3630 & 144,0602 & 0 \\ 0 & 0 & 12,9955 \end{bmatrix} \quad (59)$$

$$C = D^{-1} = \begin{bmatrix} 0,011826 & 0,002739 & 0 \\ 0,002739 & 0,0075758 & 0 \\ 0 & 0 & 0,07695 \end{bmatrix} \quad (60)$$

$$E^H = \frac{1}{0,011826} = 84,559 \text{ GPa} \quad (61)$$

$$v = -0,232 \quad (62)$$

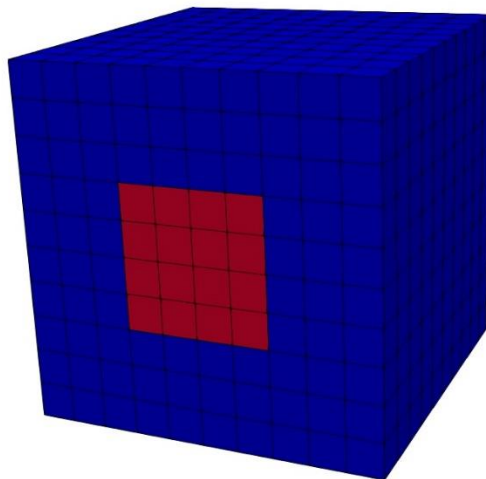
$$\text{Erro Relativo} = \frac{E^Z - E^H}{E^Z} \times 100 = \frac{(88,903 - 84,559)}{84,559} \times 100 = 5,14\% \quad (63)$$

Com este exemplo, verifica-se que este método de homogeneização computacional, mesmo para problemas com uma geometria da microestrutura mais complicada, é possível obter resultados satisfatórios, com um erro abaixo dos 10%. Em suma, para problemas 2D, onde

não se conheçam as propriedades dos materiais, é possível usar este método com um erro relativamente baixo.

### Caso 3 – Célula unitária tridimensional

Para a verificação da qualidade do programa de homogeneização computacional para problemas de três dimensões, foi usado o exemplo de um problema apresentado no artigo de investigação. Este caso é de uma célula unitária com dois materiais, como ilustrado na figura 20, em que o material a azul têm um módulo de Young de 300 GPa e um coeficiente de Poisson de 0.3. O material a vermelho tem um módulo de Young de 5 GPa e um coeficiente de Poisson de 0.3. Esta CU é apresentada por um cubo com uma malha de 10x10x10.



**Figura 20 - Figura da célula unitária do caso 3.**

Através da criação de um input, com as características mecânicas da CU e da sua implementação no programa de homogeneização computacional, para problemas de três dimensões, foi possível obter a matriz da rigidez e sua inversa, o módulo de Young homogeneizado e coeficiente de Poisson.

A seguir, apresentam-se os resultados obtidos.

$$D = \begin{bmatrix} 314,590 & 102,984 & 102,984 & 0 & 0 & 0 \\ 102,984 & 256,009 & 87,2694 & 0 & 0 & 0 \\ 102,984 & 87,2694 & 256,009 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 82,806 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 63,031 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 82,806 \end{bmatrix} \quad (64)$$

$$C = \begin{bmatrix} 0,0040 & -0,0012 & -0,0012 & 0 & 0 & 0 \\ -0,0012 & 0,0048 & -0,0015 & 0 & 0 & 0 \\ -0,0012 & -0,0012 & 0,0048 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,01208 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0159 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,01208 \end{bmatrix} \quad (65)$$

$$E^H = 252,8 \text{ GPa} \quad (66)$$

$$\nu = 0,3 \quad (67)$$

Igualmente aos casos anteriores, o programa também devolve um ficheiro, em que, através do programa *Paraview* é possível visualizar a CU com os dois materiais, como mostra a figura 20 e os deslocamentos na CU, ilustrado na figura 21.

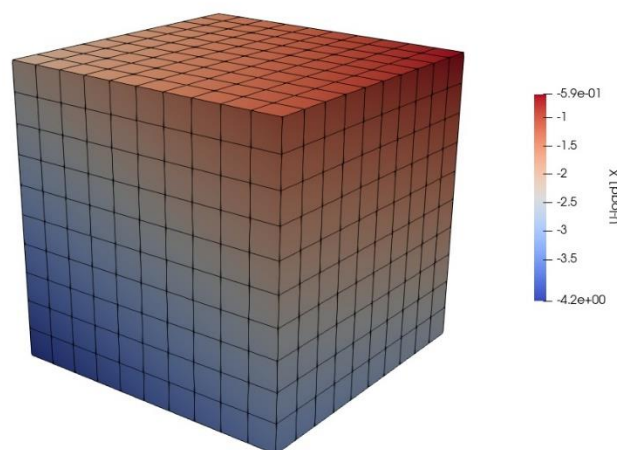


Figura 21 - Imagem da célula unitária com deslocamento em x

Apresentam-se os resultados do artigo de investigação.

$$D = \begin{bmatrix} 284,296 & 92,467 & 92,467 & 0 & 0 & 0 \\ 92,467 & 251,214 & 83,271 & 0 & 0 & 0 \\ 92,467 & 83,271 & 251,214 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 80,785 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 62,067 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 80,785 \end{bmatrix} \quad (68)$$

$$C = \begin{bmatrix} 0,00429 & -0,0012 & -0,0012 & 0 & 0 & 0 \\ -0,0012 & 0,0048 & -0,0116 & 0 & 0 & 0 \\ -0,0012 & -0,0116 & 0,0048 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,0124 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0161 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0124 \end{bmatrix} \quad (69)$$

$$E^H = \frac{1}{0,0042886} = 233,176 \text{ GPa} \quad (70)$$

$$v = 0,280 \quad (71)$$

$$\begin{aligned} \text{Erro Relativo} &= \frac{E^Z - E^H}{E^Z} \times 100 = \frac{(252,8 - 233,176)}{233,176} \times 100 \quad (72) \\ &= 8,4159\% \end{aligned}$$

Com a comparação dos resultados obtidos com os resultados apresentados, foi possível verificar que o programa de homogeneização computacional, para problemas de três dimensões, é capaz de obter resultados satisfatórios para este tipo de problemas. Neste exemplo, obteve-se um valor do módulo de Young com um erro de 8%.



### 3. Análise dos materiais compósitos

Neste capítulo será feita uma apresentação dos materiais estudados na dissertação *Estudo de materiais compósitos com fibras processados por injeção*, de Natália Ferreira [2], realizada em 2011, e da dissertação *Processamento e Caracterização de Compósitos com Fillers de Argila Expandida*, de Tiago Branquinho, na qual serão usados para a análise de propriedades com o programa computacional de homogeneização [3]. Começa-se por explicar como os colegas fabricaram os materiais compósitos e como obtiveram os módulos de Young. Numa segunda parte, será apresentada a caracterização mecânica dos materiais compósitos através do método de homogeneização computacional e seus resultados.

#### 3.1. Material compósito com polipropileno e fibra de vidro

##### 3.1.1. Materiais utilizados

Na fabricação dos provetes de teste de material compósito foram usados dois materiais, sendo eles polipropileno e fibra de vidro, em que o polipropileno é o material de matriz e a fibra de vidro o material de reforço. O material de matriz foi ligado com fibras curtas de vidro ou então, fibras longas de vidro, com diferentes frações de volume, sendo elas 5%, 10%, 15%, 20%, 25% e 30%.

O polipropileno CAPILENE R50 é um material não tóxico, amigo do ambiente e reciclável. Este material tem uma grande gama de utilizações, podendo ser usado na fabricação por injeção, sendo usado no fabrico de produtos de jardinagem, produtos alimentares, caixas, entre outros produtos.

Algumas propriedades do polipropileno usado estão apresentadas na tabela 1.

Tabela 1 - Tabela de propriedades do polipropileno [3].

Propriedades Mecânica	Valor	Unidade
Módulo de Young	1400	MPa
Resistência à flexão	57,61	MPa
Coefficiente de Poisson	0,43	-

A fibra de vidro é um material que tem uma excelente relação tensão máxima/peso e uma boa resistência ao impacto, comparado a outros reforços de compósitos. Este material tem boas propriedades elétricas, boa resistência térmica, boa resistência à humidade e boa isolamento sonora. Os compósitos com reforços de fibras de vidro podem ter aplicações em diversos campos da indústria, tais como: aeroespacial, automóvel, civil, entre muitos outros.

Algumas propriedades mecânicas da fibra de vidro usado na fabricação dos provetes estão apresentadas na tabela 2.

Tabela 2 - Tabela de propriedades de fibra de vidro [26].

Propriedades Mecânicas	Valor	Unidades
Módulo de Young	72,5	GPa
Coefficiente de Poisson	0,2	-

### 3.1.2. Processo de fabricação de provetes

Os provetes de material compósito foram fabricados por injeção de material num molde, representado na figura 22. O material antes de ter sido injetado foi previamente preparado, onde foram feitas as misturas do polipropileno com as diferentes frações de volumes [2].

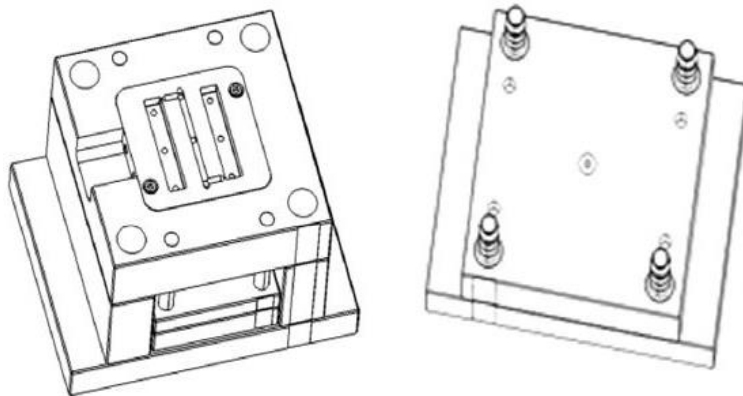


Figura 22 - Desenho do molde para fabricação dos provetes (Imagem retirada de [2]).

As especificações do equipamento de injeção, para a fabricação dos provetes, foram 200°C a 250°C de temperatura de injeção, 60 bar de pressão de injeção e 50 bar de pressão de compactação. Os tempos foram, 9 segundos de injeção, 2 segundos de compactação e 30 segundos de arrefecimento [2].

## 3.2. Material compósito com resina epóxida, partículas de argila e fibra de vidro

### 3.2.1. Materiais usados na fabricação dos provetes

Na fabricação dos provetes foi usada uma matriz de epóxida, com adição de diferentes frações de partículas argila e fibra de vidro.

Foram processados 14 provetes com partículas de argila de 0.7 mm de diâmetro, com frações de volume de 24%, 28%, 32%, 36% e 40%, sendo que a 8 deles foi adicionado fibra de vidro, com frações de volume de 1% e de 3%.

Foram processados 4 provetes com partículas de argila de 1.9 mm de diâmetro, com frações de volume de 24%, 28%, 32% e 36%.

Por último, foram processados 3 provetes, com partículas de argila de 2.6 mm de diâmetro, com frações de volume de 24%, 28% e 32%. [3].

A resina epóxida usada na fabricação dos provetes foi a resina EPÓXIDA SR1500, da empresa SICOMIN Epoxy Systems. Na tabela 3, estão representadas algumas das propriedades mecânicas da resina [3].

Tabela 3 - Tabela de propriedades da resina epóxida SR1500 [27], [28].

Propriedades Mecânicas	Valor	Unidades
Módulo de Young	2,837	GPa
Coefficiente de Poisson	0,35	

A fibra de vidro usada na fabricação dos provetes tem as mesmas propriedades mecânicas que a fibra de vidro usada no trabalho *Estudo de materiais compósitos com fibras processados por injeção* [2], apresentadas na tabela 2.

Devido à falta de informação do módulo de Young das partículas de argila, foi usada a regra das misturas, para o calcular. Consultando a tabela de valores de módulo de elasticidade à flexão da resina e dos compósitos com diferentes frações mássicas de partículas de argila expandida, da dissertação *Processamento e Caracterização de Compósitos com Fillers de*

*Argila Expandida*, de Tiago Branquinho [3], verificou-se que o material compósito com uma fração volúmica de 24% de partículas de argila, tinha um módulo de Young de 11,3 GPa. Sabendo que o módulo de elasticidade da resina epóxida é de 2,8 GPa, têm-se o seguinte resultado.

$$E_{Reforço} = \frac{11,338 - 2,837 \cdot 0,76}{0,24} = 38,258 \text{ MPa} \quad (73)$$

Na tabela 4 estão indicadas algumas propriedades das partículas de argila.

Tabela 4 - Tabela de propriedades das partículas de argila.

Propriedades Mecânicas	Valor	Unidades
Módulo de Elasticidade	38,258	GPa
Coefficiente de Poisson [29]	0,2	-

### 3.3. Resultados obtidos através do método de homogeneização

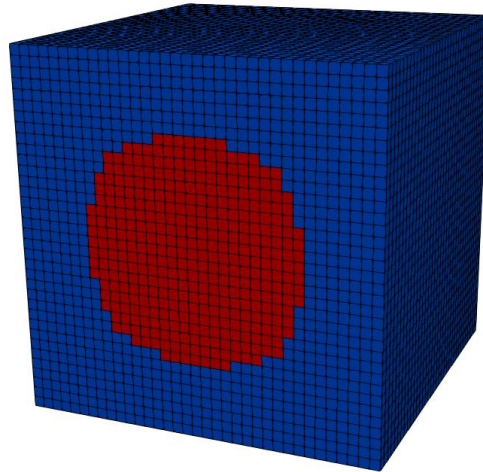
Para que o programa de homogeneização calcule os módulos de Young homogeneizados e os coeficientes de Poisson homogeneizados, é necessário inserir *inputs* no programa. Depois do programa correr, este dá um *output*, onde é apresentada a matriz da rigidez, a matriz inversa, o módulo de Young médio e o coeficiente de Poisson do compósito.

#### 3.3.1. Criação dos inputs para caracterização das propriedades

Para a caracterização dos materiais compósitos, é necessário a criação de *inputs*. Os *inputs* consistem na caracterização da CU do material compósito, onde é necessário introduzir as coordenadas dos nós da malha; a caracterização dos cubos existentes na malha, conhecidos por *voxels*, especificando para cada *voxel* quais os nós que lhe pertence; identificar os materiais existentes no material compósito; identificar o material que o *voxel* representa na CU.

Devido ao facto de não ter tido acesso à microestrutura dos materiais compósitos em estudo, as CU foram idealizadas de forma a que a sua estrutura fosse o mais fiel possível em termos geométricos, para que os erros fossem mínimos.

Na criação da CU do material compósito de resina e fibra de vidro, idealizou-se que a CU seria um cubo de polipropileno, com um cilindro de fibra de vidro no centro, como representado na figura 23.



**Figura 23 - Célula Unitária de material compósito de resina e fibra de vidro com diferentes frações de volume de fibra de vidro.**

Para criar essa CU, foram realizados cálculos para averiguar a quantidade de *voxels* que correspondia à fração de volume de fibra de vidro. Na CU, a fibra de vidro tem uma secção o mais semelhante possível a um círculo, para melhor simular a secção de um fio de fibra.

Para o material de resina, com partículas de argila e fibra de vidro, a CU é constituída por um cubo de resina, um cubo interior que irá representar uma esfera de argila e por linhas que simulam os filamentos de fibra de vidro, representado na figura 24. Estas linhas estão dispostas em duas orientações, x e y, e em diversas alturas da CU.

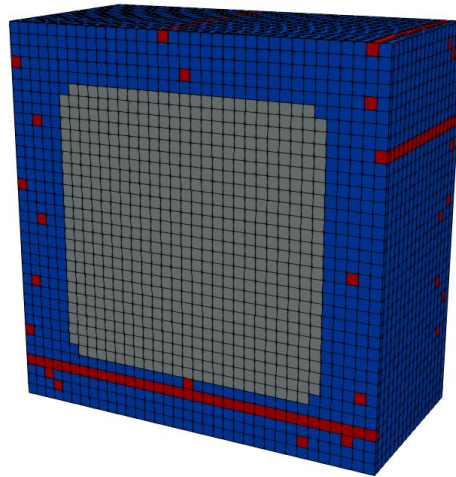


Figura 24 - Corte da célula unitária de resina epóxida com partículas de argila e fibra de

Foram realizadas análises com malha de 30x30x30 e de 35x35x35, para verificar se havia um melhoramento nos resultados, com o aumento da malha. Os resultados através da utilização do programa de homogeneização computacional estão apresentados nas tabelas 5.

Tabela 5 - Tabela de comparação de valores do módulo de Young, com diferente tamanho de malha.

Material	Eflexão [MPa] (30x30x30)	Eflexão [MPa] (35x35x35)	Diferença entre valores do módulo de Young [MPa]
PP + 5% FV	1605,33	1609,14	3,81
PP + 10% FV	1810,67	1814,96	4,29
PP + 15% FV	2034,67	2024,49	10,18
PP + 20% FV	2240	2240	0
PP + 25% FV	2445,33	2445,71	0,38
PP + 30% FV	2669,33	2665,14	4,19

Comparando os valores do módulo de elasticidade, obtidos com as malhas 30x30x30 e com 35x35x35, verificou-se que a diferença entre os valores é reduzida, não mais do que 11 MPa. Verificou-se também que nos materiais com maior fração volume a diferença entre resultados é menor do que nos materiais com menor fração de volume, como é possível visualizar na tabela 5.

Para a comparação com os resultados do módulo de Young da análise de resistência à flexão vão ser usados os valores obtidos com a malha 35x35x35, presumindo que estes resultados sejam mais próximos da realidade.

### 3.3.2. Resultados das propriedades do material compósito de resina, partículas de argila e fibra de vidro.

Na tabela 6 estão apresentados os resultados do módulo de elasticidade do material com resina epóxida e partículas de argila, e na tabela 7 estão apresentados os resultados do módulo de elasticidade do material com resina epóxida e fibra de vidro.

Tabela 6 - Tabela das propriedades obtidas de material compósito de resina e partículas de argila.

<b>Material</b>	<b>Resultados do módulo de elasticidade à flexão [MPa]</b>
SR1500 + 24% Argila	11428,92
SR1500 + 28% Argila	12812,71
SR1500 + 32% Argila	14178,33
SR1500 + 36% Argila	15662,91
SR1500 + 40% Argila	16926,92

Tabela 7 - Tabela das propriedades obtidas do material compósito de resina, partículas de argila e fibra de vidro.

<b>Material</b>	<b>Resultados do módulo de elasticidade à flexão [MPa]</b>
SR1500 + 1% Fv	3576,28
SR1500 + 3% Fv	4941,11
SR1500 + 32% Ar + 1% Fv	14863,94
SR1500 + 32% Ar + 3% Fv	16285,63
SR1500 + 36% Ar + 1% Fv	16345,33
SR1500 + 36% Ar + 3% Fv	17708,53
SR1500 + 40% Ar + 1% Fv	17562,24
SR1500 + 40% Ar + 3% Fv	19100,33



## 4. Comparação de valores do módulo de Young

Neste capítulo, faz-se a comparação dos resultados da caracterização das propriedades mecânicas obtidas através do método de homogeneização e dos resultados obtidos da análise de resistência à flexão em três pontos.

### 4.1. Comparação dos módulos de Young do material compósito com polipropileno e fibra de vidro

Na tabela 8, estão apresentados os resultados do módulo de elasticidade do material compósito de polipropileno com fibra de vidro, obtidos através do programa de homogeneização e através do método de análise de resistência à flexão em três pontos.

**Tabela 8 – Tabela de comparação das propriedades mecânicas do material compósito de resina e fibra de vidro, obtidas com o método de homogeneização em malha de 35x35x35 e de análise de resistência à flexão.**

<b>Material</b>	<b>Resultados de análise de resistência à flexão em 3 ponto [MPa]</b>	<b>Resultados obtidos através de homogeneização computacional [MPa]</b>	<b>Diferença entre resultados [MPa]</b>	<b>Erro Relativo entre os valores do módulo [%]</b>
PP + 5% Fv	1781,47	1609,14	172,33	9,7
PP + 10% Fv	1887,33	1814,96	72,37	3,8
PP + 15% Fv	1969,7	2034,49	64,59	3,3
PP + 20% Fv	2149,4	2240	90,6	4,2
PP + 25% Fv	2011,33	2445,71	434,38	21,6
PP + 30% Fv	2323,6	2665,14	341,54	14,7

Após uma análise entre os resultados e o cálculo do erro relativo, verificou-se que o erro relativo é inferior a 22% e a diferença entre resultados não é superior a 435 MPa. Os resultados dos materiais com reforço de 5% a 20%, podem ser considerados mais

satisfatórios do que os resultados dos materiais com reforço de 25% e 30%, pois têm um erro relativo a abaixo dos 10%.

A diferença das frações de volume, entre as células unitárias usadas na análise das propriedades mecânicas pelo método de homogeneização, e as do material compósito fabricado pela Natália Ferreira [2] no seu estudo, diferem no máximo 0,12%. Uma forma de reduzir esta diferença, seria realizar as análises numa malha maior, por exemplo, de 60x60x60, onde as percentagens de fração de volume existentes nas CU seriam iguais às do estudo da Natália Ferreira.

Na figura 25, é possível visualizar que o erro relativo não é proporcional à diferença de fração de volume, como eu previra.

Analisando as materiais com 10% e 15% de fibra de vidro e os com 25% e 30% de fibra de vidro, constata-se que ambos os pares têm uma diferença de fração de volume semelhante, contudo os últimos têm um erro relativo superior.

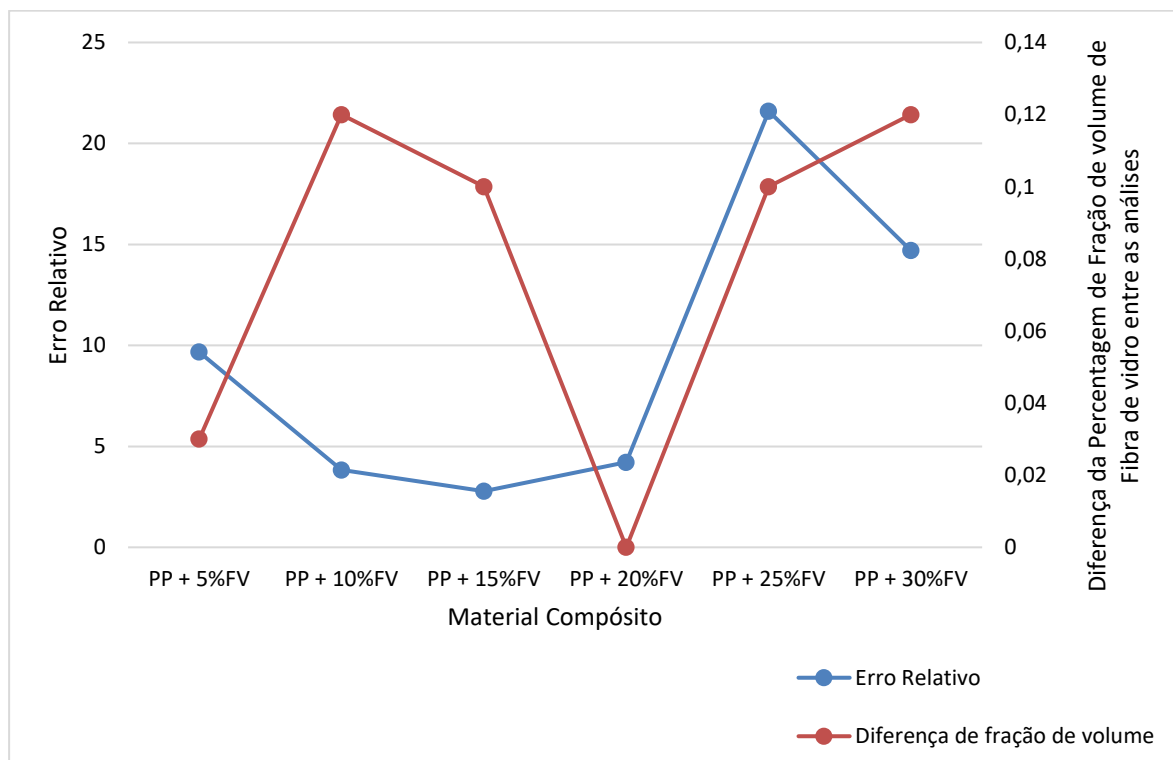


Figura 25 – Gráfico de comparação entre o erro relativo e a diferença de fração de volume entre análises.

Verificou-se também, que nos resultados, os valores são superiores aos da análise de resistência à flexão em três pontos. Este facto, pode levar a outros problemas, tais como, na escolha de um material para um dado projeto.

## 4.2. Comparação dos módulos de Young do material compósito com resina epóxida, partículas de argila e fibra de vidro

Na tabela 9, estão apresentados os valores do módulo de elasticidade do material compósito de resina epóxida com partículas de argila, obtidos através da análise de resistência à flexão em três pontos e pelo método de homogeneização. Nesta tabela, estão ainda apresentados os erros relativos, para verificar se os resultados da análise pelo método de homogeneização não divergem muito dos valores do a análise de resistência à flexão.

**Tabela 9 - Tabela de propriedades do material compósito com partículas de argila com diâmetro de 0.7 mm.**

<b>Material</b>	<b>Resultados do módulo de elasticidade à flexão [MPa]</b>	<b>Resultados obtidos através de homogeneização computacional [MPa]</b>	<b>Erro Relativo [%]</b>
SR1500 + 24% Ar	11338	11428,92	0,80
SR1500 + 28% Ar	10068	12812,71	27,26
SR1500 + 32% Ar	8662	14178,33	63,68
SR1500 + 36% Ar	8105	15662,91	93,25
SR1500 + 40% Ar	5635	16926,92	200,39

Ao analisar os resultados apresentados na tabela 9, verificou-se, tal como referido anteriormente, que os materiais compósitos com reforço de partículas, com um aumento da fração de volume, este perde resistência mecânica. Mas esta perda de resistência, só é observada na análise de resistência à flexão por três pontos. Com o método de homogeneização, observa-se que com o aumento da fração de volume de reforço existe igualmente um aumento do módulo de elasticidade, tal como é possível visualizar na figura 26.



**Figura 26 – Gráfico de comparação de resultados obtidos através da análise de resistência à flexão e pelo método de homogeneização.**

A grande diferença entre os resultados das análises pode ser explicada pelo facto de o valor do módulo de elasticidade do reforço de argila ter sido obtido através da regra das misturas. Este valor, do módulo de elasticidade, possivelmente, é muito mais elevado do que a realidade, o que poderá ter conduzido a um resultado do módulo de elasticidade do material, igualmente muito elevado.

Outra possível razão, como é descrito no capítulo 2.3.3, neste método o material é assumido que é composto por uma repetição de células unitárias, mas na realidade, as partículas de reforço encontram-se aleatoriamente no espaço do material. Ao assumir que o material é constituído por células iguais, as forças aplicadas ao material serão mais distribuídas pelo material, dando assim uma maior resistência mecânica.

Na tabela 10, estão apresentados os valores do módulo de elasticidade de material compósito de resina epóxida com partículas de argila e fibra de vidro, obtidas através da análise de resistência à flexão por três pontos e pelo método de homogeneização.

**Tabela 10 - Tabela de propriedades do material compósito com partículas de argila com diâmetro de 0.7 mm e fibra de vidro.**

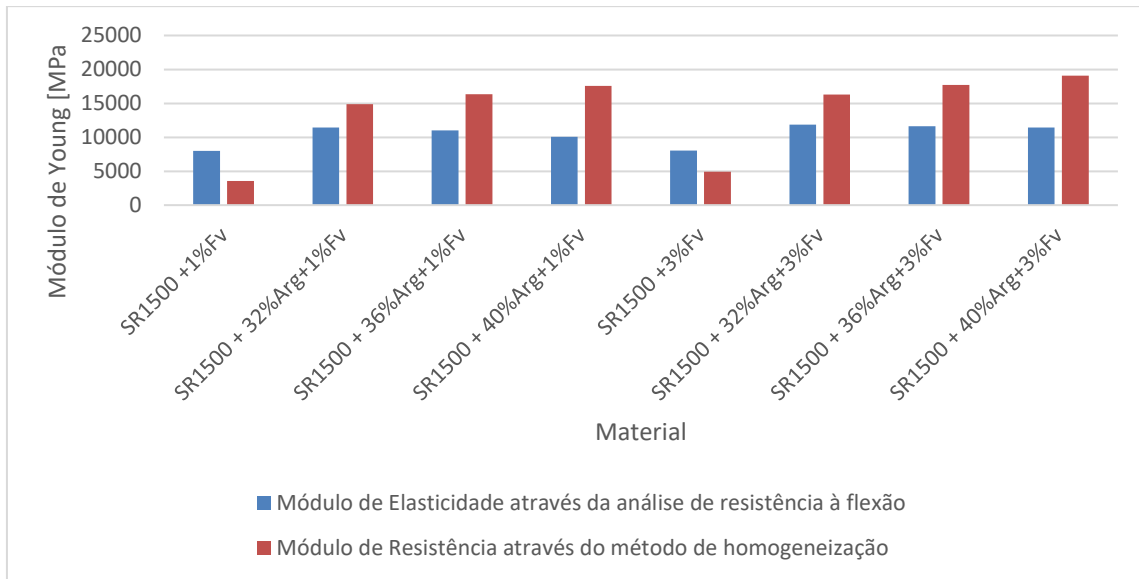
<b>Material</b>	<b>Resultados do módulo de elasticidade à flexão [MPa]</b>	<b>Resultados obtidos através de homogeneização computacional [MPa]</b>	<b>Erro relativo [%]</b>
SR1500 + 1% Fv	8018	3576,28	55,40
SR1500 + 3% Fv	8037	4941,11	38,52
SR1500 + 32% Ar + 1% Fv	11452	14863,94	29,79
SR1500 + 32% Ar + 3% Fv	11858	16285,63	37,34
SR1500 + 36% Ar + 1% Fv	11037	16345,33	48,10
SR1500 + 36% Ar + 3% Fv	11617	17708,53	52,44
SR1500 + 40% Ar + 1% Fv	10087	17562,24	74,11
SR1500 + 40% Ar + 3% Fv	11433	19100,33	67,06

Analisando os resultados apresentados na tabela 10, verifica-se que os valores do módulo de elasticidade, obtidos através da análise de resistência à flexão em três pontos, diminuem com o aumento da fração de volume de reforço. Ainda nesta análise, verifica-se que com o acrescento da fibra de vidro no material, existe um aumento do módulo de elasticidade, comparado aos valores de módulo de elasticidade dos materiais de resina epóxida com partículas de argila.

Com os resultados do método de homogeneização, verificou-se, tal como a análise de resistência à flexão, um aumento do módulo de elasticidade com a adição da fibra de vidro ao material.

À semelhança dos resultados do material com apenas partículas de argilas, os resultados do módulo de elasticidade aumentam com o incremento da fração de volume de reforço, o que dá uma distorção da realidade. Estas diferenças estão registadas no gráfico da figura 27.

Verificou-se também, que para materiais compósitos com uma fração de volume de reforço em fibra baixo, o método não obtém resultados satisfatórios.



**Figura 27 – Gráfico de comparação do módulo de elasticidade obtido com análise de resistência à flexão com o método de homogeneização.**

## 5. Conclusões e Trabalhos Futuros

### 5.1. Conclusões

Após a análise das propriedades mecânicas em problemas de duas dimensões, usando o método de homogeneização, pode-se verificar que o método é bastante eficaz a calcular a matriz da rigidez, obtendo-se assim valores muito próximos da realidade, com um erro relativo abaixo dos 10%.

Ao analisar os valores do módulo de elasticidade do material compósito com reforço de fibra de vidro, obtidos com o método de homogeneização, verificou-se que com o aumento da fração de volume o módulo cresce igualmente, tal como era esperado. No caso do material compósito com reforço de partículas de argila, averiguou-se que os valores obtidos do módulo aumentam com o incremento da fração de volume do reforço, mas desta vez, diferente dos valores da análise de resistência à flexão.

Depois da comparação dos valores do módulo de elasticidade do material com reforço de fibra de vidro, obtidos através do método de homogeneização e pela análise de resistência à flexão, é possível verificar que os valores são diferentes, com um erro relativo inferior a 22%. Com esta análise, concluiu-se que através deste método, os resultados apresentam um erro relativo abaixo dos 30%, tal como é afirmado no artigo *A comparison of homogenization and standard mechanics analyses for periodic porous composites* [21]. Os resultados são considerados satisfatórios, atendendo ao número de horas necessário para os obter (cerca de 6 horas), pois esse tempo é menor do que o número de horas para analisar um material pela análise de resistência à flexão e ao facto de as imagens da microestrutura dos materiais em estudo não serem conhecidas. Analisou-se também, que para materiais com uma fração de volume de reforço em fibra muito pequena, o método não é muito eficaz a adquirir o valor do módulo, obtendo valores com um erro relativo de 50%.

Foi possível verificar também, que os valores obtidos pelo método são no geral superiores aos valores obtidos através da análise de resistência, o que pode levar a erros na escolha de material num projeto.

No fim de analisar os valores do módulo de elasticidade dos materiais compósitos de resina epóxida com reforço de partículas de argila, obtidos pelo método de homogeneização, foi possível apurar que os valores do módulo aumentaram com o incremento da fração de

volume, ao contrário dos valores obtidos com a análise de resistência à flexão, onde o valor do módulo diminuía. Este acontecimento pode ter sido causado devido ao valor do módulo de elasticidade do reforço, obtido através da regra das misturas, ser muito elevado, dando assim ao material uma maior resistência mecânica.

## **5.2. Trabalhos Futuros**

Como ponto de partida para um trabalho futuro, sugiro a construção e o estudo das propriedades mecânicas de um material compósito com reforço de partículas, usando o método de homogeneização e a análise de resistência à flexão. Este estudo, permitiria investigar melhor a qualidade do método de homogeneização, na obtenção de propriedades mecânicas de materiais compósitos com reforço em partículas.

## Bibliografia

- [1] Zhang W., Dai G., Wang F. Sun S., Bassir H., Using strain energy-based prediction of effective elastic properties in topology optimization of material microstructures, Springer-Verlag, 24 de Janeiro 2007
- [2] Ferreira N., Estudo de materiais compósitos com fibra processadas por injeção, Dissertação de Mestrado, IPL, Leiria, Fevereiro de 2011
- [3] Branquinho, Tiago, Processamento e Caracterização de Compósitos com Fillers de Argila Expandida, Dissertação de mestrado, IPL, Leiria, Março de 2017
- [4] Capela C., Introdução aos Materiais Compositos, IPL, 2017
- [5] Elmarakbi A., Advanced Composite Materials For Automotive Applications, University of Sunderland, UK, 2014
- [6] Koenigsegg, Build 128 Agera RS Station 1 – Chassis Bonding, 2 de Dezembro de 2015, Acedido a Maio de 2020, <https://www.koenigsegg.com/build128-agera-rs-station-1-chassis-bonding/>
- [7] Rodrigo Zanatta, 24 de Maio de 2015, Materiais Compósitos na Aviação, Acedido a Maio de 2020, <http://www.aviacao.org/article/materiais-compositos/>
- [8] Silva J., Estruturas Aeroespaciais II, DCA [https://basedados.aerubi.pt/pluginfile.php/1096/mod\_resource/content/0/MateriaisCompósitos.pdf]
- [9] Acedido a Maio de 2020, <https://www.boats.com/resources/boat-building-construction-resin-fiberglass-cores/>
- [10] Acedido a Maio de 2020 <https://sc02.alicdn.com/kf/HTB1zOk1kx3IL1JjSZPfq6ArUVXar.jpg>
- [11] Carbon fiber, ubiquitous in the world of sport, 15 de Maio de 2018, Acedido a Maio de 2020, <https://www.recycling-carbon.org/en/2018/05/15/carbon-fiber-ubiquitous-in-the-world-of-sport/>

- [12] Duarte J., Compositos de Matriz Metálica Estudo da Estrutura e Comportamento Tribologico de um Composito, Tese de Mestrado, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Outubro de 1988
- [13] Pereira J, Desenvolvimento e fabrico de compósitos de matriz polimérica com fibras naturais, Dissertação de Mestrado, IPL, Leiria, Setembro de 2017
- [14] Ventura A., Os Compósitos e a sua aplicação na Reabilitação de Estruturas metálicas, IST, Lisboa, 2009 [http://www.scielo.mec.pt/scielo.php?script=sci\_arttext&pid=S0870-83122009000200003]
- [15] Compósitos Sustentáveis de Retalhos no CONEN 2012, 25 de Janeiro de 2012, Acedido a Maio de 2020, <https://lucianaduarte.wordpress.com/2012/01/25/compositos-sustentaveis-de-retalhos-no-conem-2012/>
- [16] Tanzi M., Farè S., Candiani G., Organization, Structure, and Properties of Materials, 2019
- [17] Carlos I., Materiais Compósitos, Newton Paiva, 2012 [https://lucianaduarte.wordpress.com/2012/01/25/compositos-sustentaveis-de-retalhos-no-conem-2012/]
- [18] Nemeth M., An In-Depth Tutorial on Constitutive Equations for Elastic Anisotropic Materials, Langley Research Center, Hampton, Virginia, 2011
- [19] Shabana Y., Noda N., Numerical evaluation of the thermomechanical effective properties of a functionally graded material using the homogenization method, 2008
- [20] Hassani B., Hinton E., A review of homogenization and topology optimization I – homogenization theory for media with periodic structure, 1997
- [21] Hollister S.J., Kikuchi N., A comparison of homogenization and standard mechanics analyses for periodic porous composites, 1992
- [22] Moulinec H., Suquet P., A fast numerical method for computing the linear and nonlinear properties of composites, 1994
- [23] Moulinec H., Suquet P., A FFT-Based Numerical Method For Computing The Mechanical Properties Of Composites From Images Of Their Microstructures, France, 1995

- [24] Moulinec H., Suquet P., A numerical method for computing the overall response of nonlinear composites with complex microstructure, France, 1997
- [25] Guedes J., Kikuchi N., Preprocessing and Postprocessing for materials based on the homogeneization method with adaptive finite element methods, 1989
- [26] Glass Fiber Composites, Acedido a 9 de Junho de 2020, <https://textilelearner.blogspot.com/2012/09/glass-fiber-composites-properties-of.html>
- [27] Sicomin, 2014, SR1500, Acedido a 11 Junho de 2020, <http://www.sicomin.com/datasheets/product-pdf39.pdf>
- [28] Faluhelyi P., Neto F. L., Simulação numérica do comportamento mecânico de tubos poliméricos de parede fina submetidos a pressão interna, Acedido a 11 de Junho de 2020, <https://www.scielo.br/revistas/rmat/v11n3/v11n3a19.htm>
- [29] Sonelastic, Modulus of elasticity and Poisson's coefficient of typical ceramic materials, Acedido a 11 de Junho de 2020, <https://www.sonelastic.com/en/fundamentals/tables-of-materials-properties/ceramics.html>