

Carlos Nelson da Costa Leão

Relatório de Projeto

A exploração de padrões no desenvolvimento do
pensamento algébrico de alunos do 2º Ciclo

Mestrado em Educação e Tecnologia em Matemática

Relatório realizado sob a orientação de

Professora Doutora Maria Isabel Antunes M. Azevedo Rocha

Leiria, 2012

o júri

Presidente

Doutor/a _____

Doutor/a _____

Doutor/a _____

Doutor/a _____

Doutor/a _____

Agradecimentos

À minha orientadora, a Professora Doutora Isabel Rocha, pela constante disponibilidade, motivação e persistência, assim como pela partilha de conhecimentos e experiência, na forma exigente, mas exemplar, como orientou este trabalho.

Aos meus alunos, a quem dedico este trabalho, pela motivação, auxílio e inspiração que sempre me deram.

À minha família, pela forma como sempre me transmitiram a motivação e luta pela concretização dos meus ideais.

E finalmente à Doroteia e Margarida, que começaram este caminho comigo e depois me incentivaram a continuá-lo; à Iolanda pelos longos debates no mundo virtual acerca do ensino da Matemática, e a todos os restantes colegas de mestrado, que de uma forma ou outra me deram força para nunca desistir.

Resumo

Desde os anos 60 do século passado, que uma nova corrente sociológica e de pensamento, o construtivismo, tem trazido ao debate a forma como o indivíduo constrói e desenvolve o seu pensamento, apontando algumas orientações metodológicas para o ensino.

Baseado nessas ideias e no âmbito do ensino e aprendizagem da Matemática, foi realizada a presente investigação, que deu especial atenção à exploração de padrões na sala de aula, ficando assim definido que o seu principal objetivo seria analisar o desenvolvimento do pensamento algébrico em alunos do 2º Ciclo do Ensino Básico.

Para levar a cabo a tarefa proposta, construíram-se três questões orientadoras da investigação: 1. Qual a compreensão algébrica revelada pelos alunos na resolução de tarefas envolvendo a exploração de padrões?; 2. Que estratégias utilizam na busca de generalizações? e 3. Em que nível de generalização se encontram?

Foi utilizada uma metodologia qualitativa de investigação, baseada em três estudos de caso. A recolha de dados foi realizada numa turma do investigador, privilegiando a observação participante, e a análise das produções dos alunos com entrevistas individuais para realizar uma triangulação dos dados obtidos. A sua natureza descritiva e interpretativa proporcionou também a oportunidade para refletir sobre as novas perspetivas metodológicas, assim como, sobre a forma como os alunos aprendem Matemática.

Foi possível verificar que os alunos encararam com agrado e motivação o trabalho com padrões. Durante a realização das tarefas propostas optaram por estratégias diversificadas, havendo indícios claros da sua ligação com o tipo de raciocínio utilizado e conseqüentemente o nível de pensamento algébrico em que se encontravam. Constatou-se ainda que, independentemente do nível em que se encontravam, os alunos representaram as suas descobertas recorrendo à linguagem corrente, à linguagem formal, ou à combinação das duas.

Palavras-chave Álgebra, padrões, representações, estratégias, raciocínio recursivo, raciocínio funcional, pensamento algébrico

Abstract

Since the 60's of the last century, a new and current sociological thought, the constructivism, has brought to the debate how the individual constructs and develops his thinking, pointing out some new methodological guidelines for the teaching.

Based on these ideas and in teaching and learning mathematics, the present investigation was conducted, giving special attention to the exploration of patterns in the classroom. It was defined its main goal: to analyze the development of algebraic thinking in students from grades 5 and 6 of Basic Education.

To carry out the proposed task, we built three guiding research questions: 1. what is the algebraic understanding revealed by students when solving tasks involving the exploration of patterns? 2. What strategies they use in search for generalizations? 3. At what generalization level are they?

It was used a qualitative research methodology, based on three case studies. The data collection was performed in one of the researcher's class through participant observation. It also was made the analysis of student's productions, and individual interviews with the study cases, in aim to reach a triangulation of the data.

The descriptive and interpretive nature of the investigation also provided the opportunity to think about the new methodological perspectives, as well as on how students learn mathematics.

It was clear that students faced with joy and motivation the work with patterns. During students work, they used diversified strategies, that emphasize the relation with the kind of reasoning they had used, and consequently the algebraic thinking level in which they were. It was also clear that, regardless of their algebraic thinking level, students represented their findings using the "spoken language", mathematics' symbolic language, or a combination of both.

Key-words Algebra, patterns, representations, strategies, recursive reasoning, functional reasoning, algebraic thinking

Índice

Capítulo I

Introdução	1
1.1. Pertinência do estudo	1
1.2. Objetivos do estudo	4

Capítulo II

Fundamentação teórica	5
2.1. Pensamento algébrico	5
2.1.1. Os padrões	8
2.2 Representação	12
2.3. O pensamento algébrico e as orientações curriculares para o ensino da matemática	14

Capítulo III

Metodologia de investigação	17
3.1. Opções metodológicas	17
3.2. Participantes do estudo	20
3.2.1. Caracterização geral da turma	20
3.2.2. Os casos	21
3.2.3. Caracterização geral de cada aluno-caso	21
3.3. Técnicas e instrumentos de recolha de dados	22
3.3.1. O procedimento	24
3.4. Análise dos dados e construção dos casos	25

Capítulo IV

Proposta pedagógica	27
4.1. Trajetória de aprendizagem. A cadeia de tarefas	27
4.2. As tarefas	28

Capítulo V

Resultados do estudo e sua discussão	30
5. O desenvolvimento do trabalho na aula	30
Tarefa 1 – As tampinhas do João	30
Tarefa 2 – T's em cubos	32
Tarefa 3 – Figuras de figuras	35
5.1. O caso do Pedro	36
5.1.1. O pré - teste	37
5.1.2. O trabalho envolvendo a exploração de padrões	38
5.1.3. O pós-teste	45

5.1.4. As estratégias utilizadas no trabalho envolvendo a exploração de padrões	48
5.1.4. Nível de pensamento algébrico	49
5.2. O caso da Cristina	50
5.2.1. O pré – teste	50
5.2.2. O trabalho envolvendo a exploração de padrões	52
5.2.3. O pós-teste	60
5.2.4. As estratégias utilizadas no trabalho envolvendo a exploração de padrões	61
5.2.5. Nível de pensamento algébrico	63
5.3. O caso da Teresa	63
5.3.1. O pré – teste	64
5.3.2. O trabalho envolvendo a exploração de padrões	66
5.3.3. O pós-teste	73
5.3.4. As estratégias utilizadas no trabalho envolvendo a exploração de padrões	74
5.3.5. Nível de pensamento algébrico	76
Capítulo VI	
Conclusões e recomendações	78
Análise comparativa dos casos	78
Conclusões	81
Reflexão final e recomendações	84
Referências Bibliográficas	85
Anexos	90

Índice de Quadros

Quadro 1 – Vertentes fundamentais do pensamento algébrico segundo Kaput (2008) e Ponte, Branco e Matos (2009)	08
Quadro 2 – Categorização das estratégias de generalização segundo Barbosa (2011, p.330).....	11
Quadro 3 – Normas para o ensino da álgebra, (NCTM, 2007)	16
Quadro 4 – Fases de recolha de dados do estudo	25
Quadro 5 – Estratégias utilizadas pelos alunos segundo os níveis de pensamento algébrico	26
Quadro 6 – Quadro síntese das tarefas e seus objetivos	29
Quadro 7 - Síntese das estratégias utilizadas pelo Pedro ao longo das diversas tarefas	49
Quadro 8 - Síntese das estratégias utilizadas pela Cristina ao longo das diversas tarefas	62
Quadro 9 - Síntese das estratégias utilizadas pela Teresa ao longo das diversas tarefas	76

Índice de Figuras

Figura 1 - Sequência da recolha de dados com base em cada tarefa	25
Figura 2 – Marcos de um percurso de aprendizagem segundo as ideias de Fosnot e Dolk (2002).....	28
Figura 3 - Trajetória hipotética de aprendizagem (Simon, 1995)	28
Figura 4 - Sequência A da tarefa “As tampinhas do João”	31
Figura 5 - Sequência B da tarefa “As tampinhas do João”	31
Figura 6 – Padrão da tarefa “T’s em cubos”	33
Figura 7 - Estratégia utilizada por um dos alunos	33
Figura 8 – Tabela utilizada pelo aluno no quadro	34
Figura 9 – Tabela inicial da tarefa “Figuras de figuras” depois de preenchida em grupo turma	35
Figura 10 – Padrão do pré-teste	37
Figura 11 – Resolução do Pedro na questão um do pré-teste	37
Figura 12 – Resolução do Pedro na questão dois do pré-teste	37
Figura 13 – Resolução do Pedro na questão três do pré-teste	38
Figura 14 – Resolução do Pedro na questão quatro do pré-teste	38
Figura 15 – Sequências da tarefa “As tampinhas do João”	39
Figura 16 – Resolução do Pedro na questão um da tarefa - sequência A	39
Figura 17 – Resolução do Pedro na questão um - sequência B	40
Figura 18 – Padrão da tarefa “T’s em cubos”	41
Figura 19 – Tabela construída pelo Pedro na tarefa “T’s em cubos”	42
Figura 20 – Resolução do Pedro na questão dois da tarefa “T’s em cubos”	42
Figura 21 – Resolução da questão cinco na tarefa “T’s em cubos”	43
Figura 22 – Tabela inicial da tarefa “Figuras de figuras” depois de preenchida em grupo turma	44
Figura 23 – Tabela construída pelo Pedro na tarefa “Figura de figuras”	44
Figura 24 - Resolução do Pedro na questão quatro, alínea a)	45
Figura 25 – Resolução do Pedro às alíneas b) e c) da última questão da tarefa “Figura de figuras”	45
Figura 26 – Estratégia utilizada pelo Pedro para analisar o padrão	46
Figura 27 – Resolução da questão um do pós-teste	46
Figura 28 – O aluno recorre quer à linguagem natural, quer à linguagem simbólica	46
Figura 29 – Resolução do Pedro à questão três do pós-teste	47

Figura 30 – Resolução da questão quatro do pós-teste	47
Figura 31 - Resolução da questão um do pós-teste	50
Figura 32 - Resolução bastante formal à questão dois do pré-teste	51
Figura 33 – Resolução da aluna na questão três do pré-teste	51
Figura 34 - Resolução da última questão do pré-teste	51
Figura 35 – Padrões apresentados na tarefa “As tampinhas do João”	52
Figura 36 - Esquema apresentado pela aluna na questão um da tarefa	52
Figura 37 - Tabela apresentada pela aluna em relação à sequência A da tarefa “As tampinhas do João”	53
Figura 38 – Esquema de análise da sequência B na tarefa “As tampinhas do João”	53
Figura 39 - Tabela construída para a sequência B da tarefa “As tampinha do João”	53
Figura 40 - Resposta à questão dois da tarefa “As tampinhas do João”	54
Figura 41 - Resolução da questão três da tarefa	54
Figura 42 - Resolução da questão quatro	55
Figura 43 – Padrão visual da tarefa “T’s em cubos”	55
Figura 44 - Resposta à questão um da tarefa “T’s em cubos”	55
Figura 45 - Resposta à questão dois recorrendo a um raciocínio funcional	56
Figura 46 – Resolução da aluna à questão quatro da tarefa “T’s em cubos”	56
Figura 47 – Resposta final da tarefa	57
Figura 48 – Tabela inicial da tarefa “ <i>Figuras de figuras</i> ” depois de preenchida em grupo turma	57
Figura 49 - Parte da resposta da aluna à questão dois da tarefa “Figuras de figuras”	58
Figura 50 - Tabela construída pela aluna na questão dois da tarefa “Figuras de figuras”	58
Figura 51 – Esboço da aluna para a questão três da tarefa	59
Figura 52 – Resposta da aluna na questão final da tarefa “Figuras de figuras”	59
Figura 53 – Padrão do pós-teste	60
Figura 54 – Resposta à primeira questão do pós-teste	60
Figura 55 – Resposta à questão dois do pós-teste	60
Figura 56 - Resposta da aula à questão três do pós-teste	61
Figura 57 - Resolução da questão final do pós-teste	61
Figura 58 – Padrão do pré-teste	64
Figura 59 – “ <i>A regra de formação que segui para desenhar foi sempre acrescentar mais um triângulo por exemplo figura 20 tem 20 triângulos</i> ”	64
Figura 60 - Resposta da Teresa à questão dois do pré-teste	65
Figura 61 - Recurso à noção de múltiplo de um número	65
Figura 62 - Recurso novamente à multiplicação	65

Figura 63 – Padrões apresentados na tarefa “As tampinhas do João”	66
Figura 64 – “Descobrimos que na 3ª figura é o 3º múltiplo da tabuada do 3 e o segundo o 2º da tabuada do 3 é sempre assim”	66
Figura 65 - Esquema da tabela construída pela aluna no quadro, depois de completada	67
Figura 66 - Resolução da Teresa na segunda questão da tarefa	67
Figura 67 - Tabela construída pela Teresa para a sequência B	68
Figura 68 - Resolução da Teresa à questão três da tarefa	68
Figura 69 - Resolução da Teresa na questão quatro da tarefa	69
Figura 70 – Padrão visual da tarefa “T’s em cubos”	69
Figura 71 - Resolução da questão um da tarefa “T’s em cubos”	69
Figura 72 - Tabela construída pela aluna na questão três da tarefa “T’s em cubos”	70
Figura 73 - Resolução das questões quatro e cinco da tarefa “T’s em cubos”	70
Figura 74 – Tabela inicial da tarefa “Figuras de figuras” depois de preenchida em grupo turma	71
Figura 75 - Tabela construída pela aluna na tarefa “Figuras de figuras”	72
Figura 76 - Resposta da aluna à questão dois da tarefa “Figuras de figuras”	72
Figura 77 – Resposta da aluna às questões três e quatro da tarefa “Figuras de figuras”...	72
Figura 78 - Resolução da questão um do pós-teste	73
Figura 79 - Resolução da questão dois do pós-teste	73
Figura 80 - Resposta à questão três do pós-teste	74
Figura 81 - Estratégia de resolução para a questão quatro do pós-teste	74
Figura 82 - Esquema síntese da evolução do nível de pensamento algébrico dos alunos de acordo com o tipo de estratégias utilizadas ao longo das tarefas	80

Índice de Anexos

Anexo I – Quadros de caracterização da turma	90
Anexo II – Enunciado do pré-teste	91
Anexo III – A – Planificação da unidade	92
Anexo III – 1 – Tarefa “As Tampinhas do João”	93
Anexo III – 2 – Tarefa “T’s em cubos”	94
Anexo III – 3 – Tarefa “Figuras de figuras”	95
Anexo IV – Enunciado do pós-teste	96
Anexo V – 1A – Produção do Pedro no pré-teste	97
Anexo V – 1B – Produção do Pedro na tarefa “As tampinha do João”	98
Anexo V – 1C – Produção do Pedro na tarefa “T’s em cubos”	100
Anexo V – 1D – Produção do Pedro na tarefa “Figuras de figuras”	102
Anexo V – 1E – Produção do Pedro no pós-teste	103
Anexo V – 2A – Produção da Cristina no pré-teste	104
Anexo V – 2B – Produção da Cristina na tarefa “As tampinha do João”	105
Anexo V – 2C – Produção da Cristina na tarefa “T’s em cubos”	107
Anexo V – 2D – Produção da Cristina na tarefa “Figuras de figuras”	108
Anexo V – 2E – Produção da Cristina no pós-teste	109
Anexo V – 3A – Produção da Teresa no pré-teste	110
Anexo V – 3B – Produção da Teresa na tarefa “As tampinha do João”	111
Anexo V – 3C – Produção da Teresa na tarefa “T’s em cubos”	112
Anexo V – 3D – Produção da Teresa na tarefa “Figuras de figuras”	113
Anexo V – 3E – Produção da Teresa no pós-teste	114
Anexo VI – 1 – Entrevistas do Pedro	115
Anexo VI – 2 – Entrevistas da Cristina	118
Anexo VI – 3 – Entrevistas da Teresa	121

Capítulo I

Introdução

Neste capítulo apresenta-se um conjunto de ideias e considerações que orientaram e contextualizaram o trabalho e estudo que se segue. Apresenta-se ainda a problemática e os objetivos do estudo, assim como a estrutura organizativa do mesmo.

1.1. Pertinência do estudo

Desde os anos 60 do século passado que uma nova corrente sociológica e de pensamento, o construtivismo, tem vindo a ter um grande destaque, chamando a atenção para diversos fatores intervenientes na forma como o indivíduo, em interação social num determinado contexto, constrói e desenvolve o seu pensamento. Segundo Coll (2004), as representações de cada indivíduo, semelhantes aos membros de uma dada cultura, podem ser diferentes noutras culturas ou mesmo em grupos sociais distintos. Assim, mais que descrever e enumerar a realidade física é importante compreender como cada um desenvolve e constrói a sua representação dessa mesma realidade.

É precisamente a escola que o indivíduo reconhece como o espaço onde irá fazer a preparação do seu futuro, identificando-a como potenciadora da educação e formação de si mesmo, criadora de aspetos que o identifiquem, promovam e realizem, numa sociedade em constante e acelerada mudança, exigindo cada vez mais conhecimentos científicos e simultaneamente funcionais.

A Matemática é indubitavelmente uma importante componente de capacitação do indivíduo para a vida em sociedade. O conhecimento científico, do qual se destaca o conhecimento matemático, é uma ferramenta indispensável para o desenvolvimento da capacidade funcional e empreendedora do indivíduo, permitindo-lhe ser mais responsável, consciente e ativo no meio onde vive e nas relações que estabelece.

As discussões acerca das competências matemáticas que serão necessárias para o indivíduo poder fazer face ao mundo que o rodeia está longe de alcançar um consenso total. Contudo, em alguns pontos tem havido alguma concordância. Neste aspeto, o Programa de Matemática do Ensino Básico (PMEB) generalizado em Portugal em 2010/2011, (ME-DGIDC, 2007), identifica e destaca três capacidades transversais a toda a aprendizagem da Matemática – a resolução de problemas, o raciocínio matemático e a comunicação matemática. A resolução de problemas é vista neste programa como sendo fundamental, ao considerar que os alunos devem adquirir destrezas a lidar com problemas matemáticos formais, assim como, com problemas relativos a contextos do seu dia-a-dia ou de outras áreas do saber. Ser capaz de resolver, formular problemas, analisando diferentes estratégias possíveis constitui uma atividade fundamental para a aprendizagem dos diversos conceitos, representações e procedimentos matemáticos (Ponte, 2005).

O raciocínio matemático, diretamente ligado à resolução de problemas é outra capacidade fundamental, envolvendo a formulação e teste de conjeturas e, numa fase mais avançada, a sua demonstração. O raciocínio matemático envolve a construção de cadeias argumentativas que

começam pela simples justificação de passos, estratégias e operações na resolução de uma tarefa e evoluindo progressivamente para argumentações mais elaboradas e exigentes. Finalmente, os alunos devem ser capazes de, oralmente e por escrito, descrever os procedimentos matemáticos que utilizam, explicando o seu raciocínio, bem como interpretar e analisar a informação que lhes é transmitida por diversos meios. A análise do mundo que o rodeia e sua consequente tradução em ideias e processos matemáticos, inicialmente através da linguagem natural, é bastante abrangente, pelo que optámos por enquadrar este estudo somente no âmbito da álgebra e do pensamento algébrico.

A competência algébrica revela-se importante na vida adulta, quer no trabalho, quer como preparação para o ensino superior. Todos os alunos deveriam aprender álgebra. Considerando a álgebra como um fio condutor desde os primeiros anos de escolaridade, os professores poderão ajudar os alunos a construir uma base sólida baseada na compreensão e nas suas experiências como preparação para um trabalho algébrico mais aprofundado no 3º ciclo e no secundário. Por exemplo, a experiência sistemática com padrões poderá vir a desenvolver a noção de função e a experiência com os números e as suas propriedades cria bases para o trabalho posterior com símbolos e expressões algébricas. Ao aprenderem que as situações podem, frequentemente, ser descritas por meio da matemática, os alunos poderão começar a desenvolver noções elementares de modelação matemática. (NCTM, 2007, p.39).

Esta afirmação, retirada dos Princípios e Normas para a Matemática Escolar, publicado em 2000 pelo National Council of Teachers of Mathematics, NCTM, e traduzidas para português pela Associação de Professores de Matemática, APM, será o ponto de partida na tentativa de perceber a importância dos padrões nos atuais currículos do ensino da Matemática. Mas de onde surge esta necessidade e quais os pressupostos que a fundamentam?

A Matemática não é, há já alguns milhares de anos, uma ciência estática e concluída, onde os seus produtos se encontram acima de qualquer crítica. No entanto, não será difícil de perceber que, do senso comum, a ideia de matemática é o estudo dos números ou a ciência que estuda os números (Devlin, 2002). As investigações recentes têm vindo a demonstrar que a Matemática não é uma ciência acabada e a sua definição já ultrapassou a ideia redutora do estudo dos números. Segundo o mesmo autor, o que o matemático faz é analisar padrões, sejam numéricos ou geométricos, ou estabelecer conexões com todas as outras ciências em busca de padrões que auxiliem o Homem na compreensão do mundo que o rodeia: *“Esses padrões tanto podem ser reais como imaginários, visuais ou mentais, estáticos ou dinâmicos, qualitativos ou quantitativos, puramente utilitários ou assumindo um interesse pouco mais que recreativo.”* (p.9). Também Davis e Hersh (1995) afirmam que *“(...) o próprio objetivo da Matemática é, em certa medida, descobrir a regularidade onde parece vingar o caos, extrair a estrutura e a invariância da desordem e da confusão.”* (p. 167)

O estudo dos padrões, dada a sua vastidão de exemplos a explorar, concede-lhe uma transversalidade, tanto ao nível de conteúdos como das próprias capacidades a desenvolver no aluno. Facilmente se conclui que existe uma forte ligação com a resolução de problemas, atividades de investigação e exploração, permitindo conexões ao nível de todos os conteúdos do currículo.

Também ao nível da motivação e ao nível do desenvolvimento de uma imagem positiva da Matemática, bem presente no PMEB (ME-DGIDC, 2007), o estudo e exploração de padrões

fornecem ao professor uma ferramenta indispensável, pois apelam a que os alunos desenvolvam, a par com a abstração, o seu sentido estético, reconhecendo também a relação com as outras disciplinas e com o mundo que os rodeia.

São variadas as situações do mundo natural que se podem observar e explicar à luz dos padrões matemáticos. No mundo animal, os revestimentos dos animais formam padrões com variados objetivos ligados à continuidade da espécie. Também a disposição das folhas ou flores de algumas plantas, como o girassol revelam-nos a sequência de Fibonacci. Nas asas das borboletas encontramos variados padrões geométricos, o mesmo acontecendo nas célebres células de uma colmeia. A couve-flor, ou o feto são exemplos reais de fractais, um tipo de padrão de beleza ímpar. Existe pois um grande e belo manancial de situações onde se podem identificar padrões e regularidades na natureza, onde um indivíduo mais motivado consegue observar a beleza da matemática.

Se nos anteriores documentos curriculares do ensino básico a álgebra e o estudo dos padrões era visto com alguma superficialidade nos primeiros níveis de ensino, neste novo programa, basta uma análise breve para percebermos que de forma intencional, o estudo específico dos mesmos surge desde os primeiros anos do 1º ciclo, sendo aprofundado de forma gradual e funcional ao longo do 2.º e 3.º ciclos (ME-DGIDC, 2007).

Segundo as Normas, (NCTM, 2007), a álgebra é considerada um fio condutor curricular desde os primeiros anos de escolaridade, onde o professor deve selecionar, implementar e apresentar tarefas que maximizem o potencial de aprendizagem do aluno, ajudando-o a criar uma base sólida na sua compreensão e nas suas experiências. Desta forma, estaremos a auxiliá-lo para o trabalho algébrico do 3º ciclo e secundário.

Outro motivo que realça a importância do trabalho no âmbito da álgebra, agora reforçado nos novos programas do ensino básico, refere-se aos relatórios PISA. Estes relatórios em 2003 referiam que, no que à Álgebra (mudanças e relações) e aos alunos portugueses diz respeito, a percentagem de alunos identificados com baixo nível de literacia é ainda superior à média da OCDE: 31% versus 23%; e a percentagem de alunos com níveis elevados de literacia matemática é ainda inferior à média da OCDE: 8% versus 16% (Duarte, 2005, p.44). Apesar do relatório de 2009 referir que se verificou uma evolução “impressionante” na literacia matemática nos nossos alunos, tendo obtido 487 pontos, mais 21 pontos que em 2003, podemos também observar que ainda se encontram abaixo dos valores médios da OCDE (Ministério da Educação, 2010).

As orientações para a implementação do PMEB enfatizam assim a importância do desenvolvimento do pensamento algébrico nos alunos, desde os primeiros anos de escolaridade. Os professores devem ajudar os alunos a investigar, discutir, questionar e provar (ME-DEB, 2007). Em simultâneo devem dar maior ênfase às tarefas de exploração e nestas aos padrões, privilegiando a comunicação dos alunos, de modo a que todos consigam acompanhar as ideias em debate e estudo, assim como os aspetos estéticos inerentes. Schoenfeld (1992), sobre o uso deste tipo de abordagens, afirma que ajuda os alunos a olhar para a Matemática como uma ciência que estuda padrões e não somente números.

Vários autores, como Abrantes et al. (1999), Kaput (1999), Blanton e Kaput (2005), Borralho et al. (2007), afirmam que existe um conjunto de razões para o trabalho com a exploração de padrões, nomeadamente porque contribuem para o desenvolvimento do raciocínio algébrico e porque estabelecem relações e conexões entre várias áreas da Matemática. Howden (1990) afirma que o trabalho com padrões deve ser encorajado desde os alunos dos primeiros anos de escolaridade, que devem observar e explorar padrões em diversos acontecimentos, formas ou números. Também Ponte, Brocado e Oliveira (2003), referem:

De facto, o desafio lançado pela generalização de um padrão numérico e a compreensão do que traduz essa generalização constituem aspectos que muitas vezes estão envolvidos nas investigações numéricas e que apoiam o desenvolvimento do raciocínio algébrico. (p.69)

Dada a importância que o Programa de Matemática do Ensino Básico (ME-DGIDC, 2007) dá a esta temática e atendendo à pouca divulgação de experiências efetuadas neste campo, é pertinente a realização deste estudo que propõe a alunos de uma turma o trabalho com padrões, ao longo de um período de tempo abrangente.

1.2. Objetivo do estudo

Este estudo tem por base uma proposta pedagógica concretizada no 6.º ano de escolaridade, no âmbito do Tópico *Relações e regularidades*. Esta proposta é composta por uma cadeia de tarefas, construída para uma *Hipotética trajetória de aprendizagem* (Simon, 1995, citado por Kraemer, 2008) relativa a este tópico, tendo um carácter essencialmente problemático, exploratório e investigativo. Desta cadeia de tarefas foram seleccionadas e analisadas somente as tarefas referentes ao subtópico *Sequências e regularidades*.

Com esta investigação pretende-se *Analisar o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos do 2º ciclo do ensino básico*, sendo este o principal objetivo do estudo. De acordo com este, optou-se por definir as seguintes questões de investigação:

1. Qual a compreensão algébrica revelada pelos alunos na resolução de tarefas envolvendo a exploração de padrões?
2. Que estratégias utilizam na busca de generalizações?
3. Em que nível de generalização se encontram?

Este trabalho encontra-se assim organizado em seis capítulos. O primeiro que contempla a breve introdução onde são apresentados os objetivos e pertinência do estudo. No segundo serão discutidas as abordagens teóricas que servem de suporte a todo o estudo que se pretende desenvolver, assim como o enquadramento curricular do mesmo. No terceiro capítulo do trabalho será clarificada a metodologia e os procedimentos utilizados e no quarto a proposta pedagógica que se desenvolveu e implementou em sala de aula, servindo de contexto de estudo. No quinto capítulo apresentaremos os resultados do estudo e a sua discussão e finalmente no sexto e último capítulo faremos a comparação dos casos seguindo-se as conclusões relativas aos níveis de desempenho dos alunos nas tarefas propostas, o tipo de estratégias utilizadas e refletindo acerca de possíveis medidas a implementar com vista a melhorar o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos.

Capítulo II

Fundamentação teórica

Neste capítulo procura-se descrever de forma resumida as abordagens teóricas utilizadas ao longo do presente estudo, encontrando-se organizado em três secções. A primeira diz respeito ao pensamento algébrico e à evolução da sua conceção ao longo dos tempos, clarificando algumas ideias de conceitos relacionados com o tema e que servirão de suporte basilar ao estudo. Como subsecção é apresentada e clarificada a noção de padrão, assim como as suas principais características, apresentando ainda a importância do trabalho com estes no desenvolvimento do pensamento algébrico. Na segunda secção abordaremos de forma breve as representações utilizadas no trabalho em Álgebra tentando compreender a importância e potencialidade das mesmas no trabalho a desenvolver em sala de aula. Finalmente a terceira secção apresenta as orientações curriculares e programáticas, nacionais e internacionais, do trabalho a desenvolver em Álgebra no ensino básico.

2.1. Pensamento algébrico

No nosso quotidiano enquanto professores falamos de álgebra, pensamento algébrico, padrões, sequências e regularidades. Contudo, para uma melhor compreensão de cada um dos conceitos e de como se relacionam devemos tentar clarificar cada um deles.

A álgebra, a par com a geometria e a análise infinitesimal, é um dos grandes ramos da Matemática. Tendo origem nas primeiras formalizações e sistematizações na resolução de problemas e estudo de métodos gerais de resolução de equações, foi-se desenvolvendo ao longo da história (Costa, 2005; NCTM, 2007). Nos seus primórdios, que se crê nas antigas civilizações egípcias, babilónicas, chinesas e indianas, os enunciados e resoluções eram expressos em linguagem natural, contudo, com o avanço nos estudos esses mesmos problemas passaram a incluir abreviações (Ponte, Branco e Matos, 2009) conduzindo deste modo ao uso de uma simbologia específica, a linguagem algébrica.

Para alguns autores, como Devlin (2002), a Matemática desapareceria com a inexistência dos símbolos algébricos, defendendo que o uso da simbologia permite o distanciamento necessário das dualidades semânticas que podem surgir dos objetos conceptuais. No entanto, quando falamos de álgebra escolar, do pensamento algébrico dos alunos e das suas capacidades de utilizar representações simbólicas, verificamos que a complexa rede de símbolos utilizados na álgebra, ao perderem a sua ligação ao concreto e passando a uma abstração inerente e própria, podem tornar-se um ponto de rutura levando um aluno a perder-se na compreensão das relações que se pretendem desenvolver. Segundo o mesmo autor, este distanciamento dos símbolos abstratos de uma realidade mais concreta foi criticado pelo Movimento da Educação Matemática Realista, fundado por Freudenthal, que defende a necessidade dos símbolos algébricos literais terem algum significado nos primeiros anos da álgebra escolar, analogamente ao que sucedeu na própria história da álgebra.

Na história antiga do pensamento algébrico, este era traduzido utilizando uma linguagem mais próxima da natural. Contudo, atualmente, a linguagem algébrica está bastante mais distanciada da linguagem natural, gerando assim uma maior complexidade. Esta complexidade levará a um natural surgimento de incorreções nas interpretações dos problemas por parte dos alunos, com consequências na aprendizagem deste ramo da Matemática. Schoen (1995), clarifica:

O desenvolvimento histórico do pensamento algébrico começou com um período de álgebra verbal ou retórica, que durou pelo menos três milénios. Ao período retórico surgiu-se um outro, de mais de um milénio, em que o discurso algébrico caminhou gradualmente da fase retórica para a simbologia. (p.138)

A natural discussão que foi surgindo acerca do tema, levou a que se tentasse perceber de que forma deveria a álgebra ser integrada e trabalhada no currículo do ensino básico e secundário. Surge então a necessidade de caracterizar o pensamento algébrico.

Apesar da definição de álgebra ter mudado ao longo da História, James Kaput (1999), citado por Ponte, Branco e Matos (2009), também assenta as suas ideias no já exposto por Freudenthal acabando por definir pensamento algébrico como algo que se *manifesta quando, através de conjeturas e argumentos, se estabelecem generalizações sobre dados e relações matemáticas, expressas através de linguagens cada vez mais formais* (p. 9).

Blanton e Kaput (2005), caracterizam o pensamento algébrico como o “processo pelo qual os alunos generalizam ideias matemáticas a partir de um conjunto de casos particulares, estabelecem essas generalizações através de discurso argumentativo, e expressam-nas de formas progressivamente mais formais e adequadas à sua idade” (p.413). Também Kieran (2007a) considera que a Álgebra deve ser vista não somente como uma técnica, mas como uma forma de pensar e raciocinar em relação as situações matemáticas. A autora observa que, mais do que a utilização de letras como símbolos usados para descrever uma determinada situação, devem também permitir compreender padrões e regras nas situações matemáticas em estudo.

Já Carraher e Schliemann (2007), citados por Kieran (2007a), definem o pensamento algébrico como o *processo psicológico envolvido na resolução de problemas que os matemáticos conseguem facilmente expressar usando notação algébrica*. (p. 6). Estes autores, um pouco na linha de pensamento do Movimento da Educação Matemática Realista, afirmam que muito antes da existência de uma notação algébrica já se resolviam problemas de álgebra. Desse modo consideram que os estudantes devem e podem trabalhar com este tipo de problemas antes de lhes ter sido ensinado a notação algébrica.

Canavarro (2009) considera que a anterior ideia de pensamento algébrico é contrastante com as concepções tradicionais que ainda se encontram nas escolas e afirma, “(...) *é fácil encontrar registos que caracterizam a Álgebra escolar de forma semelhante um pouco por toda a parte: simplificar expressões algébricas, resolver equações, aplicar as regras para manipular símbolos, com elevado nível de abstracção.*” (p. 87)

Observamos que as ideias anteriores colocam o foco do trabalho algébrico na generalização, ou melhor, no acto de generalizar. Será então importante compreendermos um pouco melhor o que significa generalizar no âmbito das ideias apresentadas.

Kaput (1999) clarifica a noção de generalizar como a extensão intencional do raciocínio, ou comunicação desse mesmo raciocínio, para além do caso ou casos em estudo. A ideia passa por expor de forma objetiva o que é comum entre os casos em estudo, observando de modo concreto os padrões, procedimentos, estruturas e relações entre e através dos mesmos. Para Ponte, Branco e Matos (2009), a ideia de generalização passa por *descobrir e comprovar propriedades que se verificam em toda uma classe de objectos*. (p. 10). Esta afirmação reforça a ideia de que o pensamento algébrico não dá somente atenção aos objetos em estudo, mas acima de tudo às relações existentes entre eles, às suas representações e aos raciocínios que sobre elas se podem verificar.

Segundo Ponte, Branco e Matos (2009), esta perspetiva sobre o pensamento algébrico e sobre a própria álgebra vem reforçar mais uma vez que o trabalho no âmbito deste tema está muito para além da manipulação e compreensão do simbolismo formal. Segundo os autores, *resumir a actividade algébrica à manipulação simbólica, equivale a reduzir a riqueza da Álgebra a apenas uma das suas facetas*. (p. 10)

Kaput (2008) caracteriza o pensamento algébrico através de dois aspetos fundamentais: a) a generalização e a expressão dessa mesma generalização através de sistemas de símbolos convencionais, e b) o raciocínio acerca das generalizações expressas em sistemas de símbolos organizados. Segundo o autor esta generalização e a consequente utilização dos sistemas de símbolos ocorrem de forma gradual.

Para Smith (2008) citado por Canavarro (2009), o primeiro aspeto apresentado por Kaput (2008), está relacionado com os processos mentais que um indivíduo utiliza para criar significados dentro de um sistema de representações, e denomina-o por *pensamento representacional* (p. 88). Já relativamente ao segundo aspeto, relaciona-se diretamente com a compreensão e a utilização do sistema de símbolos, assim como com as regras que a eles se encontram associadas. Este aspeto tem o seu enfoque precisamente nos símbolos em si mesmo.

Podemos concluir então que o primeiro aspeto centra-se na representação, no pensamento representacional e o segundo no modo como o indivíduo compreende e utiliza os símbolos e as respetivas regras.

Estes aspetos anteriormente definidos por Kaput (2008) foram então sintetizados, pelo mesmo autor, através de três vertentes distintas: (i) Álgebra como estudo das estruturas e sistemas abstraídos a partir do resultado de operações e do estabelecimento das suas relações; (ii) Álgebra como o estudo de funções e relações; (iii) Álgebra como modelação de situações matemáticas ou extra matemáticas.

Se a primeira vertente diz diretamente respeito ao carácter algébrico da Aritmética (Canavarro, 2009), onde importa discutir as propriedades das operações e não os seus resultados em si, a segunda e terceira vertentes, que Kaput (2008) designa por *pensamento funcional*, dizem respeito à compreensão e descrição das variações observáveis e previsíveis de determinada situação problemática, à sua modelação e comunicação dos padrões e regularidades envolvidos.

Segundo Canavarro (2009), estas vertentes iniciam-se normalmente com a generalização de padrões, estabelecendo relações entre padrões geométricos e numéricos para descrever as

situações funcionais. Os aspetos simbólicos relacionados com a Álgebra surgem aqui para descrever padrões, para realizar comparações entre eles, para determinar valores particulares e realizar previsões.

Também Ponte, Branco e Matos (2009) apresentam a ideia que o pensamento algébrico inclui três vertentes: Representar, raciocinar e resolver problemas. A primeira vertente apresentada pelos autores, diz respeito à capacidade dos alunos utilizarem os diferentes sistemas de representação, principalmente aqueles *sistemas cujos caracteres primitivos têm uma natureza simbólica* (p. 10). A segunda vertente, o raciocinar, assume um importante papel no relacionar das propriedades dos objetos matemáticos em estudo e na sua generalização. Este raciocinar verifica-se quer dedutivamente quer indutivamente, assumindo de facto um papel de especial destaque no pensamento algébrico. Por fim a terceira vertente, ligada diretamente à modelação de situações matemáticas e à resolução de problemas. No quadro seguinte podemos observar uma síntese comparativa das ideias apresentadas por Kaput (2008) e Ponte, Branco e Matos (2009).

Kaput (2008)		Ponte, Branco e Matos (2009)	
(i) Álgebra como estudo das estruturas e sistemas abstraídos a partir do resultado de operações e do estabelecimento das suas relações	Aritmética generalizada: -Analisar e estudar expressões aritméticas -Generalizações acerca das operações e suas propriedades -Relações entre os números -Concepção das letras como incógnitas	(i) Representar	- Ler, compreender, escrever e operar com símbolos usando as convenções algébricas convencionais - Traduzir informação representada simbolicamente para outras formas de representação e vice-versa - Evidenciar o sentido do símbolo, nomeadamente interpretando os diferentes sentidos no mesmo símbolo em contextos diferentes
(ii) Álgebra como o estudo de funções e relações	Pensamento funcional: -Generalizações através de funções -Descrever regularidades através de símbolos	(ii) Relacionar	- Analisar propriedades - Generalizar e manipular essas generalizações revelando a compreensão das regras - Deduzir
(iii) Álgebra como modelação de situações matemáticas ou extra matemáticas.	- Modelar situações -Realizar previsões -Concepção das letras como variáveis	(ii) Resolver problemas e modelar situações	- Usar expressões algébricas, equações, inequações, funções e gráficos na interpretação e resolução de problemas matemáticos e de outros domínios (modelação)

Quadro 1 – Vertentes fundamentais do pensamento algébrico segundo Kaput (2008) e Ponte, Branco e Matos (2009).

Podemos assim observar, que apesar de algumas variações na nomenclatura utilizada pelos autores, as vertentes apresentadas por Kaput (2008) revêem-se nas apresentadas por Ponte, Branco e Matos (2009).

2.1.1. Os padrões

Debrucemo-nos agora sobre o termo padrão. O termo, devido à vastidão de conceitos que lhe podemos associar no dia-a-dia, é de difícil definição no âmbito da matemática. Contudo, são precisamente as noções mais utilizadas no quotidiano que nos podem ajudar a perceber do que se trata.

Segundo Orton (1999), padrão tanto pode referir-se à disposição ou arranjo de formas, cores, sons, etc., sem nenhuma regularidade entre si, como também se pode referir aos mesmos objetos quando nestes identificamos claramente regularidades entre si, sejam estas simetrias, repetições ou outras.

No entanto, o autor reforça que em geometria o conceito de padrão não se encontra limitado a repetições, incluindo as noções de identificação de formas, congruência e semelhanças.

Devlin (2002), apresenta as suas ideias de forma a podermos compreender a abrangência do conceito:

O que o matemático faz é analisar padrões abstratos – padrões numéricos, padrões de formas, padrões de movimento, padrões de comportamento, etc. Estes padrões tanto podem ser reais como imaginários, visuais ou mentais, estáticos ou dinâmicos, qualitativos ou quantitativos, puramente utilitários ou assumindo um interesse pouco mais que recreativo. Podem surgir do mundo à nossa volta, das profundezas do espaço e do tempo, ou das atividades mais ocultas da mente humana. (pág. 9)

Também Borralho et al. (2007), referem que em todos os aspetos à nossa volta somos atraídos para as regularidades que vamos tentando compreender e interpretar, procurando ou impondo-lhes padrões. Segundo os autores, a própria Matemática é a busca constante de medição de padrões e regularidades, tentando encontrar a ordem na aparente desordem.

Segundo Smith (2003), citado por Alvarenga (2006), um padrão é identificável quando em algo observamos uma repetição ou conseguimos imaginar a possibilidade dessa repetição. Fica aqui patente a ideia de mudança, repetição e extensão, associados à noção de padrão, o que ajuda a compreender a possibilidade de se poder descrever um padrão através do estado actual em que se encontra ou relativamente ao modo ou forma como este se pode repetir ou “avançar”.

Alguns autores como Ponte (2005) e Ponte, Branco e Matos (2009) utilizam o termo sequência em vez de padrão. Contudo, a noção de regularidade é comum, sendo esta a base do conceito. Assim, padrão ou sequência são estruturas onde podemos encontrar regularidades mais ou menos diretas. Neste estudo iremos utilizar qualquer um dos termos considerando-os como sinónimos.

Como podemos perceber das ideias desenvolvidas pelos autores anteriores, quando falamos de padrões podemos estar a referir-nos a vários tipos. Vale et al (2009), indicam pelo menos dois tipos de padrão que surgem muito associados ao ensino, padrões de repetição e padrões de crescimento, que podem ser numéricos ou visuais. Já Ponte, Branco e Matos (2009) utilizam os termos pictóricos, quando se referem a padrões visuais.

Nos padrões de repetição, a ideia envolve a possibilidade de conseguirmos identificar uma mudança ou repetição no objeto em estudo ou na possibilidade do mesmo se repetir. Podemos pois identificar um elemento, ou motivo, que se repete indefinidamente de forma cíclica. Segundo Vale e Pimentel (2005) e Vale et al (2009), este tipo de padrões podem e devem ser desenvolvidos nas crianças desde muito cedo. Contudo, a exploração destes padrões deve ser profunda e com base em ideias matemáticas fortes procurando alcançar a generalização, onde o pensamento algébrico é potencialmente desenvolvido.

O outro tipo de padrões apresentado por Vale et al (2009), é o de crescimento. Tal como nos padrões de repetição, estes também apresentam um motivo que se repete indefinidamente e de forma previsível. Contudo, para além da repetição de um motivo, este vai sofrendo alterações, sendo também estas previsíveis.

As relações matemáticas que se podem desenvolver com este tipo de padrões e a diversidade de situações que potenciam, proporcionam explorações ricas e fundamentais, fazendo ainda conexões com diversos conteúdos curriculares. Os autores anteriormente referidos indicam ainda que estes padrões de crescimento podem ser lineares ou não lineares.

Apesar dos padrões de repetição serem importantes num trabalho inicial com os alunos, os padrões de crescimento são os que reforçam de forma significativa a passagem da aritmética para a álgebra. A possibilidade do aluno estabelecer relações entre as figuras que vê ou constrói, com as anteriores e as posteriores, assim como, com a sua posição na própria sequência, aumenta o número de relações e generalizações que pode estabelecer, permitindo um trabalho de interligação de uma grande diversidade de conteúdos transversais ao currículo. Potenciam pois as conexões dentro da matemática, sendo a par com a geometria, um tema unificador da matemática.

A descoberta de padrões desenvolve pois o pensamento algébrico e a capacidade de abstração, fundamentais para o bom desenvolvimento das capacidades matemáticas do aluno. Para Stacey e MAcGregor (2001), a observação e estudo de padrões, recomendam-se como meio para introduzir gradualmente a noção de variável, precisamente devido ao trabalho dinâmico que permite realizar com variáveis.

Segundo, Lee e Freiman (2006), citados por Vale et al (2009), ver padrões, o que implica trabalhar com padrões visuais, é fundamental para o início da exploração de padrões. Segundo as autoras, e apesar de os alunos observarem os mesmos padrões visuais, estes irão decompor a figura inicial de modos diferentes. Esta diferença prende-se com a necessidade de cada um decompor a figura inicial em segmentos para si significativos.

Para Ponte, Branco e Matos (2009), na exploração de uma sequência pictórica, os alunos identificam e procuram relacionar as características *locais* e *globais* das figuras que as compõem, assim como da sequência numérica que lhe está diretamente associada.

Serão precisamente estes aspetos que irão permitir ao aluno melhor desenvolver as relações que pode estabelecer entre os elementos que compõem a figura e a sua posição na sequência, adquirindo uma melhor compreensão das propriedades e relações numéricas subjacentes ao padrão permitindo-lhe desse modo o estabelecimento de generalizações.

Contudo, a generalização não é vista de igual forma por todos os autores. De acordo com Stacey (1989), a generalização pode ser realizada em dois patamares: i) quando num padrão se pretende descobrir termos muito próximos do que se apresenta inicialmente estamos perante a *generalização próxima*; e ii) se o termo que se pretende descobrir se encontra numa posição que o aluno dificilmente alcança por exaustão encontramos numa situação de *generalização distante*. Também Mason (1996) fez referência a estes dois níveis distintos de generalização, tendo contudo substituído os termos *generalização próxima* por *generalização local* e *generalização distante* por *generalização global*.

O alcançar de generalizações no trabalho com padrões implica o desenvolvimento de estratégias, muitas vezes pessoais e muito próprias dos alunos. Acerca das estratégias de generalização, Ponte, Branco e Matos, (2009) apresentam quatro possíveis estratégias dos alunos na resolução das tarefas que envolvem padrões visuais crescentes:

(i) *Estratégia de representação e contagem (RC)* – neste caso o aluno representa ou desenha todos os termos da sequência até ao termo solicitado e depois conta os elementos que o constituem. Nesta estratégia não existe uma clara evidência de generalização, pelo que se torna importante o professor questioná-lo acerca do seu processo de representação.

(ii) *Estratégia aditiva (A)* – aqui o aluno compara termos consecutivos identificando as alterações que ocorrem de uns para os outros. Neste caso, muitos alunos já fazem algumas generalizações acerca das descobertas por si efetuadas, utilizando contudo a linguagem natural.

(iii) *Estratégia do objeto inteiro (OI)* – Neste caso, o aluno utiliza um termo de uma ordem para descobrir o termo de uma ordem múltipla daquele de que partiu. Este procedimento também pode levar a generalizações erradas, no caso de não haver proporcionalidade direta. Contudo, nos padrões em que a razão entre os termos é constante esta estratégia é bastante funcional.

(iv) *Estratégia da decomposição dos termos (DT)* – Nesta estratégia o aluno relaciona o termo com a sua ordem, representando depois uma expressão algébrica. Ao decompor o termo de uma sequência visual, permitindo a compreensão do processo de construção, consegue mais facilmente determinar um termo de ordem bastante maior.

Também Barbosa (2010;2011), com base no seus estudos, afirma que existe uma grande variedade de abordagens utilizadas pelos alunos que lhes permite fazer generalizações. Esta mesma autora, com base em vários estudos como Lannin et al (2006), Orton (1999), Rivera & Becker (2008), desenvolveu uma categorização para as estratégias de generalização:

Estratégia		Descrição
Contagem (C)		Desenhar uma figura e contar os seus elementos.
Termo unidade (TU)	Sem ajuste (TU1)	Considerar um termo da sequência como unidade e usar múltiplos dessa unidade.
	Com ajuste numérico (TU2)	Considerar um termo da sequência como unidade e usar múltiplos dessa unidade. É feito um ajuste do resultado tendo por base propriedades numéricas.
	Com ajuste contextual (TU3)	Considerar um termo da sequência como unidade e usar múltiplos dessa unidade. É feito um ajuste do resultado tendo por base o contexto do problema.
Diferença (D)	Recursiva (D1)	Continuar a sequência com base na diferença entre termos consecutivos.
	Múltiplo da diferença sem ajuste (D2)	Usar a diferença entre termos consecutivos como fator multiplicativo, sem ajustar o resultado.
	Múltiplo da diferença com ajuste (D3)	Usar a diferença entre termos consecutivos como fator multiplicativo. É feito um ajuste do resultado.
Explícita (E)		Descobrir uma regra, com base o contexto do problema, que permite o cálculo imediato do valor da variável dependente sendo conhecida a variável independente correspondente.
Tentativa e erro (TE)		Adivinhar uma regra fazendo sucessivas tentativas com diferentes valores. Conhecida uma regra, experimentar sucessivos valores até que sejam verificadas as condições pretendidas.

Quadro 2 – Categorização das estratégias de generalização segundo Barbosa (2011, p.330)

Acerca da escolha das estratégias de generalização pelos alunos, Lannin, Barker e Townsend (2006), citados por Barbosa (2011), referem que existem três grandes categorias, que permitem perceber ou prever o motivo dessa mesma escolha: i) *factores sociais*, que se encontram diretamente relacionados nas relações e interações com o professor e os seus pares, ii) *factores cognitivos*, diretamente relacionados com as estruturas mentais que os alunos desenvolveram ao

longo da escolaridade e finalmente iii) *fatores associados à estrutura da tarefa*. Esta última categoria refere-se precisamente ao tipo de padrão, numérico ou visual, de repetição ou crescimento, assim como aos valores das variáveis envolvidas nesses padrões.

2.2. Representação

É habitual e consensual aceitarmos que muitas vezes utilizamos e recorremos a esquemas ou desenhos para suportar ou apoiar o nosso pensamento. Também é cada vez mais habitual o professor, em sala de aula, solicitar que os alunos expliquem os seus pensamentos, indicando-lhes que o podem fazer recorrendo a diversas formas distintas de representação desses mesmos pensamentos, palavras, desenhos, esquemas ou expressões numéricas. Também as provas de aferição fazem essa solicitação (Gabinete de Avaliação Educacional – GAVE).

São assim diversas as situações em que recorremos a representações, fazendo com que estas tenham um papel importante.

Alvarenga (2006) afirma mesmo que *cada um elabora as suas representações de uma forma diversificada e muitas vezes influenciada pelas suas experiências académicas*. (p. 22)

Se pensarmos então nas variadas formas de observar, ver e identificar padrões, como referido anteriormente, facilmente compreenderemos que as suas diferentes representações irão ter um papel fundamental no modo como o próprio conceito será interpretado.

Kaput (1987), defendia que uma rigorosa definição de representação deveria contemplar cinco aspetos: (i) o universo que se representa; (ii) o universo da representação; (iii) quais os aspetos do universo representado, estão efetivamente a ser representados; (iv) que aspetos do universo da representação estão a ser utilizados na representação; (v) as relações que se podem estabelecer entre os dois universos.

Orton (1999), identificam três tipos de representação: as representações concretas, as pictóricas e as numéricas. Admite-se que nas representações concretas os alunos recorrem a qualquer tipo de material para representar as suas ideias, as representações pictóricas são relativas ao uso de desenhos, figuras e, finalmente, as representações numéricas que se referem a expressões matemáticas.

Também Goldin (2003), afirma que dependendo da natureza da relação de representação, o termo representar pode admitir vários significados, como *corresponder a, indicar, descrever, designar, codificar, rotular, significar, gerar, referir a, propor, simbolizar*. (p. 276). Para o autor, a utilização de sinais, ícones ou objetos são formas de representar ou suportar algo que pode ser mais ou menos vasto.

Smith (2003), também apresenta três tipos de representação utilizados pelos alunos na resolução de problemas: (i) a representação ativa, que se refere ao uso de material concreto para construir e apresentar as suas estratégias e soluções, (ii) a representação icónica, onde o aluno recorre ao desenho ou a figuras para apresentar as suas ideias e, por último, (iii) a representação simbólica, uso de símbolos e códigos próprios da Matemática.

Como podemos constatar, encontram-se algumas similaridades com a notação apresentada Orton (1999) que devemos distinguir com alguma clareza. Na representação *concreta*, ambos os autores admitem o uso de material para a construção e representação de ideias, sendo que Smith (2003) utiliza o termo *ativa*. Na representação *pictórica*, Orton (1999), ou *icónica*, Smith (2003), ambos os autores admitem o uso de desenhos ou figuras na representação realizada pelos alunos. Diferindo novamente o termo utilizado, *pictórico* versus *icónico*. Contudo, Orton (1999) apresenta a terceira como representação *numérica*, referindo-se apenas a valores numéricos e de modo mais abrangente. Smith (2003) opta por *simbólicas*, onde, além da simbologia algébrica mais formal, inclui também o uso da palavra e das letras.

Segundo Alvarenga (2006), nas definições e ideias apresentadas pelos autores anteriores, o conceito de representação encontra-se separado do indivíduo, estando a atenção focada no produto, no objeto, e não no processo. Esta mesma autora, citando Smith (2003), afirma que este tipo de definição de representação é suficiente quando se analisam representações gerais e abstratas da comunidade matemática. Contudo é insuficiente quando se pretende analisar mais profundamente as representações utilizadas por alunos individualmente. A autora considera pois, que as representações não devem ser ensinadas e aprendidas como uma finalidade. Deve antes ser dada a oportunidade aos alunos de utilizar e discutir diversas representações. Neste caso o papel do professor deverá ser o de levar os alunos a estabelecer relações entre as suas representações mais informais e as convencionais, procurando diferenças e semelhanças.

Num estudo realizado por Smith (2003), com crianças do 3º ano sobre resolução de problemas, este observou que as crianças usavam o desenho para representar duas fases da sua resolução: as estratégias de resolução propriamente ditas (*drawing as problem-solving*), e para apresentar a solução alcançada para o problema (*drawing of problem-solving*). O autor concluiu que as representações que as crianças usaram na resolução de problemas matemáticos - incluindo a linguagem, desenhos e construções - não podem ser considerada separados do raciocínio dos alunos.

Também num estudo de Valério (2005), onde analisa as representações e evolução das mesmas em alunos do 1º Ciclo do Ensino Básico, na resolução de problemas, concluiu-se que estes utilizaram as suas próprias representações, informais, e só com o tempo as substituíam por representações mais formais. Segundo o autor existe uma tendência em usar inicialmente representações mais informais.

Para Schoenfeld (2008), o ato de pensar algebricamente implica necessariamente conhecer várias formas de representação e implica uma boa flexibilidade em conseguir “saltar” entre diferentes modos de representação. Significa ainda a capacidade de operar com símbolos quando adequado e em contextos diversificados.

Nobre et al. (2011) sobre as representações escritas dos alunos, afirmam que são *poderosas ferramentas que devem ser desenvolvidas por constituírem uma componente essencial de aprendizagem, possibilitando a organização e comunicação de ideias (p.240)*. Estes autores observam ainda, que na resolução de problemas, as representações constituem um meio eficaz

para a aprendizagem progressiva dos métodos algébricos mais formais, que serão certamente uma das componentes importantes do trabalho com a Álgebra.

Segundo Zazkis e Liljedahl (2002), citados por Nobre et al. (2011), *o uso de simbolismo algébrico deve ser tido como um indicador de pensamento algébrico mas o facto de não se usar notação algébrica não deve ser julgado como uma incapacidade de pensar algebricamente* (p.241). Radford (2000), também citado por Nobre et al. (2011), afirma que *os estudantes já estão a pensar algebricamente quando lidam com a produção de uma mensagem escrita, mesmo sem usarem o simbolismo algébrico* (p. 241).

Reconhece-se pois que a utilização da simbologia algébrica na resolução de problemas é uma ferramenta de grande importância, pois permite que os alunos expressem ideias matemáticas bastante desenvolvidas de forma rigorosa e simultaneamente com alguma simplicidade, pois permite condensar em pequenas expressões as ideias matemáticas. Para este trabalho, serão tidas em conta as ideias mais abrangentes que consideram que não é somente através da simbologia algébrica formal que os alunos manifestam o seu pensamento algébrico, mas também utilizando materiais, desenhos, palavras ou outros simbolismos que envolvem as relações gerais nos padrões em estudo.

2.3. O pensamento algébrico e as orientações curriculares para o ensino da matemática

Segundo os Princípios e Normas para a Matemática escolar (NCTM, 2007), a álgebra não tem sido referida de modo explícito nos programas antes do 3º Ciclo ou Secundário. No entanto, podemos constatar que no atual Programa de Matemática do Ensino Básico (ME-DGIDC, 2007), já existe uma configuração intencional, de modo a orientar o trabalho algébrico desde os primeiros anos de escolaridade. Podemos ler:

A alteração mais significativa em relação ao programa anterior é o estabelecimento de um percurso de aprendizagem prévio no 1.º e 2.º ciclos que possibilite um maior sucesso na aprendizagem posterior, com a consideração da Álgebra como forma de pensamento matemático, desde os primeiros anos. (p.9)

Esta intencionalidade do trabalho algébrico nos primeiros anos, surge precisamente porque o trabalho neste campo da Matemática, vai bem para além daquilo que muitos adultos hoje consideram como álgebra, manipulação de símbolos para a resolução de equações complicadas e simplificação de expressões algébricas (NCTM, 2007).

Contudo, como temos discutido ao longo do trabalho, a álgebra é muito mais do que a manipulação de símbolos. Segundo as Normas (NCTM, 2007), *Os alunos necessitam compreender os conceitos algébricos, as estruturas e os princípios que regem a manipulação simbólica, e o modo como os próprios símbolos podem ser utilizados para registar ideias e tirar ilações face a certas situações.* (p.39).

Dentro das linhas e ideias apresentadas na citação anterior o Programa de Matemática do Ensino Básico (ME-DGIDC, 2007) nas orientações metodológicas indica para o 1º Ciclo:

A exploração de situações relacionadas com regularidades de acontecimentos, formas, desenhos e conjuntos de números é importante neste ciclo. Os alunos devem procurar regularidades em

sequências de números finitas ou infinitas (estas usualmente chamadas sucessões), e podem também observar padrões de pontos e representá-los tanto geométrica como numericamente, fazendo conexões entre a geometria e a aritmética. Este trabalho com regularidades generalizáveis, segundo regras que os alunos podem formular por si próprios, ajuda a desenvolver a capacidade de abstracção e contribui para o desenvolvimento do pensamento algébrico. (p. 14)

Relativamente ao segundo ciclo, o PMEB (ME-DGIDC, 2007) apresenta como propósito principal de ensino o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos, potenciando as suas capacidades de representação de situações diversas, matemáticas ou não, assim como a sua capacidade para resolver problemas. Apresenta ainda como orientações metodológicas gerais o seguinte:

A investigação de regularidades, tanto em sequências numéricas finitas ou infinitas (sucessões), como em representações geométricas deve ser tomada como base para o desenvolvimento do pensamento algébrico. No estudo da relação de proporcionalidade directa é de privilegiar situações familiares dos alunos e contextos matemáticos simples. (p.40).

Destaca ainda a necessidade de permitir aos alunos a utilização de terminologia e simbologia matemática nos diversos contextos a explorar, relacionando as diversas formas de representar que possam surgir, estabelecendo ligações com a linguagem natural.

Para o 3º ciclo, o PMEB (ME-DGIDC, 2007) reserva questões relacionadas com o desenvolvimento da linguagem, da interpretação e da exploração e modelação de situações em diferentes contextos, como podemos ler no propósito principal de ensino da Álgebra no 3º ciclo:

Desenvolver nos alunos a linguagem e o pensamento algébricos, bem como a capacidade de interpretar, representar e resolver problemas usando procedimentos algébricos e de utilizar estes conhecimentos e capacidades na exploração e modelação de situações em contextos diversos. (ME-DGIDC, 2007, p. 55)

Relativamente a documentos internacionais, que servem de referência para uma grande parte do trabalho que se faz em Portugal, neste caso, Princípios e Normas para a Matemática Escolar (NCTM, 2007), podemos ler que uma experiência sistemática e organizada no estudo dos padrões potenciará a compreensão da noção de função. Também o trabalho com números e suas propriedades é referido neste documento como criadores de alicerces para o trabalho posterior com símbolos e expressões algébricas. Sendo a álgebra mais do que a manipulação de símbolos, é necessário que os alunos compreendam os conceitos e as regras que definem a manipulação desses mesmos símbolos, assim como a forma como melhor podem utilizá-los para registar as suas ideias e tirar conclusões. Deste modo, neste documento (p.39) é proposto que os alunos do pré-escolar ao 12º ano devem:

- i) Compreender padrões, relações e funções;
- ii) Representar e analisar situações e estruturas matemáticas usando símbolos algébricos;
- iii) Usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas;
- iv) Analisar a variação em diversos contextos.

Este trabalho que se pretende que seja desenvolvido ao longo de toda a escolaridade, deve no entanto ser planificado de modo sustentado, refletindo as características e necessidades dos alunos ao longo da sua evolução. Assim, para cada uma das quatro normas gerais apresentadas pelo NCTM (2007), que referimos acima, devem ser tidos em conta objetivos mais específicos e detalhados, dependendo do ano de escolaridade, assim como do trabalho previamente realizado. Neste aspeto, o papel do professor passa por identificar as necessidades dos alunos, os seus

conceitos prévios acerca dos temas que pretende iniciar, assim como planificar de forma rigorosa e encadeada todo o trabalho que pretende realizar. É ainda fundamental que procure que o estudo da Álgebra seja rico em conexões dentro e fora da matemática, procurando desse modo que o aluno consiga estabelecer as necessárias relações e consiga recorrer de forma natural à diversidade de representações que consiga dominar, seja a linguagem natural, recurso a esquemas e desenhos ou mesmo linguagem simbólica mais formal. No quadro abaixo compilaram-se as normas segundo NCTM (2007) para o ensino da Álgebra, relativamente à faixa etária dos alunos:

	Expetativas do 3º ao 5º ano (NCTM, 2007,p.182)	Expetativas do 6º ao 8º ano (NCTM, 2007,p.262)
Compreender padrões, relações e funções	<ul style="list-style-type: none"> - descrever, ampliar e fazer generalizações acerca de padrões geométricos e numéricos; - representar e analisar padrões e funções, usando palavras, tabelas e gráficos. 	<ul style="list-style-type: none"> - representar, analisar e generalizar uma diversidade de padrões através de tabelas, gráficos, palavras e, sempre que possível, expressões simbólicas; - relacionar e comparar diferentes formas de representação de uma relação; - Identificar funções como lineares ou não lineares e diferenciar as suas propriedades, a partir de tabelas, gráficos ou equações.
Representar e analisar situações e estruturas matemáticas usando símbolos algébricos	<ul style="list-style-type: none"> - identificar propriedades, como a comutatividade, a associatividade e a distributividade, e aplica-las ao cálculo com números inteiros; - representar a noção de variável, enquanto quantidade desconhecida através de uma letra ou símbolo; - expressar relações matemáticas através de equações. 	<ul style="list-style-type: none"> - desenvolver uma primeira compreensão conceptual das diferentes utilizações das variáveis; - explorar relações entre expressões algébricas e gráficos de linhas, dando particular atenção ao significado de intersecção e declive; - usar a álgebra simbólica para representar situações e resolver problemas, sobretudo aqueles que envolvem relações lineares; - reconhecer e produzir formas equivalentes de expressões algébricas simples, e resolver equações lineares.
Usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas	<ul style="list-style-type: none"> - modelar situações problemáticas, usando objetos, e recorrer a representações como gráficos, tabelas e equações para tirar conclusões. 	<ul style="list-style-type: none"> - modelar e resolver problemas inseridos num contexto, utilizando diversas representações, como gráficos, tabelas e equações.
Analisar a variação em diversos contextos	<ul style="list-style-type: none"> - investigar a forma como a variação de uma variável se relaciona com a variação de uma segunda variável; - identificar e descrever situações com taxas de variação constantes ou variáveis e compará-las. 	<ul style="list-style-type: none"> - usar gráficos para analisar a natureza das variações de quantidades em relações lineares.

Quadro 3 – Normas para o ensino da álgebra, (NCTM, 2007)

Capítulo III

Metodologia de investigação

Neste capítulo procura-se descrever a metodologia utilizada ao longo da presente investigação e encontra-se organizado em quatro secções. A primeira discute as opções metodológicas, as suas características e relações nos estudos de carácter interpretativo. A segunda secção apresenta os participantes do estudo, fazendo uma breve caracterização dos mesmos e descrevendo sucintamente o modo como foram seleccionados. A terceira descreve e fundamenta as técnicas e os instrumentos usados para a recolha dos dados. A quarta secção descreve o método de análise adotado nesta investigação.

3.1. Opções metodológicas

Para um investigador em educação é fundamental a preocupação em analisar e fundamentar muito bem os métodos a que recorre, pois tal como afirma Morse et al (2002, p. 2) “*sem rigor, a investigação não terá valor, tornando-se ficção e perdendo a sua utilidade*”.

A presente investigação pretende analisar e compreender o desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos do 2º Ciclo do Ensino Básico, partindo de propostas curriculares para o ensino da Álgebra que enfatizam a exploração e investigação de padrões. Mais objetivamente pretende-se responder a três questões: (1) Qual a compreensão algébrica revelada pelos alunos na resolução de tarefas envolvendo a exploração de padrões?; (2) Que estratégias utilizam na busca de generalizações?; (3) Em que nível de generalizações se encontram?

Assim, tendo em conta a complexidade dos objetivos e o facto de as tarefas de exploração e investigação de padrões decorrerem na aula de Matemática, no ambiente natural dos alunos, optou-se por realizar um estudo de natureza qualitativa e interpretativa.

As investigações qualitativas privilegiam, essencialmente, a compreensão dos problemas a partir da perspetiva dos sujeitos da investigação. Sobre o assunto, Bogdan e Biklen (1994) consideram que esta abordagem permite descrever os fenómenos em profundidade através da apreensão de significados e dos estados subjetivos dos sujeitos, uma vez que nestes estudos, existe sempre a tentativa de enquadrar e compreender, com pormenor, as perspetivas e os pontos de vista dos indivíduos sobre determinado assunto. Ainda segundo os mesmos autores, a investigação qualitativa possui cinco características, as quais se enquadram no contexto deste estudo: (i) a fonte direta de dados são os alunos no seu ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal para a sua recolha, (ii) é descritiva, uma vez que descreve as estratégias dos alunos na resolução de diversas tarefas matemáticas, (iii) existe um foco de interesse no processo e não simplesmente nos resultados ou produtos, visto que observa e analisa as estratégias e resoluções dos alunos, (iv) a análise dos dados é indutiva, uma vez que da interpretação das estratégias desenvolvidas pelos alunos se desenvolvem conceitos e se tenta compreender o nível de generalização dos alunos, (v) os significados dos participantes assumem uma importância vital, uma

vez que é desses significados que se parte para a construção do conhecimento, ou seja, das conclusões do estudo.

Stake (2007) apresenta a característica principal da investigação qualitativa como sendo a centralidade da interpretação. Dada a interatividade do investigador com as pessoas quando faz o trabalho de campo, dada a sua orientação construtivista do conhecimento, dada a intencionalidade e participação do *eu* do participante, por mais descritivo que seja o trabalho e relatório final, o investigador acaba por oferecer em última instância a sua visão pessoal, a sua interpretação do objeto em estudo.

No presente estudo, o investigador desempenhou o papel de observador participante. Jorgensen (1989) e Bell (2004), consideram que a observação participante é uma forma bastante útil e privilegiada quando é propósito de um estudo investigar aspetos da existência humana. Torna-se ainda mais pertinente quando o principal interesse da investigação recai sobre as perspetivas dos sujeitos envolvidos na situação a observar, o que irá mais facilmente permitir responder ao *como?*, *porquê?*, *quando?* e o *onde?* de determinado fenómeno. Segundo estes investigadores, a observação participante é aplicada em contexto escolar quando: (i) o fenómeno a estudar é pouco conhecido; (ii) existem diferenças entre os pontos de vista dos participantes; (iii) os fenómenos são obscuros para observadores exteriores; e (iv) o fenómeno encontra-se pouco acessível de observadores públicos.

Como não se pretendia interferir com a realidade, mas antes efetuar a sua descrição, e o produto final pretendido era essencialmente descritivo e interpretativo, destacando as diferenças individuais dos participantes, foi opção consciente do investigador o design de estudo de caso. Segundo Ponte (1994), esta abordagem metodológica deve ser efetuada sobre “uma entidade bem definida como um programa, uma instituição, um sistema educativo, uma pessoa ou uma unidade social. Visa conhecer em profundidade o seu *como* e os seus *porquês*, evidenciando a sua unidade e identidade próprias” (p.3).

Para Yin (1994) e Ludke e André (1986) quando procuramos compreender, explorar ou descrever acontecimentos e contextos complexos, nos quais estão simultaneamente envolvidos diversos fatores e onde é evidente a dificuldade na identificação das variáveis consideradas importantes, o estudo de caso trata-se de uma abordagem metodológica bastante adequada para os estudos em educação. Ainda segundo estes autores, os estudos de caso tomam por objeto fenómenos contemporâneos e situados dentro do contexto da vida real, sendo que as fronteiras entre o fenómeno a estudar e o seu contexto não estão nitidamente demarcados.

Bogdan e Biklen (1991), Gil (1999), Stake (2007) e Lessard-Hébert, et al, (2008), consideram o estudo de caso como tendo uma posição bastante aberta, em oposição aos estudos mais artificiais e controlados, quase laboratoriais, pois é menos limitado, logo mais aberto sendo menos manipulável. Estes autores definem os estudos de caso baseando-se nas particularidades do fenómeno em estudo e num conjunto de características relacionadas com o processo de recolha de dados e com as estratégias de análise dos mesmos. Do mesmo modo, Coutinho e Chaves (2002, p.223) considera o estudo de caso, *um plano de investigação que envolve um estudo intensivo de*

uma entidade bem definida: o caso. Também Ponte (2006) faz a seguinte consideração sobre o estudo de caso:

É uma investigação que se assume como particularística, isto é, que se debruça deliberadamente sobre uma situação específica que se supõe ser única ou especial, pelo menos em certos aspectos, procurando descobrir a que há nela de mais essencial e característico e, desse modo, contribuir para a compreensão global de um certo fenómeno de interesse. (p.2)

Já Stake (2007, pp.18-20) vai mais longe e perante alguma generalização do termo, distingue o estudo de caso em *Intrínseco e Instrumental*, dependendo do caso em estudo. Na situação de estudo de caso intrínseco, enfatiza a curiosidade do investigador acerca de determinada situação e mais do que aprender sobre outros casos ou um problema em especial, procuram perceber em profundidade um caso particular. Relativamente ao estudo de caso instrumental, Stake define-o quando o investigador tem uma necessidade de compreensão global de um tema e sente que o pode alcançar estudando um caso específico. A utilização do estudo de caso instrumental visa compreender algo, usando nesse estudo alguém significativo e representativo, sobre o que desejamos compreender. No entanto, como também foi referido, serão por vezes casos atípicos que irão auxiliar a delimitar e a compreender melhor os casos e os conhecimentos que deles pretendemos construir.

Lessard-Hébert, et al, (2008), apresentam ainda aquilo a que chamam de comparação multicaseos. Segundo estes autores, este tipo de estudo de caso visa descobrir convergências entre vários casos. Quando comparado com um estudo de caso singular, exige um maior controlo de campo, quer no que toca ao objeto a ser observado quer na escolha dos casos a estudar.

O trabalho que aqui se propõe desenvolver acerca do pensamento algébrico dos alunos do 2º Ciclo do Ensino Básico, preenche os requisitos apresentados para a adequação ao estudo de caso, uma vez que os aspetos do pensamento algébrico dos alunos, as suas estratégias e o contexto de sala de aula, são por si só bastante complexos uma vez que envolvem bastantes variáveis e particularidades das quais não nos podemos alhear. Também será enquadrado dentro da definição de estudo de caso *instrumental*, pois para compreender com maior profundidade como os alunos desenvolvem o pensamento algébrico, recorrer-se-á a três alunos, analisando as estratégias utilizadas na realização de variadas tarefas assim como as suas concepções acerca das mesmas. Encontra-se ainda enquadrado nas noções de multicaseos ou estudo de caso múltiplo, uma vez que irei analisar três casos de forma comparativa procurando encontrar convergências nas várias situações.

A sobreposição de funções, professor e investigador, é por vezes contestada (Ponte, 1994) uma vez que se exige do investigador a capacidade de distanciamento e constante interrogação em relação a todo o processo. Contudo, é precisamente esta dualidade de papéis que permite que a recolha seja efetuada no ambiente natural dos participantes, facilitando a interação entre os observados e o observador, o que facilita a recolha de evidências dos efeitos que as situações apresentadas tiveram no desempenho dos participantes.

Como forma de manter a validade interna do estudo foi utilizada a triangulação. Carmo e Ferreira, (1998) e Coutinho e Chaves (2002), apresentam quatro grandes tipos de triangulação: (i) triangulação de dados, no uso de variadas fontes para a recolha de dados, (ii) triangulação de investigadores, ou seja, o uso de vários investigadores no mesmo trabalho, (iii) triangulação de teorias, ou seja, o uso de várias perspetivas para a interpretação de um mesmo conjunto de dados, e (iv) triangulação metodológica, que é o uso de diferentes métodos para estudar o mesmo problema.

Segundo Stake (2007), a triangulação é uma forma de tornar uma investigação robusta, minimizando a influência do *eu* do observador. O mesmo autor afirma que, na triangulação das fontes de dados, *“vamos ver se o fenómeno ou o caso se mantém inalterado noutros momentos, noutros espaços ou à medida que as pessoas interagem de forma diferente.”* (p.126).

Neste estudo, através da observação das aulas, com o suporte da videogravação das mesmas e das notas de campo, da análise das produções dos alunos e das entrevistas aos mesmos, foi realizada uma triangulação de fontes de dados permitindo comparar as ideias e interpretações do investigador e as evidências recolhidas ao longo de todo o trabalho.

3.2. Participantes do estudo

3.2.1. Caracterização geral da turma

Os alunos que participaram neste estudo, em 2009/2010, estavam integrados numa turma do 5º ano no Colégio Rainha Dona Leonor das Caldas da Rainha.

As habilitações dos Encarregados de Educação variam entre o 4.º Ano e a Licenciatura. Contudo, a grande maioria dos Encarregados de Educação possuem o 9º e o 12º ano, 35,7% e 28,6% respetivamente (Anexo I).

No ano letivo 2010/2011, a turma tem 28 alunos, 12 rapazes e 13 raparigas com idades compreendidas entre 10 e 13 anos, sendo que 3 dos alunos têm 10 anos, 22 alunos com 11 anos, 2 aluno com 12 anos e somente um aluno com 13 anos (Anexo I). Três dos alunos da turma já tinham sido retidos no seu percurso escolar e um dos alunos usufrui de apoio ao nível da Educação Especial de acordo com o Decreto-lei nº 3/2008 de 7 de Janeiro. Este último apesar de frequentar as aulas de matemática com a turma só assiste a um dos dois blocos semanais de 90 minutos. Ao longo do 6º ano, o conselho de turma considerou a turma irrequieta e conversadora, pelo facto da maioria dos alunos não estar concentrada nas aulas e não acatar as normas de funcionamento de sala de aula. Também revelam bastantes dificuldades em organizar e desenvolver métodos de trabalho, assim como em adquirir hábitos de estudo. Contudo, são alunos que reagem com entusiasmo às tarefas propostas pelo professor e de modo geral tentam ultrapassar as suas dificuldades.

Atualmente, no ano letivo 2011/2012, a turma encontra-se a frequentar o 7º ano de escolaridade.

3.2.2. Os casos

No âmbito da Unidade Curricular Didática da Matemática do Mestrado de Educação e Tecnologia em Matemática, foi realizado um breve estudo a três turmas do Ensino Básico no ano letivo de 2009-2010. Nesse estudo foram analisadas as produções matemáticas dos alunos de uma turma do 5º ano do Colégio Rainha Dona Leonor, nas Caldas da Rainha, de uma turma do 6º ano e uma turma do 7º ano (ambas do Agrupamento de Escolas da Maceira - Leiria), numa tarefa do âmbito do tópico *Álgebra* do Programa de Matemática (ME-DGICD, 2007). Este trabalho serviu então de *pré-teste* para o trabalho que a seguir se desencadeou e aqui se apresenta. De referir que nenhuma das turmas participantes nesse estudo tinha realizado um trabalho sistemático dentro do sub - tópico *sequências e regularidades* até à altura, uma vez que o Programa de Matemática do Ensino Básico, agora em vigor, ainda não tinha sido implementado no 1º Ciclo.

Finalmente, para a seleção dos casos que vieram a participar no atual estudo, foram tidos em conta os seguintes aspetos: (i) Facilidade de acesso; para a recolha dos dados neste estudo, optou-se por trabalhar com alunos da turma do investigador, que no *pré-teste* frequentavam o 5º ano e (ii) recurso a alunos que de algum modo fossem casos típicos. Segundo Stake (2007, p.20), a utilização de casos típicos ou representativos será útil na busca de respostas sobre os assuntos que pretendemos compreender.

Através da análise das produções dos alunos, foram escolhidos três, tendo em conta objetivos específicos da tarefa proposta nesse mesmo estudo (Anexo II):

1) *Evidência de alguma compreensão algébrica da tarefa.* Para isso foram analisadas as produções dos alunos nas questões 1, 2 e 3;

2) *Evidência de algum trabalho na generalização.* Foi analisada a questão 4.

Concluindo, para o presente estudo foram considerados três alunos que realizaram o *pré-teste* no ano letivo 2009/2010. Na altura frequentavam o 5º ano. Esses mesmos alunos, no ano letivo 2010/2011 frequentavam uma turma do 6º ano onde foi desenvolvida uma proposta curricular, composta por uma cadeia de tarefas que foi construída tendo por base as orientações curriculares para o ensino da *Álgebra*. No ano letivo 2011/2012 os alunos encontram-se a frequentar o 7º ano de escolaridade e realizaram a tarefa de avaliação final.

3.2.3. Caracterização geral de cada aluno-caso

Perante os seus desempenhos no *pré-teste* foram considerados os seguintes alunos:

O Pedro é um aluno considerado de nível Muito Bom na disciplina de Matemática e revelou muito bom desempenho no *pré-teste* realizado ainda no 5º ano. É um aluno que gosta de estudar e que considera cada novo tema um desafio. É bastante participativo e empenhado. Gosta de explorar variadas estratégias de resolução dos desafios que lhe são propostos sem ser necessário solicitar-lho. Considera a Matemática a sua disciplina favorita e as suas tarefas preferidas são “*tudo o que tenha a ver com relações entre números*”, como referiu na entrevista. É um aluno desinibido e conversador, manifestando com regularidade a vontade de aprender conteúdos mais avançados.

A Cristina é considerada aluna de nível Bom à disciplina e revelou bom desempenho no *pré-teste*. É uma aluna organizada e participativa. Sente-se confortável utilizando as estratégias mais formais, não arriscando em estratégias que não conheça ou que não lhe pareçam imediatas para a resolução dos problemas propostos. Considera a Matemática, a par com Ciências da Natureza e História as suas disciplinas favoritas. As tarefas favoritas são a resolução de problemas e as tarefas de investigação. É uma aluna algo tímida, contudo trabalhadora e responsável.

A Teresa é uma aluna de nível Suficiente que apresenta algumas dificuldades na disciplina e revelou desempenho insuficiente no *pré-teste*. É uma aluna que recorre habitualmente a procedimentos rotineiros e mecanizados, revelando dificuldades na resolução de problemas mais abertos e exploratórios. Contudo, quando questionada sobre as tarefas que mais gosta de realizar referiu imediatamente as investigações. É tímida e não tem a Matemática como a sua disciplina de eleição. É trabalhadora e responsável.

3.3. Técnicas e Instrumentos de recolha de dados

Os estudos de caso, geralmente estudos qualitativos, podem combinar uma grande variedade de técnicas e instrumentos de recolha de dados, incluindo técnicas quantitativas.

As técnicas de recolha de dados utilizadas neste estudo foram a observação com suporte da videogravação e notas de campo, a entrevista e a análise documental. Estas técnicas permitem uma *“triangulação e comparação dos dados, permitindo uma maior garantia de objectividade e fiabilidade das interpretações a realizar”* (Yin, 1989, cit: In: Carmo e Ferreira, 1998).

A observação

Quando o observador se encontra em estreito contacto com os fenómenos a observar, permite-lhe, com o apoio de outras técnicas de recolha de dados, a obtenção da perspetiva do investigador e a possível comparação, interpretação e explicação da realidade em estudo. Como referem Carmo e Ferreira (1998) e Afonso (2005), esta é uma técnica particularmente útil e fidedigna.

A observação será do tipo naturalista de acordo com Carmo e Ferreira (1998), uma vez que a observação dos fenómenos em estudo será feita no contexto natural em que os mesmos ocorrerem, sendo a mais adequada para a compreensão da maioria dos aspetos dos fenómenos humanos, o que permite compreender com mais detalhe os processos em que os alunos se envolvem durante a realização das tarefas, assim como as suas dificuldades.

O registo destas aulas foi efetuado com a utilização da videogravação para posterior apoio na análise das produções matemáticas dos alunos, ou seja, das suas estratégias e procedimentos perante as tarefas propostas. Com esta forma de recolha de dados a possibilidade de aprofundar o conhecimento de aspetos muito específicos dos alunos foi potenciada permitindo desenvolver as características descritivas que este trabalho requer.

A principal vantagem do uso do *sistema “tecnológico”* (Lessard-Hébert, et al, 2008, p.155), neste caso a videogravação, é manter intacta a informação recolhida em *bruto*, tal e qual como foi

recolhida durante o trabalho de campo. Este aspeto permite que os dados passíveis de serem extraídos possam ser revistos, confrontando com outras técnicas de recolha de dados, no caso deste estudo a entrevista e a análise documental, na forma das produções matemáticas dos alunos nas diversas tarefas.

Em simultâneo com a gravação, foram realizadas no final de cada aula, ou assim que houve tempo disponível, algumas notas de campo. Essas notas não foram redigidas ao longo da aula, dado que o professor investigador circulava pela sala e ia apoiando os alunos durante a realização das tarefas. Contudo, logo que o horário de trabalho o permitiu, as observações e impressões do investigador foram registados num bloco de notas. Stake (2007, p.78-79) observa que “*O investigador experiente arranja um calendário e um recanto sossegado para escrever a observação enquanto ainda está fresca.*” Já Carmo e Ferreira (1998, p.104), sobre o bloco de notas referem que “*é nele que são anotadas as primeiras impressões, sob a forma de tópicos, diagramas e breves memorandos, de modo a auxiliar a sua memória quando vier a registar mais detalhadamente os resultados da sua observação.*”

Análise de documentos

Como referido por variados autores, a recolha de informação tendo por base a análise de um conjunto de documentos ao dispor do investigador é de extrema importância. Yin (1994) salienta que os documentos são uma fonte de recolha de dados que deve ser usada em quase todo o tipo de estudos de caso, salientando a sua importância uma vez que permite corroborar e confirmar evidências sugeridas por outras fontes de dados. Já Bell (2004) refere que a análise documental é uma das fontes mais fidedignas de recolha de dados, uma vez que revela, na maioria das vezes, de forma rigorosa, os pontos de vista de um indivíduo ou grupo.

Neste estudo foram analisados diversos tipos de documentos, nomeadamente os produzidos pelos alunos, com vista a melhor compreender os processos matemáticos por eles utilizados na realização das tarefas propostas, e ainda alguns documentos de natureza biográfica e relativa ao percurso dos alunos, com vista a caracterizar o grupo turma onde se inserem os participantes.

Relativamente às produções dos alunos caso, optou-se por lhes pedir para registarem quaisquer alterações que pretendessem fazer depois de concluídas as tarefas, em folhas separadas, ou com outras cores. Deste modo pretendia-se verificar os seus trabalhos originais e não com as possíveis alterações que pudessem realizar em virtude das discussões que se efetuavam após a conclusão das tarefas.

Após recolhidas as produções dos alunos caso, estas foram fotocopiadas e os originais entregues aos alunos. Com base nestas produções e na sua análise foram realizadas as entrevistas aos alunos.

A entrevista

No seguimento das preocupações metodológicas abordadas neste estudo e tendo como objetivo conhecer melhor as conceções sobre as tarefas, as estratégias usadas, assim como as dificuldades apresentadas pelos alunos, foram realizadas entrevistas aos alunos participantes do estudo.

Como referem alguns autores, a entrevista proporciona uma forma de obter dados empíricos sobre determinada realidade, sendo uma forma interativa de obter essas informações. Gil (1999, p.117), considera que é uma técnica em que o investigador se apresenta em frente ao investigado e lhe coloca perguntas com o objetivo claro de obtenção de dados que interessem para o estudo, tratando-se de uma forma de interação social.

A entrevista é das ferramentas mais frequentemente usadas nas ciências sociais. Segundo Bogdan & Biklen (1994, pp.134-135) a entrevista é normalmente classificada, em não estruturada, semiestruturada ou estruturada.

Após breve reflexão e com base nos objetivos do presente estudo decidiu-se optar pela entrevista semiestruturada. O questionamento semiestruturado permite ao entrevistador ir conduzindo a entrevista com base nas respostas que vão sendo dadas. Realizar este tipo de entrevista facilita a busca das respostas pretendidas, uma vez que permite ao entrevistador aprofundar uma resposta dada com nova questão produzida no momento (Manzini, 1991).

Para isso, e após a análise das notas de observação das aulas e despectivas videograções, foram identificadas as situações onde se pretendia aprofundar o conhecimento e foi elaborado um guião, com algumas questões chave a abordar no decorrer da entrevista. Conduziram-se as entrevistas e colocaram-se as questões de forma a direccionar a entrevista mas não impedindo que os entrevistados se expressassem com naturalidade, fazendo o investigador a análise das respostas e a respetiva análise de conteúdo, comparando com as evidências que foram detetadas na observação das aulas.

3.3.1. O procedimento

Este estudo teve três fases. A primeira decorreu no ano lectivo de 2009/2010 onde, através de um breve estudo se aplicou uma tarefa - que passaremos a chamar de *pré-teste* (Anexo II) - permitindo retirar algumas conclusões iniciais que serviram de base para a conceção deste estudo. Foi também através desse pré-teste que foi efetuada a selecção dos casos com que viria a ser desenvolvido o trabalho no ano lectivo de 2010/2011 e 2011/2012.

Na segunda fase, que decorreu no ano lectivo de 2010/2011, foi desenvolvida uma hipotética trajetória de aprendizagem para o tópico *Relações e regularidades* e a conseqüente sequência de tarefas. Foi através da implementação desta cadeia de tarefas que se procedeu à recolha da maioria dos dados.

Nesta fase, que decorreu no final do 2º período a partir do mês de Março, foram observadas quatro aulas de 90 minutos recorrendo à observação direta e videogração. Dessas aulas foram tiradas notas de campo e analisadas as produções matemáticas que os alunos apresentavam nas folhas de registo das tarefas propostas. Com base na análise dessa observação e nas produções matemáticas dos alunos-caso, foram ainda preparadas e realizadas entrevistas aos participantes do estudo, de modo a compreender com maior profundidade as suas estratégias e ideias relativamente às tarefas realizadas. Todas as ferramentas de recolha de dados tiveram sempre em conta os objetivos do estudo e tentaram responder aos mesmos.

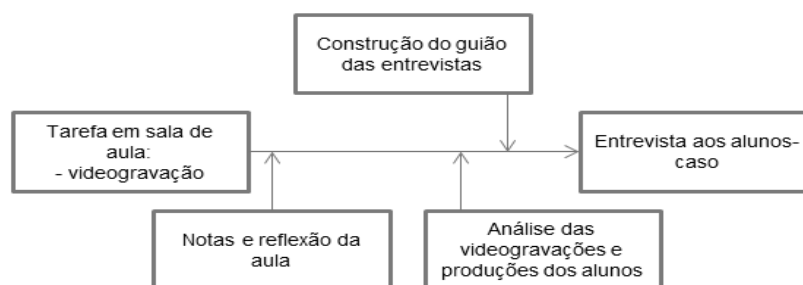


Figura 1 - Sequência da recolha de dados com base em cada tarefa

Finalmente a terceira fase do trabalho foi realizada seis/sete meses após o trabalho específico com a cadeia de tarefas. Nesta fase, que ocorreu quando os alunos já se encontravam no 7º ano de escolaridade (2011/2012), caracteriza-se pela aplicação de uma tarefa com características semelhantes à tarefa de *pré-teste*. Foi objetivo do investigador fazer comparações entre os resultados finais e os resultados obtidos por estes mesmos alunos na tarefa *pré-teste* no 5º ano realizada no ano letivo de 2009/2010.

Fase de recolha dos dados	Data	Ano de escolaridade
Pré-teste	Maio de 2010	5º
Cadeia de tarefas	Março e Abril de 2011	6º
Tarefa de avaliação final	Outubro/Novembro de 2011	7º

Quadro 4 – Fases de recolha de dados do estudo

3.4. Análise dos dados e construção dos casos

Segundo Stake (2007, p.20), a utilização de casos típicos ou representativos será útil na busca de respostas sobre os assuntos que pretendemos compreender, apesar de em estudos de caso não se trabalhar com técnicas de amostragem e existirem possibilidades de não serem totalmente representativos de uma realidade. O autor vai mais longe e afirma que alguns casos “atípicos” ajudam a ilustrar aspetos importantes que deixamos passar nos casos típicos. No entanto, na escolha dos casos para este trabalho optou-se pelos considerados típicos.

Para a análise das estratégias dos alunos, na resolução de tarefas que envolvem padrões visuais crescentes, optou-se por seguir as ideias apresentadas por Ponte, Branco e Matos (2009) e Barbosa (2011) (ver quadro 2, página 11). Ponte, Branco e Matos (2009) apresentam quatro possíveis estratégias dos alunos:

- (i) *Estratégia de representação e contagem* – neste caso o aluno representa ou desenha todos os termos da sequência até ao termo solicitado e depois conta os elementos que o constituem. Nesta estratégia não existe uma clara evidência de generalização, pelo que se torna importante o professor questioná-lo acerca do seu processo de representação. Deste modo o professor pode perceber como é que o aluno compreende a figura e as contagens que realiza.
- (ii) *Estratégia aditiva* – aqui o aluno compara termos consecutivos identificando as alterações que ocorrem de uns para os outros. Neste caso, muitos alunos já fazem algumas generalizações acerca das descobertas por si efetuadas, utilizando contudo a linguagem natural. Segundo os autores, esta

estratégia também pode ser um entrave à descoberta da relação entre os termos e as ordens, uma vez que se centra somente na relação entre termos, podendo deste modo conduzir a generalizações erradas.

(iii) *Estratégia do objeto inteiro* – Neste caso, o aluno utiliza um termo de uma ordem para descobrir o termo de uma ordem múltipla daquele de que partiu. Este procedimento também pode levar a generalizações erradas, no caso de não haver proporcionalidade direta. Contudo, nos padrões em que a razão entre os termos é constante esta estratégia é bastante funcional.

(iv) *Estratégia da decomposição dos termos* – Nesta estratégia o aluno relaciona o termo com a sua ordem, representando depois uma expressão algébrica. Ao decompor o termo de uma sequência visual, permitindo a compreensão do processo de construção, consegue mais facilmente determinar um termo de ordem bastante maior.

Após análise das estratégias desenvolvidas pelos alunos e usando como base os estudos de Fiorentini et al. (1993) e Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2006), decidimos categorizar as respostas dos alunos em três níveis: (a) *Evidências de pensamento pré-algébrico*; (b) *Evidências da transição do pensamento aritmético ao algébrico*; (c) *Evidência de pensamento algébrico mais desenvolvido*. Recordando as ideias apresentadas por Ponte, Branco e Matos (2009) e Barbosa (2011), relativamente às estratégias utilizadas pelos alunos, podemos fazer a síntese num quadro:

	Níveis do pensamento algébrico segundo Fiorentini et al. (1993) e Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2006)		
	(a) Evidências de pensamento pré-algébrico	(b) Evidências da transição do pensamento aritmético ao algébrico	(c) Evidência de pensamento algébrico mais desenvolvido
Estratégias utilizadas pelos alunos segundo Ponte, Branco, (2009)	Estratégia de representação e contagem (RC)	Estratégia aditiva (A) ou Estratégia do objeto inteiro (OI)	Estratégia da decomposição dos termos (DT)
Estratégias utilizadas pelos alunos segundo Barbosa (2011)	Contagem (C)	Termo unidade (TU) ou Diferença (D)	Explícita (E) e Tentativa e erro (TE)

Quadro 5 – Estratégias utilizadas pelos alunos segundo os níveis de pensamento algébrico

Antes da construção de cada caso procedeu-se a uma análise descritiva das tarefas, refletindo sobre aspetos considerados relevantes da sua implementação em toda a turma. Para a construção de cada caso procedeu-se à análise dos dados recolhidos nos diversos momentos definidos para o efeito. Assim, foram analisados os desempenhos nas diversas tarefas seguindo a sua ordem cronológica:

1º Análise das produções obtidas no pré-teste – 5º ano (2009/2010);

2º Análise dos desempenhos em sala de aula, análise das produções obtidas em três tarefas da cadeia e análise das entrevistas – 6º ano (2010/2011);

3º Análise das produções obtidas na tarefa de avaliação final – 7º ano (2011/2012).

Em todos estes momentos foram evidenciados e sintetizados os aspetos mais significativos, que evidenciavam o nível do pensamento algébrico do aluno caso. Finalmente foi realizado o confronto dos três estudos de caso, com base na revisão da literatura efetuada e tendo em conta o objetivo do estudo e as questões de investigação definidas.

Capítulo IV

A proposta pedagógica

Neste capítulo pretende-se apresentar e descrever a cadeia de tarefas que foi construída e planeada para a realização do presente estudo. A primeira secção será dedicada a fundamentar a noção de trajetória de aprendizagem e cadeia de tarefas. Na segunda secção serão brevemente descritas cada uma das tarefas utilizadas para a realização deste trabalho.

4.1. Trajetória de aprendizagem. A cadeia de tarefas

A aprendizagem não pode ser vista como a transferência de conteúdos ou ideias de uma cabeça, a do professor, para uma outra, a do aluno, quase como numa transferência de informação de um computador para uma pen, ou um disco externo. Se quisermos pensar numa ideia simbólica, metafórica, para aprendizagem, talvez possamos conceber a de uma floresta densa, com alguns caminhos já construídos e que podemos trilhar, mas onde também podemos *construir* novos, se forem de facto mais eficientes para alcançar os objetivos determinados. Será através desta metáfora, se assim lhe podemos chamar, que mais nos aproximamos das mais recentes teorias acerca do ensino - aprendizagem.

Estas metáforas, de um modo ou de outro falam em *caminhos*, ou trajetórias de aprendizagem, onde o aluno é um elemento pró-activo. Contudo, cabe uma grande parte da responsabilidade de toda a actividade do aluno, ao trabalho do professor (Coll, 2004).

Segundo Serrazina e Oliveira (2010), para a construção de uma trajetória de aprendizagem é necessário estabelecer (i) o *objetivo*, ou seja, um tópico ou subtópico matemático que se pretende que os alunos aprendam; (ii) uma *progressão no desenvolvimento*, ou percurso de aprendizagem, que permite aos alunos “caminharem” pelos níveis de pensamento, desenvolvendo a sua compreensão e competências no tópico ou subtópico previamente estabelecido (objetivo); e finalmente (iii) o ensino do objetivo por meio de um *conjunto de tarefas*, encadeadas entre si, que irão auxiliar os alunos a realizar o percurso pretendido pelo professor.

Fosnot e Dolk (2002), utilizam a ideia de *marcos* ou *ideias fundamentais* a incluir numa trajetória de aprendizagem. Segundo os autores, devido à divergência dos processos de aprendizagem dos alunos, o professor pode identificar marcos ao longo do percurso que pretendem que os alunos percorram, com base no seu conhecimento matemático. Estes marcos irão ajudar a planear e a questionar, e daí decidir o que fazer no seguimento.

Uma possível trajetória de aprendizagem usando a ideia dos *marcos* apresentados por Fosnot e Dolk (2002), para o trabalho com padrões pode ser visto no esquema que se segue.

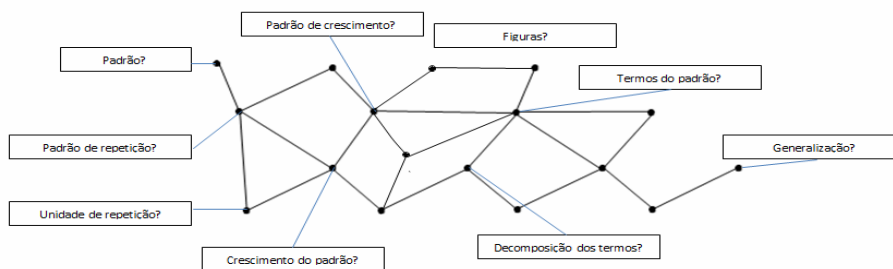


Figura 2 – Marcos de um percurso de aprendizagem segundo as ideias de Fosnot e Dolk (2002)

Serrazina e Oliveira (2010, p. 46) defendem ainda que *tão importantes como as trajetórias de aprendizagem são as tarefas a propor*.

Deste modo, tendo presente as vivências dos alunos, os seus conhecimentos prévios, o professor deve ainda desenvolver a trajetória hipotética de aprendizagem tendo em conta os seguintes aspetos:

1. Determinar o que é que os alunos conseguem aprender no momento pretendido, partindo do que eles já sabem e conseguem fazer;
2. Selecionar e ou desenvolver tarefas e de forma a encadeá-las umas nas outras tentando desse modo que os alunos possam atingir os objetivos que o professor determinou;
3. Explicitar claramente aquilo que os alunos vão descobrir ou aprender, nestas com estas condições de trabalho e como o vão fazer.

Os aspetos referidos anteriormente encaixam perfeitamente naquilo que foi definido por Simon (1995), e que pode ser observado no esquema seguinte:

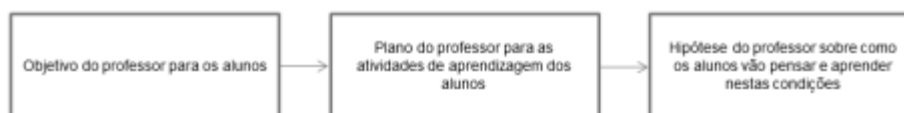


Figura 3 - Trajetória hipotética de aprendizagem (Simon, 1995)

Todo o trabalho deve iniciar precisamente com a definição por parte do professor dos objetivos que pretende ver desenvolvidos.

Finalmente, o papel do professor no âmbito de todo este “quadro” deve ser visto com especial cuidado, uma vez que, como referiu Gravemeijer (2005), citado por Brocardo et al (2007):

O professor deve conseguir passar do papel de fornecer indicações e explicações para o papel de ajudar os alunos a (re) inventar a Matemática o que os coloca na “difícil tarefa de construir com base no input e nas ideias dos alunos e ao mesmo tempo trabalhar na direcção de objectivos convencionais fixos” (pp. 99).

4.2. As tarefas

O esforço que o professor deve efetuar na seleção de tarefas potenciadoras das aprendizagens pretendidas é assim visto como um trabalho fundamental, que requer uma profunda reflexão acerca

dos caminhos possíveis que os alunos irão realizar, assim como das aprendizagens que se pretendem ver desenvolvidas.

Dependendo das tarefas construídas, selecionadas e/ou adaptadas, o professor auxilia o aluno, de modo a que este se concentre nos aspetos que considera fundamentais para o seu desempenho. Simultaneamente, através dos passos dados, ou não, pela criança, o professor deve ir refletindo com vista a proceder aos ajustes essenciais na cadeia de tarefas, na trajetória de aprendizagem.

O conjunto de tarefas utilizadas neste estudo é enquadrado nas de natureza essencialmente investigativa e exploratória, de modo a permitir o envolvimento do aluno na procura e análise de padrões.

Para os objetivos mencionados no programa de Matemática, do tema *Álgebra*, tópico *Padrões e regularidades* e subtópico *Sequências e regularidades* foi realizada uma cadeia com cinco tarefas. De referir que estas tarefas são parte integrante de uma cadeia de tarefas mais extensa (Anexo III – A), que engloba ainda os subtópicos *Expressões numéricas e propriedades das operações* assim como *proporcionalidade direta*. As tarefas escolhidas foram adaptações de outras que se encontram na brochura disponibilizada pela DGIDC em Julho de 2010, realizada por professores de turmas-piloto do 6º ano de escolaridade ao longo do ano 2009/2010, do livro *Padrões no Ensino e Aprendizagem da Matemática, Propostas Curriculares para o Ensino Básico*, de Vale et al (2009) e das tarefas desenvolvidas por Alvarenga (2006).

As quatro primeiras tarefas propostas foram trabalhadas num bloco de 90 minutos cada e a quinta tarefa foi trabalhada em dois blocos de 90'. Para o trabalho de investigação que aqui se apresenta, só foram analisadas três das cinco tarefas da referida cadeia. Optou-se assim por não incluir neste estudo a primeira tarefa, *Relações e regularidades*, uma vez que esta não abordava os padrões de crescimento, assim como a tarefa *Tatamis*, devido ao número de páginas disponível para a redação do relatório. O quadro seguinte apresenta os objetivos de cada tarefa:

Pré-teste	Tarefas da cadeia			Pós-teste
	Tarefa 1	Tarefa 2	Tarefa 3	
(i) Determinar o termo seguinte (ou o anterior) a um dado termo e ampliar uma sequência numérica, conhecida a sua lei de formação. (ii) Determinar termos de ordens variadas de uma sequência, sendo conhecida a sua lei de formação. (iii) Analisar as relações entre os termos de uma sequência e indicar uma lei de formação, utilizando a linguagem natural e simbólica.	(i) Determinar o termo seguinte (ou o anterior) a um dado termo e ampliar uma sequência numérica, conhecida a sua lei de formação. (ii) Determinar termos de ordens variadas de uma sequência, sendo conhecida a sua lei de formação. (iii) Analisar as relações entre os termos de uma sequência e indicar uma lei de formação, utilizando a linguagem natural e simbólica.	(i) Determinar o termo seguinte (ou o anterior) a um dado termo e ampliar uma sequência numérica, conhecida a sua lei de formação. (ii) Determinar termos de ordens variadas de uma sequência, sendo conhecida a sua lei de formação. (iii) Analisar as relações entre os termos de uma sequência e indicar uma lei de formação, utilizando a linguagem natural e simbólica. (iv) Representar simbolicamente relações descritas em linguagem natural e reciprocamente.	(i) Determinar o termo seguinte (ou o anterior) a um dado termo e ampliar uma sequência numérica, conhecida a sua lei de formação. (ii) Determinar termos de ordens variadas de uma sequência, sendo conhecida a sua lei de formação. (iii) Interpretar diferentes representações de uma relação e relacioná-las.	(i) Determinar o termo seguinte (ou o anterior) a um dado termo e ampliar uma sequência numérica, conhecida a sua lei de formação. (ii) Determinar termos de ordens variadas de uma sequência, sendo conhecida a sua lei de formação. (iii) Analisar as relações entre os termos de uma sequência e indicar uma lei de formação, utilizando a linguagem natural e simbólica.

Quadro 6 – Quadro síntese das tarefas e seus objetivos

Capítulo V

Resultados do estudo e sua discussão

Este capítulo apresenta-se dividido em quatro seções. Na primeira seção pretende-se descrever cada uma das aulas realizadas no âmbito do presente trabalho, refletindo acerca dos aspectos algébricos em estudo. As restantes três seções serão dedicadas à descrição, análise e discussão de cada um dos casos tendo em conta os objetivos de estudo.

5. O desenvolvimento do trabalho na aula

Em todas as tarefas os enunciados foram entregues aos alunos. Em cada uma delas foi efetuada uma breve introdução, sendo lido o enunciado, clarificando o que se pretendia fazer.

Tarefa 1 - As tampinhas do João

Habitualmente os alunos encontram-se sentados dois a dois, permitindo que cada par de alunos possa discutir e trocar ideias ajudando-se uns aos outros. Para a realização desta tarefa não houve alteração a esta organização de trabalho.

Após a entrega da folha da tarefa aos alunos (anexo III - 1), esta foi apresentada oralmente e com recurso à projeção e após algumas explicações do que se pretendia, foi estabelecido para tempo de trabalho, 45 minutos. De seguida seriam apresentados alguns dos trabalhos desenvolvidos pelos alunos, segundo uma sequência definida pelo professor que permitiria discutir os resultados e as estratégias realizadas.

Os alunos começaram então a realizar as suas tarefas calmamente e discutindo entre si as suas descobertas.

Enquanto a turma ia realizando a tarefa proposta, o investigador deslocava-se pelos grupos, para tentar perceber algumas das estratégias que estavam a ser utilizadas e também compreender as principais dúvidas ou dificuldades que iam surgindo. Nalguns pares com mais dificuldade em iniciar a tarefa, tentou colocar questões que auxiliassem os alunos nas suas descobertas, sem lhes dar respostas. Noutros ainda o investigador reparou que estavam a demorar muito tempo na descoberta das regularidades por não existir um número fixo de descobertas que deveriam fazer. Optou então por dizer a todo o grupo turma que deveriam procurar descobrir as regularidades que lhes permitissem resolver as questões seguintes.

Outra grande dificuldade que foi encontrada na maioria dos alunos prendia-se com o modo de registar as descobertas feitas. Apesar da primeira questão da tarefa solicitar a construção de uma tabela, vários alunos estavam a optar por não realizar essa construção cometendo por isso alguns erros. Optou-se então por solicitar a atenção de toda a turma, informando-os que tinham de construir a tabela. Foi o suficiente para, alguns momentos depois, os alunos detetarem os erros cometidos alcançando então alguns resultados. Também se reforçou a ideia de que deviam procurar uma

forma de registrar as descobertas na tabela, quer recorressem a esquemas ou desenhos, quer recorressem a símbolos matemáticos.

Outro aspeto evidenciado por alguns alunos foi a pouca autonomia e confiança no seu trabalho, pois a cada descoberta realizada solicitavam a presença do professor para que verificasse se estava correta.

Apesar desta primeira questão da tarefa não solicitar de forma explícita que os alunos generalizassem, vários pares, ao descobrir que uma das regularidades da sequência A (Fig.4) era “*todas as figuras tinham um número de tampinhas múltiplo de três*”, concluíram que bastava multiplicar por três para encontrar o número de tampinhas de qualquer figura. Este raciocínio foi usado depois na resposta à questão número dois por estes alunos.

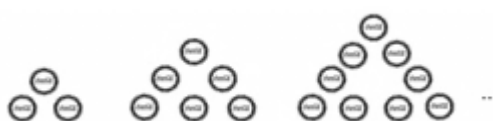


Figura 4 - Sequência A da tarefa “As tampinhas do João”

Também se verificou que alguns pares, na primeira questão, se limitaram a descobrir que eram sempre “*mais três de figura em figura*” – sequência A - recorrendo a um raciocínio recursivo. O facto de usarem uma estratégia recorrendo a este tipo de raciocínio possivelmente impossibilitou-os de descobrir o número de tampinhas da figura 8 sem recorrer à figura anterior e consequente continuação da tabela, na questão dois. Outros pares ainda, apesar de terem conseguido realizar a generalização “*pensando na tabuada do três*”, usaram a tabela para ilustrar/representar as suas descobertas.

Relativamente à sequência B (Fig. 5), foi visível que a maioria dos pares teve mais dificuldade em encontrar regularidades. Esta situação surge pelo facto da relação entre cada uma das figuras da sequência não ser proporcional, o que levou a que as estratégias usadas na sequência anterior deixassem de funcionar.



Figura 5 - Sequência B da tarefa “As tampinhas do João”

Alguns alunos contudo, fizeram diversas tentativas, procurando em várias tabuadas resultados que encaixassem nos valores apresentados pelas figuras. Através desta estratégia, tentativa e erro, alguns grupos conseguiram descobrir que podiam usar a “*tabuada do dois somando sempre mais um*”. Por outro lado, um dos pares, após várias tentativas com outras tabuadas voltou à *tabuada do três*. Contudo, os alunos verificaram que tinham de retirar um número cada vez maior de tampinhas em cada figura da sequência. A busca desta nova regularidade foi realizada com bastante entusiasmo e pouco tempo depois afirmavam que “*basta multiplicar por três e depois tirar o número*

da figura anterior”. Os alunos estavam satisfeitos com esta descoberta, mas ainda um pouco confusos com a figura um:

*“Aluno - Professor, para a figura um podemos fazer $1 \times 3 = 3$...mas a figura anterior não existe?!...
Prof. - Mas então segue ou não a mesma estratégia das outras figuras da sequência?
Aluno - Não. Mas funciona, pois a primeira figura tem só três tampinhas.”*

Este par acabou por não avançar, mas voltar-se-ia a este assunto na discussão em grupo turma. Para a resposta à questão número três usaram a estratégia descoberta e multiplicaram 7 por 3 e retiraram 7 (a figura anterior) concluindo ser 17 tampinhas.

Quanto aos alunos que recorreram ao raciocínio recursivo na sequência A, voltaram a utilizar a mesma estratégia na sequência B e afirmavam que “*crece de dois em dois: 3, 5, 7, 9, 11...*”. Estes alunos recorreram sempre à contagem *mais dois* em relação à figura anterior. Para responder à questão 3 foram preenchendo a tabela até chegar à figura 8. Acrescentaram ainda que “*eram os números ímpares menos o um*”.

Relativamente a muitos dos alunos que usaram a noção de múltiplo de um número na sequência A, conseguindo estabelecer relações entre os termos e o total de tampas de cada uma, verificou-se que procuraram chegar a conclusões na sequência B, procurando novamente através de uma relação multiplicativa. Contudo, chegaram ao resultado pretendido por uma *aproximação*. Ou seja, perceberam que multiplicando por dois dava o número anterior ao número total de tampas da figura. O exemplo seguinte demonstra isso mesmo.

*“Prof. - Como é que tu olhaste para a sequência 3, 5, 7, 9...e viste que podias multiplicar o número da figura por dois e depois acrescentar um?
Aluno - Porque o número da figura vezes dois é o número anterior ao que estava nas folhas...”*

Do lugar o Pedro fez uma intervenção muito interessante:

“Pedro - E é par. Vai dar sempre par e precisamos de mais alguma coisa para dar ímpar.”

Estas breves palavras dos alunos revelavam que ambos se encontravam definitivamente a falar uma linguagem matemática sólida e baseada em conhecimentos prévios sobre os números. Contudo, ainda se pretendia saber como teria feito a descoberta e quando questionado pelo motivo pelo qual optou pelo *dois* e não por qualquer outro valor, este respondeu que o colega de carteira tinha feito variadas experiências, limitando-se depois a aproveitar a que lhe pareceu mais correta.

Finalmente, na questão 4, tendo os alunos conseguido compreender que na sequência B estavam perante números ímpares, facilmente constataram que a 17ª figura nunca podia ter um número par de tampinhas, revelando compreensão da estrutura da sequência em estudo.

Tarefa 2 - T's em Cubos

A aula teve início com a distribuição da folha da tarefa (anexo III - 2) e sua projeção no quadro para se fazer a interpretação da mesma. Este momento da aula durou aproximadamente 10 minutos. O trabalho autónomo dos alunos foi proposto para 45 minutos, ficando os restantes 35 minutos para a apresentação dos trabalhos dos alunos e consequente discussão.

Como já é hábito, enquanto os alunos trabalhavam, o professor foi circulando pela sala para compreender o impacto inicial da tarefa e se de facto estavam a compreender o que era pretendido.

Muitos dos alunos conversavam entre si, comentando que a tarefa era parecida com a tarefa anterior, “As tampinhas do João”. Em simultâneo, alguns afirmaram que também estavam perante os múltiplos de três, ao que o professor solicitou que apresentassem “provas” organizadas dessa afirmação.

Após a primeira ronda por entre os grupos e verificando que se encontravam a trabalhar e que tinham compreendido o que lhes era solicitado, o professor deixou que trabalhassem de forma autónoma durante uns momentos, limitando-se a observar a turma e os comentários que iam surgindo das saudáveis discussões que ocorriam entre os pares de alunos.

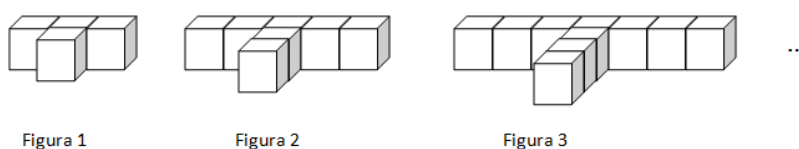


Figura 6 – Padrão da tarefa “T’s em cubos”

Passado algum tempo o professor voltou a circular por entre os pares, detendo-se junto a um dos alunos que lhe disse que a tarefa “As tampinhas do João” tinha sido importante pois estava a usar a mesma estratégia e funcionava. Este comentário do aluno foi importante, pois permitia constatar que as estratégias utilizadas na tarefa anterior estavam a ser consolidadas. Solicitou então ao aluno que explicasse melhor porque tinha a tarefa da aula anterior sido importante para esta nova tarefa:

“Aluno - Eu vi que se fizesse $x4$ na 2ª figura dava 8 e tirei 1, e depois experimentei com as outras e vi que tirava o número da figura anterior. Foi como na tarefa das tampinhas...”

Para auxiliar o seu raciocínio o aluno recorria a um esquema como o da figura seguinte.

	$4 \times 1 - 0 = 4$
	$4 \times 2 - 1 = 7$
	$4 \times 3 - 2 = 10$

Figura 7 - Estratégia utilizada por um dos alunos

Contudo, a maioria dos alunos descobriu que de figura para figura *acrescentávamos* 3:

$$4 + 3 = 7, 7 + 3 = 10, \dots$$

As expressões mostram que estes alunos raciocínio recursivo. Foi então necessário questionar os alunos se conseguiriam, com base nesta estratégia, saber quantos cubos teria a figura 12 sem fazer todas as figuras. Um dos alunos compreendeu então que a estratégia não lhe permitiria fazer tais

descobertas, pelo menos sem fazer os “desenhos” todos. O professor solicitou-lhe então que olhasse para as figuras e pensasse noutra forma de contar:

Aluno – “Então, como vai de 3 em 3, podemos fazer $3 \times 1 = 3$ e depois temos de acrescentar 1.”

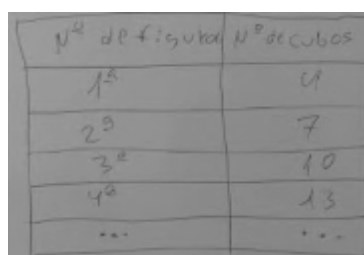
Prof. – “E será que funciona sempre?”

Aluno – “Vou ver.”

Pouco tempo após este diálogo acaba por afirmar que funciona e que é parecido ao da aula passada.

Verificou-se que apenas um dos grupos não conseguiu realizar descobertas matemáticas relevantes e válidas para resolver o problema. Terminado o tempo, o professor solicitou então que um aluno fosse ao quadro mostrar de forma fundamentada como resolvera a primeira questão.

O aluno recorreu a uma tabela (Fig. 8) e com base nos resultados obtidos verificou que as figuras aumentavam, no número de cubos, de 3 em 3. Ao relacionarem o número da figura com o número de cubos de cada uma, concluíram que tendo a quarta figura treze cubos, não poderia existir uma construção com 14 cubos.



Nº de figura	Nº de cubos
1ª	6
2ª	7
3ª	10
4ª	13
...	...

Figura 8 – Tabela utilizada pelo aluno no quadro

Com base na tabela construída pelo aluno, a restante tarefa foi explorada no quadro, tendo diversos alunos a oportunidade de ir explicar como tinham pensado.

No final da aula foi perceptível que uma grande parte dos alunos relacionou a figura e a sua posição com o número de cubos necessários para a sua construção.

Uma parte significativa da turma conseguiu desenvolver uma generalização. Um desses alunos, de forma pragmática descobriu que $3 \times n^\circ \text{ da figura} + 1$ funcionava sempre. Já outros sentiram necessidade de explorar um pouco mais a tabela, que preencheram com variados valores, para chegaram às mesmas conclusões. Quando questionados, estes alunos que recorreram ao preenchimento mais vasto da tabela, porque o tinham feito, afirmaram que desse modo conseguiam procurar mais relações e ter mais certezas. Confirma-se assim que estes alunos ainda utilizam um raciocínio recursivo realizando somente generalizações locais.

Independentemente de todo o esforço e empenho de exploração da tarefa revelado pela turma, um pequeno grupo de alunos revela ainda uma grande necessidade de recorrer às figuras anteriores, o que lhes dificulta depois a generalização global. Contudo, quando solicitados e orientados a aprofundar as suas ideias e estratégias, conseguiram recorrer a raciocínios que relacionavam a multiplicação com a posição das figuras e o número de cubos de cada uma.

Tarefa 3 - Figuras de figuras

Novamente, a aula teve o início com a distribuição da folha da tarefa (anexo III - 3) e projeção no quadro para se fazer a interpretação e clarificação da mesma. Os alunos trabalharam em pares como é habitual nas aulas de matemática.

Durante a apresentação da tarefa e seus objetivos, foi possível verificar que alguns alunos sentiam dificuldade na *leitura* e interpretação da tabela presente na mesma. O trabalho de interpretação e clarificação já habitual no início das aulas, revelou-se assim um pouco mais exaustivo do que nas duas tarefas anteriores, tendo o professor optado por realizar o preenchimento da tabela em grupo turma com o contributo diversificado dos alunos.

	1	1/3	1/9	1/27
	3	1	1/3	1/9
	9	3	1	1/3
	27	9	3	1

Figura 9 – Tabela inicial da tarefa “Figuras de figuras” depois de preenchida em grupo turma

A tabela da figura 9, quando lida da esquerda para a direita na horizontal propõe a compreensão das frações como medida, uma vez que o aluno tem de perceber que a figura inicial é a terça parte da seguinte e assim sucessivamente. Já quando lida da direita para a esquerda, de cima para baixo, as figuras são 3 vezes maiores que as anteriores, estando este comportamento das figuras relacionados com as potências de base 3.

Nos aspetos relacionados com os números racionais os alunos estavam a ter dificuldade em compreender que as figuras mais *pequenas* são *partes ou frações* das figuras *maiores*. Simultaneamente surgiram também dificuldades em representar essas partes.

Foi interessante verificar, apesar de não ser completamente inesperado, que muitos alunos não estabelecem conexões dentro da matemática. Apesar do professor tentar nas aulas que as tarefas e os problemas propostos aos alunos façam conexões dentro da matemática, verifica-se que muitos dos alunos limitam-se a trabalhar de modo a procurar as respostas aos desafios nos conteúdos em estudo no momento, fazendo pouco uso de alguns conhecimentos adquiridos anteriormente, com exceção dos conhecimentos gerais das operações básicas. Assim, como a tarefa procura estabelecer relações de medida entre as figuras, e como nas tarefas anteriores os alunos descobriram sempre números inteiros e relacionados com as tabuadas conhecidas, também orientaram o seu trabalho nesse sentido. Apesar da discussão inicial, para o preenchimento da tabela, foi importante o questionar de proximidade a alguns alunos, como podemos observar no seguinte diálogo:

Prof. – “Afinal, com essa figura, quantas figuras consegues fazer iguais à seguinte? Será que consegues fazer uma?”

Aluno – “Não!”

Prof. – “Porquê?”

Aluno – “Porque só dá para um bocadinho.”

Prof. – “Ok. E que parte é esse bocadinho?”

Aluno – “Um terço?”

Prof. – “O que achas?”

Revelou-se fundamental colocar questões como estas, de modo a ajudá-los a conseguir estabelecer estas relações e para que recordassem o trabalho desenvolvido ao longo da sua escolaridade com os números racionais.

Ultrapassada esta dificuldade inicial, o professor continuou a monitorizar o trabalho dos alunos que continuou a revelar grandes dificuldades, agora na descoberta das potências e no modo como as representar. Grande parte dos alunos conseguiam descobrir as multiplicações envolvidas, 3×3 , 3×9 , 3×27 , ..., mas não conseguiam estabelecer conexões com as potências e sua representação. Mais uma vez, teve de ser o professor a orientar nesse sentido, recordando-lhes precisamente o tópico Potências que tinha sido trabalhado no 5º ano e no início do 6º ano. Somente a partir deste momento, alguns alunos começaram a tentar perceber como se comportavam as potências neste padrão.

5.1. O caso do Pedro

Apresentação

O Pedro é um aluno muito simpático, que encara sempre a escola e as suas tarefas com um sorriso e muita motivação. Na entrevista refere que a sua disciplina favorita é a Matemática. É um dos alunos que frequenta o articulado de música.

Os seus pais possuem ambos o 12º ano de escolaridade e segundo o mesmo, ambos tentam ajudá-lo nas suas obrigações com a escola. Nos tempos livres gosta de ler, jogar no computador, navegar na internet e conversar com os amigos.

Durante o seu percurso escolar nunca teve nenhuma retenção e gosta de ajudar os seus colegas de turma a compreender melhor os assuntos e desse modo melhorarem as suas notas. Na aula de matemática as suas tarefas favoritas envolvem a investigação e descoberta de relações entre os números, segundo o mesmo afirma na entrevista.

Na realização de tarefas em sala de aula demonstra uma postura ativa, adotando na maioria das vezes uma atitude de líder. Nas explorações em grupo turma é um aluno bastante participativo, contribuindo constantemente com conjeturas ou estratégias para a resolução das tarefas propostas. Ao longo da realização deste trabalho manteve uma grande motivação, envolvendo-se ativamente na consecução das tarefas que iam sendo propostas.

5.1.1. O pré-teste

Relativamente à primeira questão do pré-teste (anexo II) o Pedro estabeleceu relações entre o número da figura, o número de triângulos e o número de palitos pelo que possivelmente, no 5º ano, encontrava-se ao nível das *Evidências da transição do pensamento aritmético ao algébrico* segundo categorias propostas por Fiorentini et al. (1993).



Figura 10 – Padrão do pré-teste

Como podemos observar na figura 11, o Pedro já relacionava o triângulo com o número de palitos que o compõe, percebendo a sua relação na sequência quando afirma que tem de tirar dois palitos ao triângulo anterior. Aqui o contexto visual do problema permitiu o aluno realizar observações das figuras e compreender uma regularidade do padrão.

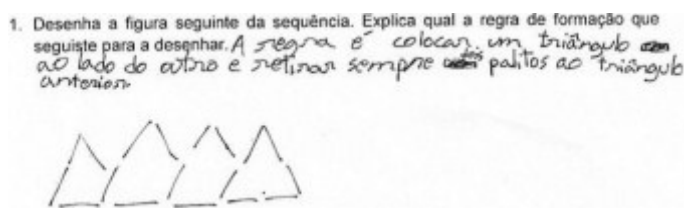


Figura 11 – Resolução do Pedro na questão um do pré-teste

Olhando para o desempenho do Pedro nas questões 2 e 3, observamos que se limitou a apresentar por escrito na 2 (Figura 12) uma resposta errada para o número de palitos da figura da posição 7.

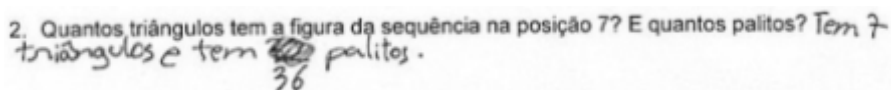


Figura 12 – Resolução do Pedro na questão dois do pré-teste

Não foi possível indentificar o tipo de estratégia que o aluno utilizou, contudo, tendo em conta o raciocínio que apresentou na questão anterior, é possível que tenha utilizado o produto de 7 (o número de triângulos que se colocam ao lado uns dos outros) por 6 (número de palitos de cada triângulo) e retirado 6, ou seja, o aluno considerou um triângulo como unidade e usou um múltiplo fazendo depois um ajuste, tendo por base uma regularidade que ele próprio descobriu, *retirar sempre dois palitos ao triângulo anterior*. O aluno sabia que tinha de juntar os triângulos e retirar 2 palitos a cada um dos triângulos antes do último. No entanto, a sua solução apresenta um erro que poderá estar relacionada com o cálculo dos palitos a retirar deste conjunto de sete triângulos.

Em relação à questão 3, o Pedro optou novamente por recorrer à linguagem natural para responder (Figura 13).

3. É possível ter uma figura com 85 palitos? Explica a tua resposta. Não, porque 6 são retirados sempre dois palitos a um triângulo, que tem 6 palitos e ao fazermos essa subtração ficaremos sempre com um número par e 85 é ímpar.

Figura 13 – Resolução do Pedro na questão três do pré-teste

Neste caso o aluno utilizou a noção de paridade dos números, recorrendo à propriedade de que a diferença entre dois números pares é um número par. É visível que o aluno conseguiu compreender como se relacionavam os números que vão compondo o padrão e uma das suas propriedades, serem números pares. Parece-me importante sublinhar que foi esta estratégia que permitiu sustentar a ideia que o aluno se encontrava num nível de transição do pensamento aritmético para o algébrico.

Relativamente às questões dois e três desta tarefa (Figuras 12 e 13), e considerando a fundamentação apresentada para o estudo, podemos afirmar que a questão dois permite uma generalização local. Contudo, no caso da questão três já podemos considerar que permite uma generalização global.

Finalmente na questão quatro, o objetivo era perceber se os alunos generalizavam e como o faziam. O Pedro acabou por mostrar nesta resposta (Figura 14) bastante coerência com todo o seu trabalho anterior.

4. Se alguém te disser o número de triângulos, explica como podes dizer-lhe o número de palitos que serão necessários. Como podes saber que a tua descrição irá dar sempre o número certo de palitos? Porque se uma pessoa me perguntar isso eu retiraria 2 palitos a todos os triângulos menos ao último criado.

Figura 14 – Resolução do Pedro na questão quatro do pré-teste

A sua estratégia passou novamente pelo recurso à linguagem natural. Aqui percebe-se que compreendeu como se compunham as figuras ao longo do padrão. Isto irá sustentar não só a hipótese de um erro de cálculo na questão dois, como consolidar a ideia do aluno evidenciar de facto um nível de pensamento muito próximo do algébrico.

5.1.2. O trabalho envolvendo a exploração de padrões.

A cadeia de tarefas

Tarefa 1 – As tampinhas do João

Nesta tarefa foi proposto aos alunos que, com base na análise de figuras pertencentes a duas sequências distintas de *tampinhas* (Figura 15), descobrissem regularidades.

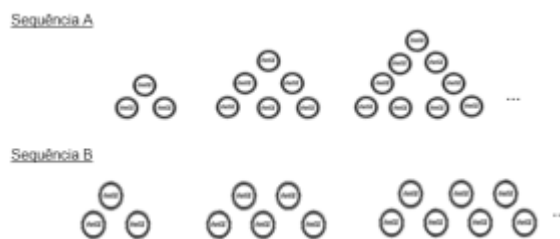


Figura 15 – Sequências da tarefa “As tampinhas do João”

O Pedro, assim que recebeu a tarefa, começou imediatamente a trabalhar com entusiasmo. A primeira questão, *Que regularidades encontras na sequência A? E na B? Constrói uma tabela que te ajude a organizar os dados*, solicitava aos alunos que procurassem regularidades em ambas as sequências ou padrões, tendo por base a construção de uma tabela. Era esta construção que iria permitir que os alunos melhor organizassem o pensamento e consequentemente melhorassem estratégias para a descoberta de regularidades.

O Pedro organizou a sua tabela para a sequência A do seguinte modo:

Figura n.º	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
N.º de tampas	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
N.º de tampas na linha de baixo	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Figura 16 – Resolução do Pedro na questão um da tarefa - sequência A

A preocupação do Pedro em estabelecer relações entre o número de tampas e a sua posição na sequência é evidente no modo como organiza a tabela (Figura 16). Verifica-se também que lhe foi significativo a construção de uma linha que contemplasse o número de tampas da linha de baixo de cada uma das figuras da sequência.

Com base neste trabalho o aluno apresentou as seguintes descobertas (anexo V-1B):

- O número de tampas da figura é sempre múltiplo de 3;
- A linha de baixo tem sempre mais uma tampa que o número da figura;
- De uma figura para a outra acrescenta-se uma tampa na linha de baixo e outras duas, uma em cada diagonal;
- O número de tampas é igual ... n° da figura \times 3.

Nestas suas descobertas o Pedro deixa claro que relaciona o termo com a sua ordem. Possivelmente, o facto de ter decomposto a figura em *linha de baixo* e *diagonais* terá auxiliado o aluno a conseguir por fim representar por uma expressão algébrica n° da figura \times 3, apesar de ainda não existir o recurso a uma simbologia algébrica mais formal. Se no pré-teste o Pedro evidenciou um nível de pensamento algébrico de transição (entre o aritmético e o algébrico), aqui talvez possamos afirmar que evidencia um pensamento algébrico mais desenvolvido.

Na exploração em sala de aula, o Pedro referiu que esta relação multiplicativa evidenciada na sequência A, era a mais importante para a conclusão de todo o trabalho a realizar na mesma.

De facto, na questão dois, onde se pretendia que os alunos descobrissem o número de tampas da figura da oitava posição, o Pedro foi muito eficaz, resolvendo, $8 \times 3 = 24$ tampas, o que comprova a afirmação anterior.

Relativamente à sequência B (Figura 15), organizou a sua tabela (Figura 17) do seguinte modo:

Figura nº	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
N.º de tampas	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27		
N.º de tampas na linha de baixo	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
N.º de tampas na linha de cima	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

Figura 17 – Resolução do Pedro na questão um - sequência B

Mais uma vez, a forma como o aluno construiu a tabela para esta sequência permite verificar que existe uma clara preocupação em procurar estabelecer relações entre a posição da figura com o número total de tampas, mas também entre o número de tampas do que volta a chamar de *linha de baixo* e agora com uma nova *linha de cima*. Existiu de facto uma preocupação em decompor a figura em partes compreensíveis que lhe permitissem estabelecer relações e desse modo melhor compreender a sequência. Fruto deste trabalho o Pedro apresenta as seguintes descobertas que se encontram na sua folha de trabalho (anexo V – 1B):

- A linha de baixo tem sempre mais uma tampa que o número da figura;
- O número de tampas da linha de cima é igual ao número da figura;
- O número de tampas é igual a $(n^{\circ} \text{ da figura} \times 2) + 1$.
- Os números são todos ímpares;
- De figura para figura acrescenta-se uma tampa na linha de baixo e outra na linha de cima;

O aluno continua a manter uma coerência muito grande relativamente ao seu trabalho. Após a decomposição das figuras e de as relacionar com as suas posições na sequência, apresenta uma expressão algébrica que estabelece relações funcionais entre a posição da figura e o total de tampinhas. Quando questionado na entrevista (anexo VI-1) acerca de todas estas descobertas o aluno é novamente muito claro e objetivo:

Prof. – Em relação à tarefa “As tampinhas do João”, e relativamente à primeira questão, descobriste que na sequência A eram múltiplos de três. Como chegaste a essa conclusão?

Pedro – Eu olhei para as figuras. Na primeira figura tinha três. Depois tentei descobrir várias relações e ao contar as tampas vi que eram todos múltiplos de três...3, 6, 9, 12, ...

(...)

Prof. – E relativamente à sequência B? Descobriste que eram ímpares, mas descobriste mais qualquer coisa...que estratégias usaste para fazer essas descobertas?

Pedro – Na sequência B a primeira relação que encontrei... a primeira figura era parecidíssima com a primeira figura da sequência A. Depois na segunda figura da sequência B reparei que foram acrescentadas mais duas tampas, uma em cada linha e depois formava uma espécie de A. (Ver figura 15)

Prof. – Mas tu chegaste aqui a uma forma de descobrir o número de tampas de qualquer figura da sequência B. Como é que tu pensaste?

Pedro – Na sequência B, a linha de baixo tem sempre mais uma tampa que o número da figura. Então, fui fazendo algumas relações, fui comparando as figuras que estavam na folha... depois tentei confirmar com figuras mais à frente, imaginando como é que elas seriam e cheguei a essa conclusão.

Apesar de manter as ideias apresentadas no trabalho realizado na aula, o Pedro apresenta alguma dificuldade em aprofundar a explicação das suas estratégias. No entanto, é possível verificar que o aluno recorre a todo o tipo de estratégias de que dispõe para relacionar as descobertas já efetuadas. De realçar ainda que o aluno afirma usar a *imaginação* e a *criatividade* como ferramenta de exploração e descoberta quando explica *tentei confirmar com figuras mais à frente, imaginando como é que elas seriam e cheguei a essa conclusão*. É um facto que o uso da imaginação é uma estratégia poderosa quando pretendemos resolver problemas, pois permite antecipar possíveis caminhos a seguir, estimar resultados ou prever acontecimentos.

Quando observamos a restante resolução da tarefa compreendemos facilmente que a análise exaustiva realizada pelo aluno na primeira questão e as descobertas consequentes, foram fundamentais para a conclusão do restante trabalho.

Tarefa 2 – T's em cubos

Após apresentação inicial da tarefa (Anexo III – 2) ao grupo turma, o Pedro, como é seu hábito, começou imediatamente a trabalhar. Ao longo do tempo o professor foi circulando pela sala de aula tendo a oportunidade de passar junto do aluno para tentar compreender as suas ideias.

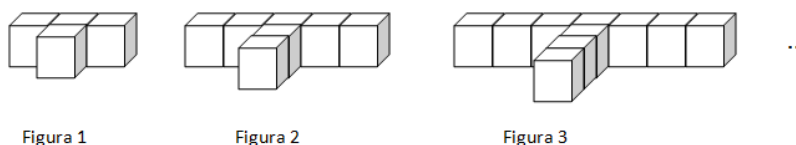


Figura 18 – Padrão da tarefa “T's em cubos”

Rapidamente se pode constatar que se encontrava a preencher uma tabela semelhante à que tinha utilizado na aula anterior e a descrever algumas descobertas realizadas. Foi questionado precisamente acerca disso:

Prof. – A tua tabela é muito parecida com a que fizeste na aula passada... (?)

Pedro – Sim. Ajuda-me a fazer descobertas. Descubro as relações entre os números...

Prof. – E o que estás a escrever? Não são as respostas à tarefa...

Pedro – Não. Isto são as minhas descobertas... depois é que vou responder aos problemas.

De fato, na sua produção escrita relativa à primeira questão da tarefa o Pedro apresenta a seguinte tabela (anexo V – 1C):

N.º da figura	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
N.º de cubos	4	7	10	13	16	19	22	25	28	31	34	37	40	43
N.º de cubos em cada lado	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

Figura 19 – Tabela construída pelo Pedro na tarefa “T’s em cubos”

É interessante verificar que o aluno continua a estabelecer relações claras entre o número de cubos de cada figura e a sua posição na sequência. Além disso, também foi importante verificar que o Pedro apresenta coerência nas suas estratégias funcionais, que o levam a repeti-las sempre que se aperceba que o podem ajudar. Assim como na tarefa *As tampinhas do João*, o aluno nesta também acrescentou as suas descobertas por escrito (anexo V – 1C):

- Acrescenta-se +3 cubos de figura para figura;
- Para descobrir o número de cubos de cada figura existem três formas:
 - i) multiplicar o número da figura anterior por 3 e adicionar 4;
 - ii) multiplicar o número da figura por 3 e adicionar 1;
 - iii) multiplicar o número da figura por 4 e subtrair o número da figura anterior.
- O número de cubos em cada lado é igual ao número da figura.

É importante destacar que o Pedro ainda apresenta estratégias que evidenciam o raciocínio recursivo, quando escreve, *Acrescenta-se +3 cubos de figura para figura*. No entanto, nas suas afirmações seguintes consegue estabelecer relações multiplicativas entre o número da figura e o número de cubos da sua composição, evidenciando um pensamento algébrico mais desenvolvido, realizando uma generalização global.

Rapidamente se constata que após estas descobertas, todas as respostas aos desafios da tarefa ficaram facilitadas (ver anexo V–1C).

De destacar a resposta do Pedro à questão “*Consegues representar o número de cubos utilizados na construção de cada T através de uma expressão numérica?*”

R: Sim.

$$6(3)+4=4 \quad 3(1+3)+4=7 \quad (2 \times 3)+4=10$$

$$(1 \times 3)+1=4 \quad (2 \times 3)+1=7 \quad (3 \times 3)+1=10$$

Figura 20 – Resolução do Pedro na questão dois da tarefa “T’s em cubos”

Como podemos observar na figura anterior, o aluno compreendeu e utiliza as descobertas realizadas no início do trabalho. Além disso a sua representação destaca-se pelo nível de formalismo que apresenta e pelo uso correto da simbologia matemática adequada à resolução das diversas expressões numéricas.

As questões seguintes também mostraram que a análise que realizou no início da tarefa, com a construção da tabela e o estabelecer de generalizações, foram fundamentais.

Contudo, na entrevista (anexo VI – 1), quando abordado sobre quais as questões que foram facilitadas pelo uso da tabela, o aluno refere somente a 1, a 3 e a 4. Já sobre a questão dois, o aluno afirma:

Prof – Então e a dois não? O que diz a dois? Consegues representar o número de cubos utilizados na construção de cada T através de uma expressão numérica... Achas que não te ajudou?

Pedro – Não muito.

Prof. – Então, como pensaste nessa?

Pedro – Foi mais relacionando uma figura com a outra...

Prof. – Então nessa altura olhaste para a figura e não para a tabela?

Pedro – Só olhei para uma coisa na tabela. De figura para figura acrescentavam-se três cubos e isso ajudou-me muito.

Nesta resposta ficamos com a ideia que o aluno ainda sente alguma segurança no raciocínio recursivo apresentado, *acrescenta-se +3 cubos de figura para figura*. Contudo, em nenhuma das suas *generalizações* registadas na questão 5 o aluno recorre a estratégias recursivas. Destacamos precisamente esta questão, uma vez que solicitava ao aluno que demonstrasse como poderia saber o número de cubos de uma dada figura, sabendo somente a sua *posição*.

5. Descobre uma forma de saber o número de cubos necessários para construir um T sabendo apenas a posição da sequência.

$$(n^{\circ} \text{ fig. ant.} \times 3) + 4$$

$$(n^{\circ} \text{ fig.} \times 3) + 1 = 3 \times n + 1$$

$$(n^{\circ} \text{ fig.} \times 4) - n^{\circ} \text{ fig. ant.}$$

Figura 21 – Resolução da questão cinco na tarefa “T’s em cubos”

Na realidade, nas duas primeiras *expressões* surge o produto por três. No primeiro caso relacionando com o número da ordem da figura anterior e no segundo caso com o número da própria figura. É ainda interessante verificar que na sua segunda *expressão*, apresenta uma notação bastante próxima da simbologia algébrica tradicional. Possivelmente o facto do próprio professor utilizar o termo *n* muitas vezes quando se refere a *qualquer número*, tenha influenciado o aluno a adotar esta mesma notação. Na terceira *expressão*, verificamos que o aluno estabelece uma relação multiplicativa com o número de ordem da figura, mas subtraindo o número de ordem da figura anterior. Em qualquer dos casos o aluno claramente utiliza relações funcionais entre os termos das figuras e o total de cubos que compõe cada uma delas.

Tarefa 3 - Figuras de figuras

Na primeira questão desta tarefa (anexo III – 3), *Completa a tabela com base nos dados fornecidos*, o Pedro não revelou qualquer dificuldade. Possivelmente, o facto de a tabela (Figura 22) ter sido explorada e clarificada nos momentos iniciais da aula, terá contribuído para este maior sucesso do aluno. Vejamos então as suas estratégias nas questões seguintes.










				
	1	1/3	1/9	1/27
	3	1	1/3	1/9
	9	3	1	1/3
	27	9	3	1

Figura 22 – Tabela inicial da tarefa “Figuras de figuras” depois de preenchida em grupo turma

Na segunda questão, *Que regularidades encontras na tabela?*, o Pedro desenvolve novamente um trabalho bastante exaustivo, demonstrando uma grande capacidade para realizar conexões dentro da Matemática e estabelecendo relações funcionais que o pudessem ajudar a concluir o seu trabalho com sucesso. Na entrevista (anexo VI - 1), afirma que foi o preenchimento da tabela que o ajudou a estabelecer as relações entre as figuras:

Prof. – Achas que o preenchimento da tabela te ajudou a descobrir as regularidades que apresentas?

Pedro - Muito. Ajudou principalmente a perceber a relação que existia entre os triângulos unitários e o resto das figuras.

As regularidades que o Pedro descobriu e apresentou foram (anexo V – 1D):

- todas as figuras podem ser decompostas em triângulos unitários;
- a partir da figura dois, o número de triângulos unitários, pela qual a figura é composta, é múltiplo de três;
- a *forma* da figura será multiplicada por três para dar a próxima figura;
- as figuras pares são trapézios, as ímpares são triângulos.

Analisando mais detalhadamente as descobertas do aluno, percebemos que este compreendeu e utilizou a relação do triângulo unitário em todo o padrão. Uma tabela que o aluno apresenta no seu trabalho (Figura 23) vem demonstrar precisamente isso. Podemos observar que foi através do número de triângulos unitários que estabeleceu relações com o número da figura e com a consequente contagem. Contudo, há evidências do aluno também utilizar um raciocínio recursivo para estabelecer relações entre figuras quando aponta $\times 3$ da figura anterior para a seguinte.

n.º da figura	1	2	3	4	5
n.º de Δ unit.	1	3	9	27	81
Contagem			3 ²	3 ³	3 ⁴
Representação	3 ⁰	3 ¹	3 ²	3 ³	3 ⁴

Figura 23 – Tabela construída pelo Pedro na tarefa “Figura de figuras”

O aluno, quando questionado acerca da construção desta tabela, apesar de utilizar um discurso algo confuso, refere algumas ideias interessantes (anexo – VI – 1):

Prof. - ...no final da tarefa, no lado de trás, apresentas uma tabela. Nas tarefas anteriores tinhas usado logo uma tabela no início. Porque é que aqui só usaste no final?

Pedro - Em primeiro lugar já tínhamos uma tabela logo no início e depois porque era necessário para descobrir...para...representar a fórmula...ahhh, para descobrir qualquer figura e também para comprovar a ideia.

A noção que a construção da tabela inicial foi fundamental é aqui expressa pelo aluno, mas apresenta a ideia que precisou de mais alguma coisa para investigar a fundo e compreender a generalização do padrão. Pelo seu discurso podemos sentir a preocupação do aluno em representar as suas ideias de modo claro, quando diz *comprovar a ideia* e simultaneamente o facto de ter ajudado na descoberta da *fórmula*, da generalização.

Figura 24 - Resolução do Pedro na questão quatro, alínea a)

Na questão quatro da tarefa (ver anexo III – 3), podemos observar ao pormenor como o aluno tem o cuidado de utilizar estratégias que lhe permitam compreender melhor o que vai acontecendo. Nas restantes alíneas dessa mesma questão, o Pedro apresenta respostas coerentes com o raciocínio que desenvolveu ao longo da realização da tarefa. De referir que a alínea c solicitava precisamente uma “generalização” do comportamento do padrão, ao que o aluno respondeu utilizando uma representação simbólica muito próxima do formal.

Figura 25 – Resolução do Pedro às alíneas b) e c) da última questão da tarefa “Figura de figuras”

5.1.3. O pós-teste

Já a frequentar o 7º ano de escolaridade foi solicitado que resolvesse uma tarefa, o pós-teste (Anexo IV). A tarefa, com uma estrutura muito semelhante ao pré-teste e com os objetivos iguais, pretende verificar a evolução que os alunos-caso apresentam.

O Pedro iniciou o seu trabalho realizando uma análise mais detalhada do padrão apresentado, algo que sempre utilizou ao longo do trabalho que foi desenvolvido no 6º ano. A diferença reside na

ausência de uma tabela que habitualmente construía para o ajudar nessa análise. Nesta situação utilizou a figura e anotações junto desta para o ajudar a compreender o mesmo (Anexo V – 1E).

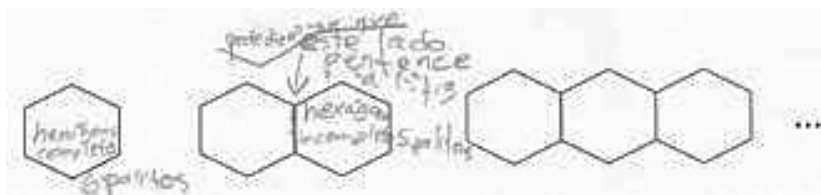


Figura 26 – Estratégia utilizada pelo Pedro para analisar o padrão

Como podemos observar, o Pedro identifica visualmente o padrão como composto por *hexágonos* e *hexágonos incompletos*. É importante salientar que tem consciência que depois do *termo um*, existe um dos lados da figura que é partilhado por dois hexágonos. O aluno assume que esse lado partilhado, na contagem, pertence ao primeiro hexágono e que todos os outros serão por isso mesmo incompletos.

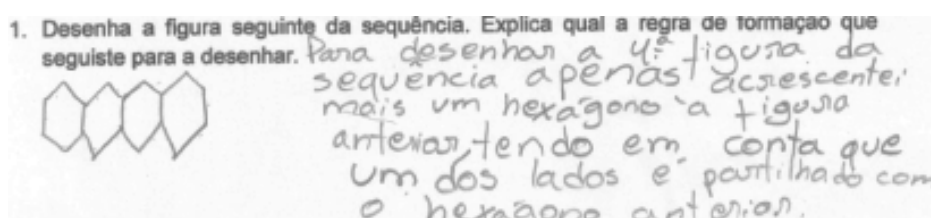


Figura 27 – Resolução da questão um do pós-teste

Tal como na tarefa inicial (pré-teste) o aluno desenhou o quarto termo de forma correta e na sua justificação apresenta a ideia que tinha explorado na análise do padrão. O conhecimento das características dos *hexágonos incompletos* e o modo como estes partilham um lado será fundamental para a realização e compreensão das questões seguintes.

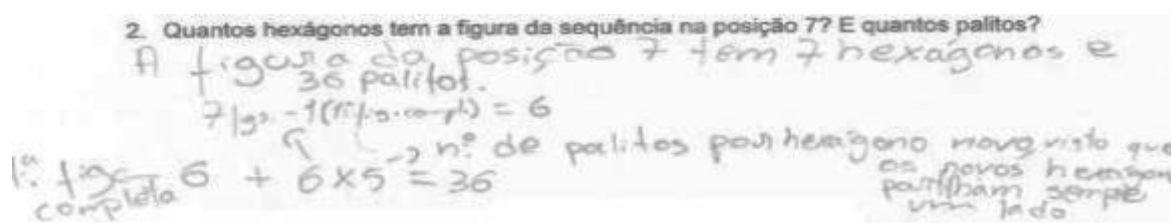


Figura 28 – O aluno recorre quer à linguagem natural, quer à linguagem simbólica

Nesta estratégia apresentada pelo Pedro, podemos observar que começa por descrever como será essa figura, apresentando de seguida uma expressão numérica que resolve indicando o número de palitos que a mesma terá. A decomposição de cada termo do padrão em elementos para si compreensíveis é fundamental e permite-lhe compreender e explicar o seu próprio pensamento. Nesta resposta e estratégia do aluno, já se consegue compreender que desenvolveu uma generalização de tal modo eficaz que lhe permitirá compreender e descobrir o número de palitos de qualquer termo solicitado, generalização global. A sua análise do padrão visual é de facto fundamental, permitindo-lhe alcançar este nível de sucesso.

Relativamente à questão 3, o Pedro recorre novamente à decomposição da figura em um *hexágono* e restantes figuras, *hexágonos incompletos*, e da noção de número primo, para provar que o 85 não pode ser o número de palitos de nenhum termo daquele padrão.

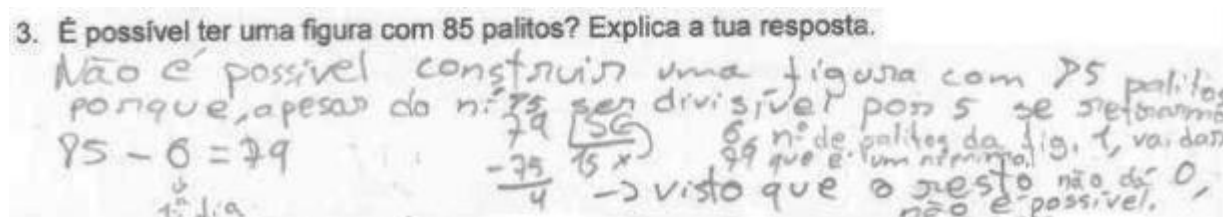


Figura 29 – Resolução do Pedro à questão três do pós-teste

Como o próprio afirma, do total de palitos apresentado retira os 6 do hexágono completo, sobrando desse modo 79, que identifica como primo, logo não divisível pelo número de palitos necessários, cinco, para construir cada um dos restantes *hexágonos incompletos*. É muito gratificante verificar a capacidade que o aluno apresenta no recurso a conhecimentos matemáticos variados para resolver e fundamentar as suas ideias e soluções. Mais uma vez podemos observar que o aluno apresenta um raciocínio bem estruturado e fundamentado no trabalho inicial de análise do padrão, uma vez que recorre continuamente às suas descobertas para resolver cada uma das questões que vão surgindo.

Finalmente na última questão da tarefa, que pretende perceber se o aluno consegue generalizar globalmente, o Pedro, contrariamente ao que vinha sendo hábito, recorre à linguagem corrente suportando-se num exemplo muito próximo, a figura 9, para o demonstrar.

Com base na sua explicação (Figura 30) e no que já observamos das suas estratégias anteriores, podemos certamente afirmar que o Pedro realiza uma generalização distante ou global utilizando para isso os conhecimentos obtidos com as descobertas realizadas na sua análise inicial da composição do padrão. Apesar de recorrer a um exemplo muito próximo, de ordem nove, ou nove hexágonos como o aluno indica, não recorre de forma alguma a uma figura anterior para descobrir o termo pretendido, estratégia relacionada com o raciocínio recursivo.

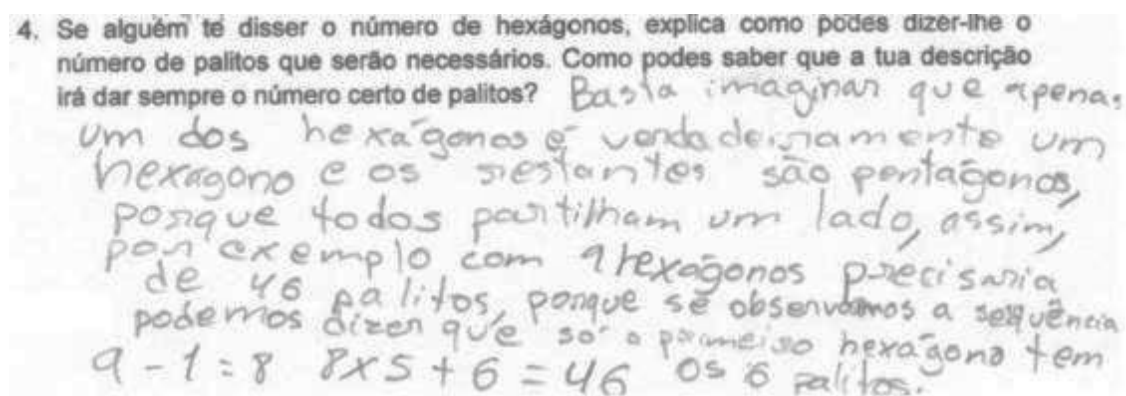


Figura 30 – Resolução da questão quatro do pós-teste

5.1.4. As estratégias utilizadas no trabalho envolvendo a exploração de padrões

Utilizando as ideias apresentadas por Ponte, Branco e Matos (2009) e Barbosa (2011), e fazendo uma síntese do exposto anteriormente, podemos afirmar que o Pedro, na tarefa pré-teste utilizou uma estratégia multiplicativa, estabelecendo como unidade os seis palitos do triângulo inicial e procurando depois os múltiplos de seis para as restantes figuras – *estratégia Termo Unidade* (TU). Além disso, tendo por base o contexto visual do padrão, o aluno compreende que em cada triângulo anterior ao último deve retirar dois palitos, tendo para isso de fazer o devido ajuste na resolução. Existe de facto uma comparação entre termos consecutivos, identificando as alterações que ocorrem entre eles. Foi também observado que o aluno realiza algumas generalizações, utilizando a linguagem natural para as exprimir – *estratégia aditiva* (A).

Relativamente às estratégias utilizadas na tarefa 1 da cadeia, o Pedro recorre inicialmente a estratégias multiplicativas, descobrindo uma regra com base na noção de múltiplos de 3. Nesta estratégia o aluno relaciona o termo com a sua ordem. A decomposição visual da figura terá estado possivelmente na origem da descoberta da regra geral, *estratégia da decomposição dos termos* (DT). Contudo, na segunda sequência da tarefa, o aluno compreendeu que o número de tampinhas não era múltiplo de 3, e que necessitava realizar um ajuste ao resultado, tendo por base a compreensão de outras regularidades, *a linha de baixo tem sempre mais uma tampa que o número da figura; o número de tampas da linha de cima é igual ao número da figura e de figura para figura acrescenta-se uma tampa na linha de baixo e outra na linha de cima*. Com base nesta diferença entre termos consecutivos, o aluno compreende a necessidade de multiplicar por dois e fazer o ajuste retirando uma unidade – *estratégia da diferença com ajuste* (D3). No entanto, além desta estratégia há evidências do aluno ter utilizado a *tentativa e erro* (TE), quando afirmou na entrevista (...) *depois tentei confirmar com figuras mais à frente, imaginando como é que elas seriam* (...) (Anexo VI – 1).

Na tarefa 2 da cadeia, o aluno inicia o trabalho realizando uma análise do padrão, tirando conclusões que irá utilizar como fundamento para a resposta às questões propostas. Percebe-se que o aluno decompõe cada figura do padrão em duas partes, a fixa, cubo do centro das figuras, e os seus lados (*que crescem de figura para figura*). Com base nesta decomposição o aluno também afirma que entre figuras há *mais três* cubos. Se por um lado a decomposição intencional e funcional das figuras para a sua melhor compreensão aproximam o aluno da Estratégia da decomposição de termos (DT) que lhe permite descobrir a regra, por outro lado a alusão ao *mais 3* (diferença de cubos entre figuras consecutivas) mostra-nos que o aluno também recorreu à comparação de termos consecutivos, *estratégia aditiva* (A), identificando as alterações que ocorrem de umas figuras par as outras. Possivelmente, através da descoberta da diferença entre as figuras, e realizando o ajuste do resultado (cubo fixo do centro das figuras) o aluno descobre o fator multiplicador, utilizando a *estratégia da diferença* (D3), apresentada por Barbosa (2011).

Relativamente à tarefa 3, o aluno decompõe cada uma das figuras em triângulos unitários e estabelece relações multiplicativas entre o número de triângulos com a posição da figura no padrão. Ao decompor cada uma das figuras em elementos unitários para realizar comparações e

estabelecer relações entre as várias figuras do padrão, alcançando uma regra, podemos considerar que utilizou a *Estratégia da decomposição dos termos* (DT), que se coaduna perfeitamente com a estratégia *Explícita* (E). No entanto, há evidências de que também possa ter utilizado estratégias recursivas quando realizou a sua própria tabela, ao perceber que podia multiplicar a figura anterior por três para obter o número de triângulos da figura seguinte.

Finalmente, na tarefa de pós-teste, o Pedro recorre novamente à *Estratégia da decomposição dos termos* (DT) do padrão, demonstrando que a regra geral que desenvolve é também ela derivada da análise do contexto visual do mesmo, estratégia *Explícita* (E). De referir que o aluno recorre em todas as questões da tarefa ao mesmo raciocínio, apesar de na questão final apresentar um exemplo concreto.

Finalizamos com um quadro síntese (quadro 7) das estratégias utilizadas pelo aluno nas diversas tarefas realizadas ao longo do estudo.

Estratégias utilizadas pelo Pedro		Ponte, Branco e Matos (2009)			
		RC	A	OI	DT
Barbosa (2011)	C				
	TU	TU1			
		TU2			
		TU3		Prt	
	D	D1			
		D2			
		D3		T2	T1,T2
	E				T1,T3 PoT
	TE				T1

Legenda:
 Prt – pré-teste
 T1 – Tarefa 1
 T2 – Tarefa 2
 T3 – Tarefa 3
 PoT – Pos-teste

Evidências do pensamento pré-algébrico
Evidência da transição do pensamento aritmético ao algébrico
Evidência do pensamento algébrico mais desenvolvido

Quadro 7 - Síntese das estratégias utilizadas pelo Pedro ao longo das diversas tarefas

5.1.5. Nível de pensamento algébrico

Com base na análise realizada ao trabalho do Pedro, e observando o quadro síntese das estratégias por ele desenvolvidas apresentado no capítulo anterior (Quadro 7), podemos concluir que existe uma clara evolução no nível de pensamento algébrico do aluno.

O Pedro, no trabalho realizado no 5º ano de escolaridade (pré-teste), evidenciava encontrar-se no nível de transição entre pensamento aritmético e algébrico, segundo Fiorentini et al. (1993). No entanto, ao longo da cadeia de tarefas, revelou que o seu pensamento se encontrava em evolução.

É precisamente na primeira tarefa da cadeia que o aluno começa a desenvolver estratégias que comprovam essa evolução. Apesar de podermos observar, na segunda tarefa da cadeia, que o aluno ainda recorre a estratégias *Aditivas* (A) (Ponte, Branco e Matos, 2009) e de ajuste pertencentes à *Diferença* (D) (Barbosa, 2011), nas questões e tarefas seguintes recorre a ideias e estratégias que apontam precisamente no sentido de ter alcançado um nível de pensamento

algébrico mais desenvolvido. Também na tarefa pós-teste e, apesar de ter desenvolvido uma regra muito específica, o aluno volta a apresentar evidências de um pensamento algébrico mais desenvolvido.

Podemos pois concluir que o desenvolvimento destas tarefas no âmbito da Álgebra escolar, com o recurso a padrões visuais de crescimento, levou o aluno a adotar estratégias bastante funcionais, permitindo-lhe resolver os desafios que foram sendo colocados. A evolução do seu nível de pensamento algébrico foi positiva, assim como o recurso intencional a diversos conhecimentos matemáticos, levando-o a estabelecer conexões dentro da disciplina, que se tornaram ferramentas eficazes de trabalho e de descoberta.

5.2. O caso da Cristina

Apresentação

A Cristina é uma aluna muito reservada, bastante tímida e algo introvertida. A escola e as suas tarefas são encaradas com bastante seriedade, sendo responsável e organizada. Na entrevista indica Ciências, Matemática e História como as suas disciplinas favoritas

No seu percurso escolar não teve qualquer retenção e em sala de aula é uma aluna que participa naturalmente quando solicitada. Na realização das tarefas demonstra uma postura ativa, dando início aos trabalhos com vontade e motivação. No entanto, revela alguma dificuldade em sair da *zona de conforto*, ou seja, arrisca pouco nas estratégias, limitando-se a mecanismos mais tradicionais. A Cristina nos seus tempos livres gosta de conversar com as amigas, ler e ouvir música.

5.2.1. O pré-teste

Pela resolução apresentada pela Cristina na primeira questão do pré-teste (Figura 31), podemos observar, pelo desenho realizado, que há uma consciência da *sobreposição* dos triângulos. Contudo, não é de todo perceptível se compreendeu a necessidade de retirar dois palitos em cada um dos triângulos anteriores ao último. Na explicação que produz, utilizando a linguagem corrente, limita-se a afirmar que acrescentou um triângulo.

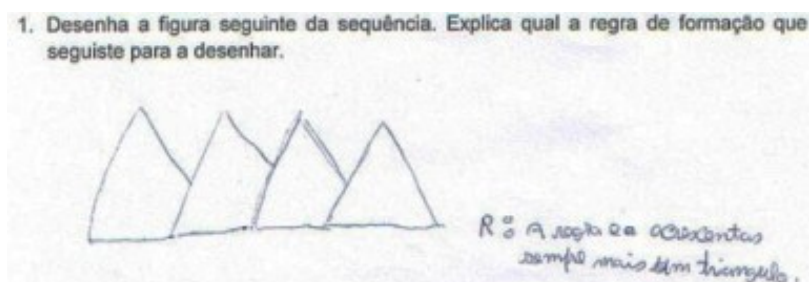


Figura 31 - Resolução da questão um do pré-teste

No entanto, e de forma surpreendente, a aluna na questão dois (Figura 32) apresenta uma tentativa de generalização bastante próxima do formal, apresentando a expressão $n \times 4 + 6$, que apesar de errada permite concluir que na questão um, a aluna compreendeu uma relação multiplicativa entre o número de palitos da figura e a sua posição no padrão. Compreendeu ainda que excetuando o último triângulo da figura que teria 6 palitos, todos os anteriores teriam somente 4, o que pode de algum modo permitir afirmar que já havia consciência deste facto quando na questão um desenhou os triângulos sobrepostos. É ainda visível que a aluna realizou algumas experiências (Figura 32) para alcançar esta generalização. Dentro dos parênteses podemos verificar que a aluna começou por multiplicar 6 triângulos por 4, tendo depois acrescentado 1. No entanto, apercebeu-se do erro e reformulou para $6 \times 4 + 6$.

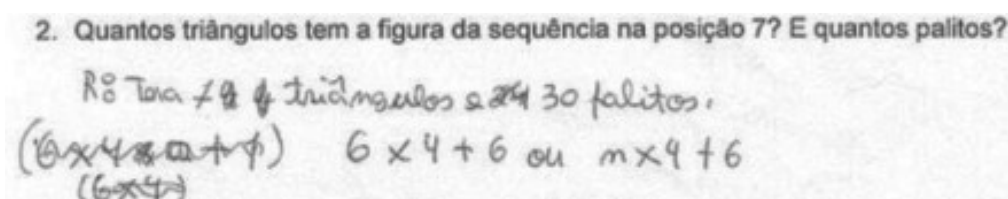


Figura 32 - Resolução bastante formal à questão dois do pré-teste

Após uma resposta que indicia um raciocínio multiplicativo bastante desenvolvido e formal, a aluna denota incapacidade para compreender a paridade dos números envolvidos no padrão (Figura 33). A compreensão que os múltiplos de quatro são sempre par e que a adição de dois números pares é sempre um número par, escapou à compreensão da Cristina, como podemos verificar pela sua resposta.

3. É possível ter uma figura com 85 palitos? Explica a tua resposta.

Sim. Porque é um número ímpar.

Figura 33 – Resolução da aluna na questão três do pré-teste

Contudo, há uma consciência da paridade do número 85. Não foram encontrados mais indícios neste trabalho para perceber como terá a aluna pensado nesta questão.

Finalmente na questão final do pré-teste (Figura 34) a aluna mantém o raciocínio apresentado na questão dois, mas sem conseguir novamente o nível de formalismo que tinha demonstrado na questão inicial. A dificuldade de se exprimir através da simbologia matemática mais formal pode estar na origem dos erros de linguagem cometidos.

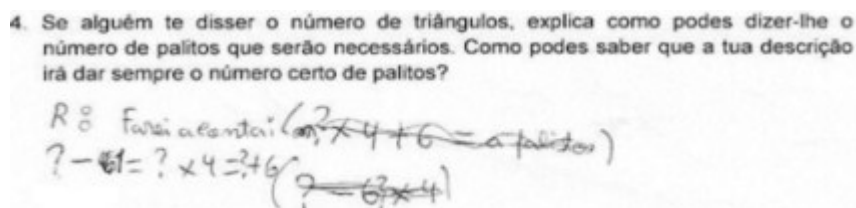


Figura 34 - Resolução da última questão do pré-teste

No entanto, é visível que a aluna compreendeu de facto que somente o último triângulo tem seis palitos. Como podemos observar pela sua expressão, apesar das igualdades serem incorretas, $? - 1 = ? \times 4 = ? + 6$, a aluna retira um triângulo para poder multiplicar os restantes por 4 e com o resultado obtido adiciona o número de palitos do último triângulo.

As evidências do uso de um raciocínio multiplicativo, permitiu enquadrar a aluna num nível de pensamento algébrico mais desenvolvido.

5.2.2. O trabalho envolvendo a exploração de padrões

A cadeia de tarefas

Tarefa 1 – As tampinhas do João

A primeira questão desta tarefa (Anexo III - 1) solicitava aos alunos que procurassem regularidades, em ambas os padrões (Figura 35), construindo uma tabela que os ajudasse nesse sentido.

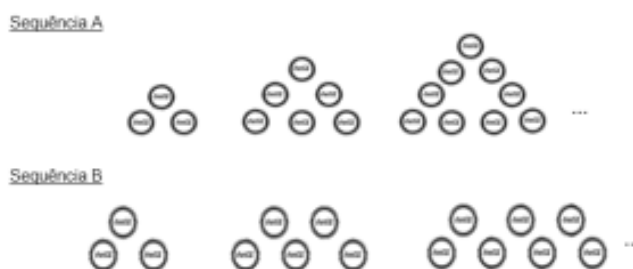


Figura 35 – Padrões apresentados na tarefa “As tampinhas do João”

A Cristina, para responder ao solicitado nesta questão inicial e em relação à sequência A apresenta um esquema onde explica a sua descoberta:

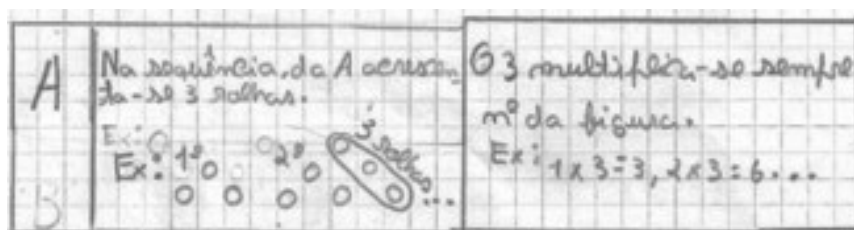


Figura 36 - Esquema apresentado pela aluna na questão um da tarefa

Há evidências que a aluna decompôs a figura de modo a perceber que, de figura para figura eram acrescentadas três tampinhas, utilizando possivelmente um raciocínio recursivo. Contudo, também apresenta uma outra estratégia que indicia a compreensão de uma relação multiplicativa, apresentando ainda uma justificação que recorre aos exemplos concretos.

O raciocínio multiplicativo utilizado é um indício que a aluna compreendeu o padrão em estudo, estabelecendo relações multiplicativas entre o número de tampinhas de cada figura e a posição das mesmas no padrão. Estas ideias acabam por ser clarificadas pela tabela construída pela aluna e que podemos observar na figura 37.

Múltiplos do 3										
Nº de figuras de João	1 ^o	2 ^o	3 ^o	4 ^o	5 ^o	6 ^o	7 ^o	8 ^o	9 ^o	10 ^o
Nº de rolhas de João	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
Nº de rolhas que se acrescenta	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3

Figura 37 - Tabela apresentada pela aluna em relação à sequência A da tarefa “As tampinhas do João”

De realçar o reforço da noção de *múltiplos do 3* que a aluna faz e o estabelecer de relações multiplicativas entre o número de ordem das figuras e as tampinhas, na linha superior da tabela.

Na entrevista (Anexo VI – 2) a Cristina refere os múltiplos de forma muito segura, denotando que nunca recorreu a qualquer estratégia aditiva para resolver esta parte da tarefa:

Prof. - Ok. Então vamos falar um pouco sobre esta tarefa, “As tampinhas do João”. Relativamente à primeira questão descobriste que na sequência A, estavam perante os múltiplos do três...

Cristina - Sim...

Prof. - Como é que chegaste a essa conclusão? Que estratégias usaste, que ideias tiveste...

Cristina – Primeiro vi que os resultados eram sempre múltiplos e depois fui vendo que o número da figura era multiplicando por 3, e fui sempre verificando que dava...

Já relativamente à sequência B (ver figura 35), apesar da aluna recorrer inicialmente a um esquema explicativo semelhante ao que tinha realizado anteriormente (Figura 38), não há claras evidências de que tenha estabelecido relações multiplicativas. No entanto, volta a recorrer à ideia do *acrescenta-se 2 rolhas*, o que pode indiciar um raciocínio recursivo.

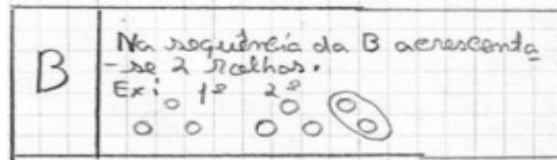


Figura 38 – Esquema de análise da sequência B na tarefa “As tampinhas do João”

Quando questionada na entrevista (Anexo VI – 2) acerca das descobertas realizadas nesta sequência acaba por manter a ideia do acrescentar dois:

Prof. - E relativamente à sequência B?...Descobriste que era todos números...

Cristina - Ímpares...

Prof. - Como é que tinhas a certeza? Que estratégia usaste para saber que seriam sempre números ímpares?

Cristina - la sempre de dois em dois...

Nº ímpares										
Nº de figuras de João	1 ^o	2 ^o	3 ^o	4 ^o	5 ^o	6 ^o	7 ^o	8 ^o	9 ^o	10 ^o
Nº de rolhas de João	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21
Nº de rolhas que se acrescenta	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Figura 39 - Tabela construída para a sequência B da tarefa “As tampinha do João”

Mantendo uma estratégia semelhante ao que tinha feito na sequência A, apresenta uma tabela (Figura 39), que também não indicia mais do que a sua descoberta da paridade do número das tampinhas de cada figura. Ao contrário da tabela anterior (Figura 37) onde acaba por estabelecer relações multiplicativas, representadas por esquemas na linha superior da tabela, neste caso limita-se a apresentar o total de tampas de cada figura e o número de rolhas que se acrescentaram em cada figura.

Relativamente à questão dois da tarefa (Anexo III – 1), relacionada com a sequência A, a aluna recorre à noção de múltiplo de 3 para chegar à conclusão que na oitava posição a figura teria 24 tampinhas, como podemos observar na figura seguinte.

$$3 \times 8^{\text{ª}} \text{ figura} = 24 \text{ rolhas}$$

$$R: \text{ São } 24 \text{ rolhas}$$

Figura 40 - Resposta à questão dois da tarefa “As tampinhas do João”

Também na entrevista podemos comprovar que a aluna continua a utilizar os múltiplos de três:

Prof - Ok. Na segunda questão, relativa à figura na posição oito, que conhecimentos usaste para resolver?

Cristina - Então, fui consultar uma tabela que tinha feito e vi que pelo raciocínio que tinha feito antes já estava lá a resposta...era só explicar como eu tinha raciocinado que era o número da figura, oitava figura, que era um múltiplo de 3, era o 24.

Apesar de haver indícios de ter compreendido a relação multiplicativa entre os números de ordem da figura e o número de tampinhas, a aluna afirma que recorre inicialmente à tabela previamente construída para chegar ao resultado e, somente depois, desenvolve a sua representação e justificação do modo como pensou.

Já na questão três, esta relacionada com a sequência B, a aluna recorre a uma estratégia bem diferente da que apresentou no início da tarefa (Figura 41).

$$6 \text{ dobro do numero da figura mais } 1$$

$$8 \times 2 = 16 \quad 16 + 1$$

ou

$$6 \text{ numero da figura vezes } 2 \text{ mais } 1$$

$$(8 \times 2) + 1 = 17$$

Figura 41 - Resolução da questão três da tarefa

De facto, nestas estratégias há evidências de um raciocínio multiplicativo, quando a aluna recorre à noção de dobro e quando, recorrendo à linguagem corrente apresenta uma regra geral *O número da figura vezes 2 mais 1*. Quando questionada sobre como pensou a aluna é muito vaga, ficando a ideia que utilizou a tabela para observar os valores das figuras e depois por tentativa e erro desenvolveu a generalização:

Prof. - Ok. E já agora em relação à sequência B, que é a terceira questão...dizes que a figura vai ter 17 tampinhas, como descobriste?

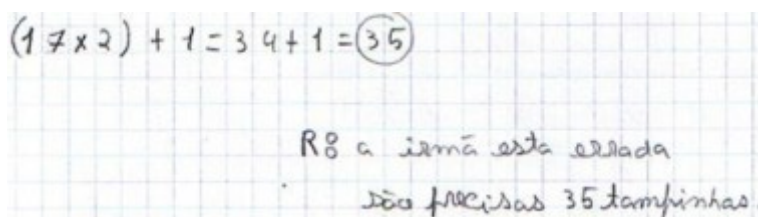
Cristina - Foi como na outra...Fui recorrer à tabela e depois expliquei o raciocínio.

Prof. - Pois, mas apresentas aqui uma justificação muito interessante. Como pensaste nela?

Cristina - Eu vi na tabela e depois tive de perceber como poderia justificar...então fiz umas contas e vi que dava assim...

É possível que a aluna tenha finalmente compreendido o padrão quando *fez umas contas*, depois de observar os valores na tabela, tendo depois desenvolvido a generalização nesse sentido.

Finalmente, e em relação à questão quatro, a aluna recorre novamente e de forma muito funcional, à regra encontrada na questão anterior.



$(17 \times 2) + 1 = 34 + 1 = 35$

R8 a irmã esta errada
são precisas 35 tampinhas.

Figura 42 - Resolução da questão quatro

Isto indicia que mesmo que só tenho realizado estas descobertas depois da construção da tabela na questão um, foram significativas o suficiente para voltar a confiar nas mesmas para fundamentar a sua resposta na questão final.

De um modo geral, podemos afirmar que a aluna recorreu sempre a estratégias multiplicativas nas questões relacionadas com a sequência A. Nas questões relacionadas com a sequência B, começou por recorrer a um raciocínio recursivo. Contudo, quando solicitada a realizar uma generalização, na questão 3, a aluna voltou a analisar a tabela que tinha construído e possivelmente compreendeu uma relação funcional entre os termos do padrão e o número de tampinhas, utilizando novamente a mesma descoberta na questão final.

Tarefa 2 – T's em cubos

Nesta segunda tarefa (Anexo III) a Cristina começa por responder à primeira questão recorrendo à linguagem corrente e apresenta um raciocínio recursivo para se fundamentar e justificar a resposta, *número de cubos da figura anterior + 3*.

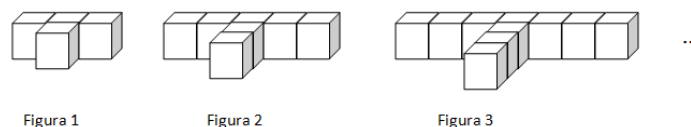
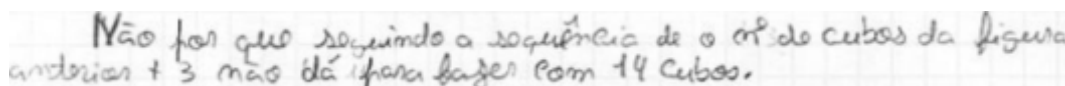


Figura 43 – Padrão visual da tarefa “T's em cubos”



Não foi que seguindo a sequência de o nº de cubos da figura anterior + 3 mas dá para fazer com 14 cubos.

Figura 44 - Resposta à questão um da tarefa “T's em cubos”

Contudo, na questão dois (Figura 45) o seu raciocínio é claramente multiplicativo e a sua representação é bastante formal, tornando curiosa a resposta na primeira questão.

2. A expressão numérica é $3 \times n^{\circ} \text{ da figura} + 1 = n^{\circ} \text{ de cubos}$.

Ex: $3 \times 1 + 1 = 4 \text{ cubos}$
 $3 \times 3 + 1 = 10 \text{ cubos}$
 $3 \times 4 + 1 = 13 \text{ cubos}$
 $3 \times 7 + 1 = 22 \text{ cubos}$

Figura 45 - Resposta à questão dois recorrendo ao raciocínio funcional

Quando questionada, revela que foi precisamente na questão dois, utilizando uma estratégia de tentativa e erro, que descobriu que $3 \times n^{\circ} \text{ da figura} + 1$, funcionava e era mais fácil.

Prof. - Na questão um escreveste, "Não, porque seguindo a sequência do número de cubos da figura anterior mais três, não dá para fazer 14 cubos." Como pensaste para chegar a esta conclusão?

Cristina - Eu, ahh...no número de cubos de cada figura fui acrescentando três, e depois vi logo que dava um número maior ou menor...já não me lembro muito bem, mas nunca dava catorze ao somar três.

Prof. - Então a tua estratégia foi ir adicionando até saberes?

Cristina - Sim.

Prof. - Na questão dois, apresentas uma expressão numérica, com a mesma "estrutura" em todas as figuras...

Cristina - Sim...

Prof. - Como é que descobriste que esta expressão funcionava? É que é diferente do "número de cubos da figura anterior mais três"...

Cristina - É assim, eu vi pelas duas últimas...que fui ver...estive a experimentar várias formas...algumas não davam...e cheguei à conclusão com esta, que tinha $3x$ o número da figura dava menos, então tinha de somar 1...com a outra dava mais trabalho, sempre mais 3...tinha de estar sempre a somar e esta aqui era mais fácil.

Recorde-se que também na tarefa anterior a aluna desenvolveu uma estratégia semelhante. Nessa altura com base numa tabela que ela própria construiu. A aluna depois desta segunda questão irá recorrer sempre a este raciocínio (Anexo V – 2C), utilizando uma linguagem e representação bastante formais. No entanto, é interessante destacar a facilidade como a aluna consegue, na questão quatro (Figura 46), utilizar a expressão geral, mostrando ainda que consegue usar a operação inversa. É evidente que a Cristina compreende claramente o significado de cada um dos elementos da expressão e como operá-los de forma eficaz para obter as respostas que pretende.

$3 \times 7 + 1 = 22 \text{ cubos}$ ou $(22 - 1) : 3 = 21 : 3 = 7$

Figura 46 – Resolução da aluna à questão quatro da tarefa "T's em cubos"

Finalmente na última questão, que pretende que o aluno desenvolva uma generalização, a aluna recorre novamente aos conhecimentos adquiridos ao longo da tarefa e à expressão geral, ilustrando dois exemplos:

5 3 x m² da figura + 1 = m² de cubas

Ex 8

$$3 \times 10 + 1 = 31$$

$$3 \times 25 + 1 = 76$$

Figura 47 - Resposta final da tarefa

Apesar da Cristina ter fundamentado a sua resposta à questão um, utilizando um raciocínio recursivo, nas restantes questões é evidente o recurso a raciocínios multiplicativos, utilizando-os de forma significativa e funcional. Podemos assim afirmar que existem evidências de um pensamento algébrico bastante desenvolvido.

Tarefa 3 - Figuras de figuras

Na primeira questão desta tarefa (anexo III – 3), *Completa a tabela com base nos dados fornecidos*, a Cristina não revelou grandes dificuldades, tendo participado ativamente na sua exploração e construção conjunta, no início da aula. Recorde-se que perante a dificuldade no preenchimento da tabela apresentado pela grande maioria dos alunos, o professor optou por explorar e construir oralmente a mesma (Figura 48), apoiando-se no contributo de todo grupo turma. Observemos então as estratégias utilizadas pela Cristina nas questões seguintes.

	1	1/3	1/9	1/27
	3	1	1/3	1/9
	9	3	1	1/3
	27	9	3	1

Figura 48 – Tabela inicial da tarefa “Figuras de figuras” depois de preenchida em grupo turma

Na questão número dois, *Que regularidades encontras na tabela?*, a aluna apresenta algumas ideias curiosas (Figura 49). Começa por explicar que *a figura anterior está sempre relacionada com a figura a seguir*. Depois, recorrendo a um esquema visual observa que em cada figura *há 3 da figura anterior (triplica-se)*. Esta estratégia, apesar de recorrer à multiplicação, apresenta um raciocínio recursivo, uma vez que a aluna recorre à figura anterior para descobrir, multiplicando por três, a figura seguinte. Ainda visualmente a aluna concluiu *A figura triplica-se formando um triângulo ou um trapézio*, compreendendo que cada uma das figuras é composta e formada pelo triplo da figura anterior, mas que sofre uma alteração geométrica formando uma nova figura, que varia entre triângulos e trapézios.

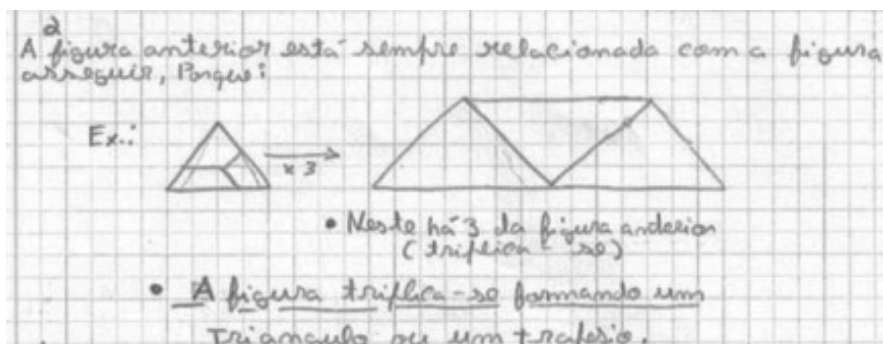


Figura 49 - Parte da resposta da aluna à questão dois da tarefa “Figuras de figuras”

Quando questionada na entrevista sobre estas descobertas a aluna diz:

Prof - Aqui apresentas uma ideia, escreves aqui algo, dizes assim: "A figura triplica-se, formando um triângulo ou um trapézio"...queres explicar um pouco melhor esta ideia?

Cristina - Então...tinha visto, desde a primeira figura que era um "triangulozinho", depois triplicavam-se os triângulos e formava o trapézio. Depois o trapézio triplicava-se, via-se que o próximo triângulo estava dividido em três, três trapézios e formava um triângulo...era sempre assim, em sequência. Triplicava-se triângulo, triplicava-se trapézio...sempre assim, triângulo, trapézio, triângulo, trapézio...

Das suas respostas podemos compreender que a aluna tem em conta a primeira figura, o *triangulozinho*, que irá ser multiplicado por três, formando a figura seguinte, que dependendo da anterior ou é um triângulo ou um trapézio. Apesar de ter percebido que a figura inicial era formada por um só triângulo, nesta sua estratégia recorre a um raciocínio recursivo, pois não há evidências de que estabeleça relações funcionais entre o número de triângulos de cada termo e a sua posição no padrão.

Contudo, a aluna apresenta ainda uma tabela (Figura 50). Esta representação da aluna, evidencia alguma compreensão sobre relação multiplicativa e consequentemente das potências, presentes no número de pequenos triângulos de cada figura da sequência. Contudo, ainda não podemos afirmar que há evidências de não recorrer ao raciocínio recursivo, uma vez que cada expressão pode ser obtida da figura anterior.






	Δ	Contagem	Representação
	1	1	3^0
	3	3	3^1
	9	3×3	3^2
	27	$3 \times 3 \times 3$	3^3

Figura 50 - Tabela construída pela aluna na questão dois da tarefa “Figuras de figuras”

Continuando a análise do trabalho desenvolvido pela Cristina, e relativamente à questão três (Anexo III – 3), a aluna realizou o seguinte esboço:

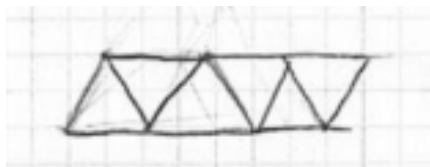


Figura 51 – Esboço da aluna para a questão três da tarefa

Uma vez que a figura contrariava o que tinha afirmado na questão inicial foi-lhe solicitado na entrevista que explicasse o motivo desta figura.

Prof. - Muito bem. Na questão 3, que pede que se desenhe a figura 5, apresentas um paralelogramo...a nível de triângulos unitários não está correto (?), e não segue o teu padrão. Queres comentar?

Cristina - Pois...eu depois tentei fazer outra figura diferente, para ver se dava e não ser sempre triângulo/trapézio.

A aluna é algo vaga, mas deixa a ideia de continuar a procurar verificar se a sua descoberta está de facto correta. Contudo comete erros.

Finalmente na questão 4, que se procurava perceber se os alunos conseguiam generalizar, verificase que a Cristina volta a apresentar uma expressão bastante formal e reveladora de um raciocínio funcional. Tal como tinha acontecido nas duas tarefas anteriores a aluna surpreende com evidências de um pensamento algébrico mais desenvolvido, quando até ao momento se limitou a utilizar estratégias típicas da transição entre o pensamento aritmético e o algébrico.

$$5 = 3^6$$

$$7 = 3^9$$

$$10 = 3^{m-1}$$

Figura 52 – Resposta da aluna na questão final da tarefa “Figuras de figuras”

A aluna na entrevista dá-nos algumas pistas sobre o assunto:

Prof. - Quando é que compreendeste que a regra geral era 3 elevado ao número da figura anterior menos um?

Cristina - Eu acho que foi na altura em que comecei a fazer a tabela...

Prof. - Quando começaste a preencher esta tabela?

Cristina - Sim.

Prof. - É que esta tabela é diferente desta (a realizada em grupo turma). É uma tabela que construístes e que recorreste para chegar aí...então quando a fizeste compreendeste?

Cristina - Sim... todas as figuras tinham triângulinhos iguais ao primeiro. Dava para fazer vezes três.

A aluna não está segura de si. No entanto, o uso de uma tabela por si construída leva a aluna a procurar aprofundar as suas ideias chegando possivelmente à generalização apresentada. De referir que a sua última afirmação *Dava para fazer vezes três*, continua a suscitar dúvidas, pois remete novamente para uma estratégia recursiva.

Esta terceira tarefa revela que a aluna continua a usar quer o raciocínio recursivo, quer o raciocínio multiplicativo e estratégias associadas. Contudo, neste caso específico, a sua dificuldade em explicar as respostas dadas, evidenciam que este padrão foi mais complexo que os anteriores.

É importante referir que na exploração final da tarefa em grupo turma, o professor optou por solicitar à Cristina para a apresentar esta sua tabela (Figura 50) e as ideias nela contidas, dada a sua clareza e simplicidade. De realçar que a representação em forma de potência para o valor 1, 3^0 , foi discutido e concluído em grupo turma, pois a aluna não tinha conseguido, deixando o espaço inicialmente em branco.

Ao longo dessa discussão final, o professor pode constatar que a grande maioria dos alunos, incluindo a Cristina, não tinham qualquer segurança na representação em forma de potência, preferindo sempre o raciocínio recursivo, ou seja, recorrer à figura anterior para multiplicar por três: 1×3 , 3×3 , 3×9 , ...

5.2.3. O pós-teste

A Cristina no pós-teste apresentou um desempenho bastante semelhante ao que nos vinha habituando nas tarefas realizadas ao longo do 6º ano (Anexo V – 2E).

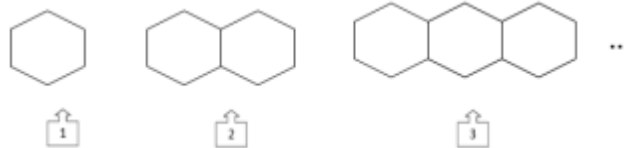


Figura 53 – Padrão do pós-teste

Na tarefa um, quando solicitada que desenhasse a próxima figura do padrão e explicasse como tinha procedido, a aluna desenha corretamente e explica que acrescentou cinco palitos e formou novo hexágono (Figura 54). Há evidências de que compreendeu como se formava cada uma das partes das figuras do padrão.

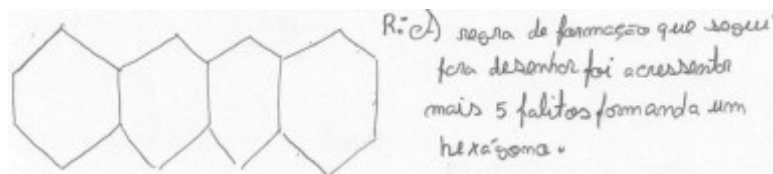


Figura 54 – Resposta à primeira questão do pós-teste

Contudo, na questão dois, para fundamentar a sua resposta recorre a estratégias claramente aditivas, adicionando 5 palitos a cada nova figura, um raciocínio recursivo (Figura 55).

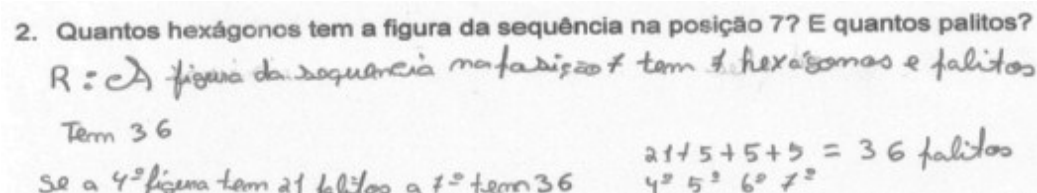


Figura 55 – Resposta à questão dois do pós-teste

A aluna recorre novamente a esta estratégia na questão três, como podemos observar na figura seguinte:

3. É possível ter uma figura com 85 palitos? Explica a tua resposta.

Não, porque $36 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 86$
 $7^{\circ} \quad 8^{\circ} \quad 9^{\circ} \quad 10^{\circ} \quad 11^{\circ} \quad 12^{\circ} \quad 13^{\circ} \quad 14^{\circ} \quad 15^{\circ} \quad 16^{\circ} \quad 17^{\circ} \quad 18^{\circ} \quad 19^{\circ}$

Figura 56 - Resposta da aula à questão três do pós-teste

A aluna continua a recorrer a figuras conhecidas para obter as que pretende, adicionando sempre cinco palitos em cada nova figura. A aluna continua a utilizar um raciocínio recursivo.

Contudo, na última questão (Figura 57), onde os alunos são solicitados a descrever uma possível generalização a aluna apresenta uma estratégia multiplicativa, desenvolvendo uma generalização global. Também é interessante verificar que a Cristina não apresenta um exemplo para fundamentar a sua descoberta, como era seu hábito nas tarefas realizadas no 6º ano.

4. Se alguém te disser o número de hexágonos, explica como podes dizer-lhe o número de palitos que serão necessários. Como podes saber que a tua descrição irá dar sempre o número certo de palitos?

R: Se alguém me disser o número de hexágonos faça
 n° de hexágonos $\times 6 = 6 n^{\circ}$ de palitos que os ligão entre si

Figura 57 - Resolução da questão final do pós-teste

Podemos ainda observar que a aluna compreendeu que existem palitos que são comuns a cada dois hexágonos e que devem ser retirados. Não se consegue perceber a ligação entre esta estratégia e a estratégia aditiva utilizada nas questões anteriores. De referir que a aluna também não nos elucida sobre o modo como descobre o número de palitos a retirar.

Tal como tínhamos observado ao longo da cadeia de tarefas, a aluna recorre a um raciocínio recursivo para resolver situações bastante próximas, utilizando somente estratégias funcionais quando lhe é solicitado que desenvolvesse uma generalização geral.

5.2.4. As estratégias utilizadas no trabalho envolvendo a exploração de padrões

A Cristina na tarefa pré-teste recorreu, segundo Ponte, Branco e Matos (2009), a uma *estratégia de decomposição dos termos* (DT), permitindo-lhe compreender a regra de construção das várias figuras do padrão e conseqüentemente descobrir uma generalização funcional que relacionasse as variáveis. Contudo, há evidências da aluna ter recorrido à *tentativa e erro* (TE) (Barbosa, 2011), na questão final.

Relativamente à tarefa *As tampinhas do João*, a aluna na sequência A, recorre inicialmente à noção de múltiplos mas acaba por descobrir o produto do número da figura por três, estabelecendo assim uma relação funcional entre o número de ordem das figuras e o número de tampinhas. Esta é

claramente uma *estratégia da decomposição de termos* (DT). Pode assim ser também enquadrada na *estratégia explícita* (E).

No entanto, na segunda sequência, a B, a aluna inicia o seu trabalho a recorrer a *estratégias aditivas* (A), usando um raciocínio recursivo, mas acaba por descobrir a generalização através da *tentativa e erro* (TE). Nas restantes questões da tarefa a aluna recorre aos conhecimentos adquiridos nas descobertas efetuadas nas questões iniciais, logo de acordo com os raciocínios e estratégias já descritas.

Sobre a segunda tarefa, *T's em cubos*, a Cristina volta a iniciar o trabalho, utilizando um raciocínio recursivo e uma *estratégia aditiva* (A). No entanto, na escrita de expressões matemáticas para cada figura, a aluna, tendo recorrido à estratégia de *tentativa e erro* (TE), alcança uma regra geral funcional. Após esta descoberta conclui a tarefa com sucesso recorrendo sempre à sua descoberta.

Na tarefa 3, *Figuras de figuras*, a Cristina demonstra mais dificuldades que nas anteriores, e inicia novamente o trabalho recorrendo a *estratégias aditivas* (A), raciocinando de forma recursiva. Contudo, a aluna decompõe cada figura em triângulos unitários, *Estratégia da decomposição dos termos* (DT) e possivelmente com base no conhecimento alcançado na construção e exploração de uma tabela por si criada, desenvolve um novo raciocínio, alcançando uma regra explícita (E) que lhe permite a generalização. Apesar dos resultados demonstrados a aluna mostrou-se sempre muito insegura nas suas descobertas.

Finalmente no pós-teste, a aluna volta a recorrer ao raciocínio recursivo nas tarefas de descoberta de valores das figuras locais, ou seja, termos próximos que permitem o uso eficaz da adição. Esta estratégia é claramente *aditiva* (A) e *recursiva* (D1). Contudo, na necessidade de generalização global da última questão, a Cristina volta a surpreender com uma estratégia de índole multiplicativa que indicia a decomposição dos termos (DT), permitindo-lhe descobrir uma regra funcional (E).

Estratégias utilizadas pela Cristina		Ponte, Branco e Matos (2009)			
		RC	A	OI	DT
Barbosa (2011)	C				
	TU	TU1			
		TU2			
		TU3			
	D	D1		T1, PoT	
		D2		T3	
		D3		T2	
	E				T1, T3, PoT
	TE		T1, T2		Prt

Legenda:

- Prt – pré-teste
- T1 – Tarefa 1
- T2 – Tarefa 2
- T3 – Tarefa 3
- PoT – Pos-teste

Evidências do pensamento pré-
algébrico

Evidência da transição do
pensamento aritmético ao algébrico

Evidência do pensamento algébrico
mais desenvolvido

Quadro 8 - Síntese das estratégias utilizadas pela Cristina ao longo das diversas tarefas

5.2.5. Nível de pensamento algébrico

Quando observamos o quadro síntese das estratégias utilizadas pela Cristina ao longo de todo o estudo, podemos afirmar que desde o 5º até ao 6º ano de escolaridade, o raciocínio da aluna evidenciava compreensão algébrica das tarefas. Contudo, e apesar de poder ser enquadrada no nível de pensamento algébrico mais desenvolvido, também podemos constatar que a aluna recorreu a estratégias aditivas e ao raciocínio recursivo, muito próprias do nível de transição do pensamento aritmético para o algébrico, ao longo de todo o estudo.

Se recordarmos o desempenho da aluna nas diversas tarefas, podemos verificar que a utilização de estratégias aditivas, relacionadas com o raciocínio recursivo, ocorreu que lhe era solicitado resolver questões próximas, generalização local. Contudo, há evidências que a aluna recorreu a estratégias multiplicativas, estabelecendo relações funcionais entre os termos e a sua posição no padrão, sempre que lhe foi solicitado o desenvolvimento de generalizações gerais. De referir e recordar, que na terceira tarefa da cadeia a aluna demonstrou muita insegurança na regra geral que descobriu. A forte componente multiplicativa desta tarefa, potências e relação de medida entre os termos do padrão, pode ter de algum modo ter condicionado o desempenho da aluna.

Já a frequentar o 7º ano de escolaridade, apesar de ter conseguido generalizar globalmente, recorrendo a estratégias funcionais, para as generalizações a aluna recorre novamente a estratégias e raciocínios recursivos.

Como conclusão podemos afirmar que, segundo Fiorentini et al. (1993) e Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2006), a aluna se encontra no terceiro nível de pensamento algébrico, pois há claras evidências de utilizar um pensamento algébrico mais desenvolvido, apesar de recorrer a estratégias do nível de transição, nas generalizações locais.

5.3. O caso da Teresa

Apresentação

A Teresa é uma aluna muito simpática, apesar de bastante tímida e introvertida. Encara a escola e as suas tarefas com bastante seriedade, sendo responsável e organizada. Na entrevista (Anexo VI – 3) refere que a sua disciplina favorita é Educação física.

Os seus pais possuem ambos o 9º ano de escolaridade pelo que, segundo a aluna, já não a conseguem ajudar muito nos trabalhos da escola. No seu percurso escolar não teve qualquer retenção. É uma aluna pouco participativa na oralidade, mas sempre que solicitada a fazê-lo adota uma postura responsável, participando positivamente.

Na realização das tarefas em sala de aula demonstra uma postura muitas vezes passiva, aguardando pelo apoio dos professores ou colegas para iniciar o trabalho.

Um pouco ao contrário do que é habitual na aluna, durante a realização deste estudo, manteve uma grande motivação, preocupada com a sua prestação, tentando envolver-se de modo ativo na execução das tarefas que foram sendo propostas. Quando questionada sobre o motivo, a aluna respondeu que gostava de aulas onde se fizessem investigações.

5.3.1. O pré-teste

Na primeira questão do pré-teste (Anexo V – 3A), a Teresa foi bastante superficial na sua resposta, demonstrando uma análise deficitária sobre as figuras que compõem o padrão e dificuldade em explicar as suas descobertas.



Figura 58 – Padrão do pré-teste

Assim, podemos verificar (Figura 59) que se limitou a desenhar as figuras que já eram apresentadas pelo enunciado, não respondendo ao solicitado. Contudo, na resposta que apresenta por escrito, explicando a regras de formação que utilizou, é possível concluir que a ideia base de como é formada cada nova figura é compreendida pela aluna, uma vez que indica que o número de triângulos é igual ao número da figura no padrão.

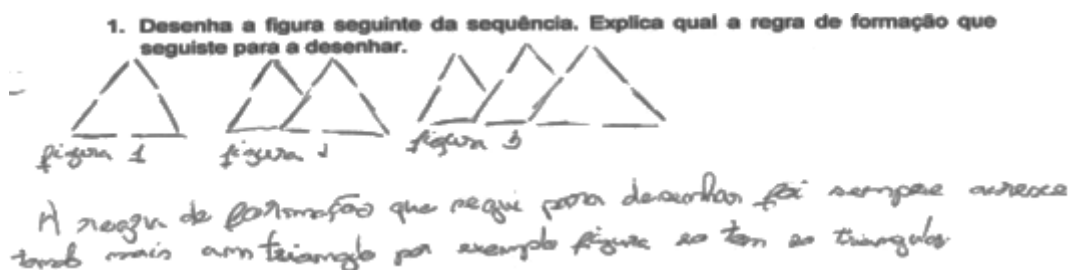


Figura 59 – “A regra de formação que segui para desenhar foi sempre acrescentar mais um triângulo por exemplo figura 20 tem 20 triângulos”

Relativamente à segunda questão (Figura 60), a Teresa apresenta uma resposta coerente com a ideia apresentada na questão inicial. Multiplica o número da figura pelo número de palitos de cada triângulo, tendo possivelmente como base para este raciocínio, o triângulo inicial que tem seis palitos. Contudo, a aluna não compreendeu que nem todos os triângulos de cada figura do padrão apresentam seis palitos. O trabalho inicial de análise do padrão revela-se de grande importância e neste caso foi possivelmente determinante para o insucesso da aluna na compreensão da regra de formação.

2. Quantos triângulos tem a figura da sequência na posição 7? E quantos palitos?
 A figura da sequência na posição 7 tem 7 triângulos.
 $7 \times 6 = 42$ - A posição 7 tem 42 palitos.

Figura 60 - Resposta da Teresa à questão dois do pré-teste

Apesar de não ter conseguido obter uma resposta correta, a aluna mantém a coerência na resolução da tarefa e na questão três (Figura 61), apresenta uma resposta de acordo com as suas ideias iniciais. Apesar de incorreto, recorre a um raciocínio multiplicativo, noção de múltiplo de 6, para resolver e fundamentar a sua resposta, tal como tinha realizado na questão anterior.

3. É possível ter uma figura com 85 palitos? Explica a tua resposta.
 Não porque 85 não é múltiplo de 6.

Figura 61 - Recurso à noção de múltiplo de um número.

Finalmente, na última questão da tarefa (Figura 62), a Teresa continua a utilizar o raciocínio desenvolvido no início do trabalho. Apesar do resultado errado, é interessante verificar a facilidade com que a aluna mantém uma coerência de raciocínio, baseado nas suas descobertas.

4. Se alguém te disser o número de triângulos, explica como podes dizer-lhe o número de palitos que serão necessários. Como podes saber que a tua descrição irá dar sempre o número certo de palitos?
 Eu acho que irá dar ^{sempre} ~~sempre~~ certo multiplicando o número de triângulos pelo número de palitos.

Figura 62 - Recurso novamente à multiplicação

Em toda a tarefa a aluna recorre a um raciocínio que relaciona o número de triângulos de cada figura com a sua posição no padrão. Este raciocínio multiplicativo e funcional enquadra-se nas estratégias utilizadas pelos alunos que se encontram em níveis de pensamento algébrico mais desenvolvido. Contudo, é importante não esquecer que a aluna não foi capaz de analisar com rigor as figuras do padrão, não compreendendo que após a primeira figura, somente um dos triângulos apresentava seis palitos. Esta estratégia, decomposição das figuras do padrão, é de facto importante para conseguir compreender melhor como se comporta o próprio padrão. A variação observada no número de palitos de figura para figura, leva a que as figuras deixam de ser proporcionais entre si, algo que a aluna não percebeu. Alheia a este detalhe, a Teresa utilizou a noção de múltiplos do seis para resolver os problemas propostos. Ponte, Branco e Matos (2009), referem precisamente que este é um dos erros comuns nos alunos.

Assim, tendo por base a análise realizada, considerou-se que existiam evidências que a aluna se encontrava num nível de pensamento entre o aritmético e o algébrico.

5.3.2. O trabalho envolvendo a exploração de padrões

A cadeia de tarefas

Tarefa 1 – As tampinhas do João

A primeira questão desta tarefa (anexo III - 1), *Que regularidades encontras na sequência A? E na B? Constrói uma tabela que te ajude a organizar os dados.*, solicitava aos alunos que procurassem regularidades em ambas as sequências ou padrões (Figura 63), construindo uma tabela que os ajudasse nesse sentido.

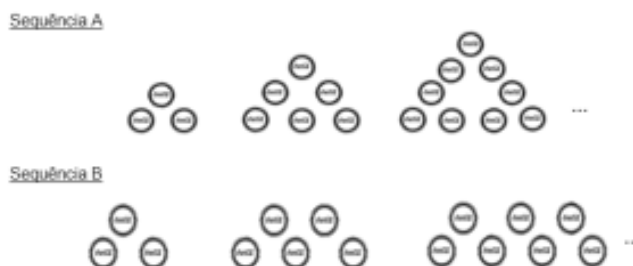


Figura 63 – Padrões apresentados na tarefa “As tampinhas do João”

A Teresa apresenta a seguinte tabela para a sequência A (Anexo V – 3B):

Sequência A	
1	3
2	6
3	9
...	...

Multiplos de 3
 Descobrimos que na 3ª figura é o 3º múltiplo da tabuada do 3 e o segundo o 2º da tabuada do 3 é sempre assim.

Figura 64 – “Descobrimos que na 3ª figura é o 3º múltiplo da tabuada do 3 e o segundo o 2º da tabuada do 3 é sempre assim”

A alusão aos *múltiplos de três* leva-nos a acreditar que a aluna utilizou uma estratégia multiplicativa, tendo como unidade o primeiro termo. Além disso, na sua explicação por escrito afirma *na 3ª figura é o 3º múltiplo da tabuada do 3, a segunda é o 2º múltiplo da tabuada do 3, é sempre assim*. Esta descrição da sua estratégia parece demonstrar que a aluna estabeleceu relações entre a posição das figuras e o número de tampas que compõe cada uma delas. A constatação deste pormenor durante a resolução da tarefa, levou o professor, durante a exploração em grupo, a solicitar que a aluna fosse ao quadro explicar à turma as suas ideias, numa tentativa de melhor tentar compreender como teria pensado. Até porque só tinha construído a tabela até à terceira posição.

Após a conclusão da construção da tabela no quadro, um aluno perguntou à Teresa como tinha descoberto o 3, o 6 e o 9, ao que esta lhe respondeu que tinha *contado* as tampas das figuras presentes no enunciado da tarefa. Na realidade, não se consegue com base nesta resposta perceber se a aluna compreendeu de facto a relação entre a posição da figura e o número de tampas da mesma ou se recorre a um raciocínio recursivo. Contudo, quando questionada se tinha descoberto mais alguma regularidade, a aluna acaba por dizer que tinha verificado que $3 = 3 \times 1$, o 6

= 3×2 , e o $9 = 3 \times 3$, apontando claramente da coluna das posições das figuras para a coluna dos resultados, acabando depois por completar a tabela, como podemos ver na figura 65

Sequência A	
1	$3 = 3 \times 1$
2	$6 = 3 \times 2$
3	$9 = 3 \times 3$

Múltiplos de 3

Figura 65 - Esquema da tabela construída pela aluna no quadro, depois de completada.

Com estas explicações finais da Teresa, podemos afirmar que há evidências de a aluna compreender a relação multiplicativa entre a posição da figura e o número de tampas da mesma.

Também na entrevista (Anexo VI - 3) a Teresa mantém a ideia de múltiplos de três, de acordo com o que tinha apresentado na sua resolução e discutido em sala de aula:

Prof. - ... em relação à tarefa *As tampinhas do João*, e relativamente à primeira questão, que podes recordar qual era, descobriste que na sequência A eram múltiplos de 3. Como é que chegaste a essa conclusão?

Teresa - Porque eu pensei na tabuada do 3, então, como ia sempre de 3 em 3 e estava sempre na tabuada do 3...

Prof. - Estavam sempre na tabuada do 3, certo? Mas porque te lembraste da tabuada do 3?

Teresa - Porque estive a contar as tampinhas e depois reparei que ia sempre de 3 em 3, acrescentava sempre mais 3 tampas. Então cheguei à conclusão que eram múltiplos de três.

É interessante verificar que a aluna apresenta a *contagem* e o *acrescentava sempre mais três*, como estratégias que a auxiliaram a perceber que estava perante os múltiplos de três. Apesar de concluir tratar-se de uma estrutura multiplicativa, a aluna recorreu à contagem da diferença de tampas entre as figuras para o conseguir compreender, um raciocínio recursivo.

Na segunda questão, que solicitava aos alunos que descobrissem o número de tampas da oitava figura e explicassem como tinham pensado, a Teresa apresenta o seguinte:

2-A 8ª figura terá com 24 tampas.
 $3 \times 8 = 24$
 Não pegamos 3×8 porque como repetimos na sequência A é a tabuada do 3.

Figura 66 - Resolução da Teresa na segunda questão da tarefa

Nesta resposta a aluna evidencia a compreensão e generalização das ideias apresentadas na questão inicial, uso dos múltiplos de três para descobrir a oitava figura do padrão.

Relativamente à sequência B, a Teresa apresentou dificuldades acrescidas, tendo somente compreendido e descoberto que o número de tampas de cada figura era ímpar.

	Sequência B	
1	3	} números ímpares
2	5	
3	7	
...	...	

Descobrimos vai dar sempre números ímpares.

Figura 67 - Tabela construída pela Teresa para a sequência B

A utilização de estratégias aditivas para a descoberta de relações numéricas que a aluna utilizou na sequência B, levou a aluna a afirmar o seguinte na entrevista (Anexo VI - 3):

Prof. - E relativamente à sequência B? Disseste que eram todos ímpares...como é que tinhas a certeza que eram todos ímpares?

Teresa - Porque fiz... vi que três era ímpar e depois o cinco ia ser também, e como acrescentava-se sempre mais duas tampas, e ia ser de 2 em 2, então eram sempre números ímpares.

Mais uma vez a aluna utiliza uma estratégia aditiva, recorrendo a um raciocínio recursivo, para encontrar uma regularidade, todos os números da sequência são ímpares. Há claras evidências que a aluna necessita conhecer o termo anterior para conseguir descobrir o seguinte, ou seja, utiliza um raciocínio recursivo.

Para resolver a questão 3, que solicita que descubram quantas tampinhas terá a figura na posição oito, a aluna volta a evidenciar o recurso a um raciocínio recursivo, quando afirma *acrescentamos sempre 2 tampas à figura anterior* (Fig. ...). Contudo não apresenta qualquer expressão de contagem.

3-A 8ª figura na sequência B vai ter 14 tampas porque acrescentamos sempre 2 tampas à figura anterior (para fazer número ímpar).

Figura 68 - Resolução da Teresa à questão três da tarefa

É importante salientar que a aluna evidencia conseguir verificar a razoabilidade do resultado obtido com base na sua descoberta, dado que termina a sua explicação com um aparte, *para fazer números ímpares*. Ainda sobre esta questão a aluna respondeu do seguinte modo na entrevista (Anexo VI - 3):

Prof. - ... E na terceira questão? Consegues explicar melhor como descobriste?

Teresa - Eu contei...estive a contar, com a Cheila, a Cheila ajudou-me, ela contava e eu marcava os números na folha...

Prof. - Sim. Mas contaram como? Começavam no primeiro, 3...

Teresa - Como eu já tinha chegado que aqui era sete, então nós acrescentávamos mais dois...então ela ia contando e eu ia apontando na folha.

Há de facto evidências do raciocínio recursivo, uma vez que a aluna, iniciando a sua estratégia na última figura conhecida, vai contando de dois em dois até alcançar a figura pretendida.

Podemos afirmar que existem indícios que a aluna não conseguiu estabelecer relações entre os termos do padrão e o número de tampas que os compunham. Apesar da descoberta da paridade dos números, a aluna não conseguiu aprofundar a sua análise e tentar de algum modo desenvolver

uma generalização. É possível que o uso de estratégias aditivas, com base no raciocínio recursivo utilizado, sejam o motivo para não conseguir estabelecer relações funcionais nesta sequência. Destaca-se ainda que na questão final, a aluna recorre novamente à paridade dos números para obter uma resposta correta (Figura 69).

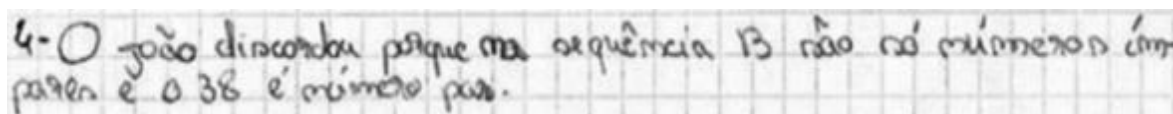


Figura 69 - Resolução da Teresa na questão quatro da tarefa

Tarefa 2 – T's em cubos

Após clarificar os objetivos da tarefa (Anexo III – 2) com o grupo turma, o professor começou a circular pela sala entre os alunos, e em especial junto dos alunos caso, para se ir inteirando dos seus desenvolvimentos. A Teresa partiu logo para a resolução das questões da tarefa, não realizando grande análise ao padrão (Figura 70), mas também sem conseguir avançar na tarefa.

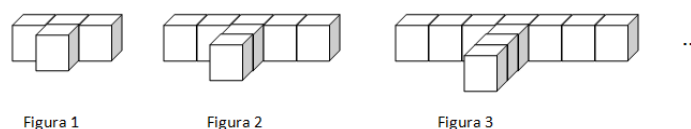


Figura 70 – Padrão visual da tarefa “T's em cubos”

Apenas conseguiu encontrar uma regularidade, *acrescenta-se sempre mais três cubos* (Figura 71). Com base nesta descoberta, a aluna na primeira questão da tarefa apresentou a sua resolução com o apoio de uma tabela que não nos mostra novas descobertas.

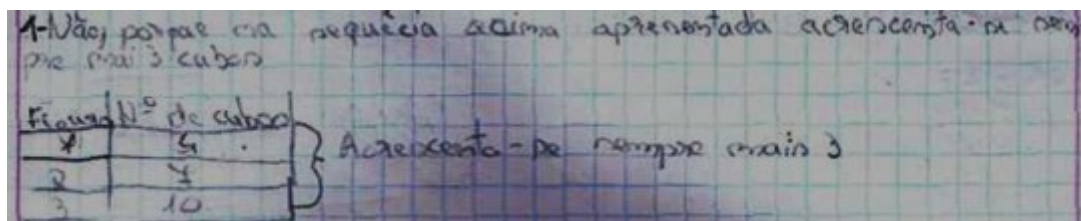


Figura Nº	nº de cubos
1	4
2	7
3	10

Acrescenta-se sempre mais 3

Figura 71 - Resolução da questão um da tarefa “T's em cubos”

Quando questionada na entrevista sobre esta resposta, afirmou o seguinte:

Prof. - Na questão um dizes “Não, porque na sequência acima apresentada acrescenta-se sempre mais três cubos”, certo? Como é que descobriste esta regularidade? Como é que pensaste?

Teresa - Então eu contei os cubos, aqui estavam 4...depois 4 + 3 são 7, então eu vi que acrescentava-se mais três...

Prof. - E bastou-te fazer esta experiência?

Teresa - Não, depois também vi se nesta também dava...

Prof. - Ok. Então foste fazendo sempre com adições?

Teresa - Sim.

Podemos concluir que a Teresa recorreu a um raciocínio recursivo para a busca e exploração das regularidades no padrão. Na continuidade do trabalho, na questão dois a aluna tinha de facto feito

as expressões $4+0=4$, $4+3=7$, $7+3=10$, para cada figura, mostrando novamente que recorre a estratégias associadas ao raciocínio recursivo semelhantes às que tinha afirmado na entrevista.

Ao longo da aula, quando o professor se apercebeu que a aluna se limitava a recorrer a adições abordou-a, perguntando-lhe se conseguiria saber quantos cubos teria a figura 12 (questão 3) sem fazer as adições para todas as figuras. A aluna, após um olhar de dúvida inicial, acabou por compreender que não iria conseguir. Foi-lhe então solicitado que olhasse para as figuras e tentasse descobrir outra forma de contar:

Teresa - "Então, como vai de 3 em 3, podemos fazer $3 \times 1 = 3$ e depois temos de acrescentar 1."

Prof. - Porquê?

Teresa - Para dar 4.

Prof. - "E será que funciona sempre?"

Teresa - "Vou ver."

Pouco depois acaba por afirmar que funciona e que é parecido à da aula passada.

Na questão três, a Teresa constrói uma tabela (Figura 72) onde apresenta expressões que relacionam o número da figura com o total de cubos. Com base na construção desta tabela a aluna responde corretamente à questão 4 (Figura 73), não apresentando outro tipo de estratégia de pensamento.

Nº da figura	Conta	Nº de cubos
1	$(3 \times 1) + 1 = 4$	4
2	$(3 \times 2) + 1 = 7$	7
3	$(3 \times 3) + 1 = 10$	10
4	$(3 \times 4) + 1 = 13$	13
5	$(3 \times 5) + 1 = 16$	16
6	$(3 \times 6) + 1 = 19$	19
7	$(3 \times 7) + 1 = 22$	22
8	$(3 \times 8) + 1 = 25$	25
9	$(3 \times 9) + 1 = 28$	28
10	$(3 \times 10) + 1 = 31$	31
11	$(3 \times 11) + 1 = 34$	34
12	$(3 \times 12) + 1 = 37$	37
...

Figura 72 - Tabela construída pela aluna na questão três da tarefa "T's em cubos"

Finalmente na questão cinco (Figura 73), a aluna apresenta uma regra que estabelece as relações multiplicativas entre os termos e o número de cubos de cada figura.

4 - A posição da figura é a função da tabela anterior para o desenhista.

5 - $N^{\circ} \text{ figura} \times 3 + 1$

Figura 73 - Resolução das questões quatro e cinco da tarefa "T's em cubos"

Contudo, quando questionada sobre estas estratégias a aluna revelou que tinha tido bastante dificuldade e só com a ajuda do professor as tinha ultrapassado (Anexo VI – 3).

A linguagem a que recorre nesta última questão da tarefa será possivelmente uma consequência das conclusões obtidas da aula anterior e da discussão que decorreu ao longo da aula. É positivo observar que a aluna utiliza contextos escolares prévios para compreender o trabalho que vai realizando, significando alguma possível evolução na compreensão algébrica das tarefas por parte da aluna.

Podemos então afirmar que nesta tarefa a Teresa recorreu a um raciocínio recursivo, o que possivelmente lhe dificultou a descoberta de uma generalização global. Contudo, quando solicitada a aprofundar as suas ideias e estratégias, conseguiu recorrer a estratégias que relacionavam a posição das figuras e o número de cubos de cada uma de forma funcional, recordando e estabelecendo comparações com as descobertas realizadas na tarefa anterior.

Tarefa 3 - Figuras de figuras

Recordando que a Teresa recorre com regularidade a estratégias de cariz aditivo, e tendo em conta que a tarefa *Figuras de figuras* (Anexo III – 3) envolve conhecimentos que se baseiam em contextos multiplicativos (frações e potências), foi perceptível no decorrer da aula, que exigiria um salto qualitativo muito grande por parte da aluna para conseguir concluir com sucesso a tarefa.

	1	1/3	1/9	1/27
	3	1	1/3	1/9
	9	3	1	1/3
	27	9	3	1

Figura 74 – Tabela inicial da tarefa “*Figuras de figuras*” depois de preenchida em grupo turma

Quando o professor circulou junto da Teresa verificou que esta ainda se encontrava com problemas em compreender a tabela, mesmo após a sua exploração e preenchimento, efetuados no início da aula (Figura 74). Assim, foi necessário colocar algumas questões:

Prof. – Esta figura “são” três da anterior? (Preenchimento da tabela na horizontal).

Teresa – Não...

Prof. – Então? É maior ou menor?

Teresa – Menor.

Prof. – Ok. Então que parte é?

Teresa – Metade?

Prof. – Pode ser metade? Olha bem para as figuras...

Teresa – Não... é um terço.

Prof. – Ok. Então e agora não consegues continuar a estabelecer relações entre as restantes figuras? O que fizeste na vertical não te ajuda?

A aluna apresentou bastantes dificuldades em compreender a relação de medida quando a unidade é maior que o objeto a ser medido.

Após o diálogo a aluna construiu uma tabela onde colocou as contagens dos triângulos unitários, apresentando ainda mais duas colunas, uma com expressões relacionadas com as potências e outra com a sua representação simbólica (Figura 75).

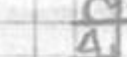
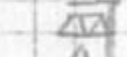


Figura	Contagens	Representação simbólica
	1	3^0
	3	3^1
	3×3	3^2
	$3 \times 3 \times 3$	3^3

Figura 75 - Tabela construída pela aluna na tarefa “Figuras de figuras”

Contudo, quando questionada na entrevista (Anexo VI – 3) de como tinha pensado, a aluna afirma que não é fruto do seu trabalho, mas antes das discussões que foram ocorrendo na aula.

Prof. - Preencheste aqui uma tabela, com contagens e com umas representações...como é que chegaste a estes resultados?

Teresa – Primeiro contei os triângulos pequenos e quando o professor me ajudou fiz as contas e desenhei as figuras...

Prof. – Mas tens aqui depois umas expressões, como pensaste?

Teresa - Isso foi depois, quando estava no quadro...eu não consegui fazer...

O recurso a estratégias aditivas e raciocínio recursivo terá sido, possivelmente, o que impediu a aluna de conseguir estabelecer relações funcionais entre a posição das figuras e o número de triângulos unitários. A sua resposta à questão dois (Figura 76) mostram precisamente a dificuldade em encontrar relações e regularidades na sequência em estudo, limitando-se a descobrir visualmente que as diagonais da tabela apresentavam sempre o mesmo número.

2. A regularidade que não encontramos foi que nas diagonais para o lado direito é sempre o mesmo número.

Figura 76 - Resposta da aluna à questão dois da tarefa “Figuras de figuras”

Quando analisamos as restantes respostas dadas pela aluna (Figura 77), conclui-se que não conseguiu estabelecer qualquer tipo de generalização local ou global nesta tarefa, cometendo inclusive erros de cálculo.

$$3 - 9 \times 9 = 81$$

$$4 - \text{Figura 6} - 2 \times 3 = 2 \times 3$$

$$\text{Figura 7} - 3 \times 3 = 3 \times 3$$

$$\text{Figura 8} - 2 \times 3 = 2 \times 3$$

Figura 77 – Resposta da aluna às questões três e quatro da tarefa “Figuras de figuras”

A conclusão da tarefa foi efetuada pela aluna, em simultâneo com a exploração em grupo no final da aula, como a mesma afirma em entrevista (Anexo VI – 3):

Prof. – Ok. E então queres falar um pouco sobre as tuas outras respostas?

Teresa – Professor...essas respostas foram feitas depois do professor dar algumas dicas...multipliquei sempre por três até dar...mas não percebi...só percebi quando foi explicado na turma toda...

Com base na análise efetuada podemos afirmar que a aluna não estabeleceu qualquer relação entre as figuras do padrão e a sua posição, não tendo por isso desenvolvido qualquer estratégia funcional, limitando-se a efetuar a contagem dos triângulos unitários das várias figuras.

5.3.3. O pós-teste

A Teresa, na primeira questão do pós-teste (Anexo V – 3E) é muito sucinta, havendo indícios de ter percebido que os *hexágonos* partilham um lado (palito) na sua construção, que terá consequências na contagem do total dos palitos.

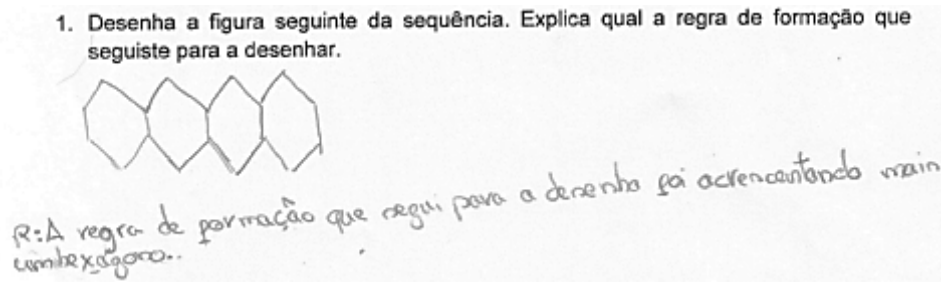


Figura 78 - Resolução da questão um do pós-teste

Na segunda questão da tarefa a aluna apresenta a sua resposta utilizando a linguagem natural, recorrendo ainda a uma expressão numérica para efetuar o cálculo. Apesar das igualdades não serem corretas, a aluna já parece demonstrar compreender que os lados comuns aos *hexágonos* (Figura 79) devem ser tidos em conta na contagem dos palitos.

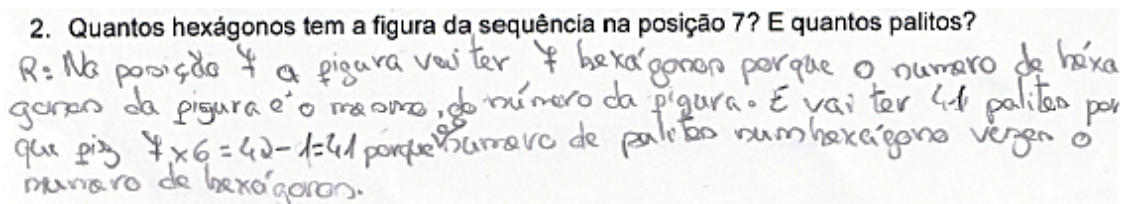


Figura 79 - Resolução da questão dois do pós-teste

Apesar da expressão numérica $7 \times 6 = 42 - 1 = 41$, apresentar o *menos um*, podendo ser um palito que a aluna pretenda retirar, por compreender que existe a necessidade de realizar algum acerto, na sua explicação por escrito não o refere. De qualquer modo, é evidente que a aluna não decompõe a figura de modo a compreender que, por exemplo, todas as figuras têm cinco palitos e somente a final tem seis, $6 \times 5 + 6$. Ou que, temos sempre figuras de cinco palitos e no final podemos adicionar o palito final para fechar a figura, $7 \times 5 + 1$.

Na questão seguinte, a Teresa mantém o seu raciocínio e responde do seguinte modo:

3. É possível ter uma figura com 85 palitos? Explica a tua resposta.
 Não, porque se eu fizer $14 \times 6 = 84$, e não dá 85.

Figura 80 - Resposta à questão três do pós-teste

A aluna aqui volta a compreender cada uma das figuras do padrão composta por *hexágonos* e utiliza a proporcionalidade nos múltiplos de seis para resolver o problema. No entanto, quando na questão quatro (Figura 81) é solicitado que descreva uma regra geral, surpreende-nos com uma outra estratégia.

Eu posso dizer-lhe o número de palitos fazendo o número de hexágonos vezes 6 que não o número de lados do hexágono e tira o número da figura anterior. Exemplo:

fig. 1 = $1 \times 6 = 6 - 0 = 6$
 fig. 2 = $2 \times 6 = 12 - 1 = 11$
 fig. 3 = $3 \times 6 = 18 - 2 = 16$

Figura 81 - Estratégia de resolução para a questão quatro do pós-teste

Há uma diferença significativa na abordagem desta questão, quando comparado com as estratégias utilizadas nas questões anteriores. Vejamos como pode ser reveladora de um raciocínio mais elaborado.

Nos três exemplos que apresenta, multiplica por 6 a ordem da figura e vai retirando um número diferente de palitos. Tudo parece indicar que na segunda figura retira um palito porque há um lado comum, na terceira figura retira dois, porque há dois lados comuns. Teria sido interessante perceber como teria a aluna feito o quarto termos e um termo de ordem n , uma vez que este raciocínio leva a uma generalização, $n \times 6 - (n-1)$. Contudo, devido a diversos fatores não houve oportunidade para tal.

Ainda assim, esta estratégia final que a aluna apresenta, leva-nos agora a questionar se na questão dois, quando indica a expressão $7 \times 6 = 42 - 1 = 41$, não seria já uma tentativa para explicar esta sua ideia final, tendo trocado um possível -6 , que seria o número da figura anterior, por -1 , o último hexágono, não se apercebendo que deste modo cometeria um erro na contagem.

Apesar dos erros cometidos na utilização inadequada do sinal de igual, a aluna parece assim evidenciar um pensamento algébrico bastante mais desenvolvido. Como já foi referido, teria sido interessante aprofundar esta ideia com a aluna através de uma entrevista.

5.3.4. As estratégias utilizadas no trabalho envolvendo a exploração de padrões

No pré-teste a Teresa considera um termo da sequência como unidade, o de ordem um, e vai utilizando múltiplos para responder às várias questões da tarefa. Podemos pois considerar que a

aluna utiliza a estratégia *termo unidade sem ajuste* (TU1), segundo as categorias apresentadas por Barbosa (2011). Contudo, quando utilizamos as categorias apresentadas por Ponte, Branco e Matos (2009), verificamos através dos erros cometidos pela aluna, também já identificados pelos autores, que podemos enquadrar na *estratégia do objeto inteiro* (OI). De facto, a inexistência de proporcionalidade entre os termos da sequência levaram a Teresa a uma generalização incorreta.

Relativamente às estratégias utilizadas pela Teresa na tarefa “As tampinhas do João”, verificou-se que na sequência A, a aluna recorreu inicialmente a uma *estratégia aditiva* (A), para compreender que estava perante os múltiplos de três, mas depois afirma que, *na 3ª figura é o 3º múltiplo da tabuada do 3, a segunda é o 2º múltiplo da tabuada do 3, é sempre assim*, mostrando ter compreendido que há uma correspondência entre a ordem da figura e o múltiplo da mesma ordem, *estratégia da decomposição dos termos* (DT). A sua explicação no quadro, com recurso a expressões algébricas, também ajudou ao investigador a reforçar esta sua análise (Figura 65).

Com base na sua descoberta, na questão dois, a aluna recorre a uma expressão numérica $3 \times 8 = 24$, explicando depois por escrito a ideia que tinha precisamente descoberto na questão anterior, *estratégia explícita* (E).

Já relativamente à sequência B, a aluna revelou bastantes dificuldades para compreender as regularidades presentes no padrão e utilizou o pensamento recursivo através de uma *estratégia aditiva* (A), ou segundo as categorias apresentadas por Barbosa (2011), *estratégia recursiva* (D1). Neste padrão a aluna não consegue alcançar nenhuma generalização global.

Continuando a analisar as estratégias utilizadas pela Teresa, agora na tarefa dois, verificou-se que volta a utilizar o raciocínio recursivo, contando o número de cubos de cada figura do padrão e percebendo que *acrescenta 3 cubos* de termo para termo, *estratégia aditiva* (A). Somente após apoio individualizado a aluna conseguiu explorar mais profundamente o padrão, fazendo várias experiências para confirmar a generalização, *tentativa e erro* (TE), tendo compreendido a relação multiplicativa entre termos e número de cubos envolvidos.

A tarefa três da cadeia foi com toda a certeza a mais problemática para a Teresa. As exigências de capacidades e raciocínios multiplicativos da tarefa foram certamente decisivos para que a aluna não tenha alcançado sucesso na sua resolução. Uma vez mais, a aluna recorreu a estratégias de contagem, impedindo-a de compreender as relações multiplicativas e de medida entre os termos do padrão. Nesta tarefa podemos mesmo afirmar que a aluna se limitou a realizar contagens (C) e a desenhar alguns termos da sequência (RC). Assim, voltamos a observar um *retroceder* no tipo de estratégias utilizadas.

Por último, no pós-teste, a Teresa utiliza numa primeira fase estratégias que indiciam a utilização do raciocínio multiplicativo, uma vez que contabiliza o número de palitos de um hexágono, considerado o termo unidade, utilizando depois múltiplos desse valor para obter o número de palitos das figuras dos termos seguintes (TU1). Contudo, tudo indica que, devido ao facto dos termos não serem proporcionais entre si, a aluna comete erros, como foi observado na questão três. Erros típicos nos alunos que utilizam a *Estratégia do objeto inteiro* (OI), segundo Ponte, Branco e Matos (2009).

Porém, na questão final da tarefa, apresenta estratégias que indiciam um outro tipo de trabalho, outro tipo de estratégia. Na análise percebemos que continua a utilizar os múltiplos de seis, tendo em conta o número de lados do hexágono (aspecto visual), para determinar qualquer outro termo do padrão, subtraindo de seguida o termo de ordem anterior. Para ilustrar a sua regra a aluna apresenta três exemplos locais, cometendo no entanto, erros de *linguagem* na utilização do sinal de igual. Há algumas evidências que já tenha tentado desenvolver esta estratégia na questão dois.

Na categorização apresentada por Ponte, Branco e Matos (2009), é possível que a aluna tenha utilizado a *estratégia da decomposição dos termos* (DT), ou segundo Barbosa (2011), *explícita* (E), uma vez que descobre uma regra geral funcional.

Estratégias utilizadas pela Teresa		Ponte, Branco e Matos (2009)			
		RC	A	OI	DT
Barbosa (2011)	C	T3			
	TU	TU1			
		TU2			Prt, PoT
		TU3			
	D	D1		T1	
		D2			
		D3			
	E		T1		PoT
	TE		T2	PoT	

Legenda:
 Prt – pré-teste
 T1 – Tarefa 1
 T2 – Tarefa 2
 T3 – Tarefa 3
 PoT – Pos-teste

Evidências do pensamento pré- algébrico
Evidência da transição do pensamento aritmético ao algébrico
Evidência do pensamento algébrico mais desenvolvido

Quadro 9 - Síntese das estratégias utilizadas pela Teresa ao longo das diversas tarefas

5.3.5. Nível de pensamento algébrico

Quando observamos o quadro síntese das estratégias utilizadas pela Teresa ao longo de todo o estudo, podemos afirmar que desde o 5º até ao 6º ano de escolaridade, o raciocínio da aluna evidenciava alguma compreensão algébrica das tarefas. Contudo, e apesar de poder ser enquadrada no nível que evidencia a transição do pensamento aritmético para o algébrico, também podemos constatar que a aluna recorreu com bastante frequência a estratégias aditivas e ao raciocínio recursivo.

O raciocínio multiplicativo é o raciocínio envolvido em situações de multiplicação, divisão, proporcionalidade e também em todo o trabalho com frações. Se recordarmos o desempenho da aluna na tarefa “Figura de figuras”, que envolvia potências e frações, conseguimos perceber que estaremos perante o caso de uma aluna que encara a multiplicação como a adição sucessiva de parcelas iguais, impedindo-a de melhor desenvolver estratégias funcionais no estudo dos padrões.

A frequentar o 7º ano de escolaridade a aluna continua a realizar decomposições pouco clarificadoras da construção das figuras do padrão. A aluna volta a recorrer à noção de múltiplo de um número, tendo por base o aspeto visual das figuras do padrão, nomeadamente o primeiro termo, mas comete erros com a utilização inadequada do sinal de igual. Ponte, Branco e Matos (2009), Cavalcanti e Santos (2009) e Bandarra (2011), associam este tipo de erro a alunos no nível de transição entre o aritmético e o algébrico.

Contudo, no final da tarefa apresentou uma estratégia diferente, que culmina numa generalização global, mostrando evidências de um raciocínio funcional, que lhe trouxe algum sucesso nos resultados obtidos.

Como conclusão, podemos afirmar que a aluna ainda se encontra no segundo nível de pensamento algébrico, segundo Fiorentini et al. (1993) e Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2006), uma vez que apresenta evidências de transição do pensamento aritmético ao algébrico, quer por utilizar as estratégias tipificadas, quer por cometer os erros também relacionados com este nível. No entanto, e tendo em conta as estratégias utilizadas no pós-teste, há evidências que a aluna se encontra em evolução, aproximando-se do nível de pensamento algébrico mais desenvolvido.

Capítulo VI

Conclusões e recomendações

Este capítulo começa por apresentar uma análise comparativa do trabalho realizado pelos três alunos-caso participantes no estudo. Seguem-se as principais conclusões, provenientes da análise sobre os dados recolhidos, procurando sempre ir ao encontro do objetivo do estudo e das questões de investigação delineadas no início. Finalmente, é realizada uma breve reflexão, que incidirá sobre o modo como se desenvolveu, assim como algumas recomendações para futuras investigações.

Análise comparativa dos casos

Depois de analisar o trabalho desenvolvido pelo Pedro, Cristina e Teresa ao longo das diferentes tarefas, pré-teste no 5º ano, cadeia de tarefas no 6º e pós-teste no 7º, é possível afirmar que demonstraram sempre interesse e empenho na sua resolução. Contudo, o tipo de estratégias e o nível de raciocínio que utilizaram não foi sempre o mesmo. Estas diferenças trouxeram também variações na segurança com que enfrentaram as novas tarefas propostas.

A relação encontrada entre o tipo de raciocínio utilizado, recursivo ou funcional, com a descoberta de uma generalização, fosse esta local ou global, esteve em destaque. Há evidências que o tipo de raciocínio utilizado pelos alunos influencia as escolhas das estratégias e das opções de pensamento exploratório para a abordagem dos problemas propostos.

O Pedro, apesar de ter utilizado no pré-teste estratégias relacionadas com a transição entre o pensamento aritmético e o algébrico, conseguiu estabelecer uma generalização geral, ainda que tenha cometido alguns erros possivelmente ligados às contagens. Para descrever o seu pensamento e as suas estratégias o aluno optou pelo uso da linguagem corrente. Por outro lado, Cristina, apresentou logo estratégias relacionadas com o raciocínio multiplicativo, estabelecendo relações funcionais entre as variáveis. Já para a ilustração das suas ideias, utilizou uma representação algébrica mais formal, tendo em algumas questões cometido erros de *linguagem*, possivelmente devido ao facto de não atribuir ao sinal de igual o sentido de equivalência, tal como descrito nos trabalhos apresentados por Cavalcanti e Santos (2009), e Kieran (1992), citado por Ponte, Branco e Matos (2009). Por outro lado, a Teresa, apesar de ter utilizado estratégias que indiciam a transição entre o pensamento aritmético e o algébrico, cometeu erros relacionados com contagem, indiciando uma compreensão dos múltiplos de um número como adições sucessivas. Recorde-se também que no pré-teste, a aluna, evidenciou não ter realizado uma análise aprofundada das figuras do padrão em estudo, não compreendendo que não existia proporcionalidade entre os seus termos.

Tal como o Pedro, a Teresa recorreu com regularidade à linguagem corrente para explicar o seu raciocínio, mas sempre que se sentiu confiante nas descobertas realizadas, optou pela simbologia matemática mais formal para as ilustrar. De referir que tal como a Cristina, cometeu alguns erros associados ao uso do sinal de igual, sem compreender a sua noção de equivalência (Cavalcanti e Santos, 2009; Kieran, 1992, citado por Ponte, Branco e Matos, 2009).

No que às tarefas da cadeia diz respeito, o Pedro demonstrou uma clara evolução nas estratégias utilizadas e no tipo de pensamento algébrico desenvolvido. Apesar de nas duas primeiras tarefas, antes de alcançar a generalização global, ter recorrido a raciocínios do nível de transição, na tarefa final e no pós teste, o uso exclusivo de raciocínios multiplicativos funcionais e estratégias relacionadas evidenciaram uma evolução para o nível de pensamento algébrico mais desenvolvido. De referir ainda que em todas as tarefas utilizou tabelas, que o ajudaram a descobrir e estabelecer relações funcionais entre variáveis dependentes e independentes, demonstrando um estudo aprofundado das figuras de cada padrão, procurando sempre encontrar regularidades que lhe facilitaram o trabalho na generalização.

A Cristina, neste conjunto de tarefas, continuou a desenvolver estratégias ligadas a um pensamento algébrico mais desenvolvido e manteve o uso de uma linguagem matemática mais formal. Contudo, em todas as tarefas, evidenciou recorrer ao raciocínio recursivo, principalmente nos padrões em que os termos não eram proporcionais entre si. Também ficou patente, que apesar do uso deste tipo de raciocínio no início das tarefas, a aluna terminou as mesmas evidenciando o uso de raciocínios funcionais, apesar de cometer alguns erros. A aluna, ao contrário do Pedro que optou quase sempre por decompor as figuras, estudando as suas alterações, utilizou estratégias de tentativa e erro para procurar generalizar. Já a Teresa, recorreu bastante a estratégias relacionadas com o raciocínio recursivo. Em muitas situações, a aluna só conseguiu compreender e desenvolver uma regra geral após diálogo e debate quer com o professor, quer depois com o grupo turma. Apesar de revelar um nível de pensamento ainda na transição entre o aritmético e o algébrico, a Teresa tentou utilizar, quase sempre, representações mais formais para explicar os seus raciocínios. De destacar, que a tarefa “Figuras de figuras” se revelou bastante complexa para a aluna, que não alcançou os objetivos mínimos pretendidos para a mesma sem ajuda do professor ou colegas. Possivelmente, o facto de se apoiar maioritariamente em estratégias aditivas e no raciocínio recursivo, impediram-na de compreender um padrão com características multiplicativas muito particulares.

No pós-teste o Pedro recorreu novamente a estratégias bastante elaboradas e indiciadoras de um pensamento algébrico mais desenvolvido. Contudo, revela uma diferença em relação às estratégias apresentadas na cadeia, não utilizando qualquer tabela para efetuar o estudo do padrão. Desta vez, recorreu a anotações nas próprias figuras, evidenciando ter realizado a sua decomposição e análise, o que lhe permitiu compreender como eram construídas. Relativamente à representação, o aluno volta a recorrer à linguagem corrente, socorrendo-se sempre de exemplos concretos para auxiliar a sua explicação.

A Cristina, que ao longo da cadeia de tarefas tinha utilizado estratégias relacionadas com o raciocínio multiplicativo com frequência, volta a utilizar nas primeiras questões do pós-teste estratégias recursivas, adicionando o número de palitos de figura para figura, nas primeiras questões. Contudo, termina o trabalho utilizando uma estratégia funcional, alcançando uma generalização global do padrão.

Tal como o Pedro, recorre à linguagem corrente para explicar os seus procedimentos e raciocínios e socorre-se de expressões numéricas para complementar e reforçar as suas descobertas.

A Teresa por seu lado, nas questões iniciais do pós-teste utiliza estratégias recursivas, havendo algumas evidências de procurar relações entre o número de hexágonos de cada figura e o número de posição do termo do padrão. Nas questões seguintes, voltam a existir evidências do uso de estratégias multiplicativas, quando tenta relacionar o número de palitos de cada figura com a sua posição no padrão, recorrendo aos múltiplos de seis. Ainda assim, possivelmente por se encontrar num nível de pensamento ainda de transição, entre aritmético e algébrico, comete alguns erros relacionados com a composição das figuras. No entanto, termina a tarefa recorrendo a estratégias que indiciam um nível de compreensão bastante desenvolvido, contrariando um pouco a hipótese de não ter realizado uma análise adequada ao modo como as figuras do padrão são *construídas*, mostrando evidências de ter alcançado uma generalização global.

Para expressar as suas ideias e conclusões, utiliza a linguagem corrente e socorre-se com alguma frequência a expressões matemáticas mais formais, apesar de cometer erros relacionados com a incompreensão do sinal de igual como equivalência (Cavalcanti e Santos, 2009; Kieran, 1992, citado por Ponte, Branco e Matos, 2009).

Podemos então concluir que o Pedro, apesar de ter iniciado o estudo no nível de transição, que ao longo das primeiras tarefas o levou a recorrer pontualmente a estratégias aditivas, demonstrou uma evolução positiva no nível de pensamento algébrico, tendo-se refletido na sua escolha cada vez mais objetiva no tipo de estratégias funcionais para a resolução das situações propostas. O aluno evidencia assim ter alcançado o nível de pensamento algébrico mais desenvolvido.

Já a Cristina manteve ao longo do estudo um nível de pensamento algébrico mais desenvolvido, tendo demonstrado algumas inseguranças pontuais, que a levaram a recorrer ao raciocínio recursivo sempre que sentiu necessidade. No caso da Teresa, as evidências ao longo do estudo situam-na num nível de transição do pensamento aritmético ao algébrico. No entanto, no pós-teste foi possível observar que a aluna revela uma compreensão da tarefa ao nível do pensamento algébrico mais desenvolvido, mas neste estudo já não foi possível analisar a consistência dessa possível evolução.

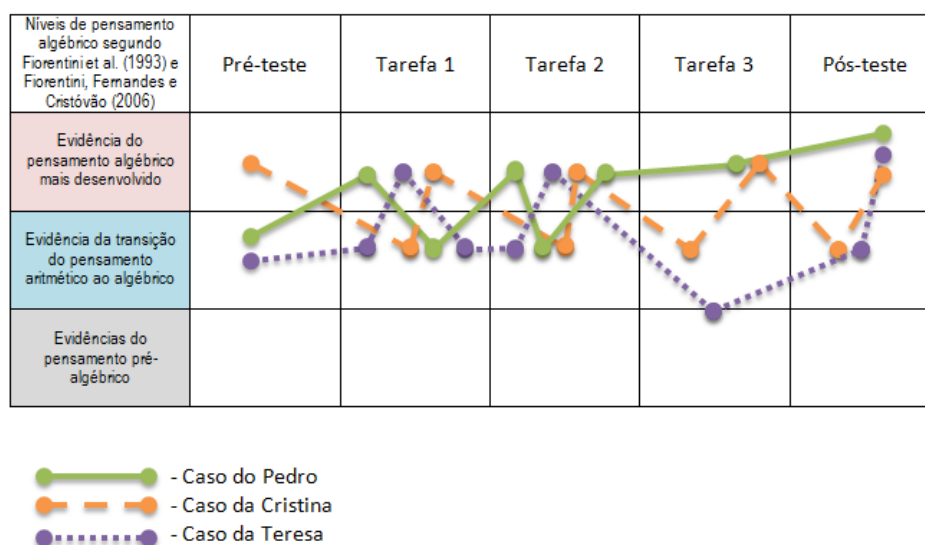


Figura 82 - Esquema síntese da evolução do nível de pensamento algébrico dos alunos de acordo com o tipo de estratégias utilizadas ao longo das tarefas

Conclusões

O facto de um aluno, num estudo exploratório de padrões, iniciar sempre o trabalho através de estratégias recursivas revela que, além de não sentir confiança nas estratégias multiplicativas, o seu raciocínio possivelmente ainda se encontra ao nível da aritmética. Este tipo de raciocínio, eficaz em muitas outras situações, torna-se um entrave no desenvolvimento do pensamento algébrico do aluno, uma vez que interfere com a capacidade de compreender e efetuar generalizações funcionais e globais na exploração de padrões.

A passagem de um raciocínio aritmético para um raciocínio multiplicativo e funcional, ao longo do primeiro ciclo do Ensino Básico, estendendo-se ao início do segundo ciclo, encontra-se ligado à forma como os alunos observam os números e os relacionam entre si, e ainda como decompõem um número em partes funcionais. Se um aluno observa o *dobro de dois* como a *soma de dois com dois*, possivelmente terá dificuldade em perceber que na sequência 3, 5, 7, 9, encontrará o *dobro dos números naturais acrescentando sempre um*. Por outro lado, se já tiver compreendido que 2 é o *dobro de 1*, 4 o *dobro de 2*, 6 o *dobro de 3*, mais facilmente poderá compreender a generalização global para este padrão.

Contudo, não devemos esquecer que os padrões utilizados para este estudo são padrões visuais, e que a decomposição dos termos neste tipo de tarefas facilita o estabelecer de relações entre as variáveis, potenciando a descoberta da generalização global. Vale e Pimentel (2005), num estudo sobre a exploração de padrões, chegaram à conclusão que a maioria dos alunos que utilizam unicamente abordagens numéricas demonstram dificuldades na resolução das tarefas propostas, não conseguindo alcançar uma generalização global ou obtendo uma generalização errada.

Neste trabalho, o Pedro foi, dos três casos, o que melhor se dispôs a *desconstruir* os termos e a criar tabelas facilitadoras da busca de regularidades nos padrões em estudo. As tabelas, criadas pelo aluno, aludiam de facto ao modo como ele próprio percecionava visualmente o padrão em estudo e como o relacionava com os valores envolvidos. Assim, apoiado pela exploração visual, conseguiu decompor os valores envolvidos, recorrendo depois a estratégias multiplicativas que lhe permitiram relacionar os termos do padrão e o número de elementos que constituía cada uma das figuras.

Por outro lado, nem a Cristina nem a Teresa evidenciam de forma tão objetiva e segura a exploração visual das figuras dos padrões em estudo. De facto, estas alunas privilegiaram o recurso a estratégias numéricas em detrimento de outro tipo de abordagem, tendo cometido erros nas contagens e nas generalizações encontradas. Nos padrões que não apresentavam proporcionalidade entre termos, por exemplo, utilizaram estratégias relacionadas com o raciocínio recursivo, ou seja, recorriam à figura anterior para obter a seguinte. Estas abordagens são típicas dos alunos que se encontram nos primeiros níveis de pensamento algébrico (Ponte, Branco e Matos, 2009; Barbosa, 2011).

As diferenças na escolha de estratégias, permite-nos estabelecer uma relação muito estreita entre o nível de pensamento algébrico e o tipo de compreensão dos padrões em estudo, que em última instância parece ditar a escolha das estratégias para a sua exploração.

Relativamente à forma como representaram as suas descobertas, quer a Cristina, quer a Teresa, apresentaram alguns problemas de *linguagem*, cometendo erros na utilização do sinal de igual, considerando-o como *operador* (Falkner, Levi & Carpenter, 1999, citados por Bandarra, 2011; Cavalcanti e Santos, 2009). Autores como Ponte, Branco e Matos (2009), assim como Cavalcanti e Santos (2009), referem que grande parte do trabalho tipicamente efetuado nos primeiros anos de escolaridade, leva os alunos a compreender o sinal unicamente do ponto de vista de *efetuar uma operação*. O objetivo do sinal torna-se exclusivamente aritmético. Kieran (1992), citada por Ponte, Branco e Matos (2009), apresenta duas formas de encarar o sinal de igual, *processual* e *estrutural*. O *processual* encontra-se ligado ao pensamento aritmético e o *estrutural* ligado ao pensamento algébrico. Se por um lado o modo processual está relacionado e marcado pelo cálculo, no caso do estrutural, como o nome indica é marcado pela atenção às estruturas e relações onde se baseiam.

Sabemos que as duas alunas que apresentaram estes erros também evidenciaram utilizar com alguma frequência raciocínios recursivos, baseados em estratégias aditivas ou de contagem, não compreendendo a estrutura multiplicativa dos padrões em estudo. Já no caso do Pedro, este erro nunca ocorreu. Tal como nos foi possível constatar, o aluno evoluiu do nível de pensamento algébrico de transição para o último nível de pensamento algébrico proposto por Fiorentini et al (1993) e Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2006).

Trabalhos realizados por Falkner, Levi e Carpenter, (1999), citados por Ponte, Branco e Matos (2009), assim como Bandarra (2011), indicam que é necessário propor situações aos alunos que desenvolvam a noção de equivalência das expressões em ambos os lados do sinal de igual.

Assim, respondendo à primeira questão do estudo, *Qual a compreensão algébrica revelada pelos alunos na resolução de tarefas envolvendo a exploração de padrões?*, é possível afirmar que os três alunos evidenciaram compreensão algébrica das tarefas propostas, embora em diferentes níveis de pensamento algébrico. Além disso, foram encontradas diferenças no tipo de estratégias utilizadas pelos alunos, no modo como registaram e representaram as suas descobertas e conseqüentemente nas generalizações alcançadas, principalmente nos padrões não proporcionais.

Relativamente à questão dois, *Que estratégias utilizam na busca de generalizações?*, tudo parece indicar que existe uma relação entre os dois tipos de raciocínio, o recursivo e o funcional e o tipo de estratégias desenvolvidas para o estudo exploratório de padrões.

O Pedro recorreu quase sempre ao raciocínio funcional, com uma clara opção pelas estratégias multiplicativas, conseguindo por isso estabelecer relações entre as variáveis dos padrões e alcançando as generalizações globais. Já vimos que, em todas as tarefas da cadeia, optou por construir tabelas exploratórias e em alguns casos por descrever de forma minuciosa o comportamento dos padrões, não só do ponto de vista numérico, como também visual.

Já a Cristina, apesar de ter utilizado regularmente estratégias multiplicativas, só desenvolveu tabelas quando era solicitado pela própria tarefa e poucas vezes evidenciou uma decomposição intencional dos termos do padrão. Foi ainda constatado que a aluna, nos padrões onde não existia proporcionalidade entre os termos, optou inicialmente por estratégias recursivas e somente mais tarde, através de estratégias de tentativa e erro conseguiu desenvolver generalizações globais.

A Teresa, que como pudemos constatar ainda recorre muito ao raciocínio recursivo, optou por utilizar com bastante frequência as estratégias aditivas e de contagem. Da mesma forma, que a Cristina, a aluna criou tabelas somente quando solicitado, limitando-se a utilizá-las para organizar os dados, recorrendo quase sempre aos valores já conhecidos para descobrir os seguintes. Não evidenciou estratégias de decomposição e análise dos termos dos padrões.

Finalmente, respondendo à questão 3. *Em que nível de generalização se encontram?*, podemos afirmar que, segundo os níveis do pensamento algébrico apresentados por Fiorentini et al. (1993) e Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2006), tanto o Pedro como a Cristina se encontram no nível de pensamento algébrico mais desenvolvido. O Pedro, quando se iniciou este estudo encontrava-se no nível de transição, mas ao longo de todo este trabalho revelou ter evoluído positivamente. Quer as suas estratégias quer o raciocínio evidenciado apontam no sentido de se encontrar no último nível de pensamento algébrico.

Já a Cristina, que no pré-teste evidenciou encontrar-se no nível de pensamento algébrico mais desenvolvido, foi revelando ao longo do trabalho alguns aspetos deficitários. Recorreu como já vimos a algumas estratégias típicas do nível de transição e cometeu erros comuns a esse mesmo nível. No entanto, em todas as tarefas conseguiu realizar uma generalização global, pelo que se pode considerar que se encontra no nível de pensamento algébrico mais desenvolvido.

Relativamente à Teresa, iniciou o trabalho evidenciando encontrar-se no nível de transição. Contudo, ao longo de todo o trabalho, somente em situações pontuais apresentou estratégias funcionais típicas do último nível de pensamento algébrico. Apesar de ter realizado um trabalho interessante no pós-teste, ainda comete erros típicos do nível de pensamento de transição. Assim, apesar de haver evidências de estar a evoluir, a aluna ainda se encontra no nível de transição entre o pensamento aritmético e o algébrico.

Mais uma vez, podemos afirmar e concluir que existe uma relação muito próxima entre o tipo de raciocínio apresentado pelos alunos e as estratégias por si escolhidas para realizar as tarefas propostas e desenvolver generalizações. O Pedro que se encontra num nível de pensamento algébrico bastante desenvolvido, foi o que melhor realizou uma decomposição visual dos termos dos padrões em estudo, e através das tabelas por si criadas, usando estratégias funcionais, conseguiu realizar generalizações globais. A Cristina, que apesar de se encontrar num nível de pensamento algébrico superior, não evidenciou fazer uma exploração visual tão minuciosa como o Pedro, optou por recorrer em alguns casos a estratégias recursivas. Finalmente, a Teresa, que se encontra ainda num nível de transição entre o pensamento aritmético e o algébrico, optou quase sempre por estratégias aditivas e relacionadas com o raciocínio recursivo.

Reflexão final e recomendações

No final deste estudo, é chegado o momento de realizar uma reflexão crítica sobre o trabalho desenvolvido, procurando tomar consciência do seu impacto a nível pessoal e a nível profissional.

A escolha das tarefas, assim como as opções tomadas estiveram sempre ligadas à ideia de caracterizar e interpretar da melhor forma possível o trabalho dos alunos na exploração de padrões visuais de crescimento, tentando assim compreender como desenvolvem o pensamento algébrico.

Dadas as características e complexidade das questões do estudo, considera-se que a metodologia de investigação adotada foi adequada, dado que permitiu descrever com detalhe o trabalho que os alunos desenvolveram ao longo das tarefas propostas. Ainda assim, devido às suas características, torna-se claro que as conclusões obtidas neste estudo não podem ser generalizadas a todos os alunos. Seria importante que se desenvolvessem novos estudos, com alunos de níveis de ensino distintos.

O papel do professor, que também assumiu o de investigador, ficou certamente enriquecido devido às constantes reflexões que o desenrolar do trabalho propiciou. A análise das estratégias dos alunos, assim como as suas explicações em sala de aula e nas entrevistas individuais, foram preponderantes para uma melhor compreensão de como os alunos se desenvolvem ao nível do pensamento algébrico.

O presente estudo vem mostrar que as tarefas apresentadas nesta proposta curricular podem influenciar o desenvolvimento do nível de pensamento algébrico dos alunos. Além disso, mostram uma faceta da Matemática mais apelativa e simultaneamente mais verdadeira, uma vez que estabelece conexões naturais entre vários conteúdos abordados ao longo da escolaridade.

Em relação ao trabalho dos alunos destaca-se a forma entusiástica com aceitaram e se envolveram com as tarefas propostas, mostrando o lado real da sua curiosidade e desejo de chegar mais longe na Matemática. Seria interessante prolongar o estudo ao longo do 3º ciclo, envolvendo estes alunos em tarefas cada vez mais complexas, de modo a estabelecer relações com o trabalho aqui descrito. Ainda assim, os resultados encontrados sugerem que é necessário continuar a apostar em tarefas de cariz exploratório, na investigação de padrões visuais, levando os professores a adotar metodologias que auxiliem os estudantes na desconstrução e reconstrução dos padrões e dos seus termos, potenciando assim o estabelecer de relações funcionais entre as variáveis. É importante referir que este trabalho deve iniciar-se no primeiro ciclo e acompanhar o aluno em todo o trabalho de exploração de padrões ao longo do 2º ciclo. Também o desenvolvimento da compreensão do significado de equivalência do sinal de igual deve ser trabalhado objetivamente e amplamente discutido pelos alunos desde o início da sua escolaridade.

Em síntese, considera-se que esta investigação contribuiu firmemente para o desenvolvimento humano do investigador, que atualmente observa o ensino da Matemática de uma forma mais global e humana, tentando diariamente melhorar a sua prática letiva.

Referências Bibliográficas

- Abrantes, P., Serrazina, L. & Oliveira, I. (1999). *A Matemática na Educação Básica*. Lisboa: Ministério da Educação.
- Afonso, N. (2005). *Investigação naturalista em educação, um guia prático e crítico*. Porto: Edições ASA.
- Alvarenga, D. (2006). *A exploração de padrões como parte da experiência matemática de alunos do 2º ciclo*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.
- Bandarra, L. (2011). O sinal de igual: Um estudo vertical. In: M. H. Martinho, R. A. Ferreira, I. Vale & J.P. Ponte (Eds.), *Ensino e Aprendizagem da Álgebra – Actas do Encontro de Investigação em Educação Matemática* (pp. 305-322). Póvoa do Varzim
- Barbosa, A. (2010). *A resolução de problemas que envolvem a generalização de padrões em contextos visuais: um estudo longitudinal com alunos do 2.º ciclo do ensino básico*. Tese de Doutoramento em Estudos da Criança: Universidade do Minho.
- Barbosa, A. (2011). Generalização de padrões em contextos visuais: um estudo no 6º ano de escolaridade. In: M. H. Martinho, R. A. Ferreira, I. Vale & J.P. Ponte (Eds.), *Ensino e Aprendizagem da Álgebra – Actas do Encontro de Investigação em Educação Matemática* (pp. 327-345). Póvoa do Varzim
- Bell, J. (2004). *Como realizar um projecto de investigação*. 3ª edição, Lisboa: Gradiva.
- Blanton, M. & Kaput, J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36 (5), 412-446
- Bogdan, R. & Biklen, S. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação*. Porto: Porto Editora.
- Borrvalho, A., Cabrita, I., Palhares, P. & Vale, I. (2007). Os Padrões no Ensino e Aprendizagem da Álgebra. In: I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos, & P. Canavarro (Orgs), *Números e Álgebra* (pp. 193-211). Lisboa: SEM-SPCE.
- Branco, N., Matos, A. & Ponte, J. P. (2005). Como vai o pensamento algébrico dos alunos, *Educação e Matemática*, número 85, 54-59
- Brocardo, J., Paiva, A. L. & Pires, M. (2005). Dos números para a Álgebra. Por onde vão os alunos?, *Educação e Matemática*, 85, 52-53
- Canavarro, A. P. (2009). O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos. *Quadrante 16* (2), 81-118.
- Carmo, H., & Ferreira, M. M. (1998). *Metodologia da Investigação, Guia para Auto-aprendizagem*. Lisboa: Universidade Aberta.
- Coll, C. (2004). Construtivismo e educação: a concepção construtivista do ensino e da aprendizagem. In: C. Coll, A. Marchesi, & J. Palacios (Ed), *Desenvolvimento Psicológico e Educação: Psicologia da Educação Escolar*, 2. 2ª Edição (pp. 107-127). Porto Alegre: Artmed.

- Costa, M.J. (2005). A álgebra nos seus primórdios, *Educação e Matemática*, 85, 23-29
- Coutinho, C. P., & Chaves, J. H. (2002). O estudo de caso na investigação em tecnologia educativa em Portugal, *Revista Portuguesa de Educação*, nº 15, número 001, 221-243
- Davis, P., & Hersh, R. (1995). *A experiência matemática*. Lisboa: Gradiva.
- Devlin, K. (2002). *Matemática: A ciência dos padrões*. Porto: Porto Editora.
- Duarte, J. M. (2005). A álgebra e o estudo PISA, *Educação e Matemática*, 85, 43-45
- Fiorentini, D., Miorim, M. A. & Miguel, A. (1993). Contribuições para um repensar...a Educação algébrica elementar, *Pro-posições*, número 1, pp. 78-91
- Fiorentini, D., Fernandes, F.L.P. & Cristóvão, E.M. (2006). Um estudo das potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico. In: D. Fiorentini, & E. M. Cristóvão (orgs.). *História e Investigação de/em aulas de Matemática*. Campinas: Editora Alinea
- Fosnot, C. T., & Dolk, M. (2002). *Young mathematicians at work: Constructing fractions, decimals, and percents*. Portsmouth, NH: Heinemann.
- Gil, A. C. (1999). *Métodos e Técnicas de Pesquisa Social*. 5ª edição, São Paulo: Editora Atlas
- Goldin, G. A. (2003). Representation in school mathematics: A unifying research perspective. In: J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics*, (pp. 275-285). Reston, VA: NCTM.
- Howden, H. (1990). Prior Experiences. In: Edward, E. (Ed.), *Algebra for Everyone* (pp.7-23). Reston: NCTM
- Jorgensen, D. L. (1989). Participant observation: a methodology for human studies. Newbury Park, CA: Sage
- Kaput, J. J. (1987). Towards a theory of symbol use in mathematics. In: C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in teaching and learning mathematics* (pp. 159-196). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- Kaput, J. J. (1999). Teaching and learning a new algebra with understanding. In: E. Fennema & T. Romberg (Orgs.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133-155). Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In: J.J. Kaput, D. W. Carraher & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). New York, NY: Routledge.
- Kieran, C. (2007a). Developing algebraic reasoning: The role of sequenced tasks and teacher questions from the primary to the early secondary school levels. *Quadrante, Volume XVI, nº 1*, 5-25
- Kieran, C. (2007b). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels: Building meaning for symbols and their manipulation. In: F. K. Lester (Ed.), *Second handbook*

- of research on mathematics teaching and learning* (pp.707-762). Greenwich, CT: Information Age Publishing
- Kraemer, J., M. (2008). Desenvolvendo o sentido do número: cinco princípios para planificar. In: J. Brocardo, L. Serrazina & I. Rocha (Orgs.), *O sentido do número. Reflexões que entrecruzam teoria e prática* (pp. 3-28). Lisboa: Escolar Editora
- Lessard - Hebert, M., Goyette, G., & Boutin, G. (2008). *Investigação Qualitativa. Fundamentos e Práticas*. 3º ed. Lisboa: Instituto Piaget.
- Ludke, M., & André, M. (1986). *Pesquisa em educação: Abordagens qualitativas*. São Paulo: EPU.
- Manzini, J. (1991) A entrevista na pesquisa social. *Didática*, v. 27, (p. 149-158). São Paulo
- Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of álgebra. In: H. Chick, K. Stacey, J. Vincent, & J. Vincent (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra. Proceedings of the 12th ICMI study conference* (Vol. 1, pp. 344-352). Melbourne: The University of Melbourne.
- ME – DGIDC (2007). Programa de Matemática do Ensino Básico. Lisboa: Ministério da Educação Direção Geral de Inovação Curricular.
- NCTM (2007). Princípios e Normas para a Matemática Escolar. Lisboa: APM.
- Nobre, S., Amado, N. & Ponte, J.P. (2011). Representações na aprendizagem de sistemas de equações. In: M. H. Martinho, R. A. Ferreira, I. Vale, & J. P. Ponte (Eds.), *Ensino e Aprendizagem da Álgebra – Actas do Encontro de Investigação em Educação Matemática* (pp. 239-259). Póvoa do Varzim:
- Orton, A. (1999). *Pattern in the Teaching and Learning of Mathematics*. London: Cassel.
- Orton, A. (2004). *Learning mathematics. Issues, theory and classroom practice*. London: Continuum.
- Pacheco, J. (1994). A avaliação dos alunos na perspectiva da reforma. Porto: Porto Editora
- Pacheco., J. (1995). Análise curricular da avaliação. In: J. Pacheco & M. Zabalza (org.). *A avaliação dos alunos dos ensinos básico e secundário. Actas do I Colóquio sobre Questões Curriculares*. Braga. Instituto de Educação e Psicologia, Universidade do Minho, pp. 39-49.
- Patton, M. Q. (1990). *Qualitative Evaluation and Research Methods*. Newbury Park. CA: Sage Publications, pp. 67-89 e 187-189
- Ponte, J. P. (1994). O estudo de caso na investigação em educação matemática. *Quadrante*, 3(1) 3-18
- Ponte, J. P. (2005). A álgebra no currículo escolar, *Educação e Matemática*, 85, 36-42
- Ponte, J. P. (2006). Estudos de caso em educação matemática. *Bolema*, 25, 105-132.
- Ponte, J. P., Branco, N. & Matos, A. (2009). *Álgebra no Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação, DGIDC
- Ponte, J. P., Brocardo, J., & Oliveira, H. (2003). Investigações no currículo. In: J. P. Ponte, J. Brocardo & Oliveira, H. (Ed.), *Investigações matemáticas na sala de aula* (pp.55-70). Belo Horizonte: Autêntica.

- Quivy, R., & Van Campenhoudt, L. (1992). *Manual de Investigação em Ciências Sociais*. Lisboa: Gradiva.
- Schoen, H., L. (1995). A resolução de problemas em álgebra. In: A. F. Coxford, & A. P. Shulte (Eds.) *As ideias da Álgebra*. São Paulo. Actual.
- Schoenfeld, A., H. (1992). Learn to think mathematically: Problem solving, metacognition and sense making in mathematics. In: D.A. Grows (Ed.), *Handbook of Research on mathematics teaching and learning* (pp. 150-156). Reston: NCTM
- Schoenfeld, A., H. (2008). Early algebra as mathematical sense making. In: J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 479 – 510). New York: Lawrence Erlbaum Associates.
- Serrazina, L. & Oliveira, I. (2010). Trajectórias de aprendizagem e ensinar para a compreensão. In: GTI (Ed.), *O Professor e o Programa de Matemática do Ensino Básico* (pp.43-59). Lisboa: Associação de Professores de Matemática, Grupo de Trabalho de Investigação.
- Smith, E. (2008). Representational Thinking as a Framework for Introducing Functions in the Elementary Curriculum. In: J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 19-56). New York: Lawrence Erlbaum Associates.
- Smith, S.P. (2003). Representation in school mathematics: Children's representations of problems. In: J. Kilpatrick, W. G. Martin & D. Schifter (Eds.) *A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics*, (pp. 263-274). Reston, VA: NCTM.
- Stacey, K. & MacGregor, M. (2001). Curriculum reform and approaches to álgebra. In: R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell, & R. Lins (Eds.), *Perspectives on school algebra* (pp. 141-153). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic.
- Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalizing problems. *Educational studies in Mathematics*, 20(2), pp. 147-164.
- Stake, R. (2007). *A arte da Investigação com estudos de caso*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.
- Vale, I. & Pimentel, T. (2005). Padrões: um tema transversal do currículo, *Educação e Matemática*, 85, 14-20
- Vale, I., Barbosa, A., Borralho, A., Barbosa, E., Cabrita, I., Fonseca, L. & Pimentel, T. (2009) *Padrões no Ensino e Aprendizagem da Matemática – Proposta Curriculares para o Ensino Básico*. Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo – Projecto Padrões.
- Valério, N. (2005). Papel das representações na construção da compreensão matemática dos alunos do 1º ano. *Quadrante*, 14(1), 37-66.
- Veloso, E. (2005). O triunfo da álgebra, *Educação e Matemática*, 85, 61-66.
- Yin, R. (1994). *Case Study Research: Design and Methods*. 2ª Ed Thousand Oaks, CA: SAGE Publications.

Artigos online

Annenberg Media – Learner. Org: Teacher professional development and teacher resources across the curriculum. Acedido a 05-06-2011 em

<http://www.learner.org/courses/learningmath/algebra/index.html>

Cavalcanti, J. D. B., & Santos, M.C. (2009). *Um estudo sobre compreensão do sinal de igualdade: Noção operacional e relacional de equivalência*. In: XII Comitê Interamericano de Educação Matemática. Acedido a 29-11-2011 em

http://cimm.ucr.ac.cr/ciaem/memorias/xii_ciaem/153_estudo_compreensoes.pdf

Fiorentini D., Fernandes F. & Cristóvão E. (2005). *Um estudo das potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico*. In: Seminário Luso-Brasileiro de Investigações Matemáticas no Currículo e na Formação de Professores. Acedido a 29-11-2011 em

http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/seminario_lb.htm

Ministério da Educação (2010). *Portugal é o país da OCDE que mais progrediu na Educação*.

Acedido a 29-01-2011, em

http://www.portugal.gov.pt/pt/GC18/Governo/Ministerios/MEd/Documents/Pages/20101207_ME_Doc_Pisa_2009.aspx

Morse, J. M., Barret, M., Mayan, M., Olson, K., & Spiers, J. (2002). *Verification strategies for establishing reliability and validity in qualitative research*, In: International Journal of Qualitative Methods 1 (2), Article 2. Acedido a 01-05-2010 em

http://www.ualberta.ca/~iiqm/backissues/1_2Final/html/morse.html

Anexo I – Quadros de caracterização da turma

1. Distribuição dos alunos na turma por género e idade

		Idade dos alunos				Total
		10	11	12	13	
Género	Rapazes	1	9	1	1	12
	Raparigas	2	13	1	0	16
	Total	3	22	2	1	28

2. Habilitações dos Encarregados de Educação

Habilitações	Nº de EE	%
4º Ano	3	10,7
6º Ano	3	10,7
9º Ano	10	35,7
10º Ano	1	3,6
12º Ano	8	28,6
Licenciatura	3	10,7
	28	100%

3. Alunos com retenção

Três dos 28 alunos que constituem a turma apresentam retenções no seu percurso escolar.

4. Alunos com planos de recuperação no ano lectivo 2009/2010

Oito dos 28 alunos que constituem a turma tiveram plano de recuperação à disciplina de Matemática.

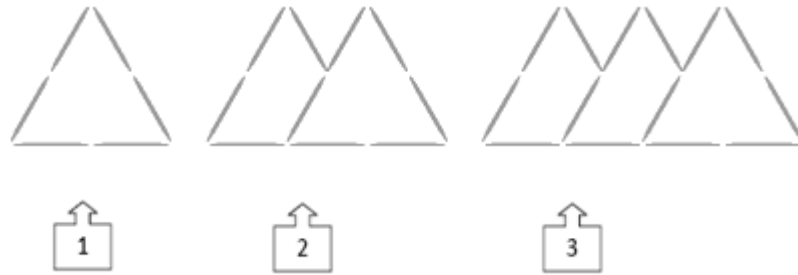
5. Alunos abrangidos pelo Dec.Lei n.º3/2008 de 7 de Janeiro – Educação Especial

Enquadrada na turma encontra-se uma criança com adequações do processo ensino e de aprendizagem e acompanhamento em psicologia. Esta aluna frequenta um dos dois blocos semanais da disciplina.

Anexo II – Enunciado do pré-teste

Construções com palitos

O Vitorino gosta muito de fazer figuras com peças. Ontem fez uma sequência de figuras;



1. Desenha a figura seguinte da sequência. Explica qual a regra de formação que seguiste para a desenhar.
2. Quantos triângulos tem a figura da sequência na posição 7? E quantos palitos?
3. É possível ter uma figura com 85 palitos? Explica a tua resposta.
4. Se alguém te disser o número de triângulos, explica como podes dizer-lhe o número de palitos que serão necessários. Como podes saber que a tua descrição irá dar sempre o número certo de palitos?

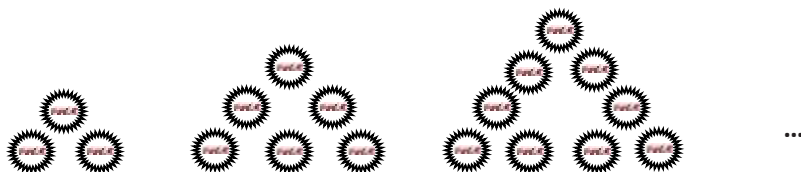
Anexo III – A – Planificação da Unidade

ESCOLA: Colégio Rainha Dona Leonor		Ano: 2010/2011	
Tema Álgebra	Propósito Principal de Ensino:	<ul style="list-style-type: none"> Desenvolver nos alunos o pensamento algébrico, bem como a sua capacidade de representar simbolicamente situações matemáticas e não matemáticas e de resolver problemas em contextos diversos. 	
	Objectivos Gerais:	<ul style="list-style-type: none"> Ser capazes de explorar, investigar regularidades; Compreender a noção de proporcionalidade directa e usar o raciocínio proporcional; Ser capazes de resolver problemas, raciocinar e comunicar recorrendo a representações simbólicas. 	
Tópicos	Objectivos Específicos	Tarefas	Blocos
Relações e regularidades • Sequências e regularidades	(A) Compreender o significado dos parênteses e a prioridade das operações numa expressão numérica. (B) Usar expressões numéricas para representar situações e dar exemplos de situações que possam ser representadas por uma expressão numérica. (C) Expressar relações matemáticas através de igualdades e desigualdades. (D) Compreender os conceitos de razão, proporção e constante de proporcionalidade. (E) Utilizar proporções para modelar situações e fazer previsões. (F) Resolver e formular problemas envolvendo situações de proporcionalidade directa. (G) Identificar e dar exemplos de sequências e regularidades numéricas e não numéricas. (H) Determinar o termo seguinte (ou o anterior) a um dado termo e ampliar uma sequência numérica, conhecida a sua lei de formação. (I) Determinar termos de ordens variadas de uma sequência, sendo conhecida a sua lei de formação. (J) Analisar as relações entre os termos de uma sequência e indicar uma lei de formação, utilizando a linguagem natural e simbólica. (K) Representar simbolicamente relações descritas em linguagem natural e reciprocamente. (L) Interpretar diferentes representações de uma relação e relacioná-las.	Tarefa 0 - Relações e regularidades (C) (G) Tarefa 1 - As tampinhas do João* (H) (I) (J) Tarefa 2 - T's em cubos* (H) (I) (J) (K) Tarefa 3 - Figuras de figuras* (H) (I) (L) Tarefa 4 - Tatamis (G) (H) (I) (L) Tarefa 5 - Uma corrida de táxi (D) (E) (F) Tarefa 6 - As pilhas (D) (E) (F) Tarefa 7 - Escalas	45' 90' 90' 90' 90' + 45' 45' 90' 45'
			* utilizadas para recolha de dados

Anexo III – 1 – Tarefa “As tampinhas do João”

O João gosta de fazer sequências com padrões engraçados com as suas tampinhas. Hoje fez duas sequências e tentou descobrir em qual delas precisa de mais tampinhas.

Sequência A



Sequência B



1. Que regularidades encontras na sequência A? E na B? Constrói uma tabela que te ajude a organizar os dados.
2. Descobre quantas tampinhas são necessárias para construir a 8ª figura da sequência A. Explica como pensaste.
3. Descobre quantas tampinhas são necessárias para construir a 8ª figura da sequência B. Explica como pensaste.
4. A irmã do João disse-lhe que precisaria de 38 tampinhas para a 17ª figura da sequência B. O João discordou imediatamente. Explica por que razão o João discorda.

Anexo III – 2 – Tarefa “T’s em cubos”

A Joana estava a construir T’s com pequenos cubos, como podes observar na figura que se segue:

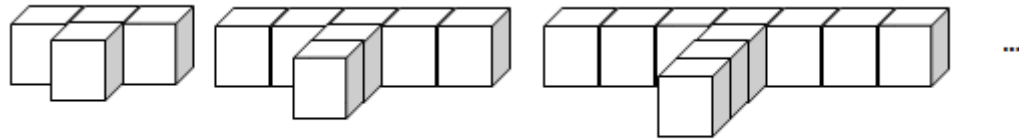


Figura 1

Figura 2

Figura 3

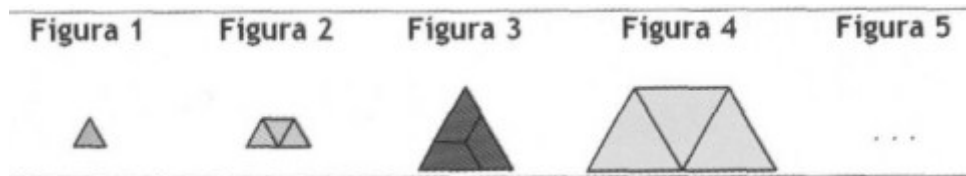
A sua amiga Rita, assim que viu o que ela estava a fazer, começou a colocar-lhe algumas questões:

1. Consegues construir um T utilizando 14 cubos?
2. Consegues representar o número de cubos utilizados na construção de cada T através de uma expressão numérica?
3. Quantos cubos precisas para o T da posição 12?
4. Se continuasses a sequência, em que posição ficaria o T com 22 cubos?
5. Descobre uma forma de saber o número de cubos necessários para construir um T sabendo apenas a sua posição na sequência.

Ajuda a Joana a responder às perguntas da sua amiga, explicando sempre como pensaste.

Anexo III – 3 – Tarefa “Figura de figuras

Considera a sequência a seguir indicada:



1 – A tabela seguinte relaciona as diversas figuras entre si. Completa a tabela com base nos dados fornecidos:

	1			
	3			
		3		1/3
				1

2 – Que regularidades encontras na tabela?

3 – Esboça a figura 5.

4 – Por quantos é composta a figura :

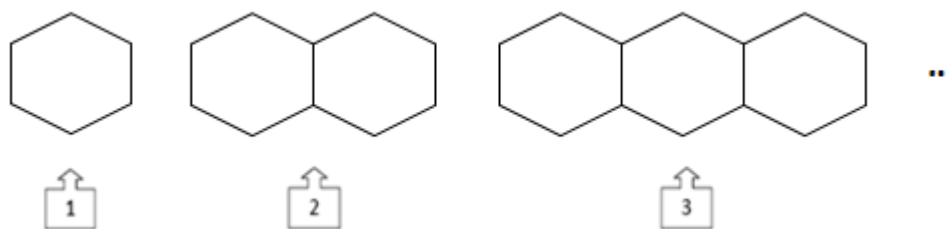
- a) 7?
- b) 10?
- c) n ?

Apresenta sempre o teu raciocínio.

Anexo IV – Enunciado do pós-teste

Construções com palitos

O Vitorino gosta muito de fazer figuras com palitos. Ontem fez uma sequência de figuras. Em cada lado da figura usa um palito.

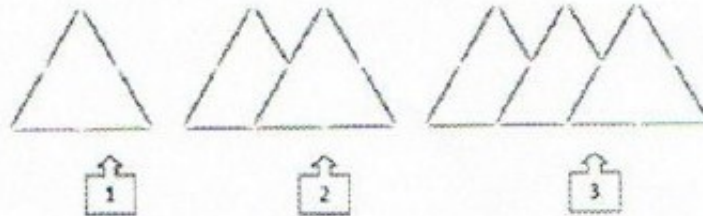


1. Desenha a figura seguinte da sequência. Explica qual a regra de formação que seguiste para a desenhar.
2. Quantos hexágonos tem a figura da sequência na posição 7? E quantos palitos?
3. É possível ter uma figura com 85 palitos? Explica a tua resposta.
4. Se alguém te disser o número de hexágonos, explica como podes dizer-lhe o número de palitos que serão necessários. Como podes saber que a tua descrição irá dar sempre o número certo de palitos?

Anexo V – 1A – Produção do Pedro no pré-teste

Construções com palitos

O Vitorino gosta muito de fazer figuras com peças. Ontem fez uma sequência de figuras:



1. Desenha a figura seguinte da sequência. Explica qual a regra de formação que seguiste para a desenhar. *A regra é colocar um triângulo ao lado do outro e retirar sempre ^{dois} palitos ao triângulo anterior.*



2. Quantos triângulos tem a figura da sequência na posição 7? E quantos palitos? *Tem 7 triângulos e tem ~~30~~ 36 palitos.*
3. É possível ter uma figura com 85 palitos? Explica a tua resposta. *Não porque ~~o~~ são retirados sempre dois palitos a um triângulo, que tem 6 palitos e ao fazermos essa subtração ficaremos sempre com um número par e 85 é ímpar.*
4. Se alguém te disser o número de triângulos, explica como podes dizer-lhe o número de palitos que serão necessários. Como podes saber que a tua descrição irá dar sempre o número certo de palitos? *Porque se uma pessoa me perguntar isso eu retiraria 2 palitos a todos os triângulos menos ao último criado.*

Anexo V – 1B – Produção do Pedro na tarefa “As tampinhas do João”

Tampinhas do João

Sequência A

Figura n.º	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
N.º de tampas	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
N.º de tampas na linha de baixo	2	3	4	5	6	7	7	9	10	11

Sequência B

Figura n.º	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
N.º de tampas	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29
N.º de tampas na linha de baixo	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
N.º de tampas na linha de cima	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

Sequência A

O número de tampas da figura é sempre múltiplo de 3.

A linha de baixo tem sempre mais uma tampa que o número da figura.

De uma figura para outra acrescenta-se 2 tampas na linha de baixo e outras 2, uma em cada diagonal.

O número de tampas é igual ao produto da multiplicação n.º da figura \times 3.

Sequência B

A linha de baixo tem sempre mais uma tampa que o número da figura.

O n.º de tampas na linha de cima é igual ao número da figura.

O n.º de tampas é igual a $(n.º \text{ da figura} \times 2) + 1$.
Os n.º são todos ímpares.

De figura para figura acrescenta-se uma tampa na linha de baixo e outra na linha de cima.

2. $8 \times 3 = 24$ tampas

$$8 \times 3 = 24 \text{ tampas}$$

R: Serão necessárias 24 tampas.

3. $(2 \times 8) + 1 = 17$ tampas

R: Serão necessárias 17 tampas.

4.

$$(2 \times 17) + 1 = 35$$

$$35 \neq 38$$

R: O são discorda porque serão necessárias 35 tampas para a 17^ª figura da sequência B e não 38 tampas.

Anexo V – 1C – Produção do Pedro na tarefa “T’s em cubos”

"T's" em cubos

N.º da figura	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
N.º de cubos	4	7	10	13	16	19	22	25	28	31	34	37	40	43
N.º de cubos em cada lado	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

Acrescenta-se +3 cubos de figura para figura.

Para descobrir o n.º de cubos de uma figura existem três formas:

- multiplicar o n.º da figura anterior por 3 e adicionar 4;
- multiplicar o número da figura por 3 e adicionar 1;
- multiplicar o n.º da figura por 4 e subtrair o n.º da figura anterior;
- o número de cubos em cada lado é igual ao número da figura.

1. Consegues construir um T com 14 cubos?
R: Não, não consigo.

2. Consegues representar o número de cubos utilizados na construção de cada T através de uma expressão numérica?
R: Sim.

$0 \times 3 + 4 = 4$ $1 \times 3 + 4 = 7$ $2 \times 3 + 4 = 10$
 $1 \times 3 + 1 = 4$ $2 \times 3 + 1 = 7$ $3 \times 3 + 1 = 10$

3. Quantos cubos precisas para o T da posição ~~com~~ 12
R: 32.

4. Quantos cubos precisas se continuasses a sequência, em que posição ficaria o T com 22 cubos?
R: 7.

5. Descubra uma forma de saber o número de cubos necessários para construir um T sabendo apenas a posição da sequência.

$$(n^{\circ} \text{ fig. anti. } \times 3) + 4$$

$$(n^{\circ} \text{ fig. } \times 3) + 1 = 3 \times n + 1$$

$$(n^{\circ} \text{ fig. } \times 4) - n^{\circ} \text{ fig. anti.}$$

Anexo V – 1D – Produção do Pedro na tarefa “Figuras de figuras”


Figuras de Figuras

2. Todas as figuras podem ser decompostas em Δ unitários.

A partir da figura 2 o nº de Δ unitários pela qual é composta é múltiplo de 3.

3. A forma da figura será multiplicada por 3 para dar a próxima figura.

As figuras pares são trapézios e ímpares são triângulos.



4.

a) $3^6 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 27 \times 27 = 729$

$$\begin{array}{r} 27 \\ \times 27 \\ \hline 189 \\ + 540 \\ \hline 729 \end{array}$$

b) $3^9 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 729 \times 27 = 19683$

$$\begin{array}{r} 729 \\ \times 27 \\ \hline 5103 \\ + 51030 \\ \hline 19683 \end{array}$$

c) $3^{\text{n.º da figura anterior}}$ ou 3^{n-1}

n.º da figura	1	2	3	4	5
n.º de Δ unit.	1	3	9	27	81
Contagem			3 ²	3 ³	3 ⁴
Representação	3 ⁰	3 ¹	3 ²	3 ³	3 ⁴

Anexo V – 1E – Produção do Pedro no pós-teste

Construções com palitos

O Vitorino gosta muito de fazer figuras com palitos. Ontem fez uma sequência de figuras. Em cada lado da figura usa um palito.

1. Desenha a figura seguinte da sequência. Explica qual a regra de formação que seguiste para a desenhar.

Para desenhar a 4ª figura da sequência apenas acrescentar mais um hexágono à figura anterior, tendo em conta que um dos lados é partilhado com o hexágono anterior.

2. Quantos hexágonos tem a figura da sequência na posição 7? E quantos palitos?

A figura da posição 7 tem 7 hexágonos e 36 palitos.

$$7 \text{ figs.} - 1 (\text{fig. compl.}) = 6$$

→ n.º de palitos por hexágono novo visto que os novos hexágonos partilham sempre um lado

$$6 + 6 \times 5 = 36$$

3. É possível ter uma figura com 85 palitos? Explica a tua resposta.

Não é possível construir uma figura com 85 palitos porque, apesar do n.º 85 ser divisível por 5 e ser múltiplo de 5, o n.º de palitos da fig. 1, vai dar 6 que é um número ímpar.

$$85 - 6 = 79$$

$$\frac{79}{5} = 15 \text{ r } 4$$

→ visto que o resto não dá 0, não é possível.

4. Se alguém te disser o número de hexágonos, explica como podes dizer-lhe o número de palitos que serão necessários. Como podes saber que a tua descrição irá dar sempre o número certo de palitos?

Basta imaginar que é apenas um dos hexágonos e verdadeiramente um hexágono e os restantes são pentágonos, porque todos partilham um lado, assim, por exemplo com 9 hexágonos precisaria de 46 palitos, porque se observarmos a sequência podemos dizer que só o primeiro hexágono tem 6 palitos.

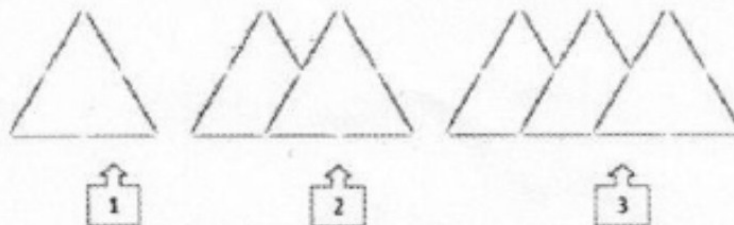
$$9 - 1 = 8 \quad 8 \times 5 + 6 = 46 \quad \text{os 6 palitos.}$$

IMP.CBOL.013-00

Anexo V – 2A – Produção da Cristina no pré-teste

Construções com palitos

O Vitorino gosta muito de fazer figuras com peças. Ontem fez uma sequência de figuras:



1. Desenha a figura seguinte da sequência. Explica qual a regra de formação que seguiste para a desenhar.



R: A regra da acrescentas sempre mais um triângulo.

2. Quantos triângulos tem a figura da sequência na posição 7? E quantos palitos?

R: Tem 7 de triângulos e 30 palitos.

$$(\cancel{6} \times 4 + 6) \quad 6 \times 4 + 6 \text{ ou } n \times 4 + 6$$

3. É possível ter uma figura com 85 palitos? Explica a tua resposta.

Sim, porque é um número ímpar.

4. Se alguém te disser o número de triângulos, explica como podes dizer-lhe o número de palitos que serão necessários. Como podes saber que a tua descrição irá dar sempre o número certo de palitos?

R: Farei a conta: $(n \times 4 + 6 = \text{a palitos})$

$$? - 6 = ? \times 4 = ? + 6$$

$$\underbrace{\quad}_{n-1} \times 4 + 6$$

2

$$3 \times 8^{\circ} \text{ figura} = 24 \text{ palhas}$$

R: São 24 palhas

3

6 dobro do número da figura mais 1

$$8 \times 2 = 16 \quad 16 + 1$$

ou

6 número da figura vezes 2 mais 1

$$(8 \times 2) + 1 = 17$$

4

$$(17 \times 2) + 1 = 34 + 1 = 35$$

R: a irmã está errada

ela precisa 35 tampinhas.

Anexo V – 2C – Produção da Cristina na tarefa “T’s em cubos”

T's em Cubos

1

Não foi que seguindo a sequência de o nº de cubos da figura anterior + 3 não dá para fazer com 14 cubos.

2 A expressão numérica é $3 \times m^2$ da figura + 1 = nº de cubos.

Ex: $3 \times 1 + 1 = 4$ cubos
 $3 \times 3 + 1 = 10$ cubos
 $3 \times 4 + 1 = 13$ cubos
 $3 \times 7 + 1 = 22$ cubos

3

$3 \times 12 + 1 = 37$ cubos

4

$3 \times 7 + 1 = 22$ cubos ou $(22 - 1) \div 3 = 21 \div 3 = 7$

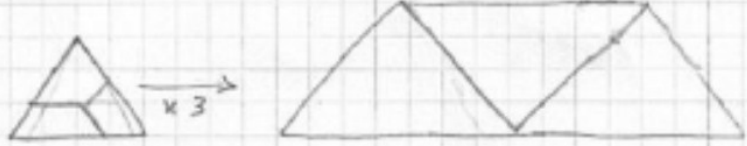
5 $3 \times m^2$ da figura + 1 = nº de cubos

Ex: $3 \times 10 + 1 = 31$
 $3 \times 25 + 1 = 76$

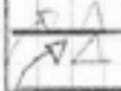
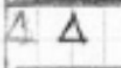
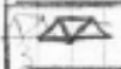

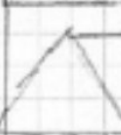
Anexo V – 2D – Produção da Cristina na tarefa “Figuras de figuras”

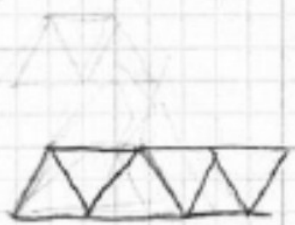
Figuras de figuras

A figura anterior está sempre relacionada com a figura seguinte, Ponges!

Ex.: 

- Neste há 3 da figura anterior (tripla = 3x)
- A figura triplica-se formando um Triângulo ou um trapézio.

	Co	Δ g	Contagem	Representação
		1	1	3^0
		3	3	3^1
		9	3×3	3^2
	27		$3 \times 3 \times 3$	3^3

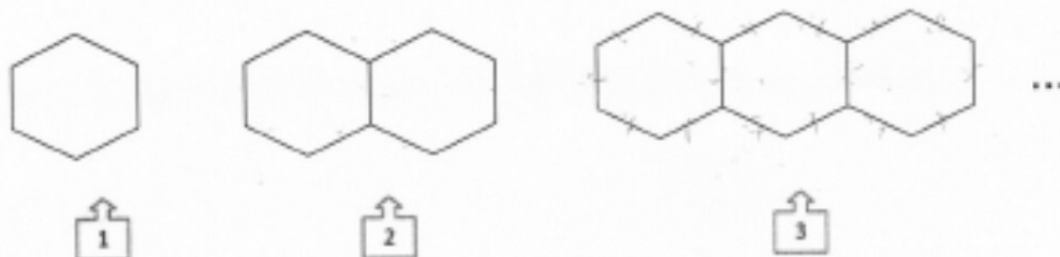
3 - 

5 - $7 = 3^6$
 $10 = 3^9$
 $m = 3^{m-1}$

Anexo V – 2E – Produção da Cristina no pós-teste

Construções com palitos

O Vitorino gosta muito de fazer figuras com palitos. Ontem fez uma sequência de figuras. Em cada lado da figura usa um palito.



1. Desenha a figura seguinte da sequência. Explica qual a regra de formação que seguiste para a desenhar.



R: A regra de formação que segui para desenhar foi acrescentar mais 5 palitos formando um hexágono.

2. Quantos hexágonos tem a figura da sequência na posição 7? E quantos palitos?

R: A figura da sequência na posição 7 tem 7 hexágonos e palitos

Tem 36

Se a 4ª figura tem 21 palitos a 7ª tem 36

$$21 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 36 \text{ palitos}$$

4ª 5ª 6ª 7ª

3. É possível ter uma figura com 85 palitos? Explica a tua resposta.

Não, porque $36 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 86$

7ª 8ª 9ª 10ª 11ª 12ª 13ª 14ª 15ª 16ª 17ª 18ª 19ª

4. Se alguém te disser o número de hexágonos, explica como podes dizer-lhe o número de palitos que serão necessários. Como podes saber que a tua descrição irá dar sempre o número certo de palitos?

R: Se alguém me disser o número de hexágonos faço

$n \times 6 = 6n$ de palitos que os ligam entre si

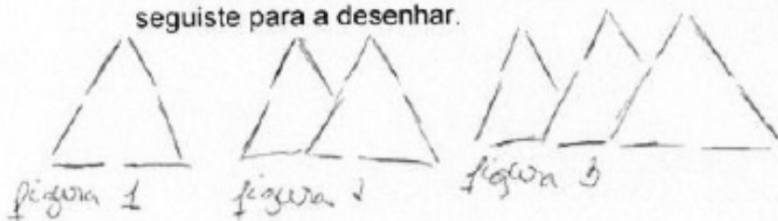
Anexo V – 3A – Produção da Teresa no pré-teste

Construções com palitos

O Vitorino gosta muito de fazer figuras com peças. Ontem fez uma sequência de figuras;



1. Desenha a figura seguinte da sequência. Explica qual a regra de formação que seguiste para a desenhar.



A regra de formação que segui para desenhar foi sempre acrescentar mais um triângulo por exemplo figura 20 tem 20 triângulos.

2. Quantos triângulos tem a figura da sequência na posição 7? E quantos palitos?
 A figura da sequência na posição 7 tem 7 triângulos.
 $7 \times 6 = 42$. A posição 7 tem 42 palitos.

3. É possível ter uma figura com 85 palitos? Explica a tua resposta.

Não porque 85 não é múltiplo de 6.

4. Se alguém te disser o número de triângulos, explica como podes dizer-lhe o número de palitos que serão necessários. Como podes saber que a tua descrição irá dar sempre o número certo de palitos?

Eu acho que irá dar ^{sempre} certo multiplicando o número de triângulos pelo número de palitos.

Anexo V – 3B – Produção da Teresa na tarefa “As tampinhas do João”

Tampinhas do João

Sequência A	
1	3
2	6
3	9
...	...

Multiples de 3
 Descobrimos que na 3ª figura é o 3º múltiplo da tabuada do 3 e o segundo o 2º múltiplo da tabuada do 3 e sempre assim.

Sequência B	
1	3
2	5
3	7
...	...

os números ímpares
 Descobrimos vai dar sempre números ímpares.

2- A 8ª figura terá com 24 tampas.
 $3 \times 8 = 24$

Não fizemos 3×8 porque como repetimos na sequência A é a tabuada do 3.

3- A 8ª figura na sequência B vai ter 17 tampas porque acrescentamos sempre 2 tampas à figura anterior (para fazer números ímpares).

4- O João discorda porque na sequência B não há números ímpares e o 36 é número par.

Anexo V – 3C – Produção da Teresa na tarefa “T’s em cubos”

Descoberta: A descoberta que nós descobrimos foi que acrescento
 sempre mais 3 cubos a cada T.

1- Vou parar na sequência acima apresentada acrescenta-se sempre
 mais 3 cubos

Figura	Nº de cubos
1	4
2	7
3	10

Acréscimo - de sempre mais 3

2- Sim, conseguimos:

$4 + 0 = 4$
 $4 + 3 = 7$
 $7 + 3 = 10$
 $10 + 3 = 13$
 $13 + 3 = 16$
 $16 + 3 = 19$

Descoberta: O resultado de cada soma, é o
 primeiro número da soma seguinte.





3-

Nº da figura	Conta	Nº de cubos
1	$(3 \times 1) + 1 = 4$	4
2	$(3 \times 2) + 1 = 7$	7
3	$(3 \times 3) + 1 = 10$	10
4	$(3 \times 4) + 1 = 13$	13
5	$(3 \times 5) + 1 = 16$	16
6	$(3 \times 6) + 1 = 19$	19
7	$(3 \times 7) + 1 = 22$	22
8	$(3 \times 8) + 1 = 25$	25
9	$(3 \times 9) + 1 = 28$	28
10	$(3 \times 10) + 1 = 31$	31
11	$(3 \times 11) + 1 = 34$	34

4- A posição da figura é a 4ª usando a tabela anterior para
 o descobrimos.

5- $N^\circ \text{ figura} \times 3 + 1$

Anexo V – 3D – Produção da Teresa na tarefa “Figuras de figuras”

Figura	C_n	Contagem	Representação simplificada
Figura 1 - 1		1	3^0
Figura 2 - 3		3	3^1
Figura 3 - 9 = 3×3		3×3	3^2
Figura 4 - $3 \times 3 \times 3 = 27$		$3 \times 3 \times 3$	3^3

2 - A regularidade que nos encontramos foi que mais diagonais para o lado direito é sempre o mesmo número.

3 - $9 \times 9 = 81$

4 - Figura 6 - $27 \times 3 = 81$

Figura 7 - $81 \times 3 = 243$

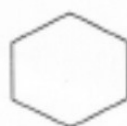
Figura 8 - $243 \times 3 = 729$

Anexo V – 3E – Produção da Teresa no pós-teste

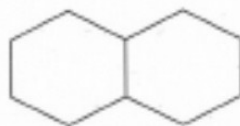
Construções com palitos

473

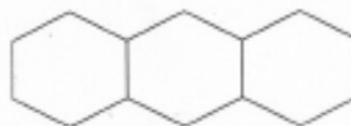
O Vitorino gosta muito de fazer figuras com palitos. Ontem fez uma sequência de figuras. Em cada lado da figura usa um palito.



1



2



3

...

1. Desenha a figura seguinte da sequência. Explica qual a regra de formação que seguiste para a desenhar.



R: A regra de formação que segui para a desenhá-la foi acrescentando mais um hexágono.

2. Quantos hexágonos tem a figura da sequência na posição 7? E quantos palitos?

R: Na posição 7 a figura vai ter 7 hexágonos porque o número de hexágonos da figura é o mesmo do número da figura. E vai ter 41 palitos por que $7 \times 6 = 42 - 1 = 41$ porque o número de palitos num hexágono menos o número de hexágonos.

3. É possível ter uma figura com 85 palitos? Explica a tua resposta.

Não, porque se eu fizer $14 \times 6 = 84$.

4. Se alguém te disser o número de hexágonos, explica como podes dizer-lhe o número de palitos que serão necessários. Como podes saber que a tua descrição irá dar sempre o número certo de palitos?

Eu posso dizer-lhe o número de palitos pagando o número de hexágonos vezes 6 que não o número de lados do hexágono e tiro o número da figura anterior. Exemplo:

$$fig. 1 = 1 \times 6 = 6$$

$$fig. 2 = 2 \times 6 = 12 - 1 = 11$$

$$fig. 3 = 3 \times 6 = 18 - 2 = 16$$

IMP-CRDL-013-02

11

Anexo VI – 1- Entrevistas do Pedro

Transcrição da entrevista do Pedro sobre a tarefa 1

Professor - Como te chamas?

Aluno – Pedro.

P – Qual a tua disciplina favorita?

A – Matemática.

P – Quais os tipos de tarefas que mais gostas de realizar em Matemática?

A – Tudo o que tenha a ver com a relação entre números.

P – Em relação à tarefa “As tampinhas do João”, e relativamente à primeira questão, descobriste que na sequência A eram múltiplos de três. Como chegaste a essa conclusão?

A – Eu olhei para as figuras. Na primeira figura tinha três. Depois tentei descobrir várias relações e ao contar as tampas vi que eram todos múltiplos de três...3, 6, 9, 12, ...

P – Contaste que a primeira figura eram três, e com a segunda como fizeste?

A – Conte a linha de baixo e depois as restantes...

P – E viste que eram?...

A – Eram seis.

P – E relativamente à sequência B? Descobriste que eram ímpares, mas descobriste mais qualquer coisa...que estratégias usaste para fazer essas descobertas?

A – Na sequência B a primeira relação que encontrei...a primeira figura era parecidíssima com a primeira figura da sequência A. Depois na segunda figura da sequência B reparei que foram acrescentadas mais duas tampas, uma em cada linha e depois formava uma espécie de A.

P – Mas tu chegaste aqui a uma forma de descobrir o número de tampas de qualquer figura da sequência B. Como é que tu pensaste?

A – Na sequência B, a linha de baixo tem sempre mais uma tampa que o número da figura. Então, fui fazendo algumas relações, fui comparando as figuras que estavam na folha...depois tentei confirmar com figuras mais à frente, imaginando como é que elas seriam e cheguei a essa conclusão.

P – Muito bem. Na segunda questão, relativamente à figura na posição oito, que conhecimentos usaste para resolver o problema?

A – Na sequência A, o número de tampas tinha sempre de ser múltiplo de três...eu comecei a pensar, na figura um tempos três tampas, é três vezes a figura, o número da figura...depois na figura dois pensei da mesma maneira, três vezes dois, que via dar seis...e depois por aí fora.

P – Na terceira questão descobriste que a figura vai ter 17 tampas. Queres explicar melhor como pensaste para chegar a essa conclusão?

A – Sim...fui discutir com os meus colegas porque estávamos a tentar chegar a um consenso, porque estávamos a tentar descobrir sem desenhar a figura. Então começámos a pensar: se nós multiplicarmos o número da figura por dois e acrescentarmos mais um irá dar o número de tampas.

P – Quantas tentativas fizeram para chegar a essa conclusão?

A – Foram três. Primeiro tentámos multiplicar por três e retirar, mas dava números muito grandes. E então fomos reduzindo até dar dois.

P – Relativamente à quarta questão - “A irmã do João disse-lhe que precisaria de 38 tampinhas para a 17ª figura da sequência B. O João discordou imediatamente. Explica por que razão o João discorda” – queres explicar as tuas conclusões?

A – A primeira coisa que me veio à cabeça foi: a irmã do João disse que eram trinta e oito e este é um número par, não podia ser. Depois tentei descobrir outra forma de chegar a essa mesma conclusão.

P – O que achaste de toda esta tarefa?

A – Foi divertida, em primeiro lugar. Depois acho que me ajudou na minha organização do trabalho...a pensar em como a relação entre os números podem ser especiais e como coisas que parecem tão difíceis são tão simples.

P – Achas que o uso de tabelas ajuda?

A – Acho. Em determinadas situações acho. Quando são muitos dados para organizar, acho que a tabela é a melhor opção. Mas também e pode...uma pessoa que consiga organizar muitos dados na sua cabeça...

P – Pensando na tarefa toda, onde achas que sentiste mais dificuldades?

A – A um determinado ponto, a tentar descobrir mais relações, cada vez tornava-se mais difícil...porque nós não temos um número de relações definido, temos de descobrir...e não sabemos quando parar.

P – E onde te sentiste mais confortável?

A – Foi na segunda questão e na terceira.

P – Gostavas de dizer mais alguma coisa sobre este tipo de tarefas?

A – Que podíamos fazer mais vezes.

P – Vamos fazer mais vezes. Obrigado Pedro, para já é tudo.

Transcrição da entrevista do Pedro sobre a tarefa 2

Professor – Olá Pedro.

Aluno – Olá stor.

P – O que é que representa esta tabela que tu apresentaste?

A – A tabela representa basicamente a organização das nossas ideias. Construí esta tabela para conseguir pensar em mais coisas ao mesmo tempo.

P – E que coisas é que pensaste?

A – Principalmente o número de cubos, consoante o número das figuras e a comparação de cubos de lado para lado.

P – Lado para lado como? Queres explicar melhor o que é isso de lado para lado? Por exemplo aqui (aponto para a imagem da tarefa).

A – Humm...existe um cubo, para cada lado do cubo central.

P – Então e quando dizes *comparação de figuras de lado para lado* é só aqui nesta é entre esta e esta?

A – Sim, é entre cada figura, e também o número da figura.

P – Ok. Relacionas não só a *figura* mas *entre as figuras*.

A – Sim.

P – E a tabela ajudou-te a resolver que questões?

A – A um principalmente. Depois...ahh...também a três e a quatro.

P – Então e a dois não? O que diz a dois? Consegues representar o número de cubos utilizados na construção de cada T através de uma expressão numérica... Achas que não te ajudou?

A – Não muito.

P – Então, como pensaste nessa?

A – Foi mais relacionando uma figura com a outra...

P – Então nessa altura olhaste para a figura e não para a tabela?

A – Só olhei para uma coisa na tabela. De figura para figura acrescentavam-se três cubos e isso ajudou-me muito.

P – Então não foi totalmente resolvido com a tabela mas ajudou-te qualquer coisa, é isso?

A – Sim.

P – Então, que segurança te deu a tabela nesta tarefa?

A – Se eu não tivesse feito a tabela, qualquer dado que eu perdesse, podia causar um dano na tarefa inteira.

P – Ok. Muito bem. E já quase para terminar...quais foram então as dificuldades que sentiste na resolução desta tarefa? Ou, onde é que sentiste mais dificuldades?

A – Eu acho que foi, principalmente, depois de descobrir uma expressão numérica tem graça é descobrir mais...

P – E achaste que depois da primeira se tornou mais difícil?

A – Sim...

P – Ok. Obrigado pelos teus esclarecimentos, foram muito importantes.

A – De nada professor.

Transcrição da entrevista do Pedro sobre a tarefa 3

Professor – Olá Pedro. Vamos ver o que fizeste nesta tarefa?

Aluno – Olá professor. Sim, claro.

P – Então...achas que o preenchimento da tabela da tarefa, te ajudou a descobrir as regularidades que apresentas?

A – Muito. Principalmente a perceber...a relação que existia entre os triângulos unitários e o resto das figuras.

P - Quando resolveste esta tarefa a que conhecimentos, ou descobertas anteriores, recorreste para afirmar "As figuras pares são trapézios e as ímpares são triângulos, que é aqui uma das tuas descobertas?"

A - Ahhh...eu reparei nisso ao olhar, principalmente para a tabela e ao descobrir outra regularidade que era, a forma da figura anterior era multiplicada por três, para formar a próxima figura.

P - A próxima figura, muito bem...no final da tarefa, no lado de trás, apresentas uma tabela. Nas tarefas anteriores tinhas usado logo uma tabela no início. Porque é que aqui só usaste no final?

A - Em primeiro lugar já tínhamos uma tabela logo no início e depois porque era necessário para descobrir...para...representar a fórmula...ahhh, para descobrir qualquer figura e também para comprovar a ideia.

P - Ok. Então o teu objetivo era depois de fazer as descobertas mostrar que aquilo funcionava, é isso?

A - Sim.

P - Quando é que compreendeste que a regra geral era *três elevado a n*...três elevado ao número da figura anterior, ou três elevado a $n - 1$?

A - Ahh...foi quando realizei a 4...

P - A questão número 4?

A - Sim, que era necessário. E quando comecei a olhar para a tabela e a ver que tudo podia ser divisível por três ou que eram múltiplos de três.

P - Ok. Que dificuldades é que sentiste na resolução desta tarefa?

A - Não senti muitas.

P - Se comparares com a tarefa anterior...a tarefa dos cubos?

A - Só a única coisa que não estava habituado era a ter este tipo de tabela no início.

P - E achas que fez alguma confusão ou acabou por ajudar?

A - Acabou por ajudar...

Anexo VI – 2- Entrevistas da Cristina

Transcrição da entrevista da Cristina sobre a tarefa 1

Professor - Como é que te chamas?

Aluna - Cristina.

P - Cristina. Qual a tua disciplina favorita?

A - Ahhh...é assim, Ciências, Matemática e História

P - Ciências, Matemática e História, ok. E dessas tens alguma preferida?

A - Em alguns aspetos eu gosto de uma, em outros aspetos gosto de outra.

P - Quais os tipos de tarefas que mais gostas de fazer, realizar em Matemática?

A - Hummm...assim tipo estas...os problemas...

P - De descoberta?

A - Sim...

P - Ok. Então vamos falar um pouco sobre esta tarefa, "As tampinhas do João". Relativamente à primeira questão descobriste que na sequência A, estávamos perante os múltiplos do três...

A - Sim...

P - Como é que chegaste a essa conclusão? Que estratégias usaste, que ideias tiveste...

A - Primeiro vi que os resultados eram sempre múltiplos e depois fui vendo que o número da figura era multiplicando por 3, e fui sempre verificando que dava...

P - Então multiplicado por três dava sempre o total de tampinhas...foi isso?

A - Sim.

P - E relativamente à sequência B?...Descobriste que era todos números...

A - Ímpares...

P - Como é que tinhas a certeza? Que estratégia usaste para saber que seriam sempre números ímpares?

A - Ia sempre de dois em dois...

P - Mas os múltiplos de dois também "andam" de dois em dois e não são ímpares...não pensaste em mais nada?

A - Foi a ver os números ímpares que eu sei, verifiquei, pela sequência...

P - Ok. Na segunda questão, relativa à figura na posição oito, que conhecimentos usaste para resolver?

A - Então, fui consultar uma tabela que tinha feito e vi que pelo raciocínio que tinha feito antes já estava lá a resposta...era só explicar como eu tinha raciocinado que era o número da figura, oitava figura, que era um múltiplo de 3, era o 24.

P - Ok. E já agora em relação à sequência B, que é a terceira questão...dizes que a figura vai ter 17 tampinhas, como descobriste?

A - Foi como na outra...Fui recorrer à tabela e depois expliquei o raciocínio.

P - Pois, mas apresentas aqui uma justificação muito interessante. Como pensaste nela?

A - Eu vi na tabela e depois tive de perceber como poderia justificar...então fiz uma conta e vi que dava assim...

P - Muito bem. E em relação à quarta questão? Queres falar um pouco mais sobre a tua resposta?

A - Então nessa...primeiro fui verificar se ela estava certa...fui ver à tabela como tinha pensado e depois vi pelas contas que era um número ímpar mas não era o que ela tinha dito...

P - Mas percebeste que o 38 era par?

A - Pois, também por causa dessa razão...

P - Mas em qual das ideias pensaste primeiro?

A - Porque o 38 não era um número ímpar...

P - Certo. O que achaste desta tarefa?

A - Foi fácil...

P - Achaste que era uma tarefa fácil?

A - Em algumas coisas se calhar tínhamos de ter mais raciocínio, mas foi fácil.

P - E consegues dizer onde é que sentiste mais dificuldades?

A - Hummm...as tabelas foram fáceis...as descobertas...a dois também foi fácil...se calhar a última, para verificar...

P - Então foi na verificação que sentiste mais dificuldade...

A - Sim.

P - E onde te sentiste mais confortável?

A - Nas tabelas.

P - Porquê?

A - Porque era uma sequência fácil, era fácil descobrir os números.

P - Ok Cristina, muito obrigado pela tua participação.

A - De nada.

Transcrição da entrevista da Cristina sobre a tarefa 2

Professor - Olá Cristina. Vamos falar um pouco sobre a tarefa dois, "T's em cubos".

Aluna - Sim.

P - Na questão um escreveste, "Não, porque seguindo a sequência do número de cubos da figura anterior mais três, não dá para fazer 14 cubos." Como pensaste para chegar a esta conclusão?

A - Eu, ahh...no número de cubos de cada figura fui acrescentando três, e depois vi logo que dava um número maior ou menor...já não me lembro muito bem, que nunca dava catorze ao somar três.

P - Então a tua estratégia foi ir adicionando até saberes?

A - Sim.

P - Na questão dois, apresentas uma expressão numérica, com a mesma "estrutura" em todas as figuras...

A - Sim...

P - Como é que descobriste que esta expressão funcionava? É que é diferente do "número de cubos da figura anterior mais três"...

A - É assim, eu vi pelas duas últimas...que fui ver...estive a experimentar várias formas...algumas não davam...e cheguei à conclusão com esta, que tinha 3x o número da figura dava menos, então tinha de somar 1...com a outra dava mais trabalho, sempre mais 3...tinha de estar sempre a somar e esta aqui era mais fácil.

P - Muito bem. De modo geral depois usaste sempre essa estratégia e funcionou, certo?

A - Certo.

P - Ok. Então consegues dizer que dificuldades sentiste na resolução desta tarefa?

A - Humm...eu depois que descobri a sequência foi mais fácil...o mais difícil foi descobrir a sequência, porque depois ajudou em todas.

P - Então depois de descobrires a regras usaste sempre e tornou-se fácil, é isso?

A - Sim.

P - Ok. Então sobre esta tarefa está tudo esclarecido. Obrigado.

Transcrição da entrevista da Cristina sobre a tarefa 3

Professor - Olá Cristina, vamos falar sobre a tarefa três "Figuras de figuras"?

Aluna - Sim.

P - Achas que o preenchimento da tabela te ajudou a descobrir as regularidades que apresentas?

A - Ajudou-me.

P - Queres falar um pouco sobre isso? Recordaste como é que te ajudou?

A - Aqui na representação, ajudou um bocado na 5...mas depois nas outras não me lembro muito bem como é que tinha sido, como é que tinha pensado...só sei que tinha ajudado.

P - Certo. Ajudou-te bastante na resolução da tarefa, na descoberta das regularidades.

A - Sim.

P - Aqui apresentas uma ideia, escreves aqui algo, dizes assim: "A figura triplica-se, formando um triângulo ou um trapézio"...queres explicar um pouco melhor esta ideia?

A - Então...tinha visto, desde a primeira figura que era um "triangulozinho", depois triplicavam-se os triângulos e formava o trapézio. Depois o trapézio triplicava-se, via-se que o próximo triângulo estava dividido em três, três trapézios e formava um triângulo...era sempre assim, em sequência. Triplicava-se triângulo, triplicava-se trapézio...sempre assim, triângulo, trapézio, triângulo, trapézio...

P - Muito bem. Na questão 3, que pede que se desenhe a figura 5, apresentas um paralelogramo...a nível de triângulos unitários não está correto (?), e não segue o teu padrão. Queres comentar?

A - Pois...eu depois aí tentei fazer outra figura diferente, para ver se dava e não ser sempre triângulo/trapézio.

P - Ok. Querias ver se outras figuras poderiam ser formadas.

A - Sim...

P - Quando é que compreendeste que a regra geral era 3 elevado ao número da figura anterior menos um?

A - Eu acho que foi na altura em que comecei a fazer a tabela...

P - Quando começaste a preencher esta tabela?

A - Sim.

P - É que esta tabela é diferente desta (a realizada em grupo turma). É uma tabela que construístes e que recorreste para chegar aí...então quando a fizeste compreendeste?

A - Sim... todas as figuras tinham triângulozinhos iguais ao primeiro. Dava para fazer vezes três.

P - Que aspetos da tabela é que achas que foram fundamentais para as tuas descobertas?

A - Se calhar a construção das tabelas ajudaram muito a conseguir pensar e descobrir...

P - Muito bem. De um modo geral, que dificuldades é que sentiste na resolução desta tarefa?

A - Acho que foi mais na construção desta tabela...porque eu primeiro não estava a perceber muito bem. Pensava que era de uma maneira, mas depois percebi que eram sempre os números menores...depois não senti mais dificuldades.

P - E depois de perceberes como se construía a tabela já não sentiste mais dificuldades?

A - Depois as coisas começaram a ser mais fáceis.

P - Cristina, obrigado pela tua disponibilidade.

A - Ok stor. Boa tarde.

Anexo VI – 3- Entrevistas da Teresa

Transcrição da entrevista da Teresa sobre a tarefa 1

Professor - Vou começar por perguntar como te chamas?

Teresa - Teresa.

P - Teresa. E vais responder agora a estas perguntas de uma forma descontraída e não tens de responder só porque eu estou aqui ou porque sou eu a perguntar. Qual a tua disciplina favorita?

T - Educação física.

P - Educação física, sim senhor...Quais os tipos de tarefas que mais gostas de realizar em Matemática?

T - Investigações...

P - Tarefas de investigação...então, em relação à tarefa As tampinhas do João, e relativamente à primeira questão, que podes recordar qual era, descobriste na sequência A que eram múltiplos de 3, como é que chegaste a essa conclusão?

T - Porque eu pensei na tabuada do 3, então, como ia sempre de 3 em 3 e estava sempre na tabuada do 3...

P - Estavam sempre na tabuada do 3, certo? Mas porque te lembraste da tabuada do 3?

T - Porque estive a contar as tampinhas e depois reparei que ia sempre de 3 em 3, acrescentava sempre mais 3 tampas. Então cheguei à conclusão que eram múltiplos de três.

P - Múltiplos de três...E relativamente à sequência B, disseste que eram todos ímpares...como é que tinhas a certeza que eram todos ímpares?

T - Porque fiz, vi que 3 era ímpar e depois o 5 e 7 também, e como acrescentava-se sempre mais duas tampas, e ia ser de 2 em 2, então eram sempre números ímpares.

P - Sempre números ímpares...a tua estratégia foi contar? E verificar que eram sempre mais duas?

T - Sim

P - Certo? Na segunda questão, e relativamente à figura na posição oito, o que era pedido, que conhecimentos usaste para resolver esse problema?

T - A tabuada do 3...e como era a oitava figura eu multipliquei vezes três porque tinha dito aqui que era a tabuada do três.

P - E relativamente à sequência B? Disseste que eram todos ímpares...como é que tinhas a certeza que eram todos ímpares?

T - Porque fiz... vi que três era ímpar e depois o cinco ia ser também, e como acrescentava-se sempre mais duas tampas, e ia ser de 2 em 2, então eram sempre números ímpares.

P - Então contaste...E na terceira questão? Consegues explicar melhor como descobriste?

T - Eu contei...estive a contar, com a Cheila, a Cheila ajudou-me, ela contava e eu marcava os números na folha...

P - Sim. Mas contaram como? Começavam no primeiro, 3...

T - Como eu já tinha chegado que aqui era sete, então nós acrescentávamos mais dois...então ela ia contando e eu ia apontando na folha.

P - E relacionavam o número de tampinhas com o número da posição, é isso?

T - Sim.

P - Ok. E em relação à quarta questão? Queres falar mais um pouco sobre a tua resposta?

T - Então eu como tinha visto aqui que eram números ímpares, reparei que 38 era um número par então não podia ser...

P - Porque tinha de ser um número ímpar...

P - O que é que achaste desta tarefa?

T - Achei que foi giro, fazer as descobertas...

P - Onde é que sentiste mais dificuldade?

T - Eu acho que nesta tarefa eu não senti grandes dificuldades, mas se calhar...na sequência B, eram números primos...eu não estava a perceber muito bem como lá podia chegar...

P - A Cheila estava a dizer que eram números primos, e tu reparaste que alguns não eram primos... qual foi o primeiro número que tu reparaste que não era primo?

A - Já não me lembro...

P - Não faz mal. Então, dificuldades achas que não sentiste muito, e onde é que te sentiste mais confortável?

T - Nesta, na quatro e nas descobertas da sequência A.

P - Para já é tudo. Obrigado pela tua participação.

Transcrição da entrevista da Teresa sobre a tarefa 2

P - Olá Teresa, boa tarde. Então, vamos falar um pouco sobre a tarefa número dois, T's em cubos.

A - Está bem.

P - Ora bem. Na questão um, dizes "Não, porque na sequência acima apresentada acrescenta-se sempre mais três cubos", certo? Como é que descobriste esta regularidade? Como pensaste?

A - Então, eu contei os cubos, aqui estavam 4, depois, 4 mais 3 são 7...então vi que acrescentava-se mais três...

P - E bastou-te fazer esta experiência?

A - Não. Depois eu também vi se nesta também dava...

P - Ok. Então foste sempre fazendo por adições, certo?

A - Sim.

P - Apresentas ainda uma tabela...e aqui outra...mas em relação a esta. O que é que significa a tabela e como é que te ajudou?

A - Então...ajudou-me a perceber melhor...aqui estavam 4...e se eu não tivesse tinha sempre de estar a contar...assim não me esquecia dos números.

P - Ahh...ajudou-te a registar de forma a ser mais rápido na contagem, é isso?

A - Sim.

P - E aqui esta outra tabela?

A - Então, esta foi para ver o número de cubos, na três.

P - Ah. Serviu para responder à questão seguinte.

A - Sim.

P - Este padrão aqui, é ligeiramente diferente deste, certo?

A - Sim.

P - Como é que conseguiste estabelecer esta relação?

A - Foi com a ajuda do stor.

P - Fizeste com base na ajuda do professor...mas compreendeste?

A - Depois sim...depois da ajuda...

P - Então diz-me, que dificuldades sentiste na realização desta tarefa?

A - Uhhmmm, foi quando o professor disse para procurar outra forma...eu estava com dificuldades em descobrir isto ($3 \times \text{figura} + 1$)...

P - Tu aqui estavas a adicionar, certo? E depois?

A - Depois o professor perguntou se as ideias da aula passada não podiam ajudar e então eu fiz $x \times 3$ e somava mais um cubo.

P - Ok. Aqui então já relacionas...o que é este número? O 2, o 3, ...

A - É o número da figura.

P - Ok Teresa, obrigado pela tua sinceridade.

Transcrição da entrevista da Teresa sobre a tarefa 3

P - Olá Teresa. Vamos falar um pouco sobre a tarefa "Figura de figuras".

A - Sim.

P - Estás recordada de qual era a tarefa?

A - Sim.

P - Preencheste aqui uma tabela, com contagens e com umas representações...como é que chegaste a estes resultados?

A - Primeiro contei os triângulos pequenos e quando o professor me ajudou fiz as contas e desenhei as figuras...

P - Mas tens aqui depois umas expressões, como pensaste?

A - Isso foi depois, quando estava no quadro...eu não consegui fazer...

P - Ok. Tudo bem. Depois, na questão dois tu dizes assim: "Nas diagonais para o lado direito é sempre o mesmo número"...

A - Sim... digo...

P - Achas que esta regularidade te ajudou na resolução das questões seguintes?

A - Acho que não...

P - Ok. E então queres falar um pouco sobre as tuas outras respostas?

A - Professor...essas respostas foram feitas depois do professor dar algumas dicas...multipliquei sempre por três até dar...mas não percebi...só percebi quando foi explicado na turma toda...

P - Que dificuldades sentiste então nesta tarefa?

A - Foi na tabela...

P - No preenchimento da tabela...porquê, qual foi a dificuldade?

A - Porque eu não estava a perceber...porque eu metia aqui isto (triângulos) são 3 destes e não metia $\frac{1}{3}$...eu pensava que era para por quantos destes havia aqui...

P - Até podia ser assim...mas depois ficaria a tabela igual na horizontal e na vertical...como lidavas com estas frações? O que significam?

A - Pois...ficava...professor, eu não consegui fazer nada nesta tarefa...era muito difícil e eu pensava que era só para contar o número de triângulos de cada figura...

P - Ok. Não há problema. Obrigado pela tua participação e sinceridade.

A - Sim professor.