



# **Otimização de parâmetros de suspensão utilizando algoritmos genéticos**

Mestrado em Engenharia Automóvel

Iúri Miguel Cassiones da Silva

Leiria, Setembro de 2024



# **Otimização parâmetros de suspensão utilizando algoritmos genéticos**

Mestrado em Engenharia Automóvel

Iúri Miguel Cassiones da Silva

Trabalho de Projeto realizado sob a orientação do Professor Doutor Fernando da  
Conceição Batista e do Professor Olivier Rodrigues Gouveia.

Leiria, Setembro de 2024

# **Originalidade e Direitos de Autor**

O presente relatório de projeto é original, elaborado unicamente para este fim, tendo sido devidamente citados todos os autores cujos estudos e publicações contribuíram para o elaborar.

Reproduções parciais deste documento serão autorizadas na condição de que seja mencionado o Autor e feita referência ao ciclo de estudos no âmbito do qual o mesmo foi realizado, a saber, Curso de Mestrado em Engenharia Automóvel, no ano letivo 2023/2024, da Escola Superior de Tecnologia e Gestão do Instituto Politécnico de Leiria, Portugal, e, bem assim, à data das provas públicas que visaram a avaliação destes trabalhos.

# Agradecimentos

Acima de tudo quero agradecer a Deus que me acompanhou e guiou ao longo de todo o meu percurso acadêmico, tudo o que consegui alcançar até aqui foi graças a Ele.

Agradeço a toda a minha família, em especial, aos meus pais por me apoiarem em todas as minhas decisões e ajudarem a alcançar os meus sonhos. Aos meus amigos deixo também um agradecimento por todos os bons momentos que contribuíram para que eu continuasse a minha caminhada, em especial ao meu grande amigo Diogo Sequeira, por toda a disponibilidade e ajuda prestada para a realização deste trabalho.

Por fim, mas não menos importante, quero agradecer aos meus orientadores: Professor Doutor Fernando da Conceição Batista e Professor Olivier Rodrigues Gouveia, por se terem mostrado sempre prestáveis e disponíveis a me ajudar e contribuindo assim para o sucesso deste trabalho.

# Resumo

Neste estudo é apresentada uma análise detalhada da otimização de sistemas de suspensão num modelo quarter car e num modelo full car de veículos, através de algoritmos genéticos, de modo a minimizar a resposta em aceleração e deslocamento da massa suspensa. Os modelos foram sujeitos a dois tipos de excitação, o primeiro simulando uma lomba na estrada e o outro através de uma função sinusoidal. O algoritmo genético foi introduzido através do software MATLAB®, utilizando bibliotecas já incluídas nativamente no mesmo. Foi criado, para cada um dos modelos de veículo, um código e um diagrama de blocos, desenvolvido em Simulink, onde foi simulado o comportamento de dinâmica vertical de cada um dos modelos e em seguida obtidos os resultados. Os resultados demonstraram melhorias significativas no sistema de suspensão, com reduções até 50,27% e 27,26% da resposta em RMS da aceleração e deslocamento da massa suspensa, respetivamente, com a excitação de lomba e reduções de 16,54% e 17,87% da resposta em RMS da aceleração e deslocamento da massa suspensa, respetivamente, para a excitação de função sinusoidal, destacando assim a eficácia da utilização de algoritmos genéticos na otimização de sistemas de suspensão de veículos, contribuindo para o desenvolvimento de sistemas mais eficientes que contribuam para o melhor conforto e segurança dos veículos.

**Palavras-chave:** Suspensão de veículos, Otimização, Algoritmo Genético, RMS, Constante de mola, Coeficiente de amortecimento.



# Abstract

In this study, a detailed analysis of the optimization of suspension systems in a quarter car and a full car vehicle model is presented, using genetic algorithms to minimize the acceleration and displacement response of the sprung mass. The models were subjected to two types of excitations: the first simulating a road bump and the second using a sinusoidal function. The genetic algorithm was implemented in a MATLAB® environment, utilizing libraries natively included in the platform. For each of the vehicle models, a custom code and a block of diagram were developed in Simulink, where the vertical dynamic behaviour of both models was simulated and the results obtained. The results showed significant improvements in the suspension system, with reductions of up to 50,27% and 27,26% in the RMS response of the acceleration and displacement of the sprung mass, respectively, for the bump excitation, and reductions of 16,54% and 17,87% in the RMS response of the acceleration and displacement of the sprung mass, respectively, for the sinusoidal function excitation. This highlights the effectiveness of using genetic algorithms in optimizing vehicle suspension systems, contributing to the development of more efficient systems that improve vehicle comfort and safety.

**Keywords:** Vehicle Suspension, Optimization, Genetic Algorithm, RMS, Spring Stiffness, Damping Coefficient.

# Índice

<b>Originalidade e Direitos de Autor</b> .....	<b>iii</b>
<b>Agradecimentos</b> .....	<b>iv</b>
<b>Resumo</b> .....	<b>v</b>
<b>Abstract</b> .....	<b>vii</b>
<b>Lista de Figuras</b> .....	<b>x</b>
<b>Lista de tabelas</b> .....	<b>xi</b>
<b>Nomenclatura</b> .....	<b>xii</b>
<b>Siglas</b> .....	<b>xiii</b>
<b>1. Introdução</b> .....	<b>1</b>
<b>1.1. Enquadramento</b> .....	<b>1</b>
<b>1.2. Objetivo</b> .....	<b>1</b>
<b>1.3. Estrutura</b> .....	<b>1</b>
<b>2. Sistemas de suspensão</b> .....	<b>3</b>
<b>2.1. Molas</b> .....	<b>3</b>
<b>2.2. Amortecedores</b> .....	<b>6</b>
<b>2.3. Sistema massa-mola-amortecedor</b> .....	<b>8</b>
2.3.1. Vibração livre .....	9
2.3.2. Vibração forçada .....	10
<b>2.4. Modelos de dinâmica vertical de veículos</b> .....	<b>11</b>
2.4.1. Modelo ¼ carro (2 GDL) .....	11
2.4.2. Modelo ½ carro .....	12
2.4.3. Modelo 7 GDL .....	13
<b>3. Otimização</b> .....	<b>17</b>
<b>3.1. Métodos de otimização baseados em gradientes</b> .....	<b>17</b>
3.1.1. Método da Máxima descida .....	18
3.1.2. Método de Newton .....	19
3.1.3. Método quase-Newton .....	19
3.1.4. Método dos gradientes conjugados .....	19
<b>3.2. Métodos baseados em Meta-Heurística</b> .....	<b>20</b>

3.2.1.	Algoritmos evolutivos .....	20
<b>3.3.</b>	<b>Algoritmo Genético.....</b>	<b>21</b>
<b>3.4.</b>	<b>Operadores Genéticos .....</b>	<b>23</b>
3.4.1.	Seleção.....	23
3.4.2.	Crossover .....	23
3.4.3.	Mutação .....	24
3.4.4.	Técnicas de substituição .....	24
<b>4.</b>	<b>Metodologia.....</b>	<b>26</b>
<b>4.1.</b>	<b>Modelo Quarter Car.....</b>	<b>26</b>
<b>4.2.</b>	<b>Modelo full car .....</b>	<b>29</b>
<b>5.</b>	<b>Apresentação e análise de resultados.....</b>	<b>33</b>
<b>5.1.</b>	<b>Modelo Quarter Car.....</b>	<b>33</b>
5.1.1.	Excitação de lomba.....	33
5.1.2.	Excitação de função sinusoidal.....	37
<b>5.2.</b>	<b>Modelo Full Car.....</b>	<b>41</b>
5.2.1.	Excitação de lomba.....	41
5.2.2.	Excitação de função sinusoidal.....	46
<b>6.</b>	<b>Conclusões .....</b>	<b>52</b>
<b>7.</b>	<b>Trabalhos futuros .....</b>	<b>54</b>
<b>8.</b>	<b>Bibliografia.....</b>	<b>55</b>
	<b>Anexos.....</b>	<b>57</b>

# Lista de Figuras

Figura 1 - Mola como elemento mecânico (W. de Silva Clarence, 2005).....	4
Figura 2 – Lei de Hook, adaptado de (LibreTexts, 2024) .....	4
Figura 3 - Mola de lâminas, adaptada de (Jazar & Marzbani, 2024)) .....	5
Figura 4 - Mola de torção (Jazar & Marzbani, 2024).....	5
Figura 5 – Molas helicoidais não lineares (Jazar & Marzbani, 2024) .....	6
Figura 6 - Amortecedor monotubo e duplo tubo, respetivamente (Marzbani Hormoz & N. Jazar Reza, 2024)7	
Figura 7 – Gráfico de teste de amortecedor (F. Milliken & L. Milliken, 1995).....	8
Figura 8 - Sistema massa mola amortecedor, adaptado de (Marzbani Hormoz & N. Jazar Reza, 2024).....	8
Figura 9 - Sistema massa mola amortecedor em vibração forçada (Jazar & Marzbani, 2024) .....	10
Figura 10 - Modelo de quarter car (Jazar & Marzbani, 2024).....	11
Figura 11 - Modelo “half car” (Marzbani Hormoz & N. Jazar Reza, 2024) .....	12
Figura 12 - Modelo full car de 7 GDL (Marzbani Hormoz & N. Jazar Reza, 2024) .....	14
Figura 13 - Exemplo de função com vários extremos locais (Collete & Siarry, 2003).....	18
Figura 14 - Fluxograma de algoritmo genético (Barbieri Da Cunha et al., 2013).....	22
Figura 15 - Técnica de seleção estocástica (Alhijawi & Awajan, 2023).....	23
Figura 16 - Técnicas de crossover de único ponto (A) e duplo ponto (B) adaptado de (Alhijawi & Awajan, 2023).....	24
Figura 17 - Excitação do sistema (Sousa Suzana, 2016).....	26
Figura 18 – Resposta RMS Aceleração da massa suspensa à excitação lombal .....	33
Figura 19 - Resposta RMS Deslocamento da massa suspensa à excitação lombal .....	34
Figura 20 - Comparação da aceleração entre o modelo quarter car original e otimizado (lombal) .....	35
Figura 21 - Comparação do deslocamento entre o modelo quarter car original e otimizado (lombal).....	36
Figura 22 - Comparação da aceleração entre o modelo quarter car original e otimizado (sinusoidal) .....	38
Figura 23 - Comparação do deslocamento entre o modelo quarter car original e otimizado (sinusoidal) .....	40
Figura 24 - Comparação da aceleração entre o modelo full car original e otimizado (lombal).....	43
Figura 25 - Comparação do deslocamento entre o modelo full car original e otimizado (lombal) .....	45
Figura 26 - Comparação da aceleração entre o modelo full car original e otimizado (sinusoidal) .....	47
Figura 27 - Comparação do deslocamento entre o modelo full car original e otimizado (sinusoidal) .....	48

# Lista de tabelas

Tabela 1 - Propriedades da suspensão do modelo quarter car utilizado .....	27
Tabela 2 - Parâmetros do Algoritmo Genético .....	29
Tabela 3 - Propriedades do veículo full car .....	31
Tabela 4 - Otimização aceleração através do algoritmo genético excitação lombal em modelo quarter car ....	34
Tabela 5 - Otimização deslocamento através do algoritmo genético excitação lombal em modelo quarter car	36
Tabela 6 - Quadro resumo otimização excitação lombal modelo quarter car .....	37
Tabela 7 - Otimização aceleração através do algoritmo genético excitação sinusoidal em modelo quarter car .....	38
Tabela 8 - Otimização deslocamento através do algoritmo genético excitação sinusoidal em modelo quarter car .....	39
Tabela 9 - Quadro resumo otimização excitação sinusoidal modelo quarter car .....	41
Tabela 10 - Otimização aceleração através do algoritmo genético excitação lombal em modelo full car .....	42
Tabela 11 - Otimização deslocamento através do algoritmo genético excitação lombal em modelo full car ...	44
Tabela 12 - Quadro resumo otimização excitação lombal modelo full car .....	46
Tabela 13 - Otimização aceleração através do algoritmo genético excitação sinusoidal em modelo full car .	46
Tabela 14 - Otimização deslocamento através do algoritmo genético excitação sinusoidal em modelo full car .....	48
Tabela 15 - Quadro resumo otimização excitação sinusoidal modelo full car .....	49
Tabela 16 - Quadro final excitação lombal .....	50
Tabela 17 - Quadro final excitação Sinusoidal .....	51

# Nomenclatura

Aceleração [ $m/s^2$ ]	$\ddot{x}$
Amortecimento crítico [ $Ns/m$ ]	$c_c$
Amplitude [m]	$A$
Coefficiente de amortecimento [ $Ns/m$ ]	$c$
Constante de mola [ $N/m$ ]	$k$
Comprimento de onda [m]	$\lambda$
Deslocamento [m]	$x$
Frequência natural [Hz]	$\omega_n$
Massa [kg]	$m$
Razão de amortecimento	$\zeta$
Velocidade [ $m/s$ ]	$\dot{x}$

# Siglas

Centro de Gravidade

CG

Graus de Liberdade

GDL

Root Mean Square

RMS



# 1. Introdução

## 1.1. Enquadramento

O sistema de suspensão dos veículos influencia o seu desempenho, estabilidade e conforto bem como dos seus passageiros. Estes são geralmente compostos por molas e amortecedores, cujos possuem determinadas características, sendo por isso, específicos para certos tipos de estradas. Dependendo do tipo de veículo e de estrada, as suspensões necessitam ser otimizadas para determinados parâmetros que permitam que o veículo possa oferecer um bom desempenho e proporcionar uma melhor experiência de condução para os seus passageiros. No entanto a conjugação de diversas variáveis do sistema de suspensão torna a sua otimização um processo complicado. Novas tecnologias de modelação, simulação e otimização permitem encontrar os melhores parâmetros de suspensão para determinados casos, sejam eles uma condução confortável, uma condução desportiva, uma condução em todo-o-terreno, etc... O algoritmo genético entra como sendo um exemplo de método de otimização capaz de otimizar um sistema de suspensão para diversos tipos de casos, sendo amplamente utilizado em variados problemas de otimização no mundo da engenharia e oferecendo a capacidade de encontrar soluções eficientes para problemas com espaços de pesquisa extensos.

## 1.2. Objetivo

Este estudo é focado na implementação de um tipo de algoritmo de otimização, o algoritmo genético, com a finalidade de criar uma ferramenta capaz de otimizar os sistemas de suspensão de dois modelos distintos: o modelo quarter car e o modelo full car, quanto à resposta em RMS da aceleração e deslocamento da massa suspensa. Estes dois modelos sendo modelos matemáticos representativos da dinâmica vertical de veículos são amplamente utilizados na análise e otimização de sistemas de suspensão automóvel pois permitem simular a resposta vertical do veículo a um determinado tipo de excitação que o mesmo seja sujeito. O objetivo principal deste estudo é utilizar algoritmos genéticos de modo a definir os parâmetros ideais de suspensão, constante de rigidez e coeficiente de amortecimento, que minimizem a resposta em aceleração e deslocamento do chassis do veículo. Este estudo denota o peso deste tipo de algoritmos de otimização na engenharia automóvel proporcionando o desenvolvimento e aprimoramento de sistemas de suspensão automotivos atuais com impacto direto na condução, conforto e segurança do veículo e nos demais passageiros.

## 1.3. Estrutura

No capítulo 2 são apresentadas as bases de um sistema de suspensão, onde é inicialmente introduzido os fundamentos e bases da suspensão, seguido dos elementos que compõem este

sistema bem como a explicação do funcionamento do mesmo. Por fim são apresentados diversos modelos matemáticos que permitem a análise simplificada de dinâmica vertical dos veículos.

No capítulo 3 é apresentado o conceito de otimização bem como alguns dos métodos clássicos de otimização e é explicado o funcionamento do algoritmo genético.

No capítulo 4 é apresentada uma breve explicação da metodologia adotada para este estudo.

No capítulo 5 são apresentados e analisados todos os resultados obtidos neste estudo.

Por fim, no capítulo 6, são dadas as conclusões retiradas deste estudo e no capítulo 7 são sugeridos alguns trabalhos futuros.

## 2. Sistemas de suspensão

A dinâmica de veículos é a área que estuda as forças que atuam num veículo em movimento, além da capacidade do veículo de proporcionar uma condução suave em diferentes tipos de terreno e avalia a capacidade do mesmo acelerar, travar e realizar uma curva em segurança.

Segundo Newton, sabemos que as forças têm 2 componentes, magnitude e direção. Assim como referenciado por (Wallentowitz Henning, 2004), as estradas que utilizamos no nosso dia a dia têm irregularidades e quando estas são pequenas, são facilmente compensadas pela elasticidade dos pneus, no entanto, irregularidades de maior dimensão, como um buraco ou lomba na estrada provocam, na roda, uma força perpendicular à superfície da estrada, fazendo com que esta tenha uma aceleração vertical. Geralmente, sem um sistema de suspensão, esta energia seria transferida para o chassi do carro, fazendo com que o mesmo se mova na mesma direção da força aplicada, para cima, realizando um pequeno salto, e assim perdendo a aderência do pneu à estrada, posteriormente, devido à ação da gravidade, todo o carro é atraído novamente para baixo, provocando um impacto na estrada.

O desenvolvimento de um sistema de suspensão é algo fundamental para o veículo, pois é este que garante ao veículo segurança, conforto e estabilidade durante a condução. A suspensão automóvel é, de modo geral, composta por dois elementos mecânicos sendo estes a mola e o amortecedor. As molas são um elemento bastante eficaz a absorver a energia transmitida pelas irregularidades da estrada, no entanto, não são eficientes a dissipá-la, assim sendo, é necessário o amortecedor que é capaz de transformar a energia cinética em energia térmica com a ajuda de um fluido hidráulico presente no interior do mesmo. As molas são responsáveis por suportar o peso do veículo, por sua vez, os amortecedores são responsáveis pelo controlo do movimento das rodas evitando assim oscilações excessivas (Wallentowitz Henning, 2004).

### 2.1. Molas

A mola é um elemento mecânico capaz de armazenar energia potencial de um sistema mecânico. A inércia desta num sistema é geralmente pequena, comparada com os restantes elementos, pelo que, segundo (Kelly S. Graham, 2012), não é considerada, portanto, pode-se assumir que a força aplicada em ambas as extremidades da mola é igual.

Na Figura 1, está representado um sistema de uma mola, sem qualquer massa aplicada, no qual é aplicada uma força.

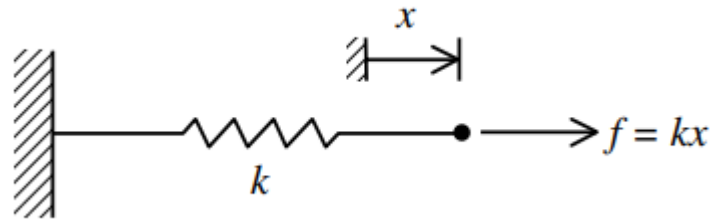


Figura 1 - Mola como elemento mecânico (W. de Silva Clarence, 2005)

Uma força  $f$ , aplicada numa das extremidades da mola, resultará numa deformação  $x$  da mesma (extensão ou compressão), dada pela Lei de Hooke, equação (1):

$$F = kx \quad (1)$$

Na Figura 2 abaixo, podemos ver representado este caso de linearidade, dada pela Lei de Hooke:

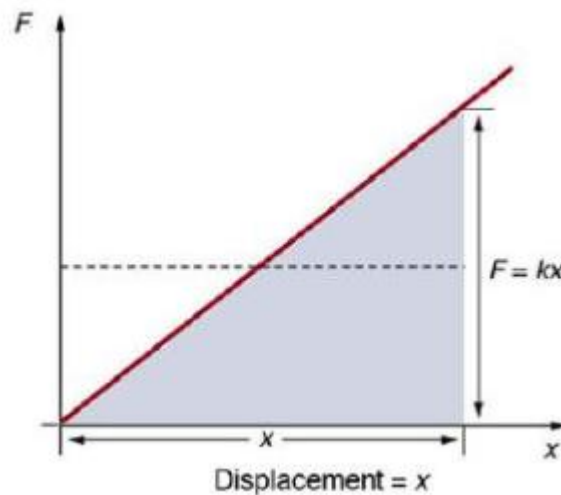


Figura 2 – Lei de Hooke, adaptado de (LibreTexts, 2024)

Este comportamento linear pode ser admitido em diversas situações, desde que a deformação  $x$  possua valores baixos, pois na verdade e de modo geral as molas possuem um comportamento não linear (Kelly S. Graham, 2012).

A finalidade principal das molas em sistemas de suspensão de veículos é de estender a duração à qual a energia é absorvida e, conseqüentemente, libertada. Existem diversos tipos de molas utilizadas em sistemas de suspensão automóvel, cada uma com as suas próprias características.

As molas de lâminas consistem num conjunto de lâminas metálicas, com diversos comprimentos, colocadas umas sobre as outras como demonstrado na Figura 3:

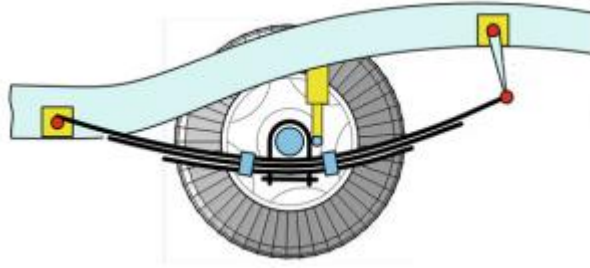


Figura 3 - Mola de lâminas, adaptada de (Jazar & Marzbani, 2024)

Quando o veículo encontra um buraco ou uma lombada na estrada, causando um impacto na roda, é aplicada uma carga sobre as lâminas fazendo com que estas dobrem e fiquem achatadas, aumentando a rigidez à medida que mais lâminas entram em contacto (Jazar & Marzbani, 2024). A capacidade de suportar cargas muito elevadas faz com que este seja um tipo de mola bastante utilizado em veículos de carga, como camiões ou veículos “off-road”

As molas de torção consistem em uma barra presa numa das pontas ao chassi do veículo e a outra conectada a um braço de controlo onde é aparafusada a roda, que permite o movimento de torção quando uma carga é aplicada, absorvendo parte da energia do impacto. Na Figura 4 está representado um esquema deste tipo de mola:

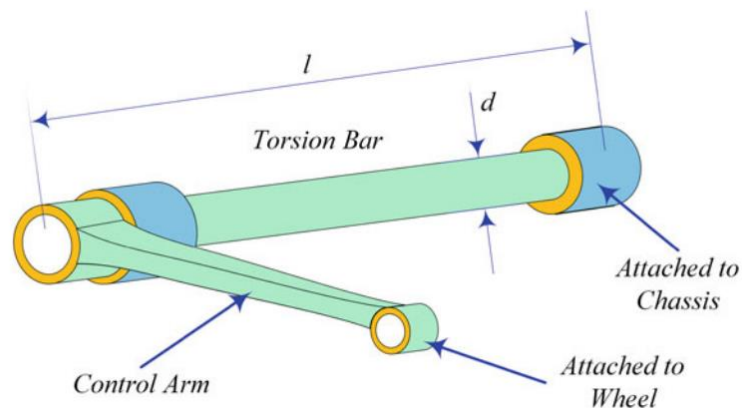


Figura 4 - Mola de torção (Jazar & Marzbani, 2024)

Barras mais pequenas e de maior diâmetro conseguem suportar maiores cargas do que barras mais compridas e de menor diâmetro. Geralmente são mais utilizadas na suspensão do eixo da frente dos veículos (Jazar & Marzbani, 2024).

Por fim, as molas helicoidais são formadas ao enrolar um fio metálico em forma de hélice, sendo leves e com boa capacidade de absorção de energia. Quando comprimidas absorvem energia que, posteriormente, libertam na fase de expansão retornando á forma original. Devido ao facto de serem uma opção leve, são as mais comuns em sistemas de suspensão modernos.

Podem assumir diversas formas, entre elas, cilíndrica, convexa, cônica ou côncava, sendo as cilíndricas de secção circular as mais comuns. Estas apresentam um comportamento quase linear, podendo ser admitidas como tal (Jazar & Marzbani, 2024). Algumas molas helicoidais com comportamento não linear são apresentadas na Figura 5 .

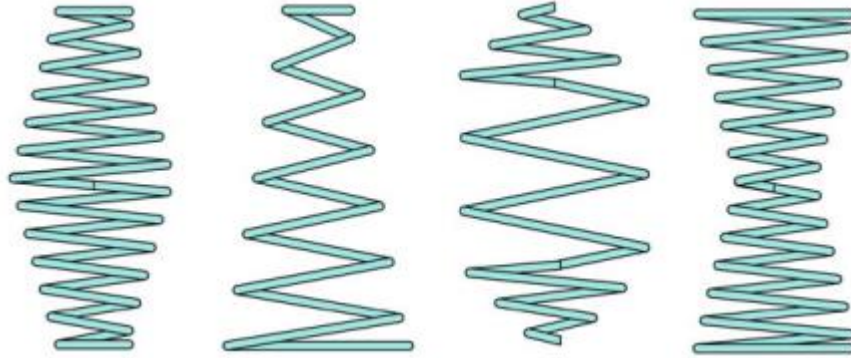
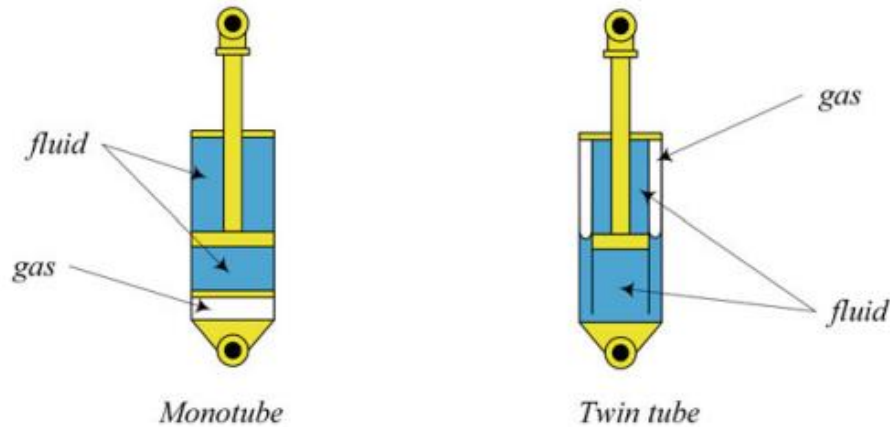


Figura 5 – Molas helicoidais não lineares (Jazar & Marzbani, 2024)

## 2.2. Amortecedores

De modo geral, os amortecedores utilizados no ramo automóvel absorvem energia proveniente dos impactos com as irregularidades do terreno que o veículo atravessa e convertem-na em forma de calor, que posteriormente, é dissipado para a envolvente (Kashem Saad et al., 2018). A parte superior do amortecedor é montada no chassis do veículo, ou seja, à massa suspensa, enquanto que a parte de baixo é conectada à roda, massa não suspensa. A parte de cima é composta por um pistão com pequenos orifícios que se movimenta verticalmente dentro de um cilindro, pertencente à parte de baixo do amortecedor. Estes pequenos orifícios permitem a passagem de um fluido sob pressão à medida que o mesmo se desloca em ambos os sentidos do seu movimento. Quando o veículo encontra uma irregularidade na estrada que provoque uma compressão do sistema de suspensão, o pistão é empurrado pelo cilindro, comprimindo o fluido hidráulico e face à resistência provocada pela passagem do fluido pelos pequenos orifícios, o movimento vertical da suspensão é abrandado, reduzindo a libertação da energia através de movimentos indesejados da mola. Sem um elemento de amortecimento, a mola, ao absorver energia das irregularidades da estrada, estaria constantemente a comprimir e estender de forma a libertar essa energia a uma taxa descontrolada até que eventualmente parasse (Jazar & Marzbani, 2024).

Amortecedores a ar e amortecedores com fluido hidráulico são os mais populares na indústria automotiva. A energia é dissipada através de um gás ou líquido pressurizados presentes dentro do amortecedor. Na Figura 6 está representado o esquema dos dois tipos de amortecedores mais comuns nos automóveis, mono tubo e duplo tubo, respetivamente (Marzbani Hormoz & N. Jazar Reza, 2024).



**Figura 6 - Amortecedor monotubo e duplo tubo, respectivamente** (Marzbani Hormoz & N. Jazar Reza, 2024)

Em termos de funcionalidade, ambas as configurações são boas opções, apenas apresentam algumas pequenas diferenças entre eles. No caso do mono tubo, para além do pistão que separa as duas câmaras de fluido dentro do cilindro, existe ainda uma peça que funciona como uma espécie de membrana, separando o fluido hidráulico e criando mais uma câmara cheia de um gás compressível, que auxilia no processo de amortecimento compensando o movimento de fluido entre as câmaras superior e inferior. No caso da configuração duplo tubo, existem dois tubos dentro da carcaça cilíndrica do amortecedor e o pistão move-se dentro do cilindro interior, quando a suspensão sofre um impacto o pistão empurra o fluido hidráulico para o cilindro externo onde por fim encontra uma zona com gás, partilhando este a mesma câmara que o fluido hidráulico (Jazar & Marzbani, 2024).

O amortecedor possui um ciclo de extensão e outro de compressão, sendo que, o primeiro acontece quando o pistão se desloca para cima e o segundo quando se desloca para baixo. De forma geral, os carros que encontramos no dia a dia detêm um ciclo de extensão com maior resistência do que o ciclo de compressão, isto para que, o amortecedor se possa ajustar às condições do terreno e controlar de melhor forma os movimentos indesejados da suspensão (Jazar & Marzbani, 2024).

De acordo com (W. de Silva Clarence, 2005) o funcionamento de um amortecedor aproxima-se a um comportamento linear, caso este seja um amortecedor viscoso, o seu funcionamento implica a utilização de um fluido viscoso, tal acontece nos amortecedores hidráulicos mencionados acima. Neste caso pode-se dizer, considerando o coeficiente de amortecimento “c” como uma constante, a força de amortecimento é proporcional à velocidade relativa do pistão (Marzbani Hormoz & N. Jazar Reza, 2024). A equação que traduz matematicamente este problema é apresentada na Equação (2) :

$$F = c\dot{x} \quad (2)$$

Na Figura 7 abaixo, é apresentado o resultado de um teste de amortecedor, relacionando a força, com a velocidade de resposta do mesmo (F. Milliken & L. Milliken, 1995), onde é possível visualizar o seu comportamento muito perto da linearidade. Durante o teste, o mesmo foi sujeito a uma série de movimentos sinusoidais, todos com a mesma amplitude, no entanto variando em frequência, com esta a aumentar durante o teste.

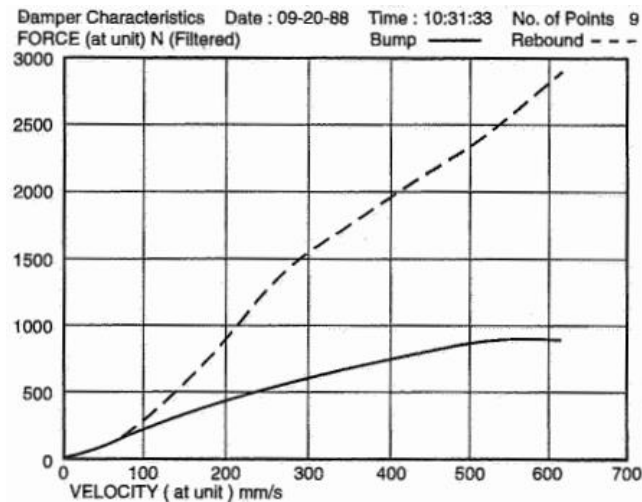


Figura 7 – Gráfico de teste de amortecedor (F. Milliken & L. Milliken, 1995)

### 2.3.Sistema massa-mola-amortecedor

O sistema massa-mola-amortecedor é o modelo mais simples de análise de vibrações mecânicas. Este consiste numa massa suspensa,  $m$ , conectada a uma mola com uma constante de rigidez,  $k$  e um amortecedor com um coeficiente de amortecimento,  $c$ , representado na Figura 8:

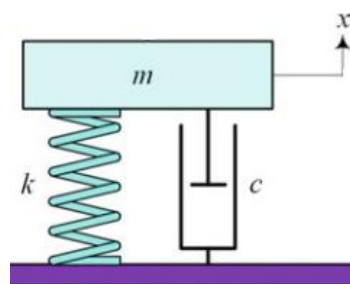


Figura 8 - Sistema massa mola amortecedor, adaptado de (Marzbani Hormoz & N. Jazar Reza, 2024)

Devido à sua simplicidade, este modelo de apenas um grau de liberdade (GDL) torna-se bastante versátil, podendo ser aplicado em diversos casos de engenharia, incluindo a análise de vibrações num veículo, sendo a massa suspensa representativa do chassi do veículo e os restantes elementos do sistema componentes do sistema de suspensão. De modo a manter a simplicidade do modelo a flexibilidade do pneu pode ser ignorada (Marzbani Hormoz & N. Jazar Reza, 2024), pelo que, a sua massa e rigidez não é considerada e o comportamento da mola e do

amortecedor é considerado linear, pelo que se podem aplicar as Equações (1) e (2), respetivamente, referidas anteriormente como representativas deste tipo de comportamento.

### 2.3.1. Vibração livre

Vibração livre acontece na ausência de uma força externa que perturbe o sistema. De acordo com (Kelly S. Graham, 2012) as equações de movimento que descrevem o problema podem ser obtidas aplicando a segunda Lei de Newton, Equações (3) e (4):

$$\sum F = m\ddot{x} \quad (3)$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (4)$$

Deslocando a massa do seu ponto de equilíbrio e posteriormente soltando-a, fará com que o sistema vibre a uma determinada frequência, denominada de frequência natural do sistema. Esta propriedade do sistema é previamente conhecida e pode ser calculada a partir do coeficiente de rigidez da mola e da massa do sistema Equação (5):

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (5)$$

Outro parâmetro importante do sistema é o amortecimento crítico, “ $c_c$ ”. Dado uma deslocação “ $x$ ” da massa suspensa, o valor de coeficiente de amortecimento que permite a massa voltar ao seu estado de equilíbrio mais rapidamente sem oscilar é denominado de amortecimento crítico, como referenciado por (F. Milliken & L. Milliken, 1995) e pode ser expresso pela Equação (6):

$$c_c = 2m\omega_n \quad (6)$$

É ainda possível relacionar o coeficiente de amortecimento com o valor de coeficiente de amortecimento crítico, de modo a obter um parâmetro adimensional que nos diz o quão amortecido é o sistema através da Equação (7). Este parâmetro é denominado de razão de amortecimento “ $\zeta$ ”.

$$\zeta = \frac{c}{c_c} \quad (7)$$

O sistema é avaliado quanto ao seu nível de amortecimento da seguinte forma:

- $0 < \zeta < 1$ , o sistema está sub-amortecido;
- $\zeta = 1$ , o sistema está criticamente amortecido;
- $\zeta > 1$ , o sistema está sobre-amortecido.

### 2.3.2. Vibração forçada

Quando o sistema sai do seu estado de equilíbrio devido à ação de uma força externa este começa a vibrar de forma forçada. O estudo do sistema quando este é sujeito a excitações externas é de caráter importante, de modo a analisar como este irá responder quando é perturbado. Na Figura 9, está representado um problema de vibração forçada, inicialmente no seu estado de equilíbrio (a), quando este é sujeito a uma força externa (b) e o diagrama de corpo livre do sistema (c).

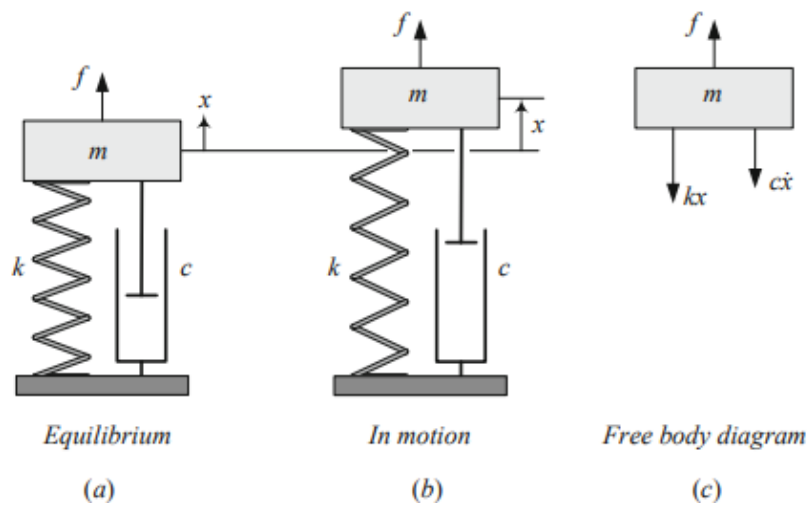


Figura 9 - Sistema massa mola amortecedor em vibração forçada (Jazar & Marzbani, 2024)

As equações de movimento que descrevem o problema de vibração forçada podem ser obtidas aplicando novamente segunda Lei de Newton, Equação (8):

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t) \quad (8)$$

As estradas por onde os veículos circulam têm algumas irregularidades, incluindo alguns buracos, pelo que a superfície da estrada provoca uma excitação no sistema de suspensão do carro, este é um exemplo do que pode ser uma função  $F(t)$ , força externa de excitação do sistema, tal como aparece na equação (8). Deste modo os elementos pertencentes ao sistema de suspensão do veículo necessitam ser otimizados para terem boa performance sobre estas condições. Os modelos de veículos utilizados para o estudo, análise e otimização de sistemas de suspensão são apresentados no capítulo seguinte.

## 2.4. Modelos de dinâmica vertical de veículos

Um modelo numérico nada mais é que uma representação matemática que nos permite encontrar uma solução para um determinado problema de um sistema mecânico. Em casos de equações complexas, cuja solução exata é impossível de alcançar, é comum utilizar-se ferramentas computacionais capazes de determinar uma solução aproximada do problema.

Diversos modelos numéricos foram estudados com a finalidade de analisar a dinâmica vertical da suspensão nos veículos e os principais modelos utilizados são apresentados nos subcapítulos seguintes.

### 2.4.1. Modelo ¼ carro (2 GDL)

O modelo mais utilizado de forma simplificada, de acordo com (Jazar & Marzbani, 2024), é denominado de “quarter car model”. Este modelo de dinâmica vertical de veículo simplifica todo o problema, dividindo-o por partes, ou seja, analisando o sistema de cada roda de forma isolada. Na Figura 10 encontra-se o modelo representado:

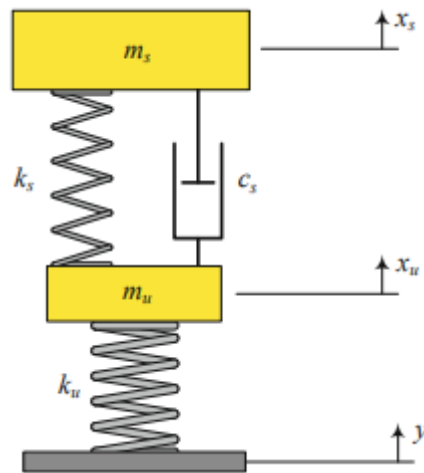


Figura 10 - Modelo de quarter car (Jazar & Marzbani, 2024)

Como se verifica na Figura 10, estão representadas duas massas, uma suspensa e outra não suspensa. A diferença deste modelo para o modelo simples de massa mola e amortecedor é que, quando aplicado ao estudo de suspensão automóvel, a rigidez do pneu e a massa da roda são tidos em conta na sua análise. A massa suspensa representa ¼ da massa do veículo completo e a massa não suspensa representa uma das rodas do veículo. Um conjunto de mola e amortecedor suportam a massa suspensa, sendo representativos do sistema de suspensão do veículo enquanto que a massa não suspensa está conectada ao solo através de uma outra mola com uma determinada rigidez,  $k$ , que representa a rigidez do pneu.

As equações do movimento que traduzem o comportamento deste modelo são, como referenciado por (Jazar & Marzbani, 2024) as Equações (9) e (10):

$$m_s \ddot{x}_s = -k_s(x_s - x_u) - c_s(\dot{x}_s - \dot{x}_u) \quad (9)$$

$$m_u \ddot{x}_u = k_s(x_s - x_u) + c_s(\dot{x}_s - \dot{x}_u) - k_u(x_u - y) \quad (10)$$

Este modelo representa a dinâmica da suspensão de uma roda individual do veículo.

Foi elaborado um estudo por (Sousa Suzana, 2016) cujo objetivo foi a otimização dos parâmetros de suspensão através da utilização de algoritmo genético, para um modelo de dois graus de liberdade (quarter car model), onde foi analisada a resposta vertical em “RMS-Root mean square value” do deslocamento e aceleração da massa suspensa, em três situações distintas: um impulso, um degrau, e por fim, um perfil de pista baseado numa função de densidade Gaussiana aleatória. Foram desprezados efeitos de escorregamento bem como a influência das demais rodas com a pista.

#### 2.4.2. Modelo ½ carro

O modelo “half-car”, também por vezes denominado de “bicycle model”, é o modelo mais simples de representação de veículo com 4 GDL, que introduz “pitch”, movimento de inclinação do veículo no eixo longitudinal (Marzbani Hormoz & N. Jazar Reza, 2024). Com a introdução desta variável ao modelo é possível determinar o ângulo de inclinação do veículo durante a sua condução. Este modelo analisa a suspensão frontal e traseira do veículo, mas apenas de um dos lados. Como referido acima este modelo apresenta 4 GDL, dois para o chassi do veículo, sendo eles indicados pelas coordenadas  $x$  (deslocamento vertical do chassi do veículo) e  $\theta$  (“pitch”), sendo os outros dois graus de liberdade para cada uma das rodas,  $x_1$  (deslocamento vertical da roda dianteira) e  $x_2$  (deslocamento vertical da roda traseira). Na Figura 11 está apresentado um esquema do modelo em questão:

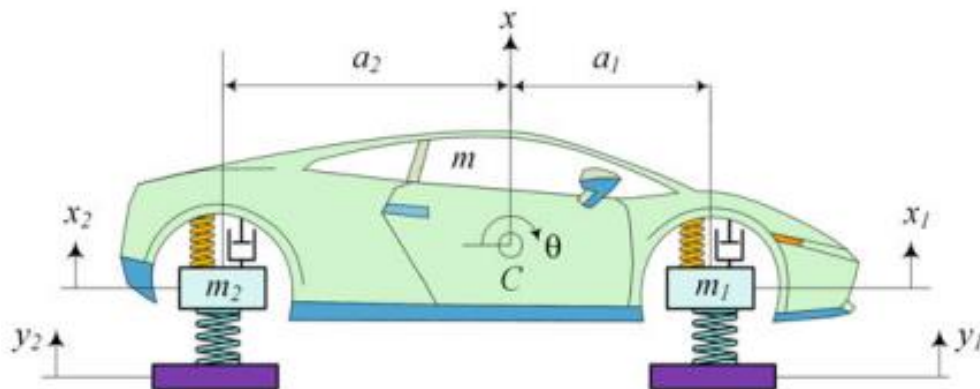


Figura 11 - Modelo “half car” (Marzbani Hormoz & N. Jazar Reza, 2024)

O chassi do veículo é representado como um corpo rígido. A sua massa,  $m$ , representa metade da massa total do veículo e o momento de inércia lateral,  $I_y$ , representa também metade

do momento de inércia total do veículo. As massas  $m_1$  e  $m_2$  representam as massas da roda dianteira e traseira, respectivamente. A suspensão tanto à frente, como atrás, conta com um amortecedor e uma mola. A rigidez do pneu é contabilizada e representada por  $k_t$ . As variáveis  $a_1$  e  $a_2$  representam as distâncias do eixo dianteiro e traseiro ao centro de gravidade do veículo, respectivamente.

As equações que representam o movimento do chassi, nomeadamente o seu deslocamento vertical e lateral do veículo, são apresentadas nas Equações (11) e (12), respectivamente.

$$m\ddot{x} + c_1(\dot{x} - \dot{x}_1 - a_1\dot{\theta}) + c_2(\dot{x} - \dot{x}_2 + a_2\dot{\theta}) + k_1(x - x_1 - a_1\theta) + k_2(x - x_2 + a_2\theta) = 0 \quad (11)$$

$$I_y\ddot{\theta} - a_1c_1(\dot{x} - \dot{x}_1 - a_1\dot{\theta}) + a_2c_2(\dot{x} - \dot{x}_2 + a_2\dot{\theta}) - a_1k_1(x - x_1 - a_1\theta) + a_2k_2(x - x_2 + a_2\theta) = 0 \quad (12)$$

O movimento vertical das rodas dianteira e traseira do modelo são representadas pelas equações ((13) e ((14), respectivamente:

$$m_1\ddot{x}_1 - c_1(\dot{x} - \dot{x}_1 - a_1\dot{\theta}) - k_1(x - x_1 - a_1\theta) + k_{t_1}x_1 = k_{t_1}y_1 \quad (13)$$

$$m_2\ddot{x}_2 - c_2(\dot{x} - \dot{x}_2 + a_2\dot{\theta}) - k_2(x - x_2 + a_2\theta) + k_{t_2}x_2 = k_{t_2}y_2 \quad (14)$$

Um modelo “half car”, semelhante a este apresentado anteriormente, foi utilizado por (Dogruer C.U., 2022) com o objetivo de otimização dos parâmetros de suspensão, nomeadamente constante de rigidez da mola e coeficiente de amortecimento do amortecedor, para minimização de ruído, ou seja, eliminação do efeito das pequenas vibrações recorrentes ao longo da condução.

### 2.4.3. Modelo 7 GDL

O modelo “full car” é também conhecido como o modelo de vibração generalizado de um veículo, incluindo na sua análise o “pitch” e “roll” (movimento de rotação do veículo em torno do eixo longitudinal). Este movimento de “roll” acontece frequentemente quando sujeito a forças laterais, nomeadamente em curvas. O modelo matemático de “full car” mais simples incorpora 7 GDL, três para o chassi de veículo, “pitch”, “roll” e deslocamento vertical do mesmo e outros

quatro graus de liberdade, um para cada uma das rodas. Na Figura 12, está representado o modelo em questão:

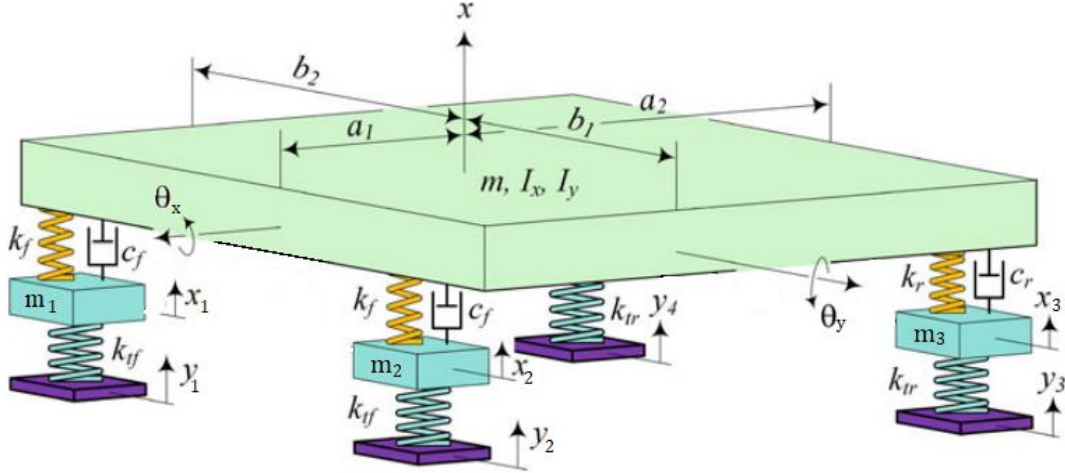


Figura 12 - Modelo full car de 7 GDL (Marzbani Hormoz & N. Jazar Reza, 2024)

Todo o veículo é representado como um corpo rígido de massa,  $m$ , sujeito a um momento de inércia no eixo longitudinal e lateral  $I_{xx}$  e  $I_{yy}$ , respetivamente. As suas rodas da frente possuem massa,  $m_1$  e  $m_2$ , as traseiras  $m_3$  e  $m_4$ , sendo que, para os pneus apenas é contabilizado a sua rigidez como  $k_{tf}$  e  $k_{tr}$ , para os dianteiros e traseiros, respetivamente.

Como forma de simplificação é comum adotar que a roda da direita tenha os mesmos parâmetros de suspensão, “k” e “c”, que a roda da esquerda, assim sendo,  $k_1$  e  $k_2$ , são iguais e denominados de  $k_f$  e no eixo traseiro,  $k_3$  e  $k_4$ , passa a ser  $k_r$ , o mesmo acontece para os coeficientes de amortecimento das rodas e eixos em questão, obtendo assim um conjunto de parâmetros para o eixo da frente e outro conjunto para o eixo traseiro. As variáveis  $a_1$  e  $a_2$  representam as distâncias do eixo dianteiro e traseiro ao centro de gravidade do veículo, respetivamente, enquanto  $b_1$  e  $b_2$  representam a distância que as rodas do lado direito e esquerdo, respetivamente, se encontram do centro de gravidade do veículo.

As equações que representam o movimento do chassi, nomeadamente o seu deslocamento vertical, “pitch” e o “roll” são apresentadas nas Equações (15), (16) e (17), respetivamente.

$$\begin{aligned}
 m_c \ddot{x}_c = & k_f (x_1 - (-a_1 \theta_y - b_2 \theta_x + x_c)) + c_f (\dot{x}_1 - (-a_1 \dot{\theta}_y - b_2 \dot{\theta}_x + \dot{x}_c)) \\
 & + k_f (x_2 - (-a_1 \theta_y + b_1 \theta_x + x_c)) + c_f (\dot{x}_2 - (-a_1 \dot{\theta}_y + b_1 \dot{\theta}_x + \dot{x}_c)) \\
 & + k_r (x_3 - (a_2 \theta_y + b_1 \theta_x + x_c)) + c_r (\dot{x}_3 - (a_2 \dot{\theta}_y + b_1 \dot{\theta}_x + \dot{x}_c)) \\
 & + k_r (x_4 - (a_2 \theta_y - b_2 \theta_x + x_c)) + c_r (\dot{x}_4 - (a_2 \dot{\theta}_y - b_2 \dot{\theta}_x + \dot{x}_c))
 \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned}
 I_{yy}\ddot{\theta}_y = & a_2 \left[ k_r \left( x_3 - (a_2\theta_y + b_1\theta_x + x_c) \right) + c_r \left( \dot{x}_3 - (a_2\dot{\theta}_y + b_1\dot{\theta}_x + \dot{x}_c) \right) \right. \\
 & + k_r \left( x_4 - (a_2\theta_y - b_2\theta_x + x_c) \right) + c_r \left( \dot{x}_4 - (a_2\dot{\theta}_y - b_2\dot{\theta}_x + \dot{x}_c) \right) \left. \right] \\
 & - a_1 \left[ k_f \left( x_1 - (-a_1\theta_y - b_2\theta_x + x_c) \right) \right. \\
 & + c_f \left( \dot{x}_1 - (-a_1\dot{\theta}_y - b_2\dot{\theta}_x + \dot{x}_c) \right) + k_f \left( x_2 - (-a_1\theta_y + b_1\theta_x + x_c) \right) \\
 & \left. + c_f \left( \dot{x}_2 - (-a_1\dot{\theta}_y + b_1\dot{\theta}_x + \dot{x}_c) \right) \right] \quad (16)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{xx}\ddot{\theta}_x = & b_1 \left[ k_f \left( x_2 - (-a_1\theta_y + b_1\theta_x + x_c) \right) + c_f \left( \dot{x}_2 - (-a_1\dot{\theta}_y + b_1\dot{\theta}_x + \dot{x}_c) \right) \right. \\
 & + k_r \left( x_3 - (a_2\theta_y + b_1\theta_x + x_c) \right) + c_r \left( \dot{x}_3 - (a_2\dot{\theta}_y + b_1\dot{\theta}_x + \dot{x}_c) \right) \left. \right] \\
 & - b_2 \left[ k_f \left( x_1 - (-a_1\theta_y - b_2\theta_x + x_c) \right) \right. \\
 & + c_f \left( \dot{x}_1 - (-a_1\dot{\theta}_y - b_2\dot{\theta}_x + \dot{x}_c) \right) + k_r \left( x_4 - (a_2\theta_y - b_2\theta_x + x_c) \right) \\
 & \left. + c_r \left( \dot{x}_4 - (a_2\dot{\theta}_y - b_2\dot{\theta}_x + \dot{x}_c) \right) \right] \quad (17)
 \end{aligned}$$

O movimento vertical de cada uma das rodas do modelo são representadas pelas equações (18), (19), (20) e (21):

$$\begin{aligned}
 m_1\ddot{x}_1 + k_f \left( x_1 - (-a_1\theta_y - b_2\theta_x + x_c) \right) + c_f \left( \dot{x}_1 - (-a_1\dot{\theta}_y - b_2\dot{\theta}_x + \dot{x}_c) \right) + k_{tf}x_1 \\
 = k_{tf}y_1 \quad (18)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 m_2\ddot{x}_2 + k_f \left( x_2 - (-a_1\theta_y + b_1\theta_x + x_c) \right) + c_f \left( \dot{x}_2 - (-a_1\dot{\theta}_y + b_1\dot{\theta}_x + \dot{x}_c) \right) + k_{tf}x_2 \\
 = k_{tf}y_2 \quad (19)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 m_3\ddot{x}_3 + k_r \left( x_3 - (a_2\theta_y + b_1\theta_x + x_c) \right) + c_r \left( \dot{x}_3 - (a_2\dot{\theta}_y + b_1\dot{\theta}_x + \dot{x}_c) \right) + k_{tf}x_3 \\
 = k_{tf}y_3 \quad (20)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 m_4\ddot{x}_4 + k_r \left( x_4 - (a_2\theta_y - b_2\theta_x + x_c) \right) + c_r \left( \dot{x}_4 - (a_2\dot{\theta}_y - b_2\dot{\theta}_x + \dot{x}_c) \right) + k_{tf}x_4 \\
 = k_{tf}y_4 \quad (21)
 \end{aligned}$$

Este modelo de “full car” permite analisar o comportamento de veículos em condução, englobando movimentos nos três eixos x, y e z do veículo, sendo possível analisar e estudar diferentes tipos de movimentos, sejam eles verticais, laterais, etc... Assim sendo torna-se um modelo confiável de análise do comportamento global do veículo para o estudo e otimização de sistemas de suspensão. Um estudo realizado por (Maselena Andino et al., 2018) utilizando este modelo permitiu obter resultados eficazes na otimização de sistemas de suspensão.

Existem ainda alguns modelos com mais graus de liberdade, o que implica maior complexidade, nível computacional e conseqüentemente maior tempo de simulação, o que pode tornar um pouco inviável a sua utilização para a análise de certos problemas.

### 3. Otimização

Otimização pode ser definida pela ciência que determina a melhor, ou as melhores soluções, para um determinado problema matemático que, geralmente, representam um sistema físico real. Engloba aspectos tais como, o estudo dos critérios ótimos de resolução do problema, a determinação de algoritmos de solução, o estudo da sua estrutura bem como a experimentação computacional destes métodos (Fletcher Roger, 1987).

O objetivo da otimização de problemas é identificar a combinação ideal, dentro de um conjunto de variáveis  $x$ , que minimize, ou em alguns casos, maximize, uma determinada função objetivo  $f(x)$ , (Gouvêa, 2016).

Diversos problemas de otimização são classificados consoante o tipo de função e variáveis envolvidas, existindo a possibilidade de serem impostas restrições ao problema ou não. O problema é considerado contínuo quando as suas variáveis assumem um valor dentro de um determinado intervalo contínuo, por exemplo, uma variável que represente o tempo. Por outro lado, é considerado discreto caso as suas variáveis tomem valores discretos. Um problema pode ainda ser classificado como linear ou não linear dependendo do tipo de função a ser otimizada.

De acordo com (Fletcher Roger, 1987), de modo geral, um problema de otimização simples, pode ser dado por:

Minimizar:  $f(x)$

$$\text{Restrições: } \begin{cases} h_i(x) = 0, & i = 1, 2, \dots, m \\ g_j(x) \leq 0, & j = 1, 2, \dots, r \\ x \in \Omega \end{cases}$$

Nesta formulação,  $x$ , é um vetor de “n” dimensões de valores desconhecidos,  $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ , e  $\{f, h_i \text{ e } g_j\}$  são funções de valores reais que dependem das variáveis de  $x$ . O conjunto  $\Omega$  representa todos os valores possíveis de  $x$  que satisfazem as restrições do problema.

#### 3.1. Métodos de otimização baseados em gradientes

Os métodos clássicos de otimização recorrem a procedimentos iterativos de modo a encontrar o valor de  $x$ , que represente o menor valor da função objetivo  $f(x)$ . O ponto de partida é escolhido pelo utilizador ou pode ser também definido de maneira arbitrária, sendo gerada uma sequência de soluções para o problema através da função de objetivo. A direção que o algoritmo irá adotar para testar novos valores das variáveis é determinada por uma técnica de pesquisa linear, a qual, segue uma direção de descida, na procura do mínimo local da função (M. Pardalos & G. C. Resende, 2002).

O estudo realizado por (Thoresson, 2009) teve a finalidade de otimizar o sistema de suspensão de um veículo “off-road” através da utilização da aproximação a um método de otimização baseado em gradientes de modo a melhorar o conforto e também a condução do veículo em terrenos irregulares. Para otimização do conforto baseou o seu estudo num modelo de “half-car”, já para a otimização da condução foi utilizado um modelo de “full car”. As variáveis utilizadas na otimização do conforto foram as *Root Mean Square* “RMS” das acelerações verticais do condutor e passageiro e no caso da condução foram minimizados o primeiro valor mais alto do ângulo de “body roll” e também a “RMS” da velocidade angular do mesmo. Os resultados obtidos através da otimização foram em seguida validados através da comparação com resultados experimentais e alcançaram uma excelente correlação entre estes e os modelos de análise matemáticos.

São métodos de pesquisa local, simples, geralmente rápidos e precisos, pelo que não necessitam de elevados recursos computacionais para obter resultados fiáveis (M. Pardalos & G. C. Resende, 2002). A existência de vários máximos, ou mínimos locais, dificulta a otimização através deste tipo de métodos, pois, geralmente, a solução de otimização fica “presa” num destes pontos assumindo que é a melhor solução para o problema, isto pode ser evitado, caso sejam utilizados vários pontos iniciais no processo iterativo e avaliando a sua condição com a função objetivo. Na Figura 13, é possível visualizar o caso de uma função, que exemplifica o problema deste tipo de métodos, a existência de vários extremos locais.

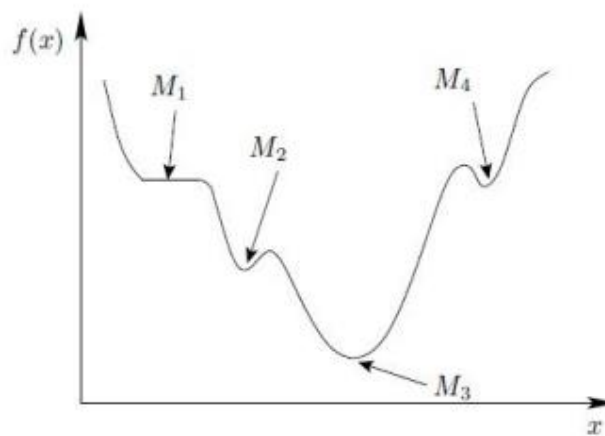


Figura 13 - Exemplo de função com vários extremos locais (Collete & Siarry, 2003)

### 3.1.1. Método da Máxima descida

Este método é um dos mais antigos, sendo, portanto, dos mais simples. Baseia-se na pesquisa na direção contrária à do gradiente da função objetivo, ou seja, este gradiente indica a direção onde o crescimento da função é mais acentuado, pelo que, a pesquisa é realizada no sentido oposto, de modo a encontrar o mínimo da função. O processo iterativo é realizado com um determinado passo entre iterações (Nocedal & J. Wright, 2006).

O tamanho do passo é importante, este não deve ser muito grande, pois o algoritmo pode não encontrar o mínimo global e apenas mínimos locais, nem deve ser muito pequeno de modo a demorar imenso tempo a encontrar uma solução.

O processo iterativo é realizado até que o gradiente seja pequeno o suficiente para se considerar que o mínimo da função foi alcançado. O critério de paragem também pode ser definido através de um número máximo de iterações ou quando a variação do valor da função em iterações sucessivas é pequeno e abaixo de um valor determinado pelo utilizador.

### **3.1.2. Método de Newton**

A ideia principal deste método é aproximar a função objetivo a uma função quadrática, modo iterativo, com a finalidade de minimizar a função objetivo. Analisando a cada iteração a segunda derivada de determinado ponto de uma curva da função é possível determinar qual o sentido de descida da mesma, de modo a encontrar o mínimo da função. Para funções com várias variáveis, utiliza-se a matriz Hessiana, capaz de calcular as segundas derivadas de todas as variáveis envolvidas em simultâneo, de modo a calcular um ponto que esteja mais próximo do mínimo da função.

Este método pode convergir para o mínimo local de uma função quadrática com apenas uma iteração. No entanto, para funções não quadráticas não é possível garantir que a utilização deste método seja eficaz a convergir para o mínimo da função ainda que com um elevado número de iterações envolvidas. Caso a função objetivo seja uma boa aproximação a uma função quadrática, então rapidamente se chegará a uma conclusão, dependendo sempre da escolha do ponto inicial de pesquisa.

### **3.1.3. Método quase-Newton**

O método quase-Newton apareceu com o intuito de não ser necessário calcular a matriz Hessiana, como apresenta o método Newton, mas realizar uma aproximação da sua inversa. Esta inversão é feita de forma iterativa, de modo a tentar reduzir o custo computacional do método Newton sem comprometer a rapidez da taxa de convergência. Para funções objetivo de pequena escala este método oferece boas propriedades de convergência, no entanto, para problemas de grande escala, a necessidade de armazenamento da matriz aproximada á inversa da Hessiana, torna a utilização deste método pouco eficiente (Gouvêa, 2016).

### **3.1.4. Método dos gradientes conjugados**

O método dos gradientes conjugados apareceu como forma de solucionar o problema de lenta convergência do método de máxima descida e também evitar o cálculo de segundas derivadas e da matriz Hessiana, utilizadas pelo método de Newton. Este método combina as ideias dos métodos de pesquisa através do gradiente da função com a conjugação das diversas direções de modo a encontrar uma solução. Este método gera um conjunto de vetores conjugados, formando um novo vetor baseado neste conjunto e assim, em cada iteração não necessita de armazenar todos os vetores gerados na iteração anterior e assim requer menor custo computacional e de armazenamento que outros métodos apresentados anteriormente (Gouvêa, 2016).

Para funções quadráticas facilmente este método encontra uma solução, em funções não quadráticas, assim como os métodos anteriores, não é garantida uma solução com tanta

facilidade, pois para funções objetivos com difícil aproximação a uma função quadrática, o método de gradientes conjugados pode apresentar perda de conjugação dos vetores em novas iterações e por consequência gerar direções de pesquisa que não irão satisfazer a solução do problema. Este problema pode ser contornado, voltando umas iterações atrás e reiniciando a direção de pesquisa de um dos últimos pontos analisados que apresentou uma direção de máxima descida e continuando a partir daí (Gouvêa, 2016).

No subcapítulo seguinte é apresentado outro tipo de métodos de otimização, ligeiramente mais sofisticados que os métodos clássicos baseados em gradientes

## **3.2. Métodos baseados em Meta-Heurística**

Este tipo de métodos de otimização, tal como o nome indica, baseiam-se em meta-heurísticas que realizam a procura pelo melhor valor indicado por uma determinada função objetivo (Gouvêa, 2016). Esta pesquisa por um determinado ponto tem como finalidade encontrar o mínimo global da função objetivo que corresponde ao valor otimizado para o problema proposto. Este tipo de métodos oferecem a capacidade de escapar de mínimos locais da função com maior facilidade que os métodos clássicos. Segundo (Blum & Roli, 2003), este método, ao explorar um grande conjunto de possíveis soluções, geralmente, é capaz de encontrar boas soluções requerendo um menor esforço computacional do que outros métodos iterativos.

Um exemplo destas meta-heurísticas são os algoritmos evolutivos, apresentados no subcapítulo seguinte.

### **3.2.1. Algoritmos evolutivos**

Os algoritmos evolutivos utilizam componentes aleatórios na sua pesquisa de modo a encontrar a melhor solução possível que minimize uma determinada função objetivo. Desta forma o algoritmo é executado várias vezes, ainda que considerando os mesmos dados de entrada em cada utilização, o resultado nunca será exatamente igual devido à componente aleatória do mesmo. O algoritmo detém este nome pois a sua ideia de pesquisa é baseada na Teoria da evolução de Charles Darwin (Darwin, 1909). A ideia base consiste em começar com um conjunto de soluções possíveis para o problema e testar qual destes obtém melhor resultado através da função objetivo, à medida que o algoritmo evolui, novos conjuntos de solução são gerados através da informação dos conjuntos anteriores, sendo que os “mais fortes”, sobrevivem até se encontrar o mínimo global da função, sendo esse a solução do nosso problema.

Segundo (C. Spall, 2003), a aplicação das ideias de Charles Darwin como método de procura no ramo da otimização remonta à década de 50 do século passado, após algumas abordagens e variantes deste método, surge através de Holland, J. H., o método de algoritmo genético (Holland, 1992), utilizado neste estudo e apresentado no próximo capítulo.

Outro estudo realizado no âmbito da otimização dos parâmetros de suspensão foi o de (Fossati, 2017), baseado num modelo completo de veículo, com 8 graus de liberdade (incluindo o assento do motorista) e focando a otimização dos mesmos no conforto e segurança do condutor, no entanto, de forma a que não se comprometa a estabilidade e aderência à pista. Baseando-se

nos valores que a norma ISO 2631-1, 1997, estabelece como sendo confortável para o condutor. Utilizando um algoritmo meta-heurístico de otimização multiobjectivo denominado de NSGA-II (é um tipo de algoritmo avançado baseado no algoritmo genético), o autor foi capaz de minimizar o valor “RMS” da aceleração vertical do assento do motorista e obter “um menor curso de suspensão que o normalmente encontrado em veículos comerciais de pequeno porte”.

### 3.3. Algoritmo Genético

Algumas das terminologias e definições utilizadas no método provêm da biologia e dos estudos de Darwin, visto que a ideia deste algoritmo se baseia numa simulação do processo de evolução das espécies abordado pelo mesmo.

No estudo, como referido anteriormente, conduzido por (Sousa Suzana, 2016), o sistema de um modelo de “quarter car” foi otimizado em visão da segurança e conforto dos passageiros. Este estudo concluiu que a suspensão é sensível à variação dos seus parâmetros iniciais, onde foi possível determinar uma combinação de valores dos parâmetros, através do algoritmo genético, onde, segundo o autor, o mesmo se mostrou “satisfatório”, a encontrar um ponto de ótima performance da suspensão, cujos valores da resposta vertical em “RMS”, tanto do deslocamento como da aceleração do chassis, são mínimos.

Num outro estudo realizado por (Wei & Chengcai, 2021), um algoritmo genético de otimização de coeficientes foi utilizado para otimizar um sistema de suspensão semi-ativa de um modelo de “Quarter car”. Os autores recriaram o modelo do veículo no software Simulink® do MATLAB® onde realizaram a simulação dinâmica do veículo e obtiveram sucesso na minimização da “RMS” da aceleração vertical do chassis do veículo, bem como o deslocamento do mesmo e a carga dinâmica aplicada às rodas. Concluíram que o algoritmo utilizado foi eficaz na otimização da função do sistema de suspensão semi-ativa.

De acordo com (Alhijawi & Awajan, 2023) o funcionamento do algoritmo genético simples consiste, numa dada população inicial de indivíduos, determinada de modo aleatório, dentro de um certo conjunto de valores definido pelo utilizador, esta população inicial é útil para o algoritmo explorar várias zonas do espaço de pesquisa e avaliar a capacidade de cada zona ser uma boa solução ao problema. Cada um dos indivíduos, possui cromossomas sendo cada um deles uma possível solução do problema. Por sua vez cada um destes cromossomas possui um código genético formado por genes, por exemplo, falando de codificação binária podemos ter algo deste tipo:  $x=[10011]$ , onde a sequência de números binários representa o cromossoma e cada um dos dígitos, ou bits, representa um gene.

No processo de inicialização, o algoritmo seleciona um conjunto de indivíduos da população, baseado em alguns critérios de seleção para, a partir daí, gerar a próxima geração da população. Esta seleção de sobreviventes é definida através de uma função objetivo e cada vez que um novo indivíduo é gerado, o mesmo é testado por esta função até que o algoritmo termine. Dentro dos parâmetros do algoritmo, uma função objetivo (ou *fitness function* na nomenclatura), classifica cada resultado dos indivíduos de cada geração, sendo que, os que possuírem melhor aptidão, têm maior probabilidade de serem selecionados e trocar informação entre si, através de um processo

de cruzamento, denominado de “crossover” e de mutação. A combinação destes indivíduos, geram, outros novos indivíduos com informação semelhante aos anteriores, reduzindo assim o espaço de pesquisa a algumas zonas, onde os indivíduos, apresentaram melhor aptidão. No fim de cada uma das gerações o indivíduo com maior aptidão é considerado como uma solução do problema. Os critérios de paragem do algoritmo são definidos pelo utilizador e geralmente são um dos seguintes: quando alcançado um número máximo de gerações ou quando encontrado um indivíduo da população em que a diferença de aptidão da “fitness function”, para o melhor indivíduo da geração anterior, é menor que uma determinada tolerância. Um fluxograma do funcionamento de um algoritmo genético comum é apresentado por e encontra-se na Figura 14.

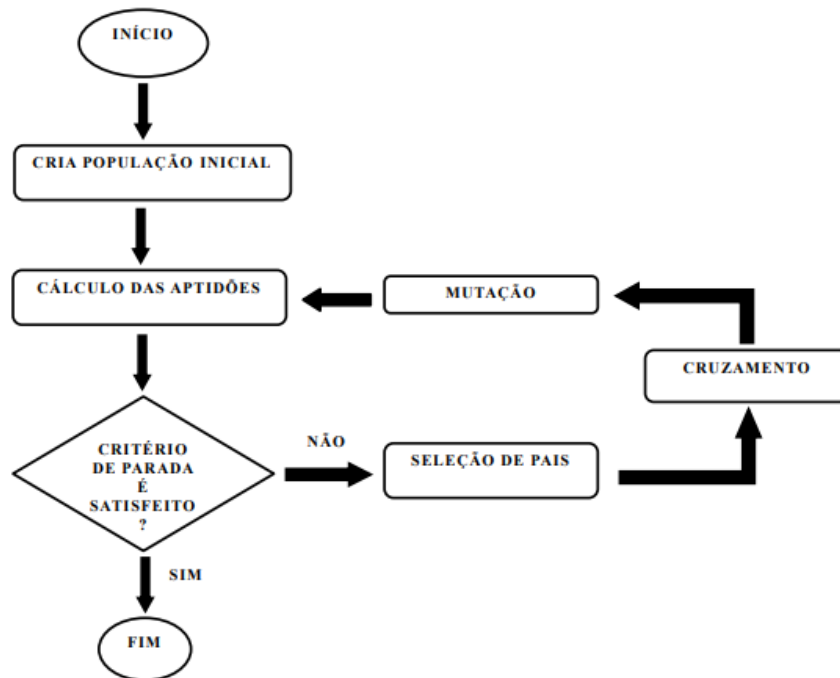


Figura 14 - Fluxograma de algoritmo genético (Barbieri Da Cunha et al., 2013)

A “fitness function” é um componente imprescindível do algoritmo genético, pois, é esta que avalia cada uma das soluções do problema. Depende de uma função de apenas um único objetivo, no entanto, em alguns casos, pode ser uma função multiobjetivo. Em casos de otimização de problemas reais, geralmente são utilizadas funções multiobjetivas, portanto, estas devem ser otimizadas em simultâneo, de modo a resolver este tipo de problemas. A função objetivo mede o desempenho de cada indivíduo com base em certos parâmetros, um exemplo desta função pode ser, a medição de um deslocamento de uma massa, com o objetivo de otimizá-la minimizando este deslocamento. Por outro lado, a “fitness function” do algoritmo avalia a qualidade de cada indivíduo testado pela função objetivo, convertendo estes resultados numa escala indicativa da probabilidade de cada um destes indivíduos ser selecionado para reprodução, considerando que, os indivíduos com melhor desempenho detêm maior probabilidade de serem escolhidos para gerar a próxima geração.

### 3.4. Operadores Genéticos

De modo a manter a diversidade da população ao longo de toda a extensão do plano de pesquisa, o algoritmo utiliza alguns operadores genéticos, são eles: seleção, “crossover” e mutação, que, trabalhando em simultâneo compõem um algoritmo genético de performance elevada (Alhijawi & Awajan, 2023).

#### 3.4.1. Seleção

A seleção prepara os “casais” de indivíduos que irão formar a próxima geração da população. Esta seleção é definida dentro dos parâmetros do algoritmo e pode ser realizada através de diversas formas. Uma delas baseia-se na probabilidade de seleção de cada indivíduo da geração, sendo que aqueles que obtiveram melhor aptidão na função objetivo, possuem maior probabilidade de serem selecionados para formarem a próxima geração, no entanto, indivíduos com baixa aptidão, continuam a ser elegíveis para seleção apesar da baixa probabilidade desse acontecimento. Outra forma que pode existir é a seleção estocástica, em que o algoritmo procura selecionar indivíduos de zonas do espaço de pesquisa diferentes, de modo a manter o espaço de pesquisa abrangente, pelo que tanto boas como más soluções podem ser selecionadas para continuar a evolução da população, na Figura 15 está representado este exemplo, sendo que, P1-6 representam os indivíduos selecionados.

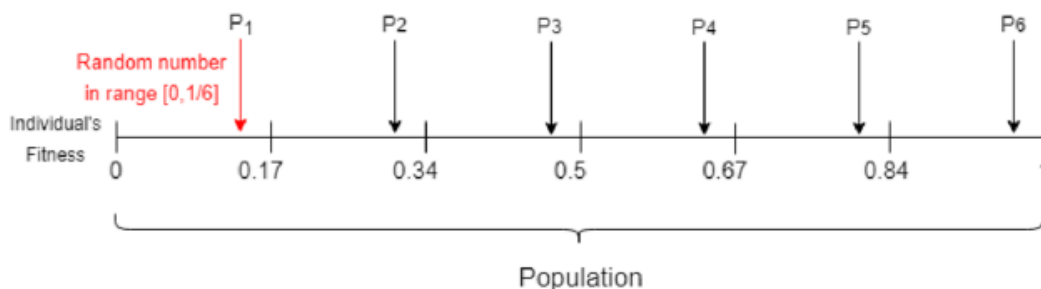


Figura 15 - Técnica de seleção estocástica (Alhijawi & Awajan, 2023)

Outro método pode ser aplicado selecionando os melhores indivíduos de cada geração, retirando o fator de probabilidade de seleção de indivíduos com baixa aptidão.

#### 3.4.2. Crossover

O mecanismo de crossover é uma técnica que permite melhorar a qualidade dos novos indivíduos, trocando genes entre o casal de indivíduos selecionados, no entanto isto pode ser realizado de maneiras distintas, (Alhijawi & Awajan, 2023)elaboraram algumas delas no seu estudo, no entanto, serão apresentadas duas das mais simples técnicas de crossover, que se encontram ilustradas na Figura 16:

- A) Crossover de único ponto é a forma mais simplificada e acontece quando se seleciona um ponto aleatório dentro do cromossoma e, trocando as duas pontas dos cromossomas dos parentes se formam dois novos indivíduos;
- B) Crossover de duplo ponto, semelhante ao de único ponto, mas em vez de ser selecionado um ponto aleatório no cromossoma, são selecionados dois, e os genes dos parentes são permutados de modo a gerar dois indivíduos novos;

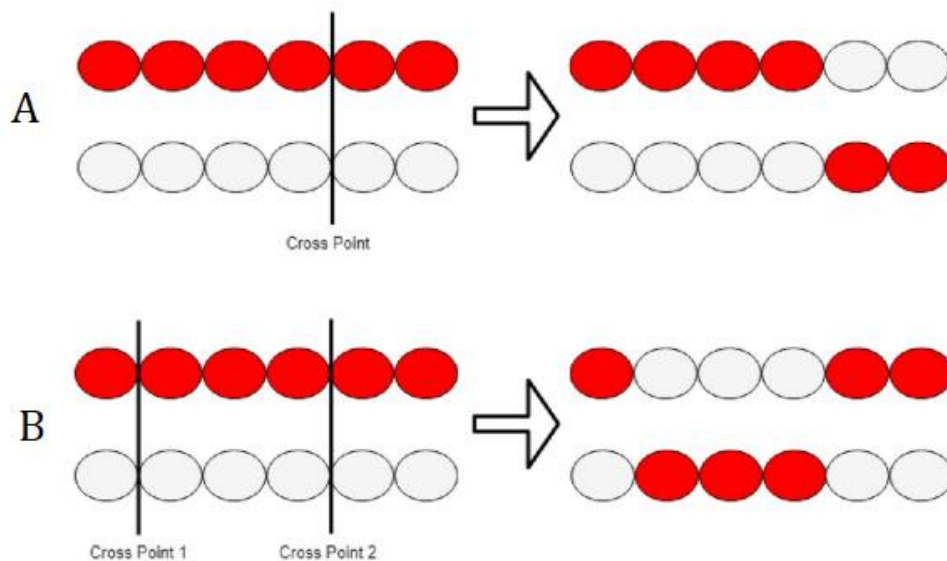


Figura 16 - Técnicas de crossover de único ponto (A) e duplo ponto (B) adaptado de (Alhijawi & Awajan, 2023)

### 3.4.3. Mutação

Através do processo de crossover a diversidade da população é afetada pois os cromossomas dos novos indivíduos apresentam características, ou genes, semelhantes aos dos parentes. A técnica de mutação é introduzida como forma de manter a diversidade da população (Alhijawi & Awajan, 2023), no entanto, de modo a não tornar o algoritmo genético numa pesquisa aleatória, a utilização desta técnica deve ser mantida o mais baixa possível.

Um parâmetro de probabilidade é definido, dentro do algoritmo, que controlará a seleção de genes que serão alterados por mutação. Esta técnica pode ser aplicada selecionando apenas um gene aleatório do cromossoma de um indivíduo e trocá-lo por outro valor aleatório, ou então selecionando um conjunto de “n” genes e substituí-los por outros valores aleatórios.

### 3.4.4. Técnicas de substituição

Após gerar uma nova descendência, o algoritmo genético organiza a população da geração seguinte. Pelo que os indivíduos da população anterior são descartados para dar espaço à nova geração, no entanto, alguns deles podem ser mantidos e formarem parte da nova

população. O algoritmo pode descartar toda a população atual e formar a nova geração apenas com os “filhos” gerados pelos operadores genéticos, desta forma, coloca-se elevada esperança em que estes novos indivíduos melhorem a aptidão da população. Uma porção dos melhores indivíduos da população anterior pode ser mantida durante cada iteração ou ainda os piores indivíduos da nova geração podem ser descartados dando espaço a mais indivíduos provenientes dos operadores genéticos de crossover e mutação.

## 4. Metodologia

Neste capítulo será apresentada a metodologia utilizada na realização deste trabalho. No capítulo 4.1, é demonstrado a metodologia para o modelo quarter car e no capítulo 4.2 para o modelo full car.

A excitação do sistema, para ambos os modelos, é a mesma escolhida por (Ebrahimi-Nejad et al., 2020), para analisar a dinâmica vertical do sistema de suspensão, foi definida através de uma função sinusoidal, equação , de amplitude 0,01 metros e um comprimento de onda de 5 metros, que depende da velocidade de teste do veículo, neste caso de 50 km/h. Foram também realizadas simulações de uma excitação com um impulso inicial 0,05 metros, , simulando uma lombada na estrada. Através da simulação do modelo é possível analisar a resposta do sistema à excitação proposta e em seguida otimizá-lo, procurando minimizar a reação do mesmo.

$$y = A * \sin\left(\frac{Velocidade\ do\ veículo/3,6}{\lambda} * 2\pi * t\right) \quad [m] \quad (22)$$

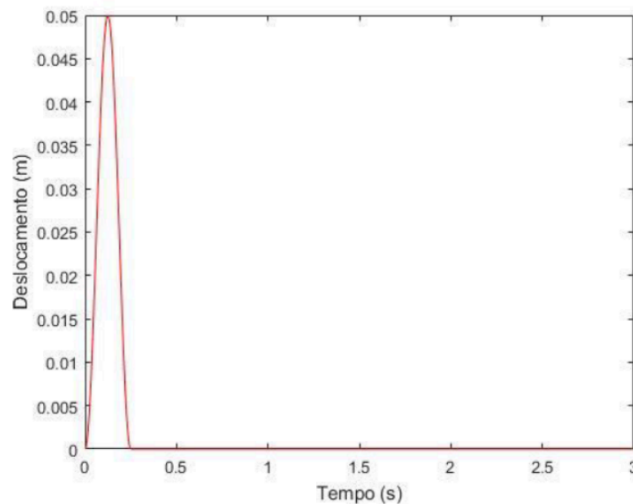


Figura 17 - Excitação do sistema (Sousa Suzana, 2016)

### 4.1. Modelo Quarter Car

Para o modelo quarter car o sistema foi otimizado de duas maneiras, uma em função da aceleração e outra do deslocamento, com a finalidade de diminuir a resposta em RMS de cada um, os problemas foram definidos da seguinte forma:

$$\begin{array}{l} \text{Min } RMS(\ddot{x}) \\ k, c \end{array}$$

$$\text{Sujeito a: } \begin{cases} 10000 \text{ N/m} \leq k \leq 200000 \text{ N/m} \\ 500 \text{ Ns/m} \leq c \leq 10000 \text{ Ns/m} \end{cases}$$

e

$$\begin{array}{l} \text{Min } RMS(x) \\ k, c \end{array}$$

$$\text{Sujeito a: } \begin{cases} 10000 \text{ N/m} \leq k \leq 200000 \text{ N/m} \\ 500 \text{ Ns/m} \leq c \leq 10000 \text{ Ns/m} \end{cases}$$

Inicialmente, de modo a verificar a veracidade de utilização do algoritmo genético para a otimização dos parâmetros de suspensão, foi criado no software MATLAB®, através da ferramenta Simulink, um diagrama de blocos representativo do modelo matemático de quarter car, como o apresentado na Figura 10. No Anexo A, encontra-se representado o diagrama de blocos em questão, que nada mais é, que uma representação das equações matemáticas do modelo de quarter car, equações (9) e (10).

No MATLAB®, foi programada uma rotina que permite simular o modelo dinâmico do veículo e assim obter o resultado em “RMS” da aceleração e deslocamento vertical da massa suspensa, Anexo B. Foi definida uma matriz de valores de constantes de mola e coeficientes de rigidez de modo a serem testados diversas combinações, para assim saber quais seriam os valores destas variáveis do problema, que obteriam uma melhor solução. As propriedades escolhidas para o modelo, encontram-se na Tabela 1, são as mesmas utilizadas por (Ebrahimi-Nejad et al., 2020), que, segundo o autor, são referentes a um modelo de carro desportivo, Mercedes-Benz AMG SLC43, e adaptadas para um modelo de quarter car.

**Tabela 1 - Propriedades da suspensão do modelo quarter car utilizado**

<b>Propriedade</b>	<b>Simbologia</b>	<b>Valor</b>
Massa suspensa [kg]	$m_s$	395
Massa não suspensa [kg]	$m_u$	38
Rigidez da mola [N/m]	$k$	29300
Coeficiente de amortecimento [Ns/m]	$c$	3000
Rigidez do pneu [N/m]	$k_t$	290000

De modo a formar os conjuntos de  $\{k, c\}$ , foram criados dois vetores, um com os valores da constante de rigidez da mola e outro com os valores de coeficiente de amortecimento. Considerando os limites inferior e superior dos parâmetros foram selecionados “n” valores,

igualmente espaçados entre si e dentro dos limites, que foram introduzidos em cada célula da matriz do conjunto  $\{k, c\}$ . A variável “n” é um valor arbitrado pelo utilizador. Após simulação de todos os valores do conjunto no modelo Simulink, obtiveram-se dois gráficos tridimensionais, que relacionam o coeficiente de amortecimento, a rigidez da mola e a “RMS” da aceleração ou “RMS” do deslocamento da massa suspensa, onde visualmente, é fácil identificar o mínimo global do gráfico, ponto correspondente aos parâmetros “k” e “c” ótimos para a minimização da aceleração e deslocamento da massa suspensa.

Com a finalidade de testar o algoritmo genético aplicado a este modelo, foi criada outra rotina no MATLAB®, com a implementação do algoritmo genético, Anexo C.

O seguinte excerto do código do Anexo C, é referente à introdução do algoritmo genético no problema.

---

```

1 problem.solver = 'ga';
2 problem.fitnessfcn = @(x)V1_quarter_car_funcao([x(1) x(2)]);
3 problem.nvars = 2;
4 problem.lb=[180000,8000];
5 problem.ub=[200000,10000];
6 problem.options =
7 optimoptions('ga','PopulationSize',popsz,'MaxGenerations',maxgen,
8 'FunctionTolerance',tol,'CrossoverFraction',xfrac,'EliteCount',
9 mutfrac*popsz,'SelectionFcn',{@selectiontournament,2}, 'PlotFcn'
10 {@gaplotbestf, 7@gaplotstopping});

```

---

A designação “problem.solver” já vem implementada nativamente no MATLAB® através da “Global optimization Toolbox”. O próprio software MATLAB® disponibiliza esta função sendo bastante útil para resolver problemas de otimização complexos, sendo possível utilizar diversos métodos de otimização. Com a designação “ 'ga()' ” é selecionado o método de algoritmo genético. A linha de código “problem.fitnessfcn” é utilizada para definir qual a “fitness function” utilizada para avaliar os indivíduos. A função utilizada é apresentada no Anexo C, capaz de simular o modelo Simulink necessário para executar o algoritmo genético. O “problem.nvars” define o número de variáveis do problema, neste caso 2, “k” e “c”. As designações “problem.lb” e “problem.ub” definem os limites inferiores e superiores das variáveis no campo de pesquisa do algoritmo, respetivamente, sendo o primeiro argumento de cada um referente aos limites de “k” e o segundo argumento referente aos limites de “c”.

A linha de código onde é apresentado “problem.options” define as opções do método de otimização bem como a introdução da definição dos parâmetros do algoritmo utilizado, que podem ser alteradas pelo utilizador. Os parâmetros utilizados neste estudo para todas as simulações encontram-se na Tabela 2 e são introduzidos no código na secção de “Parâmetros do algoritmo genético” presente no código do Anexo C.

**Tabela 2 - Parâmetros do Algoritmo Genético**

<b>Propriedade</b>	<b>Valor</b>
População	80
Fração de crossover	70 %
Fração de mutação	10 %
Número máximo de gerações	100
Tolerância	0,0001

A escolha destes parâmetros influencia diretamente a eficácia do algoritmo, (Mitchell, 1996) enuncia alguns estudos realizados utilizando algoritmos genéticos em que os parâmetros utilizados indicam: número de indivíduos da população entre 50 e 100 indivíduos, fração de crossover entre 60% e 90% e uma fração de mutação aconselhada abaixo dos 10%. A utilização de uma fração de crossover alta, significa que essa percentagem da população da geração anterior troca informação entre si, de modo a originar mais pontos parecidos com estes, pelo que, em zonas onde o algoritmo encontrou boas soluções são formados mais pontos, sendo estes os que obtêm melhor classificação na “fitness function” sobrevivem e são selecionados para formarem outros novos pontos na próxima geração, contribuindo para a convergência do algoritmo. Manter uma fração de mutação baixa permite que o algoritmo escape de mínimos locais, sendo substituída parte da sua informação de modo aleatório, o que proporciona a exploração de novas áreas do espaço de pesquisa e mantém ligeiramente a diversidade genética, sem que o algoritmo torne a sua pesquisa demasiado aleatória o que poderia prejudicar a convergência do algoritmo.

Através do mesmo modelo de Simulink, foi possível obter o mesmo resultado para o valor mínimo da “RMS” da aceleração e do deslocamento da massa suspensa. Como os pontos indicados pelo algoritmo coincidem com o mínimo dos gráficos obtidos através do método anterior, confirmou-se o bom funcionamento do algoritmo genético.

Após a verificação do funcionamento do algoritmo genético, implementou-se o mesmo, no entanto, para análise de um modelo de full car, como o apresentado na Figura 12.

## **4.2. Modelo full car**

Para o modelo full car o sistema foi otimizado de duas maneiras, uma em função da aceleração e outra do deslocamento, com a finalidade de diminuir a resposta em RMS de cada um, os problemas foram definidos da seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \text{Min} \quad RMS(\ddot{x}) \\ & k_f, c_f, k_r, c_r \\ & \text{Sujeito a:} \quad \begin{cases} 5000 \text{ N/m} \leq k_f \leq 200000 \text{ N/m} \\ 500 \text{ Ns/m} \leq c_f \leq 10000 \text{ Ns/m} \\ 5000 \text{ N/m} \leq k_r \leq 200000 \text{ N/m} \\ 500 \text{ Ns/m} \leq c_r \leq 10000 \text{ Ns/m} \end{cases} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} & \text{Min} \quad RMS(x) \\ & k_f, c_f, k_r, c_r \\ & \text{Sujeito a:} \quad \begin{cases} 5000 \text{ N/m} \leq k_f \leq 200000 \text{ N/m} \\ 500 \text{ Ns/m} \leq c_f \leq 10000 \text{ Ns/m} \\ 5000 \text{ N/m} \leq k_r \leq 200000 \text{ N/m} \\ 500 \text{ Ns/m} \leq c_r \leq 10000 \text{ Ns/m} \end{cases} \end{aligned}$$

Para o modelo de full car foi construído um novo diagrama de blocos no Simulink, por sua vez, representativo das equações (15), (16), (17), (18), (19), (20) e (21), de modo a analisar o comportamento vertical do sistema de suspensão de um veículo.

Nos Anexos E, F, G, H, I, J, K, L e M são apresentadas as rotinas de MATLAB® utilizadas para executar o algoritmo, bem como uma representação do diagrama de blocos no Simulink utilizado.

As propriedades do veículo a analisar, utilizadas nas rotinas dos Anexos J e L, encontram-se na Tabela 3.

Tabela 3 - Propriedades do veículo full car

Propriedade	Simbologia	Valor
Massa total do veículo [kg]	-	1580
Distância entre eixo [mm]	-	2431
Largura de eixo [mm]	-	1565
Massa chassis [kg]	$m$	1420
Massa roda 1 [kg]	$m_1$	40
Massa roda 2 [kg]	$m_2$	40
Massa roda 3 [kg]	$m_3$	40
Massa roda 4 [kg]	$m_4$	40
Rigidez do pneu [N/m]	$k_t$	290000
Distância do CG – Frente [mm]	$a_1$	1000
Distância do CG – Traseira [mm]	$a_2$	1430
Distância do CG – Direita [mm]	$b_1$	782
Distância do CG – Esquerda [mm]	$b_2$	782
Momento Inércia em x [ $kg/m^2$ ]	$I_{xx}$	335
Momento de Inércia em y [ $kg/m^2$ ]	$I_{yy}$	1095
Rigidez da suspensão rodas dianteiras [ $N/m$ ]	$k_{f1-2}$	14675
Coefficiente de amortecimento eixo dianteiro [ $Ns/m$ ]	$c_{f1-2}$	1945
Rigidez da suspensão eixo traseiro [ $N/m$ ]	$k_{r3-4}$	12365
Coefficiente de amortecimento eixo traseiro [ $Ns/m$ ]	$c_{r3-4}$	1458
Rigidez dos pneus [ $N/m$ ]	$k_t$	290000

As propriedades da Tabela 3, são referentes ao mesmo carro utilizado como cobaia para otimização do modelo quarter car (Ebrahimi-Nejad et al., 2020). Considerou-se a massa de cada eixo de 80 kg, como indicado por (Rill, 2012), para veículos “Mid-Size cars”, pelo que cada uma das rodas engloba a massa de metade da massa total do seu eixo. As excitações testadas também foram as mesmas, tendo sido tomado em conta que o eixo traseiro não é excitado da mesma forma que o eixo dianteiro, pois tem um pequeno “delay”, por exemplo, ao passar por uma lomba na estrada, primeiramente o eixo dianteiro reage a essa excitação e só um intervalo de tempo depois o eixo traseiro reage á mesma excitação. Este “delay” é introduzido através de um bloco “transport delay” no Simulink.

No processo de realização de simulações no MATLAB® com o algoritmo genético, foi se diminuindo os limites de constante de mola e coeficiente de amortecimento, para ambos os eixos, para valores próximos aos obtidos na simulação anterior, de modo a diminuir o tamanho do campo de pesquisa do algoritmo e assim obter melhores resultados. Hipoteticamente, se nas simulações anteriores se obteve coeficientes de amortecimento na ordem dos 2500 Ns/m, na simulação seguinte, ao invés desta variável variar entre:  $500 \leq c \leq 10000$  Ns/m, seria, por

exemplo,  $1500 \leq c \leq 4000$  Ns/m. Deste modo foi possível melhorar ligeiramente os resultados, fazendo com que o algoritmo explorasse melhor as zonas onde, nas simulações anteriores, foram encontradas boas soluções. Quando a diferença de solução de uma simulação para outra for pequena, não há necessidade de realizar mais simulações, pois já a solução ideal está bastante próxima.

## 5. Apresentação e análise de resultados

Neste capítulo são apresentados e discutidos os resultados da otimização do sistema de suspensão para os modelos quarter car e full car. Primeiramente são apresentados os resultados referentes ao modelo quarter car, sendo o sistema submetido a uma excitação de uma lombada e excitação de uma função sinusoidal, respectivamente. Em seguida o mesmo se sucede para o modelo full car.

### 5.1. Modelo Quarter Car

Serão agora apresentados os resultados referentes ao modelo quarter car, no subcapítulo 5.1.1 referentes à excitação de lombada e no subcapítulo 5.1.2 referentes à excitação de função sinusoidal.

#### 5.1.1. Excitação de lombada

Inicialmente foi necessário verificar se realmente a implementação do algoritmo genético no problema teria sucesso a encontrar as soluções corretas, pelo que se verificou, no modelo quarter car para a excitação de lombada. Na Figura 18 e Figura 19 encontram-se os gráficos obtidos da “RMS” da aceleração e do deslocamento, respectivamente, referentes à implementação do algoritmo genético para a excitação de lombada no modelo quarter car.

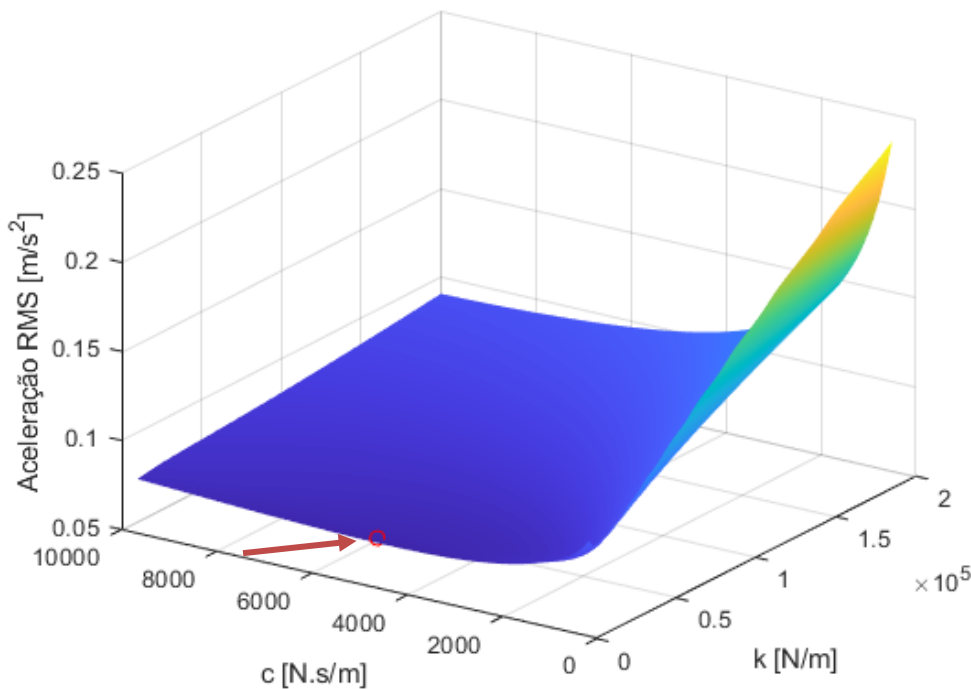


Figura 18 – Resposta RMS Aceleração da massa suspensa à excitação lombada

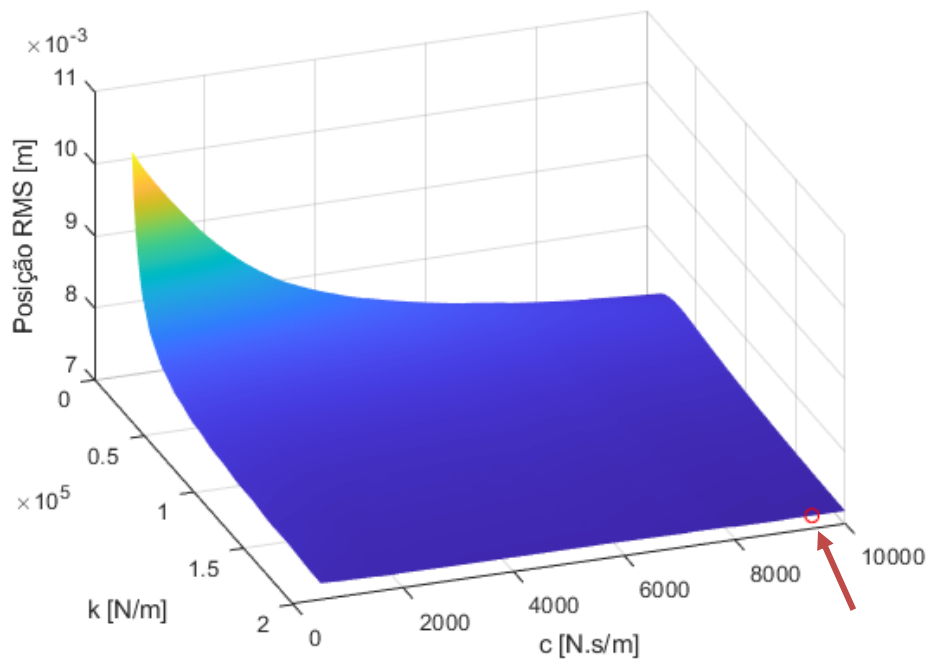


Figura 19 - Resposta RMS Deslocamento da massa suspensa à excitação lomba

Como se pode verificar na Figura 18 e Figura 19 acima, o algoritmo genético, indica os pontos representados a vermelho nos gráficos, como sendo os correspondentes aos parâmetros da suspensão que obtiveram menor “RMS” da aceleração e do deslocamento da massa suspensa, respetivamente e através da visualização do gráfico percebe-se facilmente que esses pontos correspondem ao mínimo global de cada um, portanto o algoritmo genético foi eficaz a encontrar a solução destes problemas.

Após confirmada a eficácia da implementação do algoritmo foi possível avançar para a otimização dos parâmetros de suspensão que minimizassem a “RMS” da aceleração e deslocamento da massa suspensa para todo o estudo. Foram realizadas diversas simulações até que a solução pouco variasse entre simulações, na Tabela 4 abaixo, encontram-se as simulações realizadas para obtenção dos parâmetros de suspensão ótimos para minimização da aceleração na excitação de lomba.

Tabela 4 - Otimização aceleração através do algoritmo genético excitação lomba em modelo quarter car

Simulação	1	2
“RMS” aceleração [ $m/s^2$ ]	0,3728	0,3728
Constante de mola [ $N/m$ ]	10000	10000
Coefficiente de amortecimento [ $Ns/m$ ]	517	516

Como os resultados da primeira para a segunda simulação praticamente não se alteraram, é possível afirmar que a solução ótima para este caso foi encontrada.

Na Figura 20 está representado visualmente, através de um gráfico, a diferença da aceleração da massa suspensa em resposta à excitação de lomba, no modelo quarter car, entre o sistema com os parâmetros originais, em azul e após a otimização, a vermelho.

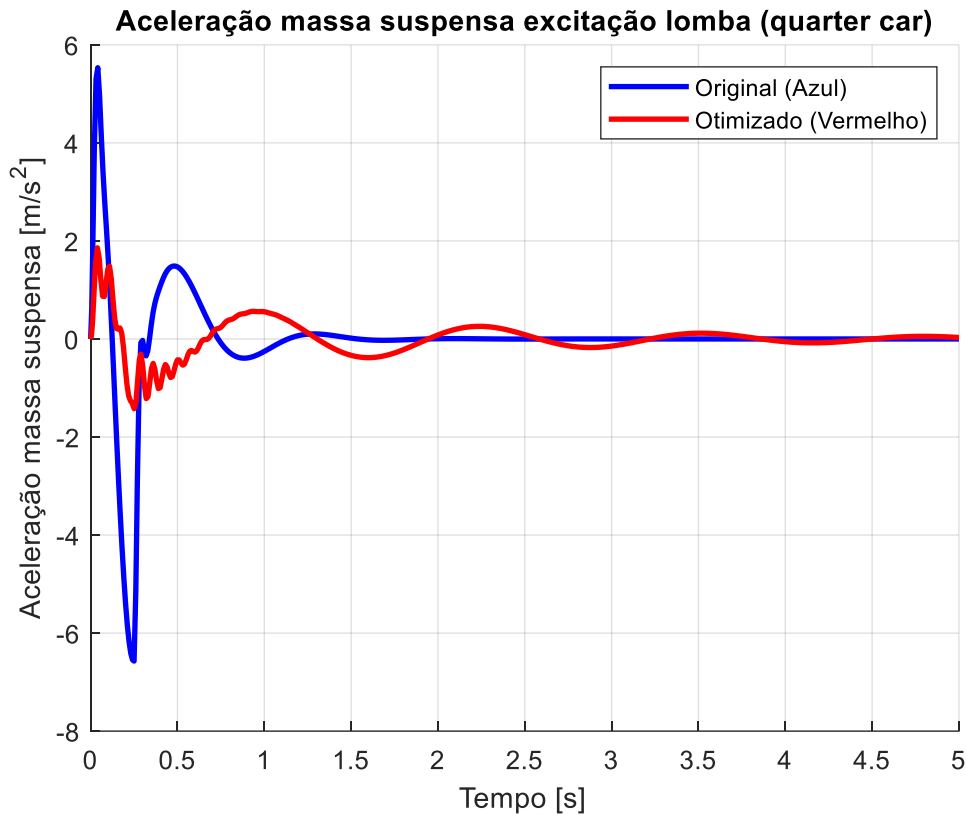


Figura 20 - Comparação da aceleração entre o modelo quarter car original e otimizado (lomba)

Facilmente se identifica a diferença entre o pico mais alto dos parâmetros originais, alcançando uma aceleração vertical ligeiramente abaixo dos  $6 \text{ m/s}^2$  e dos parâmetros otimizados, cujo valor máximo de aceleração vertical não chega a alcançar os  $2 \text{ m/s}^2$ . Apesar do sistema com os parâmetros originais chegar ao estado de equilíbrio mais cedo, perto dos 1,5 segundos, a par dos 4,5 segundos do sistema otimizado, este último apresenta melhor resposta em “RMS” à diminuição da aceleração vertical, com uma melhoria do modelo otimizado em relação ao original de 66,21%, obtido diminuindo, a constante de mola em 65,9% e o coeficiente de amortecimento em 82,9%, desta forma o valor máximo de aceleração vertical atingido pela massa suspensa é menor, no entanto o sistema demora um pouco mais tempo a voltar ao equilíbrio devido ao reduzido coeficiente de amortecimento.

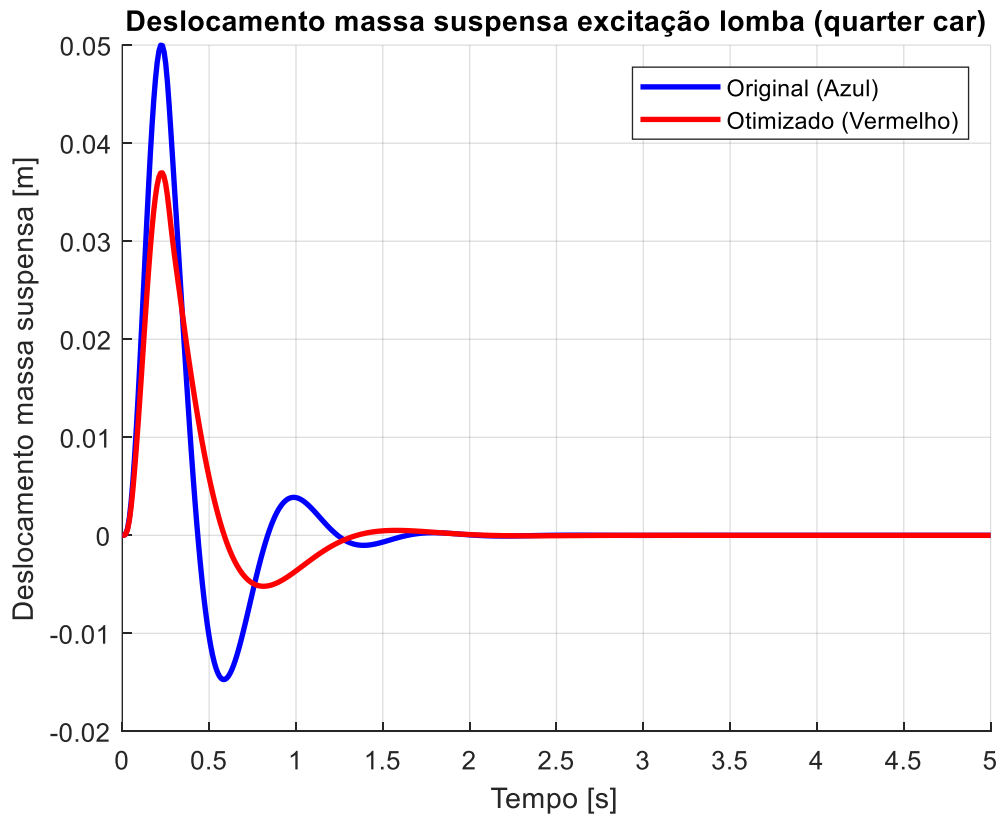
Foram realizadas também simulações com o objetivo de minimizar a “RMS” do deslocamento da massa suspensa em resposta à excitação de lomba, as mesmas são apresentadas na Tabela 5.

**Tabela 5 - Otimização deslocamento através do algoritmo genético excitação lombas em modelo quarter car**

<b>Simulação</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>
“RMS” deslocamento [m]	0,00796	0,00831	0,00775	0,00762	0,00762
Constante de mola [N/m]	11000	15540	10972	10102	10194
Coefficiente de amortecimento [Ns/m]	4058	3833	2637	2634	2461

Os limites dos parâmetros de suspensão do sistema foram ajustados, no algoritmo genético, após as simulações 2 e 3, de modo a focar o campo de pesquisa nas zonas com maior probabilidade de encontrar melhores soluções, áreas estas em que, nas simulações anteriores, haviam sido encontradas boas soluções para o problema. Como nas últimas duas simulações os parâmetros e a solução praticamente não se alteraram, é possível afirmar que a solução foi encontrada.

Na Figura 21 está representado visualmente, através de um gráfico, a diferença do deslocamento da massa suspensa em resposta à excitação de lombas, no modelo quarter car, entre o sistema com os parâmetros originais, em azul e após a otimização, a vermelho.



**Figura 21 - Comparação do deslocamento entre o modelo quarter car original e otimizado (lombas)**

Novamente é bastante perceptível a diferença entre os valores máximos obtidos em cada um dos sistemas, original e otimizado, sendo que na configuração original o valor máximo obtido do deslocamento da massa suspensa foi cerca de 0,05 m, enquanto que no modelo otimizado este máximo encontra-se ligeiramente acima dos 0,035 m, sendo uma redução do valor máximo de deslocamento da massa suspensa de cerca de 30%. Verifica-se também que, apesar de ambos os sistemas voltarem ao equilíbrio praticamente ao mesmo tempo, cerca de 2 segundos após a excitação, no sistema otimizado, todo o movimento da massa suspensa é mais suave, com a significativa redução da constante de mola na ordem dos 65% e uma ligeira redução do coeficiente de amortecimento em cerca de 18%, que permite que a resposta em “RMS” do deslocamento da massa suspensa seja menor que na configuração original. A configuração otimizada permite uma melhoria do sistema em resposta à excitação de lombas em cerca de 22,79%.

Na Tabela 6, é apresentado um quadro resumo com o resultado da otimização do modelo quarter car face à excitação de lombas.

**Tabela 6 - Quadro resumo otimização excitação lombas modelo quarter car**

	<b>Original</b>	<b>Otimizado para aceleração</b>	<b>Otimizado para deslocamento</b>
“RMS” aceleração [ $m/s^2$ ]	1,1032	0,3728	-
“RMS” deslocamento [ $m$ ]	0,00987	-	0,00762
Constante de mola [ $N/m$ ]	29300	10000	10194
Coeficiente de amortecimento [ $Ns/m$ ]	3000	516	2461
<b>Melhoria [%]</b>	-	<b>66,21</b>	<b>22,79</b>

### 5.1.2. Excitação de função sinusoidal

Em relação à excitação de função sinusoidal, utilizando o modelo quarter car, as simulações para otimização da aceleração vertical da massa suspensa realizadas são apresentadas na Tabela 7.

Tabela 7 - Otimização aceleração através do algoritmo genético excitação sinusoidal em modelo quarter car

Simulação	1	2	3
“RMS” aceleração [ $m/s^2$ ]	0,0708	0,0689	0,0689
Constante de mola [ $N/m$ ]	16028	10088	10000
Coefficiente de amortecimento [ $Ns/m$ ]	5047	4602	4836

Os limites dos parâmetros de suspensão do sistema foram ajustados, no algoritmo genético, após a simulação 2, de modo a reduzir o campo de pesquisa do algoritmo e aumentar a probabilidade de encontrar melhores soluções. Como nas últimas duas simulações os parâmetros de suspensão e a solução praticamente não se alteraram, é possível afirmar que a solução foi encontrada.

Na Figura 22 abaixo, é apresentado um gráfico comparativo do modelo com configurações originais, a azul, e o modelo otimizado, a vermelho, com a finalidade de analisar a resposta de cada um à excitação de função sinusoidal e perceber a diferença entre cada um deles.

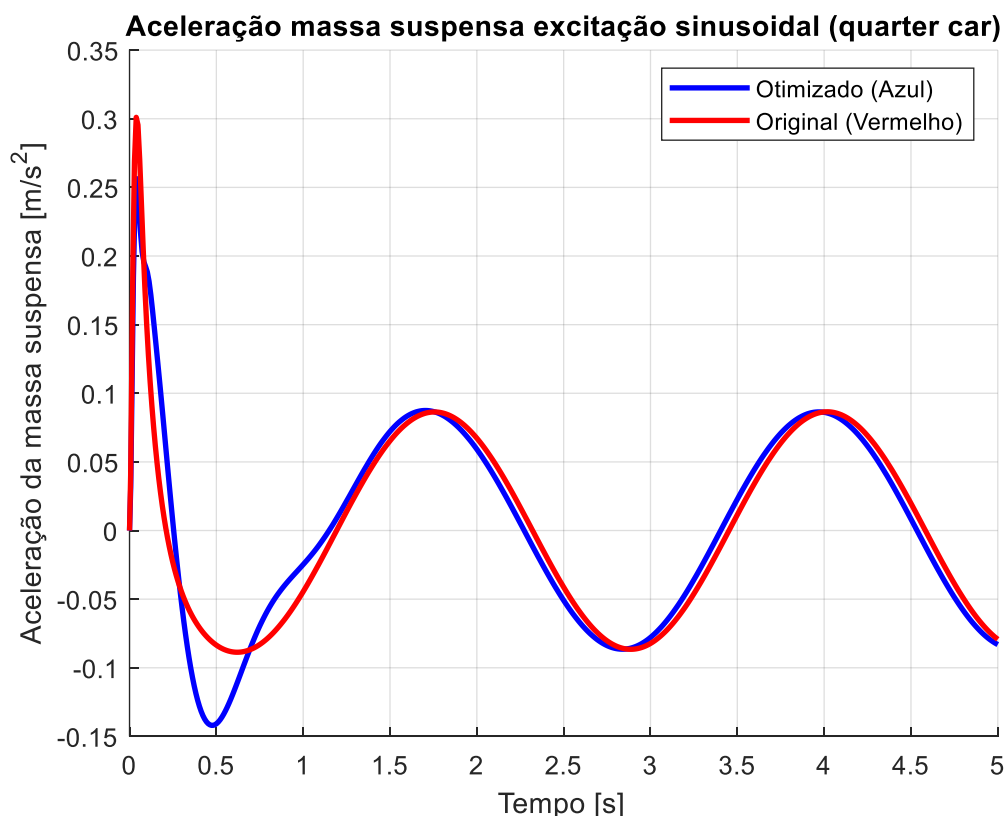


Figura 22 - Comparação da aceleração entre o modelo quarter car original e otimizado (sinusoidal)

Desta vez, apesar de o modelo otimizado apresentar inicialmente um pico mais elevado de aceleração da massa suspensa, cerca de  $0,3 \text{ m/s}^2$ , em relação aos cerca de  $0,25 \text{ m/s}^2$  da configuração original, rapidamente o modelo otimizado se ajusta às condições da excitação de função sinusoidal, reduzindo o “overshoot” no sentido descendente e proporcionando uma redução da resposta em “RMS” da aceleração da massa suspensa a esta excitação de cerca de 5,61%. A redução em 65,87% da constante de mola e o aumento do coeficiente de amortecimento na ordem dos 61,2%, permitiu otimizar o sistema.

Na Tabela 8 são apresentadas as simulações para minimização da “RMS” do deslocamento da massa suspensa para a excitação sinusoidal no modelo quarter car.

**Tabela 8 - Otimização deslocamento através do algoritmo genético excitação sinusoidal em modelo quarter car**

<b>Simulação</b>	<b>1</b>	<b>2</b>
“RMS” deslocamento [ <i>m</i> ]	0,007176	0,007172
Constante de mola [ <i>N/m</i> ]	199832	199994
Coeficiente de amortecimento [ <i>Ns/m</i> ]	9487	8936

Como a diferença entre as duas simulações em relação aos parâmetros de suspensão e a solução foi pequena, é possível afirmar que a solução foi encontrada.

Na Figura 23 abaixo, é apresentado um gráfico comparativo do modelo com configurações originais, a azul, e o modelo otimizado, a vermelho, com a finalidade de analisar a resposta em função do deslocamento da massa suspensa de cada uma das configurações à excitação de função sinusoidal.

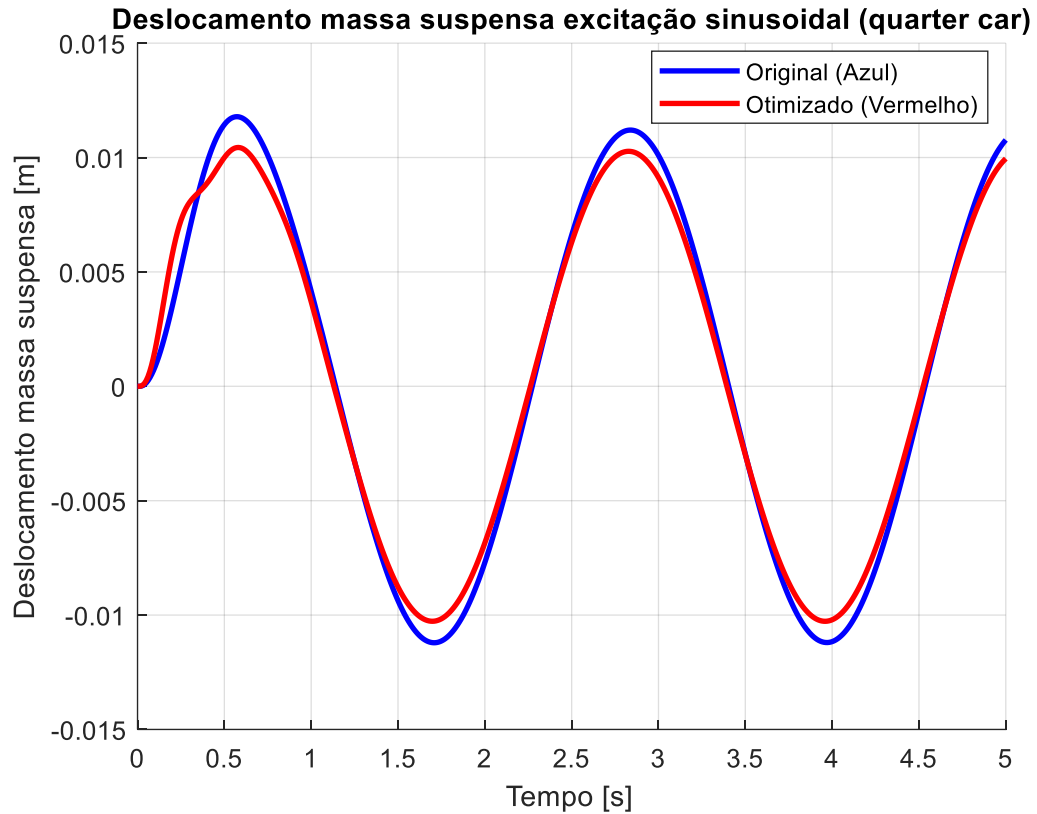


Figura 23 - Comparação do deslocamento entre o modelo quarter car original e otimizado (sinusoidal)

Para este modelo de quarter car é perceptível, na Figura 23, a diferença entre os picos máximos do deslocamento da massa suspensa, sendo que o máximo atingido pela configuração original alcança os 0,012 m enquanto que no modelo otimizado o deslocamento máximo ronda os 0,01 m. O sistema otimizado proporcionou uma melhoria de 8,14% na resposta em “RMS” do deslocamento da massa suspensa em relação à configuração original, com um aumento bastante acentuado de 582% da constante da mola e 198% do coeficiente de amortecimento, para valores que se encontram bastante próximos dos limites estabelecidos para estes parâmetros no algoritmo genético.

Na Tabela 9, é apresentado um quadro resumo com o resultado da otimização do modelo quarter car face à excitação de função sinusoidal.

Tabela 9 - Quadro resumo otimização excitação sinusoidal modelo quarter car

	<b>Original</b>	<b>Otimizado para aceleração</b>	<b>Otimizado para deslocamento</b>
“RMS” aceleração [ $m/s^2$ ]	0,07294	0,06885	-
“RMS” deslocamento [ $m$ ]	0,007808	-	0,007172
Constante de mola [ $N/m$ ]	29300	10000	199994
Coefficiente de amortecimento [ $Ns/m$ ]	3000	4836	8936
<b>Melhoria [%]</b>	-	<b>5,61</b>	<b>8,14</b>

## 5.2. Modelo Full Car

Implementando o algoritmo para o modelo full car foi também possível encontrar os parâmetros de suspensão que minimizassem a “RMS” da aceleração e deslocamento da massa suspensa para ambas as excitações, lomba e função sinusoidal, respectivamente. Os resultados referentes à excitação de lomba são apresentados no subcapítulo 5.2.1 e os referentes à excitação de função sinusoidal no subcapítulo 5.2.2.

### 5.2.1. Excitação de lomba

Da mesma forma que para o modelo quarter car foram realizadas várias simulações até que a solução pouco variasse entre simulações, abaixo na Tabela 10, encontram-se as simulações realizadas para obtenção dos parâmetros de suspensão ótimos para minimização da aceleração na excitação de lomba para o modelo full car.

Tabela 10 - Otimização aceleração através do algoritmo genético excitação lombal em modelo full car

Simulação	1	2	3
“RMS” aceleração [ $m/s^2$ ]	0,4524	0,4522	0,4522
$k_{f1-2}$ [ $N/m$ ]	5000	5231	5239
$c_{f1-2}$ [ $Ns/m$ ]	500	500	500
$k_{r3-4}$ [ $N/m$ ]	5000	5000	5000
$c_{r3-4}$ [ $Ns/m$ ]	500	500	500

Após a segunda simulação os limites dos parâmetros de suspensão foram ajustados no algoritmo genético para que o campo de pesquisa do algoritmo fosse mais reduzido e assim capaz de aprimorar as soluções encontradas anteriormente.

Na Figura 24 abaixo, é apresentado um gráfico comparativo do modelo full car com configurações originais, a azul, e o modelo otimizado, a vermelho, de modo a analisar a resposta em função da aceleração da massa suspensa de cada uma das configurações à excitação de função sinusoidal.

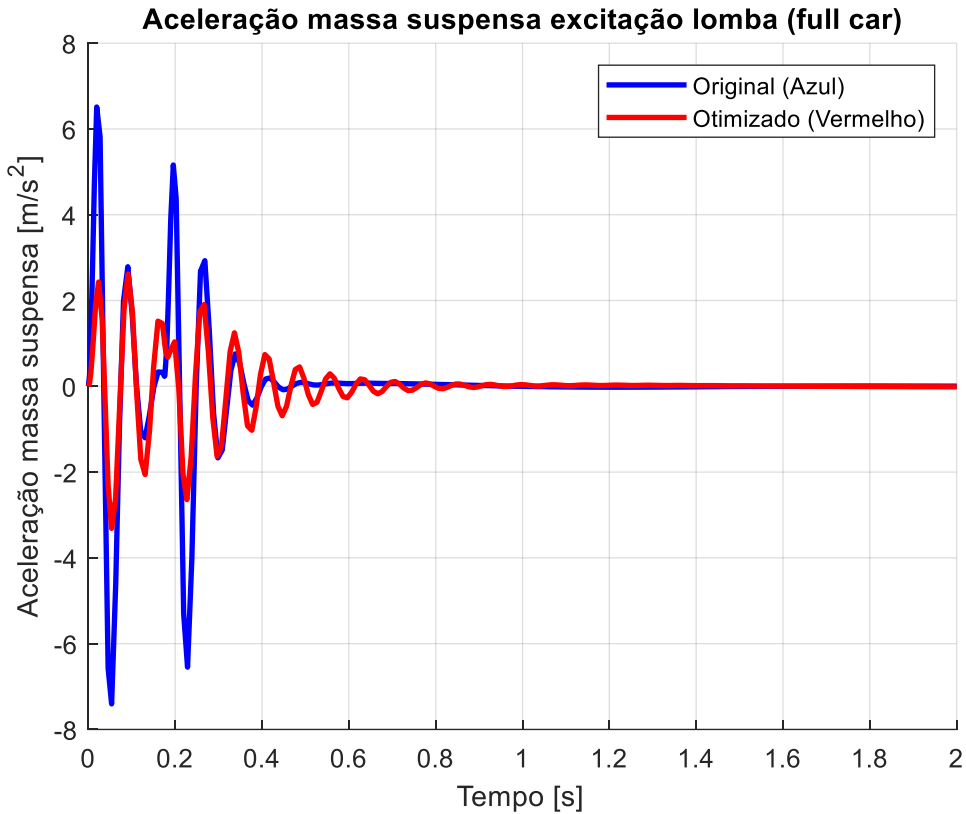


Figura 24 - Comparação da aceleração entre o modelo full car original e otimizado (lomba)

Analisando a Figura 24, é notória a diferença entre os valores máximos atingidos da aceleração da massa suspensa entre as duas configurações, sendo na configuração original ligeiramente acima dos  $7 m/s^2$  e na configuração otimizada perto dos  $3 m/s^2$ , ambos alcançados no sentido descendente, perto da marca dos 0,05 segundos. Apesar do modelo com configuração original voltar ao estado de equilíbrio mais rapidamente que o modelo otimizado, é este segundo que apresenta menor resposta em “RMS” à aceleração da massa suspensa com uma melhoria de 50,27% alcançada reduzindo as constantes de mola em ambos os eixos em cerca de 60% e reduzindo o coeficiente de amortecimento em ambos os eixos em média de 70%.

Para otimização da “RMS” do deslocamento da massa suspensa no modelo full car para a excitação de lomba foram realizadas as simulações apresentadas na Tabela 11 abaixo:

**Tabela 11 - Otimização deslocamento através do algoritmo genético excitação lomba em modelo full car**

<b>Simulação</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>
“RMS” deslocamento [ <i>m</i> ]	0,00093	0,00094	0,00086	0,00086
$k_{f1-2}$ [ <i>N/m</i> ]	5468	8547	4000	4000
$c_{f1-2}$ [ <i>Ns/m</i> ]	4068	3075	2500	2500
$k_{r3-4}$ [ <i>N/m</i> ]	5000	5070	4000	4000
$c_{r3-4}$ [ <i>Ns/m</i> ]	1330	1299	1000	1021

Os limites dos parâmetros de “k” e “c” no algoritmo genético foram ajustados entre a simulação 2 e 3. Neste caso o limite inferior da constante de rigidez das molas foi diminuído para 4000 N/m para perceber se o algoritmo encontrava uma melhor solução. Após a simulação 4, como os parâmetros da suspensão já não variaram muito entre simulações, é possível afirmar que esta será a solução ótima do problema.

Na Figura 25 abaixo, é apresentado um gráfico comparativo do modelo full car com configurações originais, a azul, e o modelo otimizado, a vermelho, de modo a analisar a resposta em função da aceleração da massa suspensa de cada uma das configurações à excitação de lomba.

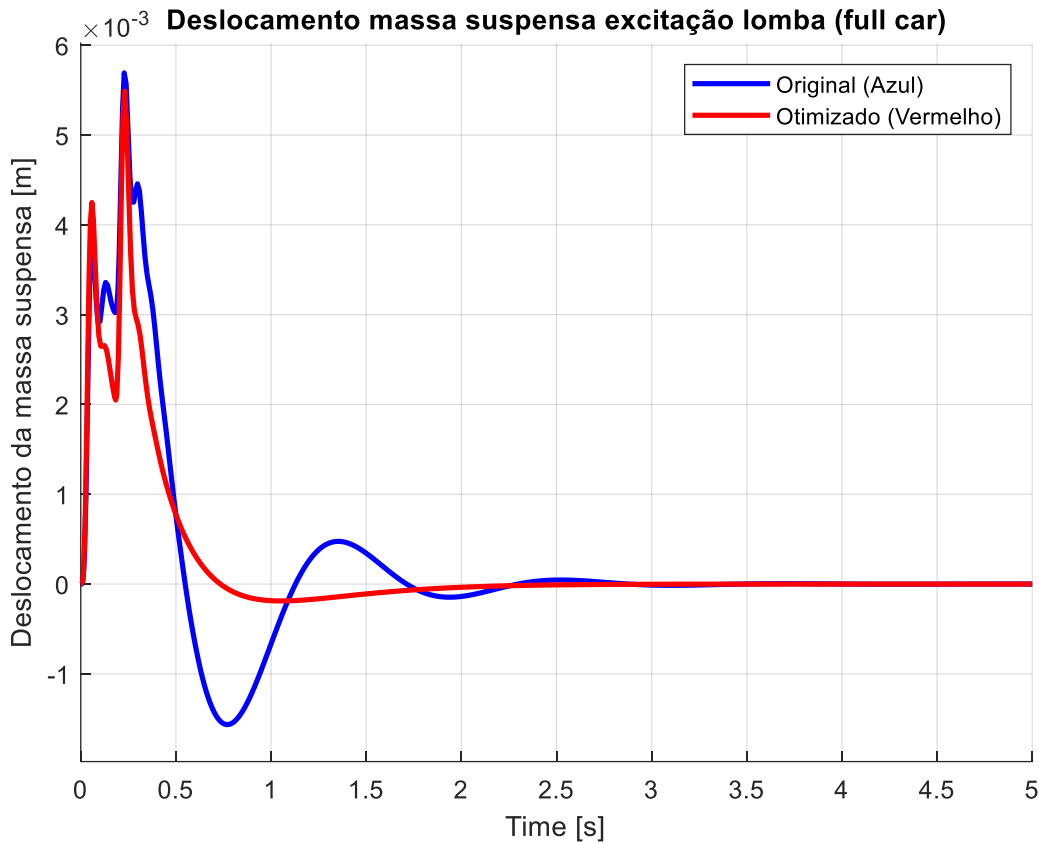


Figura 25 - Comparação do deslocamento entre o modelo full car original e otimizado (lomba)

Através da implementação do algoritmo genético para otimização do sistema à resposta a uma excitação de lomba foi possível otimizar os parâmetros de suspensão do modelo full car, em 27,26% em relação ao deslocamento da massa suspensa. A diferença entre os valores máximos alcançados para o deslocamento da massa suspensa não é muito notória, estando ambos perto da marca dos 0,0055 m, no entanto o modelo com configurações otimizadas volta ao estado de equilíbrio mais rapidamente, perto da marca dos 2 segundos, contra os 3 segundos da configuração original, fazendo com que a resposta em “RMS” do deslocamento da configuração otimizada seja menor que o modelo original. A constante de mola em ambos os eixos foi diminuída em cerca de 70% enquanto que o coeficiente de amortecimento do eixo da frente aumentou em 28,5% e o do eixo traseiro diminuiu em 30%.

Na Tabela 12 encontra-se um quadro resumo onde constam os parâmetros de “k” e “c” de ambos os eixos, otimizados, bem como o valor da “RMS” da aceleração e deslocamento obtidos após a otimização.

Tabela 12 - Quadro resumo otimização excitação lombal modelo full car

	Original	Otimizado para aceleração	Otimizado para deslocamento
“RMS” aceleração [ $m/s^2$ ]	0,9093	0,4522	-
“RMS” deslocamento [ $m$ ]	0,00118	-	0,00086
$k_{f1-2}$ [ $N/m$ ]	14675	5239	4000
$c_{f1-2}$ [ $Ns/m$ ]	1945	500	2500
$k_{r3-4}$ [ $N/m$ ]	12365	5000	4000
$c_{r3-4}$ [ $Ns/m$ ]	1458	500	1021
Melhoria [%]	-	<b>50,27</b>	<b>27,26</b>

### 5.2.2. Excitação de função sinusoidal

Utilizando a excitação de função sinusoidal para o modelo de full car foram realizadas as seguintes simulações, apresentadas na Tabela 13 abaixo, para obtenção dos parâmetros de suspensão ótimos para minimização da aceleração para o modelo full car.

Tabela 13 - Otimização aceleração através do algoritmo genético excitação sinusoidal em modelo full car

Simulação	1	2	3	4	5	6	7	8
“RMS” aceleração [ $m/s^2$ ]	0,0633	0,0631	0,0625	0,0628	0,0606	0,061	0,0607	0,0599
$k_{f1-2}$ [ $N/m$ ]	141492	121375	125131	94878	95284	96751	93193	91421
$c_{f1-2}$ [ $Ns/m$ ]	3271	3253	3320	3200	4484	4418	4334	4946
$k_{r3-4}$ [ $N/m$ ]	43555	26784	8000	10841	5000	6030	5000	4000
$c_{r3-4}$ [ $Ns/m$ ]	2227	3173	3297	3354	3353	3654	2887	2857

Os limites dos parâmetros de suspensão do sistema foram ajustados, no algoritmo genético, após a simulação 4, de modo a focar o campo de pesquisa nas áreas com maior probabilidade de encontrar melhores soluções, áreas estas em que, nas simulações anteriores, haviam sido encontradas boas soluções para o problema. Neste caso o limite inferior da constante de rigidez das molas foi diminuído para 4000 N/m para perceber se o algoritmo encontrava uma melhor solução. Como nas últimas duas simulações os parâmetros e a solução tiveram uma variação considerada mínima, é possível afirmar que a solução foi encontrada.

Na Figura 26 abaixo, é apresentado um gráfico comparativo do modelo full car com as configurações originais, a azul, e o modelo otimizado, a vermelho, de modo a analisar a resposta em função da aceleração da massa suspensa de cada uma das configurações à excitação sinusoidal.

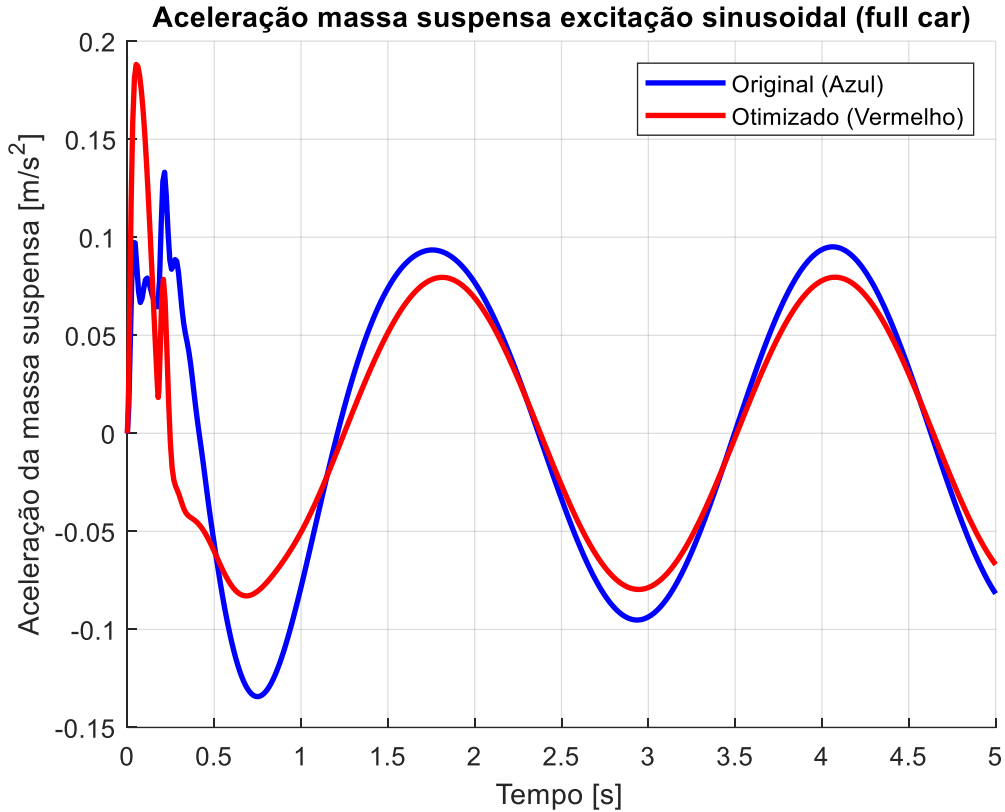


Figura 26 - Comparação da aceleração entre o modelo full car original e otimizado (sinusoidal)

Através da implementação do algoritmo genético para otimização do sistema à resposta a uma excitação sinusoidal foi possível otimizar os parâmetros de suspensão do modelo full car, em 16,54% em relação à “RMS” da aceleração da massa suspensa. Apesar de na configuração otimizada o pico máximo de aceleração da massa suspensa, na ordem dos  $0,18 m/s^2$ , ser superior ao da configuração original, ligeiramente abaixo dos  $0,14 m/s^2$  o sistema otimizado apresenta melhor resposta em “RMS” da aceleração da massa suspensa ao longo de toda a simulação. Esta otimização foi alcançada através do aumento no eixo da frente da constante de mola em 523% e do coeficiente de amortecimento em 154%, já em relação ao eixo traseiro a constante de mola diminuiu em 68% e o coeficiente de amortecimento aumentou em 96%.

Para otimização da “RMS” do deslocamento da massa suspensa foram realizadas as simulações apresentadas na Tabela 14 abaixo:

Tabela 14 - Otimização deslocamento através do algoritmo genético excitação sinusoidal em modelo full car

Simulação	1	2	3
“RMS” deslocamento [m]	0,00689	0,00689	0,00689
$k_{f1-2}$ [N/m]	199236	196660	199891
$c_{f1-2}$ [Ns/m]	4443	4415	4508
$k_{r3-4}$ [N/m]	194448	193502	199362
$c_{r3-4}$ [Ns/m]	2948	3168	2808

Os limites dos parâmetros de suspensão do sistema foram ajustados, no algoritmo genético, após a simulação 2. Após a simulação 3, como os parâmetros da suspensão já não variaram praticamente nada entre simulações é possível afirmar que esta será a solução ótima.

Na Figura 27 abaixo, é apresentado um gráfico comparativo do modelo full car com as configurações originais, a azul, e o modelo otimizado, a vermelho, de modo a analisar a resposta em função do deslocamento da massa suspensa de cada uma das configurações à excitação de sinusoidal.

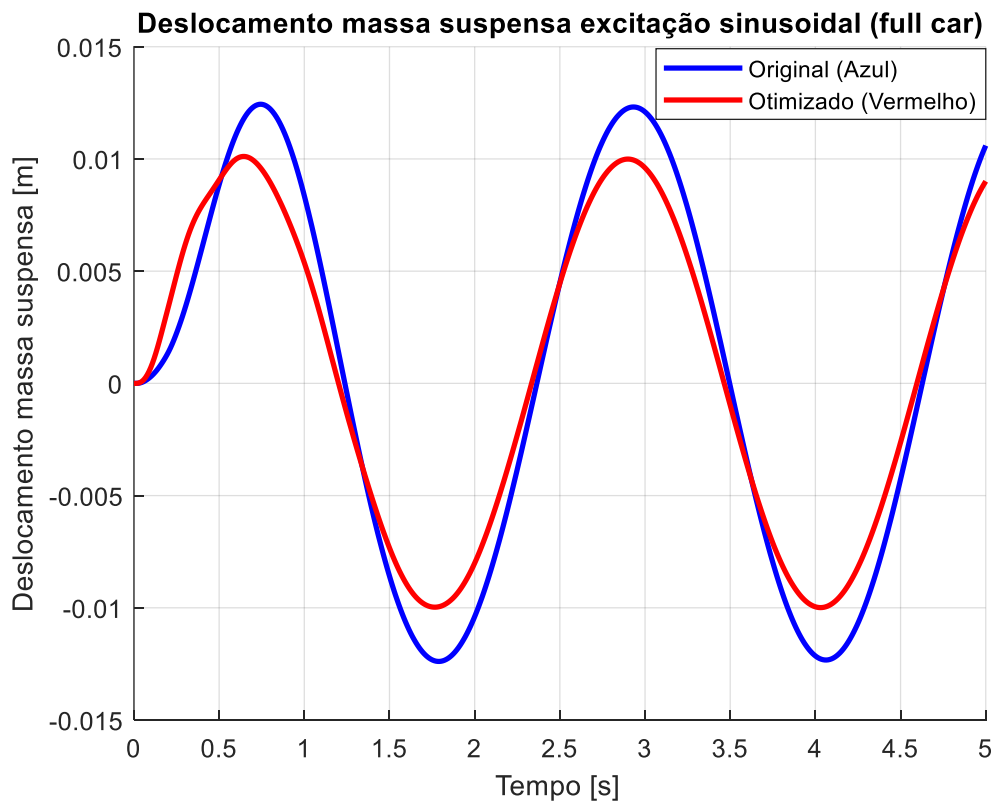


Figura 27 - Comparação do deslocamento entre o modelo full car original e otimizado (sinusoidal)

O sistema otimizado proporcionou uma melhoria de 17,87% na resposta em “RMS” do deslocamento da massa suspensa em relação à configuração original, com um aumento bastante acentuado de em média 1380% da constante da mola e cerca 112% do coeficiente de amortecimento, para ambos os eixos, assumindo valores que se encontram bastante próximos dos limites estabelecidos para estes parâmetros no algoritmo genético.

Na Tabela 15 encontra-se um quadro resumo onde constam os parâmetros de “k” e “c” de ambos os eixos, otimizados, bem como o valor da “RMS” da aceleração e deslocamento obtidos após a otimização.

Tabela 15 - Quadro resumo otimização excitação sinusoidal modelo full car

	Original	Otimizado para aceleração	Otimizado para deslocamento
“RMS” aceleração [ $m/s^2$ ]	0,0718	0,0599	-
“RMS” deslocamento [ $m$ ]	0,00839	-	0,00689
$k_{f1-2}$ [N/m]	14675	91421	199891
$c_{f1-2}$ [Ns/m]	1945	4946	4508
$k_{r3-4}$ [N/m]	12365	4000	199362
$c_{r3-4}$ [Ns/m]	1458	2857	2808
<b>Melhoria [%]</b>	-	<b>16,54</b>	<b>17,87</b>

Na Tabela 16 é apresentado um quadro resumo de comparação entre os dois modelos utilizados para a excitação de lomba.

Tabela 16 - Quadro final excitação lomba

Excitação:	Lomba					
	Otimização:	Aceleração		Deslocamento		
	Modelo:	Quarter Car	Full Car	Quarter Car	Full Car	
“RMS” aceleração [ $m/s^2$ ]		0,3728	0,4522	-	-	
“RMS” deslocamento [ $m$ ]		-	-	0,00762	0,00086	
Constante de mola [ $N/m$ ]		$k_{f1-2}$	5239	10194	$k_{f1-2}$	4000
		$k_{r3-4}$	5000		$k_{r3-4}$	4000
Coeficiente de amortecimento [ $Ns/m$ ]		$c_{f1-2}$	500	2461	$c_{f1-2}$	2500
		$c_{r3-4}$	500		$c_{r3-4}$	1021
Melhoria [%]		<b>66,21</b>	<b>50,27</b>	<b>22,79</b>	<b>27,26</b>	

Comparando as soluções de otimização dos modelos quarter car e full car verifica-se que, tanto para a minimização da RMS da aceleração como da RMS do deslocamento os parâmetros de suspensão otimizados apresentaram valores coincidentes com os limites mínimos pré estabelecidos para estas variáveis, excetuando o coeficiente de amortecimento na otimização do deslocamento. Isto pressupõe que, se diminuirmos os limites mínimos dos parâmetros, será alcançada uma melhor solução, no entanto, apesar de matematicamente esta hipótese poder ser verdadeira, poderá não ter significado físico ou real, pois talvez não existam elementos do sistema com estes parâmetros.

Na Tabela 17 é apresentado um quadro resumo de comparação entre os dois modelos utilizados para a excitação sinusoidal.

Tabela 17 - Quadro final excitação Sinusoidal

Excitação:	Sinusoidal					
	Otimização:	Aceleração		Deslocamento		
		Modelo:	Quarter Car	Full Car	Quarter Car	Full Car
“RMS” aceleração [ $m/s^2$ ]		0,06885	0,0599	-	-	
“RMS” deslocamento [ $m$ ]		-	-	0,007172	0,00689	
Constante de mola [ $N/m$ ]	10000	$k_{f1-2}$	91421	199994	$k_{f1-2}$	199891
		$k_{r3-4}$	4000		$k_{r3-4}$	199362
Coeficiente de amortecimento [ $Ns/m$ ]	4836	$c_{f1-2}$	4946	8936	$c_{f1-2}$	4508
		$c_{r3-4}$	2857		$c_{r3-4}$	2808
<b>Melhoria [%]</b>		<b>5,61</b>	<b>16,54</b>	<b>8,14</b>	<b>17,87</b>	

Comparando as soluções de otimização de ambos os modelos, é perceptível que na otimização da aceleração existe uma discrepância entre o valor de constante de mola do eixo da frente com o eixo de trás. isto deve-se ao facto de o centro de gravidade do veículo estar ligeiramente mais perto do eixo da frente causando uma diferença na distribuição de peso do carro. O mesmo acontece no coeficiente de amortecimento em ambas as soluções de otimização dos dois modelos. Na otimização do deslocamento a solução ideal indica uma constante de mola bastante próxima do limite máximo pré estabelecido. No entanto, é importante ter sempre em atenção que, fisicamente, poderá não ser possível encontrar elementos para um sistema de suspensão com parâmetros demasiado elevados, ou demasiado reduzidos, pelo que a solução não terá significado real.

## 6. Conclusões

A otimização do sistema de suspensão através de algoritmo genético, tanto para o modelo quarter car como no modelo full car, foi conseguida com sucesso. Foram apresentadas melhorias significativas na performance de ambos os modelos em resposta às excitações propostas. Algo que poderia ter sido feito seria a realização de testes de ensaio em laboratório para os sistemas de suspensão em estudo de forma a corroborar os resultados obtidos na otimização.

A percentagem de melhoria apresentada para o modelo quarter car foi bastante próxima da obtida para o modelo full car, isto demonstra que, apesar da simplicidade do modelo, o mesmo é capaz de proporcionar resultados bastante aproximados aos de modelos mais complexos, o que é extremamente útil em diversos problemas de engenharia de modo a reduzir o tempo e o nível computacional necessário para resolver o problema.

Verificou-se que a eficácia do processo de otimização dos parâmetros da suspensão depende diretamente da variável a otimizar. A discrepância entre alguns valores de parâmetros no modelo full car, entre o eixo dianteiro e traseiro, é devido à localização do centro de gravidade e consequente distribuição de peso do veículo.

No caso em que o modelo quarter car foi simulado com a excitação de lombas, este apresentou melhorias de 66,21% e 22,79% na otimização da aceleração e deslocamento vertical da massa suspensa, respetivamente, diminuindo a constante de rigidez e o coeficiente de amortecimento do sistema de suspensão. No entanto, para o mesmo modelo, mas com este a ser excitado por uma função sinusoidal, a melhoria na otimização da aceleração vertical de 5,61% foi obtida através da redução da constante de rigidez e aumento ligeiro do coeficiente de amortecimento. Na otimização do deslocamento vertical da massa suspensa, o aumento acentuado da constante de rigidez e do coeficiente de amortecimento, permitiu a melhoria de 8,14% na performance do sistema. Os valores dos parâmetros de suspensão otimizados são bastante próximos dos limites mínimos pré estabelecidos no início do problema, pelo que, diminuindo estes limites poderá ser possível encontrar uma melhor solução, no entanto, poderá não ter significado físico e real.

No modelo full car, para a excitação de lombas, foi possível reduzir o efeito da aceleração e do deslocamento da massa suspensa em 50,27% e 27,26%, respetivamente. Os resultados obtidos indicam uma drástica redução de ambos os parâmetros de suspensão da mola e do amortecedor, visto que, estes coincidem com os limites mínimos de pesquisa estabelecidos no algoritmo genético, com exceção da otimização do deslocamento, em que, é proposto que o coeficiente de amortecimento no eixo dianteiro seja ligeiramente superior ao da configuração original. Quando o modelo foi simulado para a excitação de função sinusoidal a otimização da aceleração e do deslocamento vertical da massa suspensa apresentou melhorias de 16,54% e 17,87%, respetivamente. No caso da redução do efeito da aceleração, o mesmo foi concretizado aumentando drasticamente a constante de rigidez no eixo dianteiro, mas reduzindo ligeiramente no eixo traseiro, já o coeficiente de amortecimento é ligeiramente superior em ambos os eixos

em relação à configuração original. De modo a otimizar o deslocamento vertical da massa suspensa, a constante de rigidez de ambos os eixos apresenta um aumento acentuado, novamente perto dos limites estabelecidos para este parâmetro no campo de pesquisa do algoritmo genético e um aumento ligeiro do coeficiente de amortecimento em ambos os eixos do veículo. Mais uma vez poderia se aumentar os limites destes parâmetros, mas é necessário assegurar que são valores que poderão ser aplicados num sistema de suspensão real.

Em suma a utilização de algoritmos genéticos na otimização de parâmetros de suspensão é uma opção bastante válida capaz de apresentar bons resultados na melhoria de performance de um veículo. Sem estas ferramentas computacionais capazes de resolver este tipo de problemas matemáticos seria bastante mais complexo e demoroso a otimização destes sistemas de suspensão.

## 7. Trabalhos futuros

Trabalhos futuros terão o foco na evolução do modelo de modo a considerar uma otimização multiobjetivo do sistema, bem como a análise de outro tipo de excitações, focando por exemplo na otimização de parâmetros de suspensão no contexto de competição automóvel.

Utilizando o código em MATLAB® do Anexo J é possível utilizar outro tipo de método de otimização substituindo na secção de “Problem solver” o método que se pretende utilizar, procurando nas bibliotecas do software MATLAB® os outros métodos disponibilizados pelo software.

No modelo Simulink do Anexo E é possível analisar, por exemplo, o conforto do condutor do veículo, sendo apenas necessário adicionar blocos que representem as equações de dinâmica vertical do banco do condutor e através de um bloco de “output” exportar determinada variável que se deseja otimizar com um determinado método de otimização desejado.

Para analisar o modelo utilizado de full car com outro tipo de excitações, basta substituir os blocos de excitação, como apresentado no Anexo I, por blocos representativos de excitações que se desejam utilizar. É possível colocar um bloco de sinal e, com alguma pesquisa, adicionar uma rotina no MATLAB® de modo a desenvolver uma função que represente uma determinada pista, em contexto de competição, de modo a otimizar a suspensão do veículo e ter melhor performance em corrida.

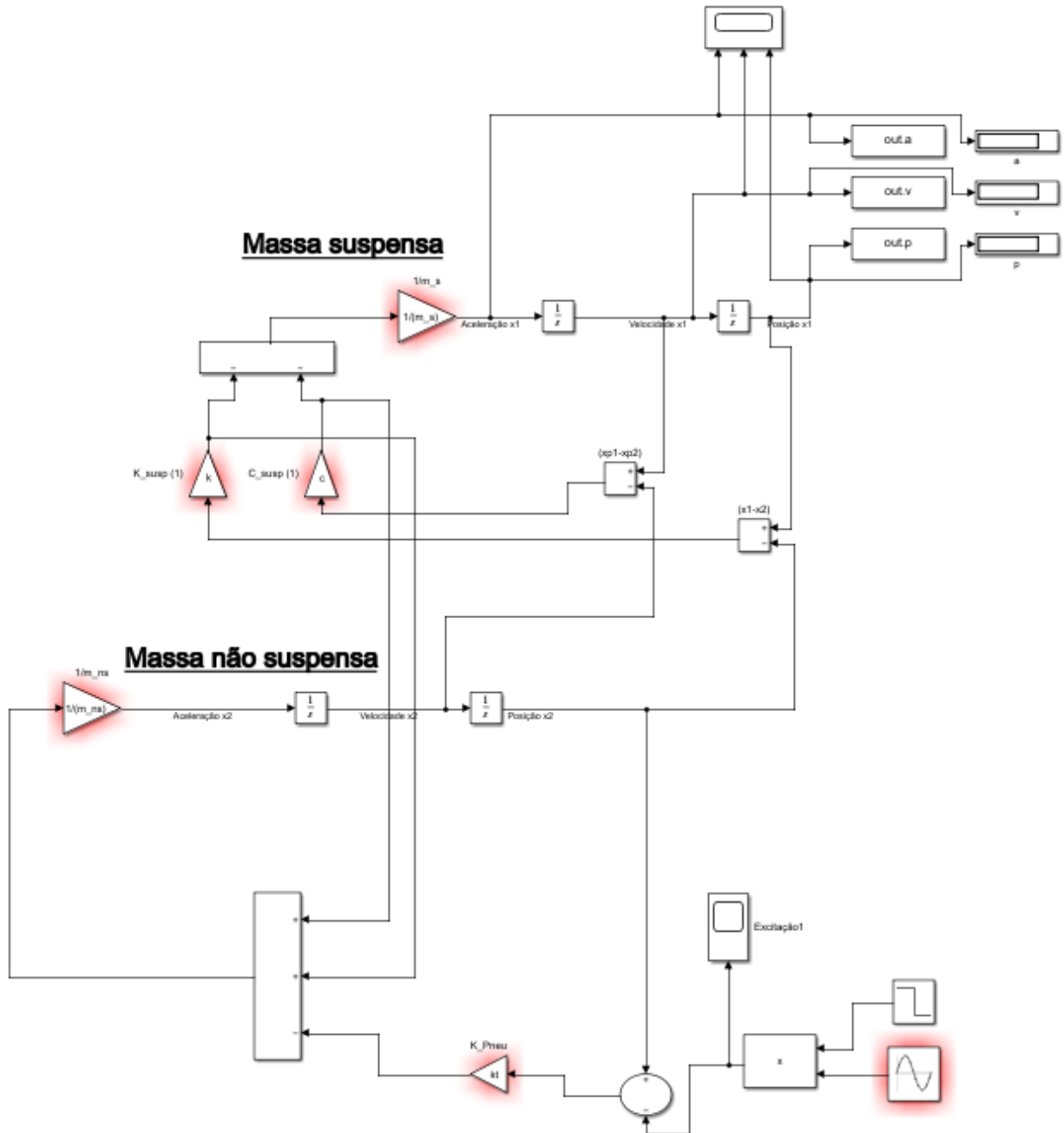
## 8. Bibliografia

- Alhijawi, B., & Awajan, A. (2023). Genetic algorithms: theory, genetic operators, solutions, and applications. *Evolutionary Intelligence*.
- Barbieri Da Cunha, C., Cantão, L., Artero, A., & Néia, S. (2013). *Roteamento de veículos utilizando otimização por colônia de formigas e algoritmo genético*.
- Blum, C., & Roli, A. (2003). *Metaheuristics in Combinatorial Optimization: Overview and Conceptual Comparison*. ACM Computing Surveys.
- C. Spall, J. (2003). *Introduction to Stochastic Search and Optimization, Estimation, Simulation and Control*. John Wiley & Sons.
- Collete, Y., & Siarry, P. (2003). *Multiobjective Optimization. Principles and Case Studies* (1st ed.). Springer.
- Darwin, C. (1909). *The origin of species*. P. F. Collier & Son.
- Dogruer C.U. (2022, May). Optimal Mechanical Design of Half-Car Vehicle Suspension System Components. *The 13th Asian Control Conference*.
- Ebrahimi-Nejad, S., Kheybari, M., & Borujerd, S. V. N. (2020). Multi-objective optimization of a sports car suspension system using simplified quarter-car models. *Mechanics and Industry*, 21(4). <https://doi.org/10.1051/meca/2020039>
- F. Milliken, W., & L. Milliken, D. (1995). *Race Car Vehicle Dynamics* (I. Society of Automotive Engineers, Ed.).
- Fletcher Roger. (1987). *Practical Methods of Optimization* (Second). John Wiley & Sons.
- Fossati, G. (2017). *Otimização multiobjetivo dos parâmetros do sistema de suspensão de um modelo de veículo completo através de um algoritmo meta-heurístico*. Universidade de rio grande do sul.
- Gouvêa, E. (2016). *MÉTODOS CONVERGENTES DE OTIMIZAÇÃO GLOBAL BASEADOS NO VETOR Q-GRADIENTE*. Instituto nacional de pesquisas espaciais - INPE.
- Holland, J. H. (1992). *Adaptation in Natural and Artificial Systems* (2nd ed.). MIT Press.
- Jazar, R. N., & Marzbani, H. (2024). *Vehicle Vibrations* (Springer, Ed.; 1st ed.). Springer International Publishing. <https://doi.org/10.1007/978-3-031-43486-0>
- Kashem Saad, Nagarajah Romesh, & Ektesabi Mehran. (2018). *Vehicle Suspension Systems and Eletromagnetic Dampers*. Springer.
- Kelly S. Graham. (2012). *Mechanical Vibrations Theory and Applications* (M. Shortt Christopher, Ed.; SI). Cengage Learning.

- LibreTexts. (2024). *Mendeley Reference Manager*. <https://www.mendeley.com/reference-manager/library/all-references>
- M. Pardalos, P., & G. C. Resende, M. (2002). *Handbook of applied optimization* (1st ed.). Oxford University Press.
- Marzbani Hormoz, & N. Jazar Reza. (2024). *Vehicle Vibrations Linear and Nonlinear Analysis, Optimization and Design*. Springer.
- Maselena Andino, Assahubulkahfi Muhammad, Sam Yahaya Md, & Huda Miftachul. (2018). LQR Tuning by Particle Swarm Optimization of Full Car Suspension System. *International Journal of Engineering and Technology*.
- Mitchell, M. (1996). *An introduction to genetic algorithms*. Massachusetts Institute of Technology.
- Nocedal, J., & J. Wright, S. (2006). *Numerical Optimization* (Second). Springer.
- Rill, G. (2012). *Road Vehicle Dynamics Fundamentals and Modeling*. CRC Press.
- Sousa Suzana. (2016). Otimização dos parâmetros da suspensão para um modelo de um quarto de veículo. In Suzana Moreira Ávila (Ed.), *XXXVII Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering*. RIPE.
- Thoreson, M. J. (2009). Efficient optimisation of a vehicle suspension system, using a gradient-based approximation method. *Mathematical and Computer Modelling*, 50.
- W. de Silva Clarence. (2005). *Vibration and Shock Handbook*. Taylor & Francis.
- Wallentowitz Henning. (2004). Automotive Engineering II Vertical Vehicle Dynamics. In *Suspension systems Driving Behaviour*. Vervielfaltigungsstelle.
- Wei, L., & Chengcai, Z. (2021). Coefficient Optimization Based on Genetic Algorithm for Hybrid Control of Semi-active Suspension System. *20th International Symposium on Distributed Computing and Applications for Business Engineering and Science (DCABES)*.

# Anexos

## Anexo A – Modelo Simulink Quarter Car



**Anexo B - Código MATLAB® Quarter Car sem algoritmo genético**

```

clearvars
close all
%Inserir diretoria do modelo
addpath('C:\Mestrado EAU 2022\Tese\Sistema simples\Final_Quarter_Car')
%Inserir nome do modelo
% modelo = 'sim_Final_quarter_car_model_sinwave';
modelo = 'sim_Final_quarter_car_model';

StopTime=5;

%-----Constantes-----
m_s=395; %Massa suspensa
m_ns=38; %Massa não suspensa
kt=290000; %Rigidez do pneu
A=0.05; %Amplitude da excitação

% Defina o número de iterações
n = 10;

%Limites de k e c
k_min = 10000;
k_max = 200000;
v_k = round(linspace(k_min, k_max, n)', 0);

c_min = 500;
c_max = 10000;
v_c = round(linspace(c_min, c_max, n)', 0);

vel_carro=50; %km/h
wavelength_estrada=5; %metros

%%% dados para bloco da excitacao
periodo=wavelength_estrada/(vel_carro/3.6);
vel_sinwave=2*pi()*(1/periodo); %rad/s

[k1,c1] = meshgrid(v_k, v_c);

tic
for i=1:numel(k1)
    k = k1(i);
    c = c1(i);
    simOut = sim(modelo, StopTime);
    posicao = simOut.p;
    velocidade = simOut.v;
    aceleracao=simOut.a;

    rms_a(i) = rms(aceleracao.Data);
    rms_p(i) = rms(posicao.Data);
    rms_v(i) = rms(velocidade.Data);
end
toc

rmsa_reshape=reshape(rms_a,n,n);
rmsp_reshape=reshape(rms_p,n,n);
rmsv_reshape=reshape(rms_v,n,n);

```

```

% ----- Gráficos -----
set(figure, 'Name', 'Gráfico RMS Deslocamento')
surf(k1,c1,rmsp_reshape)
xlabel('k [N/m]');
ylabel('c [N.s/m]');
zlabel('Deslocamento RMS [m]');
shading interp

set(figure, 'Name', 'Gráfico RMS Aceleração')
surf(k1,c1 , rmsa_reshape);
xlabel('k [N/m]');
ylabel('c [N.s/m]');
zlabel('Aceleração RMS [m/s^2]');
shading interp

set(figure, 'Name', 'Gráfico RMS Velocidade')
surf(k1,c1 , rmsv_reshape);
xlabel('k [N/m]');
ylabel('c [N.s/m]');
zlabel('Velocidade RMS [m/s]');
shading interp

% % %%%%%%%%%%% POSICAO %%%%%%%%%%%
% [min_value, idx] = min(rmsp_reshape(:));
% [row, col] = ind2sub(size(rmsp_reshape), idx);
% k_val = k1(row, col);
% c_val = c1(row, col);
% disp(['Valor mínimo de RMS Posição: ', num2str(min_value), ' m']);
% disp(['Valor de k que gerou o mínimo: ', num2str(k_val), ' N/m']);
% disp(['Valor de c que gerou o mínimo: ', num2str(c_val), ' N.s/m']);

%%%%%%%%%%%%%% ACELERACAO %%%%%%%%%%%%%%%
[min_value, idx] = min(rmsa_reshape(:));
[row, col] = ind2sub(size(rmsa_reshape), idx);
k_val = k1(row, col);
c_val = c1(row, col);
disp(['Valor mínimo de RMS Aceleração: ', num2str(min_value), ' m/s^2']);
disp(['Valor de k que gerou o mínimo: ', num2str(k_val), ' N/m']);
disp(['Valor de c que gerou o mínimo: ', num2str(c_val), ' N.s/m']);

```

**Anexo C – Código MATLAB® Algoritmo Genético – Quarter car model**

```

StopTime=5;

m_s=395; %Massa suspensa
m_ns=38; %Massa não suspensa
kt=290000; %Rigidez do pneu
A=0.01; %Amplitude da excitação

% Parâmetros do bloco de excitação de função sinusoidal Simulink
wavelength_estrada=5; % Comprimento de onda
periodo=wavelength_estrada/(vel_teste);
vel_sinwave=2*pi()*(1/periodo); % [rad/s]

% Parâmetros do algoritmo genético
popsz=80 ; %Tamanho da população
tol=.0001; %Tolerância de convergência
maxgen=100 ; %Número máximo de gerações
xfrac=0.7; %Fração de crossover
mutfrac=0.1; %Fração de Mutação

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%GA%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
problem.solver = 'ga';
problem.fitnessfcn = @(x)V1_quarter_car_funcao([x(1) x(2)]);
problem.nvars = 2;
problem.lb=[180000,8000];
problem.ub=[200000,10000];
problem.options =
optimoptions('ga','PopulationSize',popsz,'MaxGenerations',maxgen,...
'FunctionTolerance',tol,'CrossoverFraction',xfrac,'EliteCount',mutfrac*popsz
,'SelectionFcn',...
{@selectiontournament,2}, 'PlotFcn', {@gaplotbestf,
@gaplotstopping});

format long %Obter resultado com mais casas decimais

%Calcula solução
tic
[xval,fval,existflag,output] = ga(problem);
toc

%Apresentar solução
xval
fval

%%%% Comentar o que não se deseja visualizar %%%%%%%%%

%%%% Gráfico Posição %%%
% set(figure, 'Name', 'Gráfico RMS Posição')
% surf(k1,c1,rmsp_reshape)
% xlabel('k [N/m]');
% ylabel('c [N.s/m]');
% zlabel('Posição RMS [m]');
% shading interp

%%%% Gráfico Aceleração %%%
set(figure, 'Name', 'Gráfico RMS Aceleração')
surf(k1,c1,rmsp_reshape)
xlabel('k [N/m]');

```

```
ylabel('c [N.s/m]');  
zlabel('posicao RMS [m/s^2]');  
shading interp  
  
%%% Marcar ponto no gráfico %%%  
hold on  
scatter3(xval(1),xval(2),fval,"MarkerEdgeColor","r")
```

**Anexo D – Função chamada pelo código do Anexo C**

```
function fresult=V1_quarter_car_funcao(x)
assignin('base','k',x(1)); %Valor x(1) corresponde ao k
assignin('base','c',x(2)); %Valor x(2) corresponde ao c

%% Diretoria onde se encontra o modelo Simulink
addpath('C:\Mestrado EAU 2022\Tese\Sistema simples\Final_Quarter_Car')

%% Colocar o nome dos modelos Simulink e comentar um deles

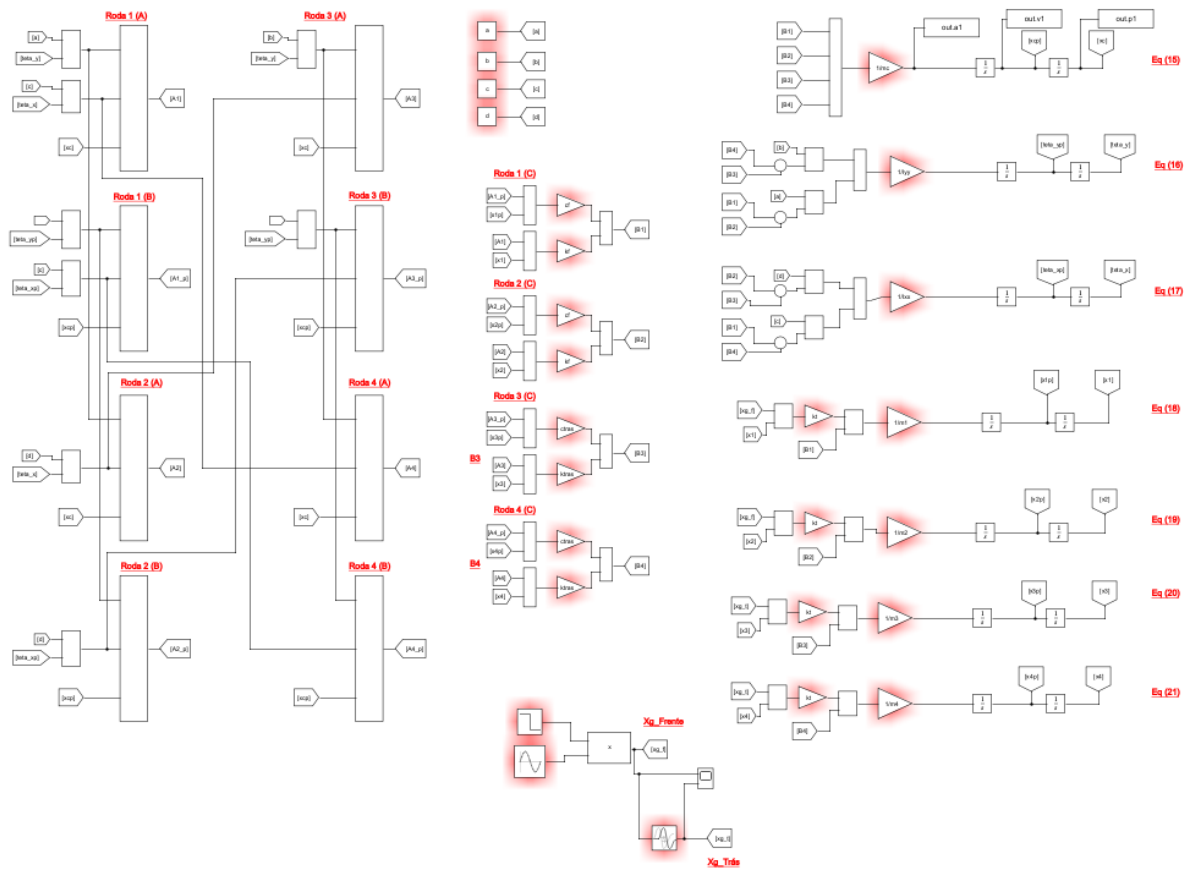
%Simulação do modelo excitação sinusoidal
simOut=sim('sim_Final_quarter_car_model_sinwave');

%Simulação do modelo excitação lombal
% simOut=sim('sim_Final_quarter_car_model');

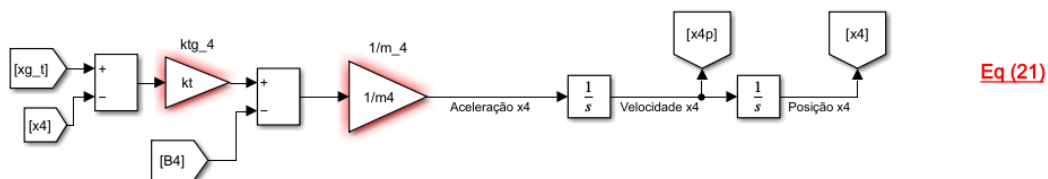
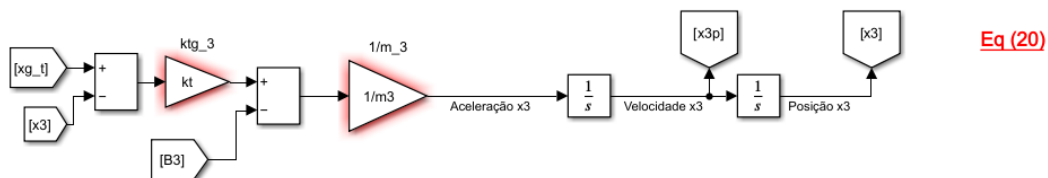
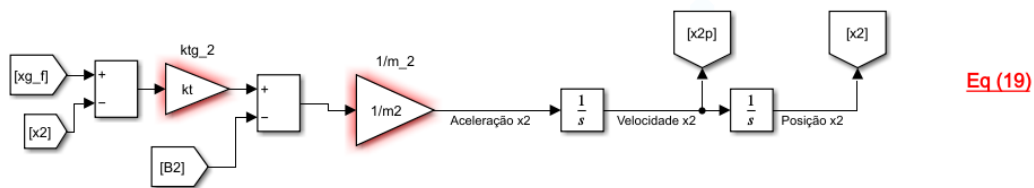
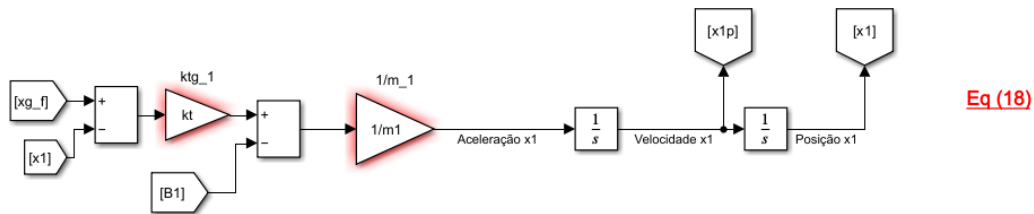
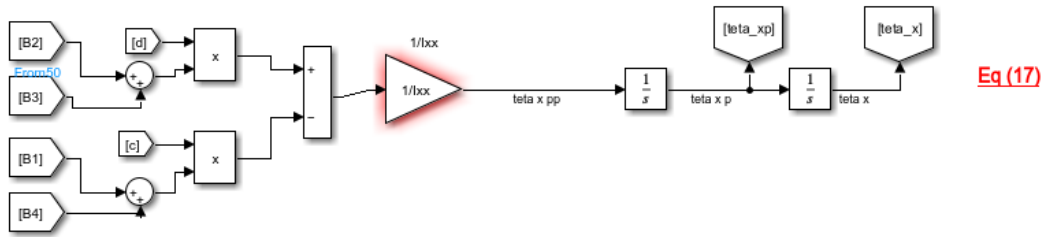
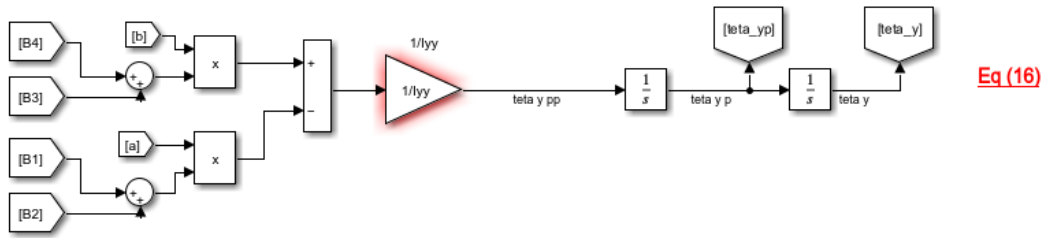
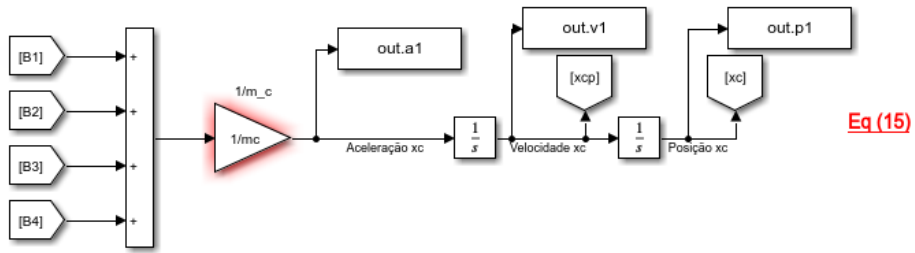
%Deixar apenas 1 não comentado

%ts acessa o timeseries de cada variável
% ts = simOut.a; %Aceleração
ts = simOut.p; %Posição
% ts = simOut.v; %Velocidade
fresult = rms(ts.Data); % Obtém o valor rms dos dados da série temporal
end
```

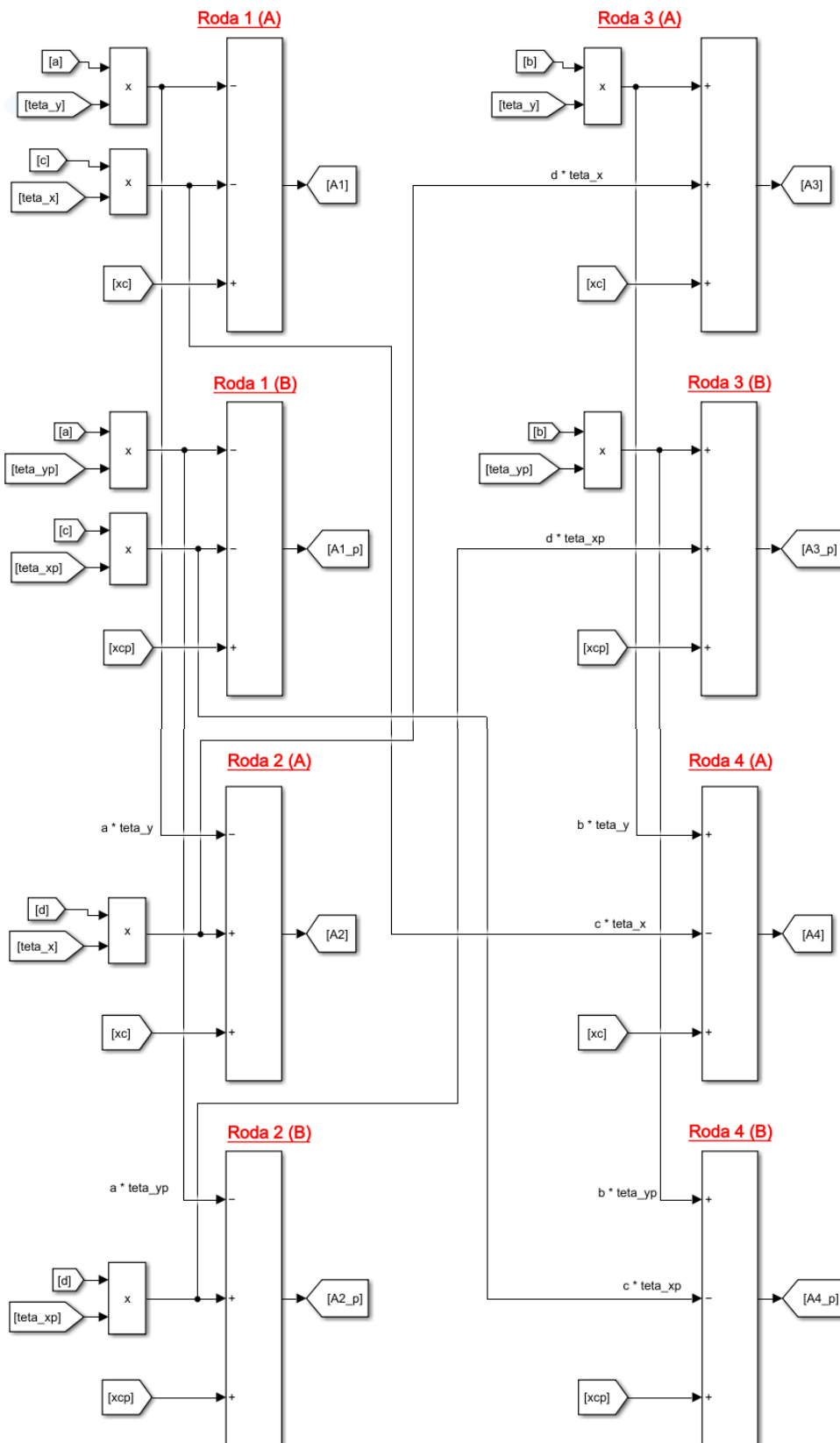
### Anexo E - Modelo Simulink Full car



Anexo F – Zoom (lado direito) Modelo Simulink Full car

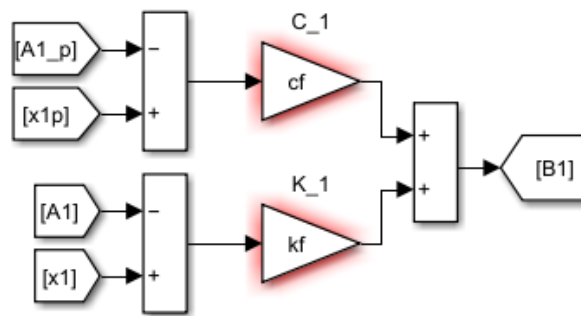


**Anexo G – Zoom (lado esquerdo) Modelo Simulink Full car**

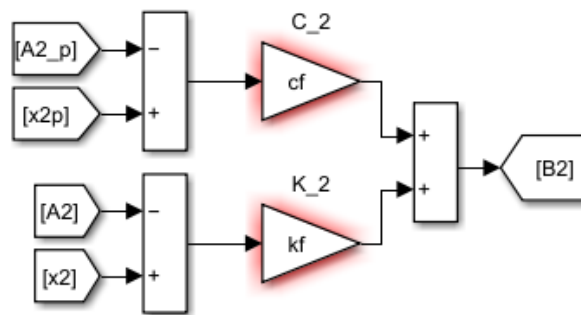


**Anexo H – Zoom (centro) Modelo Simulink Full car**

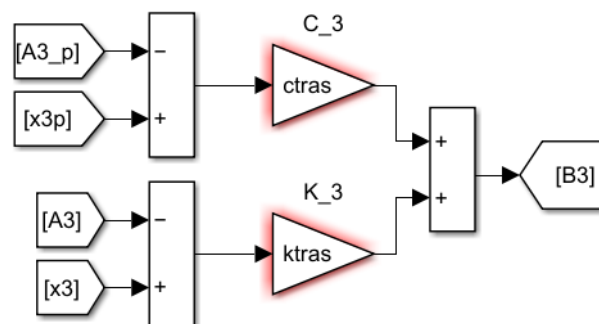
**Roda 1 (C)**



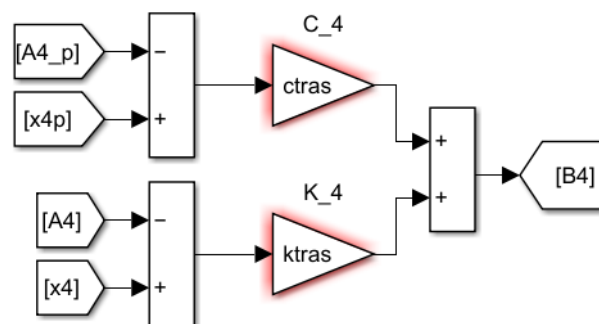
**Roda 2 (C)**



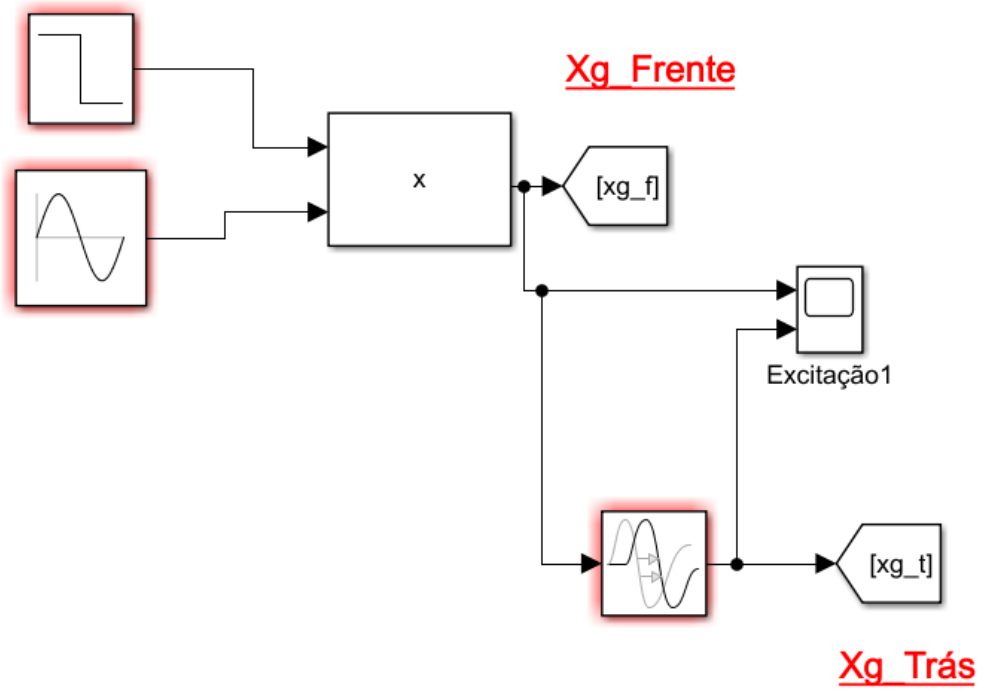
**Roda 3 (C)**



**Roda 4 (C)**



**Anexo I – Zoom excitação (centro inferior) Modelo Simulink Full car**



**Anexo J – Código MATLAB® algoritmo genético modelo Full car (Excitação lomba)**

```

clearvars
%Diretoria do código
addpath('C:\Mestrado EAU 2022\Tese\Sistema full car')
StopTime=5;
mc = 1580; %Massa chassis do carro
m1=40;
m2=40;
m3=40;
m4=40;
kt=290000; %Rigidez do pneu

d_eixo=2.431; % Distância entre eixo
l_eixo=1.565; % "Wheel track"
a=1.000; % a1 - Distância do CG-frente
b=1.430; % a2 - Distância do CG- traseira
c= l_eixo/2; % b2 - Distância do CG- esquerda
d= l_eixo/2; % b1 - Distância do CG- direita
Ixx=335; % Momento de inércia eixo x
Iyy=1095; % Momento de inércia eixo y

vel_teste=50 /3.6; %Velocidade do carro em [m/s]
t_delay=d_eixo/vel_teste; % Tempo de delay entre o eixo da frente e o
traseiro
l_lomba=0.5; %Largura da lomba [m]
A=0.05; %Altura da lomba [m]

%Parâmetros do algoritmo genético
popsz=80 ; %Tamanho da população
tol=.0001; %Tolerância de convergência
maxgen=100 ; %Número máximo de gerações
xfrac=0.3; %Fração de crossover
mutfrac=0.4; %Fração de Mutação

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
problem.solver = 'ga';
problem.fitnessfcn = @(x)V1_full_car_funcao([x(1) x(2) x(3) x(4)]);
problem.nvars = 4;
problem.lb=[ 5000, 500, 5000, 500]; %kf cf ktras ctras
problem.ub=[ 6000, 1000, 6000, 1000];
problem.options =
optimoptions('ga','PopulationSize',popsz,'MaxGenerations',maxgen,...
'FunctionTolerance',tol,'CrossoverFraction',xfrac,'EliteCount',mutfrac*popsz
,'SelectionFcn',...
{@selectiontournament,2}, 'PlotFcn', {@gaplotbestf,
@gaplotstopping});

format long

%Resultados
tic
[xval,fval,existflag,output] = ga(problem);
toc

xval
fval

```

**Anexo K – Função chamada pelo código do Anexo J**

```
function valor=V1_full_car_funcao(x)
assignin('base','kf',x(1));
assignin('base','cf',x(2));
assignin('base','ktras',x(3));
assignin('base','ctras',x(4));

% Lomba

%Diretoria do modelo Simulink
addpath('C:\Mestrado EAU 2022\Tese\Sistema full car')

%Introduzir nome do modelo Simulink
simOut=sim('sim_V1_full_car_model');

%Deixar apenas 1 não comentado
ts = simOut.a1; % Aceleração
% ts = simOut.p1; % Posição
% ts = simOut.v1; % Velocidade
valor = rms(ts.Data); % Obtém o valor rms dos dados da série temporal
end
```

**Anexo L – Código MATLAB® algoritmo genético modelo Full car (excitação sinusoidal)**

```

clearvars
%Diretoria do código
addpath('C:\Mestrado EAU 2022\Tese\Sistema full car')
StopTime=5;
mc = 1580; %Massa chassis do carro
m1=40;
m2=40;
m3=40;
m4=40;
kt=290000; %Rigidez do pneu

d_eixo=2.431; % Distância entre eixo
l_eixo=1.565; %"Wheel track"
a=1.000; % a1 - Distância do CG-frente
b=1.430; % a2 - Distância do CG- traseira
c= l_eixo/2; % b2 - Distância do CG- esquerda
d= l_eixo/2; % b1 - Distância do CG- direita
Ixx=335; % Momento de inércia eixo x
Iyy=1095; % Momento de inércia eixo y

vel_teste=50 /3.6; %Velocidade do carro em [m/s]
t_delay=d_eixo/vel_teste; % Tempo de delay entre o eixo da frente e o
l_lomba=0.5; %Largura da lomba [m]
A=0.01; %Amplitude da sin wave [m]

wavelength_estrada=5; %metros

%%%dados para bloco sinwave excitacao
periodo=wavelength_estrada/(vel_teste);
vel_sinwave=2*pi()*(1/periodo); %[rad/s]

% Parâmetros do algoritmo genético
popsz=80 ; %Tamanho da população
tol=.0001; %Tolerância de convergência
maxgen=100 ; %Número máximo de gerações
xfrac=0.7; %Fração de crossover
mutfrac=0.1; %Fração de Mutação

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%GA%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
problem.solver = 'ga';
problem.fitnessfcn = @(x)V_wave_full_car_funcao([x(1) x(2) x(3) x(4)]);
problem.nvars = 4;
problem.lb=[ 190000, 4000, 185000, 2500]; %kf cf ktras ctras
problem.ub=[ 200000, 5000, 200000, 3500];
problem.options =
optimoptions('ga','PopulationSize',popsz,'MaxGenerations',maxgen,...
'FunctionTolerance',tol,'CrossoverFraction',xfrac,'EliteCount',mutfrac*popsz
,'SelectionFcn',...
{@selectiontournament,2}, 'PlotFcn', {@gaplotbestf,
@gaplotstopping});

format long
tic
[xval,fval,existflag,output] = ga(problem);
toc

xval
fval

```

**Anexo M – Função chamada pelo código do Anexo L**

```
function valor=V_wave_full_car_funcao(x)
assignin('base','kf',x(1));
assignin('base','cf',x(2));
assignin('base','ktras',x(3));
assignin('base','ctras',x(4));

%sinusoidal

%Diretoria do modelo Simulink
addpath('C:\Mestrado EAU 2022\Tese\Sistema full car')

%Introduzir nome do modelo Simulink
simOut=sim('sim_V_wave_full_car_model');

%Deixar apenas 1 não comentado
% ts = simOut.a1; % Aceleração
ts = simOut.p1; % Posição
% ts = simOut.v1; % Velocidade
valor = rms(ts.Data); % Obtém o valor rms dos dados da série temporal
end
```