

**SEBENTA de BIOFÍSICA**  
Licenciatura em Biomecânica

Cidália Macedo  
Rui B. Ruben

ISBN: 978-989-8797-77-3

DOI : <https://doi.org/10.25766/4p21-xg41>

# ÍNDICE

|   |           |
|---|-----------|
| <b>1. CONCEITOS FUNDAMENTAIS.....</b>               | <b>4</b>  |
| 1.1 O que é a Biomecânica .....                     | 4         |
| 1.2 Breve história da biomecânica.....              | 5         |
| <b>1.3 Sistema esquelético .....</b>                | <b>11</b> |
| 1.3.1 Esqueleto .....                               | 11        |
| 1.3.2 Articulações.....                             | 13        |
| 1.3.3 Planos e eixos do movimento do corpo .....    | 16        |
| 1.3.4 Músculos esqueléticos.....                    | 21        |
| 1.3.5 Antropometria .....                           | 24        |
| <b>1.4 Princípios fundamentais da Mecânica.....</b> | <b>25</b> |
| 1.4.1 Análise dimensional.....                      | 25        |
| 1.4.2 Leis de Newton.....                           | 27        |
| 1.4.3 Graus de liberdade .....                      | 29        |
| <b>2. MECÂNICA DO MOVIMENTO.....</b>                | <b>31</b> |
| <b>2.1 Equilíbrio de sistemas de forças.....</b>    | <b>31</b> |
| 2.1.1 Forças .....                                  | 31        |
| 2.1.2 Operações com forças.....                     | 32        |
| 2.1.2.1 Soma ou resultante.....                     | 32        |
| 2.1.2.2 Diferença ou subtração .....                | 32        |
| 2.1.2.3 Multiplicação por escalar.....              | 32        |
| 2.1.2.4 Componentes de uma força.....               | 33        |
| 2.1.2.5 Grandeza de uma força .....                 | 34        |
| 2.1.3 Momento de uma força.....                     | 37        |
| 2.1.4 Equilíbrio de forças.....                     | 38        |
| 2.1.5 Reacções nos apoios .....                     | 40        |
| 2.1.6 Centro de massa .....                         | 41        |
| <b>2.2 Forças e movimento.....</b>                  | <b>46</b> |
| 2.2.1 Posição e deslocamento linear .....           | 46        |
| 2.2.2 Velocidade linear .....                       | 47        |

|            |   |           |
|------------|---|-----------|
| 2.2.3      | Aceleração linear .....                                     | 48        |
| 2.2.4      | Posição angular .....                                       | 49        |
| 2.2.5      | Velocidade angular .....                                    | 50        |
| 2.2.6      | Aceleração angular .....                                    | 50        |
| 2.2.7      | Movimentos particulares de uma partícula .....              | 51        |
| 2.2.7.1    | Movimento rectilíneo .....                                  | 51        |
| 2.2.7.2    | Movimento de projecteis .....                               | 52        |
| 2.2.7.3    | Movimento circular .....                                    | 54        |
| 2.2.8      | Momento linear .....  | 55        |
| 2.2.9      | Impulso e variação do momento linear .....                  | 55        |
| 2.2.10     | Conservação do momento linear .....                         | 56        |
| <b>2.3</b> | <b>Trabalho e energia.....</b>                              | <b>57</b> |
| 2.3.1      | Trabalho realizado por uma força .....                      | 57        |
| 2.3.2      | Potência .....  | 58        |
| 2.3.3      | Energia .....   | 59        |
| 2.3.4      | Conservação da energia mecânica.....                        | 60        |
| <b>2.4</b> | <b>Rotação de um corpo rígido em torno de um eixo .....</b> | <b>60</b> |
| 2.4.1      | Momento de inércia .....                                    | 60        |
| 2.4.2      | Momento angular .....                                       | 62        |
| 2.4.3      | Variação do momento angular .....                           | 63        |
| <b>3.</b>  | <b>PROPRIEDADES DA MATÉRIA .....</b>                        | <b>66</b> |
| <b>3.1</b> | <b>Sólidos.....</b>   | <b>66</b> |
| 3.1.1      | Introdução.....   | 66        |
| 3.1.2      | Massa volúmica .....  | 67        |
| 3.1.3      | Tensão .....  | 68        |
| 3.1.4      | Deformação .....  | 72        |
| 3.1.5      | Elasticidade e plasticidade.....                            | 74        |
| 3.1.6      | Ensaio de tracção .....                                     | 75        |
| 3.1.7      | Lei de Hooke .....  | 76        |
| 3.1.8      | Energia de deformação.....                                  | 78        |
| <b>3.2</b> | <b>Fluidos.....</b>   | <b>79</b> |
| 3.2.1      | Pressão e força de impulsão .....                           | 79        |
| 3.2.2      | Força dinâmica de um fluido .....                           | 81        |

|       |                             |    |
|-------|-----------------------------|----|
| 3.2.3 | Conservação do caudal ..... | 84 |
| 3.2.4 | Princípio de Bernoulli..... | 85 |

|                           |           |
|---------------------------|-----------|
| <b>BIBLIOGRAFIA .....</b> | <b>87</b> |
|---------------------------|-----------|

# 1. Conceitos fundamentais

## 1.1 O que é a Biomecânica

Biomecânica é a mecânica aplicada à biologia. Por outras palavras, é o estudo de fenómenos biológicos através das teorias da mecânica. A palavra “mecânica” foi usada pela primeira vez por Galileu Galilei no livro *Discorsi e dimostrazioni, intorno à due scienze attenenti alla mecanica & movimenti local* (1638), para descrever força, movimento e resistência dos materiais. Com o decorrer dos anos o seu significado foi estendido, abrangendo o estudo do movimento de todo o tipo de partículas e meios contínuos, incluindo átomos, moléculas, gases, líquidos, sólidos, estrelas e galáxias. De um modo geral, a mecânica é aplicada à análise de qualquer sistema dinâmico. A termodinâmica, a transferência de calor e massa e os métodos computacionais também são disciplinas da mecânica. A biologia, como parte do mundo físico, também é objecto de estudo da mecânica.

Em suma, biomecânica é a mecânica dos sistemas vivos. É uma área recente mas com uma longa base histórica, e que cobre um vasto número de disciplinas como os seguintes exemplos que irão ser abordados na licenciatura de Biomecânica:

- **Biomecânica dos tecidos** – estuda os tecidos dos organismos, como o osso, cartilagem, tendões, ligamentos, músculos, etc. Através do conhecimento dos vários tecidos é possível, nomeadamente, analisar e prever as alterações que algumas doenças ou implante de próteses provocam ao nível dos tecidos.
- **Biomecânica do movimento** – estuda o movimento dos corpos vivos. Pode ser aplicado ao desporto aumentando a eficácia do treino. Também permite estudar pessoas com doenças neuro-musculares com o objectivo de incrementar a sua qualidade de vida.
- **Ergonomia** – a maioria das actuais doenças profissionais são provocadas por movimentos repetitivos ou por posturas incorrectas. A análise das condições de trabalho e a sua melhoria pode contribuir para uma consequente redução de doenças profissionais e, sobretudo, um aumento do conforto no local de trabalho.
- **Biomecânica do sangue** – as doenças cardiovasculares são uma das maiores causas de morte no Mundo. A análise do fluxo sanguíneo em veias e artérias sãs e em pessoas com, por exemplo, arteriosclerose e aneurismas, permite comparar, compreender e prevenir acidentes cardiovasculares.

- **Biomateriais** – as próteses são fabricadas em materiais biocompatíveis, e novos materiais podem melhorar a relação osso-prótese. Também se estudam novos materiais para o fabrico de suportes ósseos (scaffolds).

Ao longo de toda a licenciatura estas e outras matérias serão alvo de estudo pormenorizado, no entanto algumas áreas da Biomecânica serão introduzidas na disciplina de Biofísica I. Neste primeiro capítulo é feita uma introdução à Biomecânica no seu geral. No segundo capítulo serão introduzidas as equações da estática e da dinâmica, que são a base de qualquer sistema mecânico. O terceiro capítulo está destinado às propriedades da matéria.

A Biomecânica, embora também estude o corpo humano, não substitui a medicina. A medicina estuda o corpo humano de um ponto de vista biológico e a Biomecânica do ponto de vista da mecânica. No entanto são áreas que se complementam, sendo que a Biomecânica estuda e analisa a origem de inúmeras patologias. Por exemplo, aquando da introdução de implantes os biomecânicos podem estudar sobre o melhor material, geometria e tipo de prótese, prevendo o futuro do conjunto osso-prótese, no entanto a última decisão é sempre, obviamente, do médico. No desporto o tratamento de lesões é da responsabilidade dos médicos, mas a biomecânica, em parceria com o treinador pode aumentar a eficácia de treino, através da maximização do esforço muscular e da técnica.

A Biomecânica é uma ciência abrangente, no entanto existe uma área inter-disciplinar que é a base de qualquer estudo biomecânico: a **Antropometria**. A antropometria trata das mensurações do corpo humano ou de alguma das suas partes, tais como, o comprimento, a massa, o momento de inércia, a massa volúmica, etc.

## 1.2 Breve história da biomecânica

**Aristóteles** (384-322 a.C.) foi o primeiro a escrever sobre o movimento dos animais. Muitas das ideias de Aristóteles foram a base da biologia e da física, sendo que só foram ultrapassadas quase 2000 anos depois em pleno período da renascença. No entanto, algumas das ideias provaram-se como sendo verdadeiras, como por exemplo o facto da Terra ser redonda.

Os modernos desenvolvimentos da Biomecânica começam com o ímpeto da mecânica durante a renascença.

Leonardo (1452-1519), conhecido como **Leonardo da Vinci** por ter nascido na pequena cidade de Vinci situada perto de Milão, é para muitos o maior homem do renascimento e um dos maiores de todos os tempos. Leonardo da Vinci foi um dos

primeiros cientistas num mundo sem ciência. Os seus estudos abrangeram vastas áreas, indo desde a zoologia, a botânica e a óptica até à aerodinâmica e a hidrodinâmica. Excelente observador, analisou a natureza, desenhou-a meticulosamente e estudou-a, sendo os seus estudos sobre o voo dos pássaros sobejamente conhecidos. Leonardo também é o pai de um novo método científico. Baseado na sistematização, observação e descrição, este método foi predominante nas ciências naturais até ao século XIX. Os pensadores renascentistas, em geral, viam o Homem como uma perfeição matemática. A imagem da capa desta sebenta é uma obra de Leonardo da Vinci que descreve o corpo humano inserido na forma ideal do círculo e nas perfeitas proporções do quadrado.

**William Harvey** (1578-1658) descobriu a circulação sanguínea em 1615. Sem microscópio, Harvey nunca observou os capilares, no entanto escreveu que algum mecanismo permitia a passagem do sangue das artérias para as veias de modo a garantir a circulação sanguínea. A descoberta dos capilares sanguíneos deve-se a **Marcello Malpighi** (1628-1694), 45 anos depois de Harvey comunicar a circulação sanguínea.

**Galileu Galilei** (1564-1642) descobriu a constância do movimento do pêndulo, tendo-o utilizado posteriormente para medir a pulsação. Foi o primeiro a projectar um microscópio moderno em 1609, mas foi **J. Janssen** juntamente com o seu filho **Zacharia** a construir o primeiro microscópio rudimentar em 1590.

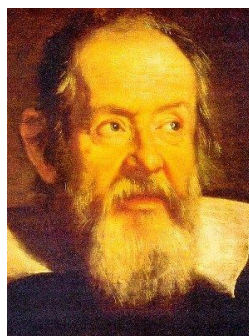


Figura 1.1– Retrato de Galileu Galilei

Harvey foi discípulo de Galileu na cidade de Pádua. A demonstração da circulação sanguínea escrita por Harvey é baseada no princípio de medição de Galileu. Se o coração bater 72 vezes por minuto, quer dizer que envia cerca de 235 kg de sangue por hora para o organismo. De onde vem tanto sangue? Para onde vai? Foi deste modo que Harvey concluiu da necessidade da circulação sanguínea.

Galileu também demonstrou que a matemática é a chave essencial para a compreensão da natureza. O grande matemático **René Descartes** (1596-1691)

escreveu o primeiro livro, da era moderna, dedicado à **Fisiologia** (parte da biologia que estuda as funções dos órgãos nos seres vivos). Devido à falta de conhecimentos práticos na área, Descartes desenvolveu um, muito complexo, modelo da estrutura animal, incluindo a função dos nervos. No entanto, muitas das investigações seguintes não confirmaram o seu modelo.

**Giovanni Alfonso Borelli** (1608-1679) foi menos ambicioso mas mais bem sucedido a clarificar o movimento dos músculos na dinâmica dos corpos. Borelli estudou o voo dos pássaros, a locomoção dos peixes, bem como o coração e os intestinos.

**Robert Boyle** (1627-1691) estudou os pulmões e analisou a relação do ar com a água na respiração dos peixes.

**Robert Hooke** (1635-1703) utilizou pela primeira vez a palavra célula para designar a entidade elementar da vida. Também é conhecida a lei de Hooke que relaciona a deformação com a tensão de um material. A lei de Hooke será estudada no capítulo 3 desta sebeta.

**Isaac Newton** (1642-1727) embora não tenha escrito sobre biomecânica, os seus estudos e leis da mecânica são em muitos aspectos a base da biomecânica.

**Leonhard Euler** (1707-1783), baseado nas leis de movimento de Newton, escreveu pela primeira vez a lei de propagação das ondas nas artérias em 1775, no entanto, a solução destas equações só foi obtida pelo conhecido matemático **George Friedrich Bernhard Riemann** (1826-1866).

**Thomas Young** (1733-1829) estudou a voz humana que se forma através de vibrações. Também estudou os materiais tendo descoberto o módulo de elasticidade, que também é meritoriamente conhecido por módulo de Young, que irá ser estudado no terceiro capítulo.

**Jean Poiseuille** (1797-1869) melhorou o manómetro de mercúrio para medir a tensão arterial. A sua primeira medição foi realizada na aorta de um cão. Também compreendeu o fluxo turbulento e laminar dos fluidos e o efeito de não escorregamento entre um fluido viscoso e uma parede sólida. A lei de Poiseuille é ainda hoje utilizada nos estudos cardiovasculares.

**Hermann von Helmholtz** (1821-1894) é para muitos o pai da bioengenharia. Helmholtz foi professor de fisiologia e patologia em Königsberg, professor de anatomia e fisiologia em Bona, professor de fisiologia em Heidelberg e, finalmente, professor de física em Berlim. Os seus contributos para a Biomecânica vão desde a óptica, a acústica, a termodinâmica, a electrodinâmica e a fisiologia. Descobriu o mecanismo de focagem do olho. Inventou o oftalmoscópio para ver a retina e o oftalmómetro para medir os olhos. Estudou o mecanismo de audição e também os vórtices em mecânica

dos fluidos. Foi o primeiro a determinar a velocidade do impulso nervoso (30 m/s) e a descobrir que a contracção nervosa é uma importante fonte de aquecimento animal.

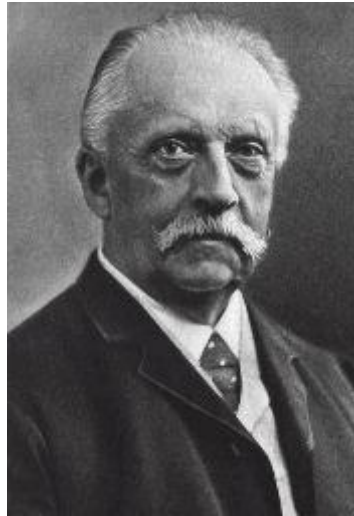


Figura 1.2 – Retrato de Hermann von Helmholtz

**Diederik Johannes Korteweg** (1848-1941) e **Horace Lamb** (1849-1934) escreveram sobre a propagação das ondas nos canais sanguíneos. **Otto Frank** (1865-1944) trabalhou na teoria da hidrodinâmica da circulação sanguínea. **Balthasar van der Pol** (1889-1959) modelou o coração com osciladores não-lineares, tendo sido capaz de modelar simular o coração com quatro osciladores de modo a produzir um electrocardiograma realista.

Na história do século XX a biomecânica aplicada à ortopedia foi a que mais contribuiu para a investigação em ortopedia. A artroplastia total da anca consiste na substituição da articulação natural da anca por uma prótese. As artroplastias devem-se, sobretudo, a osteoartrites, mas também a outras doenças degenerativas da articulação e a fracturas na cabeça do fémur. Actualmente as próteses têm uma componente acetabular e uma haste femoral (endoprótese), como se observa na figura 1.3, mas nem sempre assim foi. As primeiras artroplastias a serem realizadas tinham apenas uma parte acetabular. O cirurgião norte-americano, **Smith-Petersen**, produziu um acetábulo de vidro que introduziu, pela primeira vez, em 1923. Depois do vidro foi utilizada a bakelite e o pirex, mas, tal como o vidro, partiam com facilidade. Smith-Petersen decidiu utilizar uma liga de crómio, cobalto e molibdénio (vitallium). Os resultados foram positivos, já que apenas 50% dos pacientes apresentavam dor no pós-operatório. As artroplastias acetabulares substituíam a articulação mas não tinham a capacidade de corrigir deficiências no fémur.



Figura 1.3 – Prótese da articulação da anca. Parte acetabular e haste femoral

Em 1943, **Moore** e **Bohlman** aplicaram um acetábulo que preenchia a falta da cabeça de um fêmur destruída por um tumor.

Os irmãos **Judet** produziram uma prótese com acetábulo e haste em acrílico. A haste ocupava apenas a zona inter-trocanter. Devido a problemas de utilização a haste passou a ser construída com uma liga de crómio-cobalto. Esta prótese tinha a particularidade de ser uma peça única em vez de apresentar duas partes distintas: acetábulo e haste.

Moore, em 1950, construiu a primeira endoprótese intramedular. A prótese foi construída em vitallium, tinha um colar na zona calcar e apresentava fendas para reduzir o seu peso total. A prótese de Moore era curta e apresentava problemas de estabilidade, ou seja, os deslocamentos relativos entre a prótese e o osso eram excessivos levando à falha do implante.

A aplicação de uma prótese com duas partes distintas foi proposta por **Giliberty** e **Bateman**. Não era mais que a combinação de uma endoprótese com um acetábulo com a vantagem de reduzir o atrito, melhorando assim o seu funcionamento.

**McKee** em 1956 implantou uma endoprótese criada por **Thompson** e um suporte acetabular, ambos feitos de crómio-cobalto.

O metacrilato de metil foi utilizado pela primeira vez como cimento entre o osso e a prótese, de forma a garantir a fixação da prótese ao fêmur, em 1958 por **Sir John Charnley**.

Também foi Charnley o primeiro a utilizar um acetábulo de polietileno, criando assim uma articulação artificial de baixo atrito.



Figura 1.4 – Retrato de Sir John Charnley

Ainda hoje as endopróteses podem ou não ser cimentadas. As não cimentadas têm um revestimento poroso, fixando-se ao osso através do atrito e promovendo o crescimento ósseo por entre o revestimento poroso, conseguindo-se, deste modo, uma fixação biológica. As próteses cimentadas têm uma maior durabilidade, no entanto sobra pouca quantidade de osso quando é necessário proceder à sua substituição. As próteses não cimentadas têm uma durabilidade menor, no entanto há uma maior quantidade de osso aquando da sua substituição.

Hoje em dia as hastes são de titânio ou de cromo-cobalto. O titânio tem a vantagem de ser mais leve e menos rígido mas é também mais caro. O cromo-cobalto também tem excelentes desempenhos de biocompatibilidade.

Já foi referido como a mecânica é importante e está ligada com a biomecânica. Também é importante referir de que modo a biomecânica tem contribuído para o desenvolvimento da medicina. Aqui ficam alguns exemplos:

- Avanço na compreensão dos mecanismos de formação, função e produção de moléculas.
- A formação do calo ósseo aquando das fracturas está intimamente relacionada com a tensão e deformação dos tecidos.
- Criação de válvulas artificiais para o sistema cardiovascular.
- Desenvolvimento de próteses.
- Desenvolvimento de meios de diagnóstico.
- Desenvolvimento das máquinas de hemodiálise.

Hoje em dia a Biomecânica permite estudar fenómenos complexos como, por exemplo, a reologia dos tecidos, transferência de massa nas membranas, micro-circulação, etc, contribuindo fortemente para a melhoria da medicina.

Em Portugal há cada vez mais investigadores a trabalhar em Biomecânica, tendo-se realizado no início de 2005 o primeiro encontro nacional de Biomecânica apadrinhado

pelo o professor **Kelo Correia da Silva**, por muitos considerado, pai da Biomecânica em Portugal. Também se devem salientar outros investigadores pelo seu importante contributo para o crescimento da Biomecânica em Portugal e no Mundo:

- Os professores **João Martins** e **Eduardo Borges Pires** na biomecânica dos músculos.
- Os professores **Helder C. Rodrigues**, **Paulo R. Fernandes**, **João Folgado** e **José Simões** no estudo do osso e da artroplastia total da anca.
- Os professores **Jorge Ambrósio** e **Miguel Silva** na biomecânica do movimento.
- O professor **António Veloso** na Biomecânica aplicada ao desporto.

### 1.3 Sistema esquelético

#### 1.3.1 Esqueleto

Embora o corpo humano nunca esteja rigorosamente parado, análises estáticas podem ser feitas em actividades quase-estáticas, como por exemplo o estar em pé ou em determinadas posturas activas. Na maioria das actividades são necessárias análises dinâmicas.

Um movimento eficiente é aquele que é feito com o mínimo gasto de energia. De dois maratonistas, que iniciem a corrida à mesma velocidade média de 5.2 m/s, aquele que tem mais eficiência na corrida tem mais hipóteses de vitória. No treino da maratona costuma-se dizer “correr muito para correr fácil”, sendo que “correr fácil” significa estar bem fisicamente e ser bom tecnicamente, ou seja, ser eficiente na corrida. Ao nível, dos trabalhos repetitivos também é importante ser eficiente para evitar doenças nos músculos e tendões. Um movimento eficiente pressupõe, além do mais, a utilização dos músculos estritamente necessários ao desempenho pretendido. Tudo o resto é desperdício de energia que leva, pelo menos, ao cansaço prematuro.

Um movimento eficaz é aquele que melhor cumpre os objectivos. Numa corrida de 100 m, o atleta com a corrida mais eficaz é aquele que chega à meta na frente.

Há quatro disciplinas que fornecem informação necessária para estudar e compreender o movimento: a **Osteologia**, estuda o sistema esquelético; a **Artrologia**, ciência que estuda as articulações; a **Miologia**, estuda os músculos; e a **Neurologia** estuda o sistema nervoso.

Estruturalmente o **sistema esquelético** humano está dividido em duas partes:

- O **esqueleto axial** que inclui o crânio, o tórax e a coluna vertebral.
- O **esqueleto apendicular** inclui a cintura escapular ou peitoral (clavícula e omoplata), a cintura pélvica ou anca (ossos ílacos) e o esqueleto apendicular (braços e pernas).

Na figura 1.5 é possível observar o esqueleto humano e o nome de alguns dos ossos mais importantes.

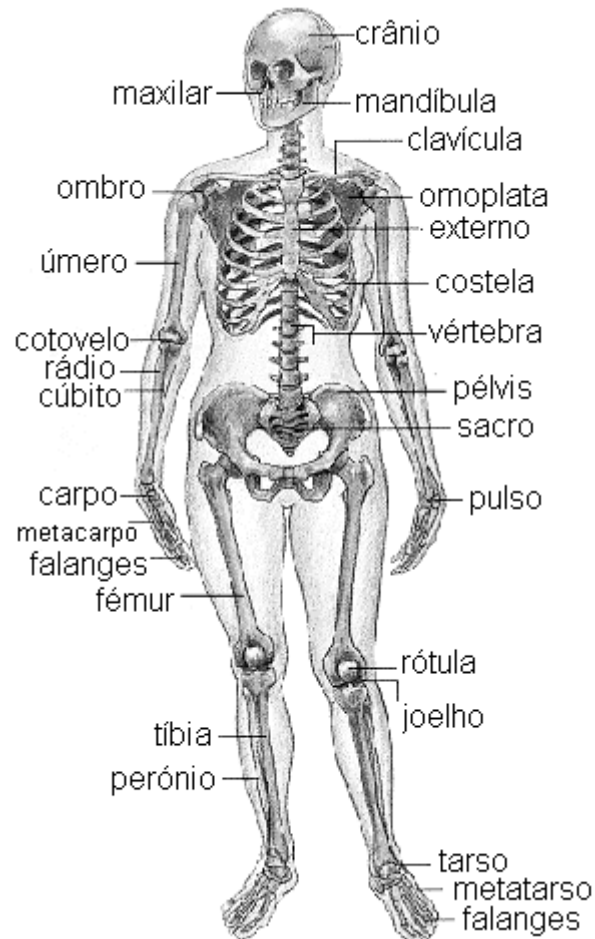


Figura 1.5 – Esqueleto humano

O esqueleto tem várias funções de importância vital:

- proteger os órgãos;
- servir de suporte aos tecidos moles;
- produzir glóbulos vermelhos (apenas nos ossos compridos);
- armazenar sais minerais, tais como o cálcio e o fósforo;
- permitir a fixação dos músculos esqueléticos;
- actuar como um sistema, recebendo as forças musculares e tornando o movimento possível.

A classificação dos ossos é feita segundo a sua forma: longos, curtos e planos. Os **ossos curtos** medem aproximadamente o mesmo em todas as direcções. As vértebras são um exemplo de osso curto. Os **ossos planos**, de que é exemplo a omoplata, têm uma dimensão bastante menor que as outras duas. Os **ossos longos** têm uma dimensão muito maior que as duas restantes. O fémur, a tibia e os metacarpos são exemplos de ossos longos.

Num osso longo a extremidade mais próxima do tronco diz-se **proximal** e a extremidade mais afastada designa-se por **distal**. O lado **medial** é o mais próximo da linha média do corpo e o lado oposto diz-se **lateral**. A parte da frente é a **anterior** e a de trás é a **posterior**. Na figura 1.6 é observam-se algumas destas definições para o fémur.

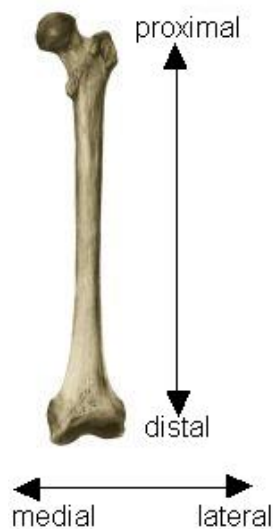


Figura 1.6 – Definições de proximal, distal, medial e lateral para o fémur

### 1.3.2 Articulações

O esqueleto humano é um sistema de ossos juntos entre si. Estas junções entre dois ou mais ossos designam-se por **articulações**.

As articulações classificam-se, quanto ao tipo de movimento, como:

- **imóveis** - não apresentam movimento como resposta à aplicação de uma força, de modo a absorver a energia do choque. É exemplo, a ligação entre os ossos do crânio (suturas).
- **parcialmente móvel** - como as que existem entre as vértebras onde o pouco movimento permitido é devido ao disco fibrocartilaginoso. Este tipo de articulações também tem a capacidade de absorver energia de choques.
- **móvel** – estas articulações permitem grandes amplitudes de movimento. Aqui ficam alguns exemplos ilustrados na figura 1.7:

- 1) **Artródia** – permite aos ossos deslizarem de um lado para o outro. São exemplos as articulações entre os carpos e os metacarpos na mão e os tarsos e metatarsos no pé.
- 2) **Trocleartrose** – permite o movimento no mesmo plano. É exemplo a articulação do joelho entre o fémur, a tíbia e o perónio. O tornozelo e o cotovelo também são exemplos deste tipo de articulação.
- 3) **Epifiartrose** – permite movimento em dois planos. É exemplo a ligação do polegar com a mão.
- 4) **Condilartrose** – articulação oval que permite o movimento em duas direcções. É exemplo a articulação do punho.
- 5) **Enartrose** – permite o movimento em muitas direcções. São exemplo as articulações da anca e do ombro.
- 6) **Trocartrose** – permite a rotação do osso. É exemplo a articulação do pescoço entre as vértebras áxis e o atlas.

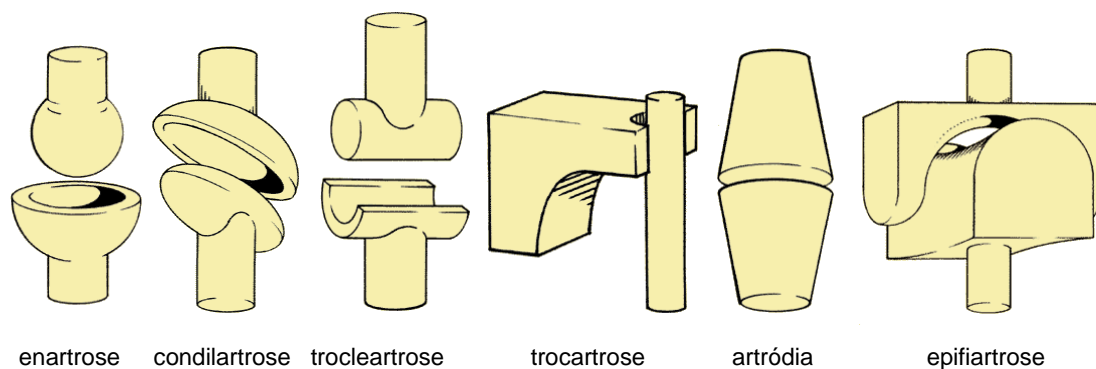


Figura 1.7 – Exemplos de articulações  
(cortesia de [www.zoology.ubc.ca](http://www.zoology.ubc.ca))

Os ossos, na zona da articulação, estão revestidos por cartilagem. A cartilagem tem um atrito muito baixo para que os movimentos sejam fáceis, e tem a capacidade de absorver energia de choques a que as articulações normalmente estão sujeitas. Um dos problemas das próteses articulares (como a prótese da anca e do joelho), está na menor capacidade de absorver energia e no maior coeficiente de atrito.

A cavidade articular encontra-se entre os ossos que compõem a articulação. Na cavidade articular existe líquido sinovial que lubrifica a cartilagem. A viscosidade, ou seja, a capacidade de lubrificação deste líquido, altera-se com a temperatura. A cápsula articular cobre a articulação, fixa o líquido sinovial e ajuda a manter os ossos juntos como se observa na figura 1.8.

Os **ligamentos** unem os ossos entre si ajudando a fixar as articulações. São faixas muito resistentes constituídas por tecido conjuntivo fibroso e estão unidos às membranas que revestem os ossos.

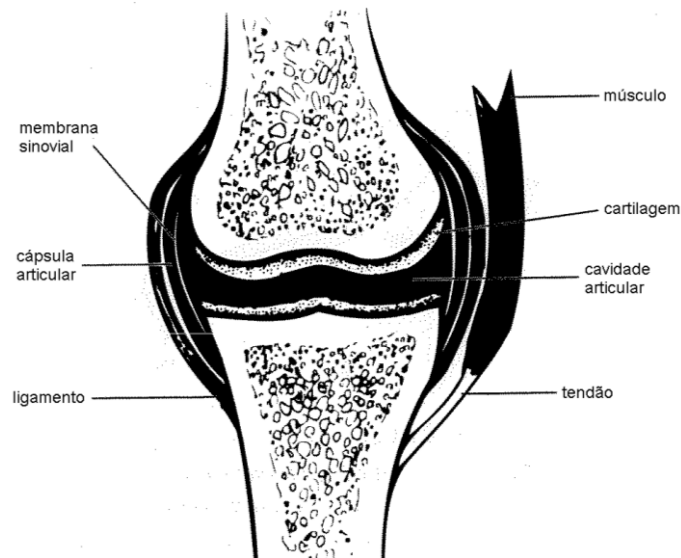


Figura 1.8 – Cápsula articular  
(cortesia de Ellen Kreigbaum e Katharine M. Barthels)

Os **tendões** ligam os músculos aos ossos, no entanto alguns músculos fixam-se directamente aos ossos. São constituídos por tecido conjuntivo muito resistente. A ligação muscular através de tendões provoca que a força aplicada ao osso seja mais concentrada e permite uma maior liberdade na variação do ângulo com que o músculo exerce a força.

Quanto à estabilidade uma articulação pode ser:

- **estável** se for capaz de absorver choques e de se deslocar sem proporcionar lesões nos tecidos adjacentes.
- **instável** se puder originar lesões nos músculos, ligamentos e tendões ou mesmo a deslocação de um dos ossos, isto é, um dos ossos fica fora do seu local habitual.

Mas todas as articulações são estáveis até ser atingido o limite máximo de solicitação, sendo que uma articulação é tanto mais estável se: os ossos forem fortes e encaixarem, do ponto de vista articular, na perfeição; os ligamentos forem fortes para resistir a elevados níveis de força; músculos fortes capazes de suportar elevadas solicitações. Para melhorar a estabilidade articular, pouco é possível fazer quanto ao

encaixe entre os ossos, mas podem-se praticar exercícios físicos para aumentar a resistência dos músculos e ligamentos. Particularmente nas articulações do joelho e do ombro onde a estabilidade óssea é baixa.

A mobilidade das articulações não é total, estando limitada pelo encaixe dos ossos. No entanto, a mobilidade nem sempre é a máxima possível devido à menor flexibilidade dos ligamentos, tendões e músculos. A existência de tecido adiposo junto às articulações também reduz a mobilidade. Uma pessoa que exercite demasiado os músculos desprezando a sua mobilidade aumenta a massa muscular do mesmo modo que baixa a flexibilidade.

Os ginastas que devem ter elevada flexibilidade têm de ter elevada estabilidade para evitar lesões.

O esqueleto tem um enorme número de ossos e de articulações. Na análise do movimento do corpo humano podem-se considerar todos os segmentos (exemplos, braço, antebraço, perna, etc.) e articulações de modo a ter um resultado perfeito mas extremamente complexo de calcular, ou pode-se considerar um modelo simplificado em que o corpo é dividido em partes maiores (por exemplo, cabeça, tronco, braços, mãos, pernas e pés) unidas por articulações. As análises simplificadas embora não permitam resultados exactos, fornecem boas soluções de forma muito mais expedita.

### **1.3.3 Planos e eixos do movimento do corpo**

Dois conceitos úteis para definir o movimento do corpo ou parte dele, são o plano do movimento e o eixo de rotação, fazendo 90° entre si, e definidos a partir da **posição anatómica** em que todos os ângulos dos segmentos têm valor nulo.

Definem-se ainda três planos anatómicos: **frontal**, **transversal** e **sagital** que se encontram ilustrados na figura 1.9.

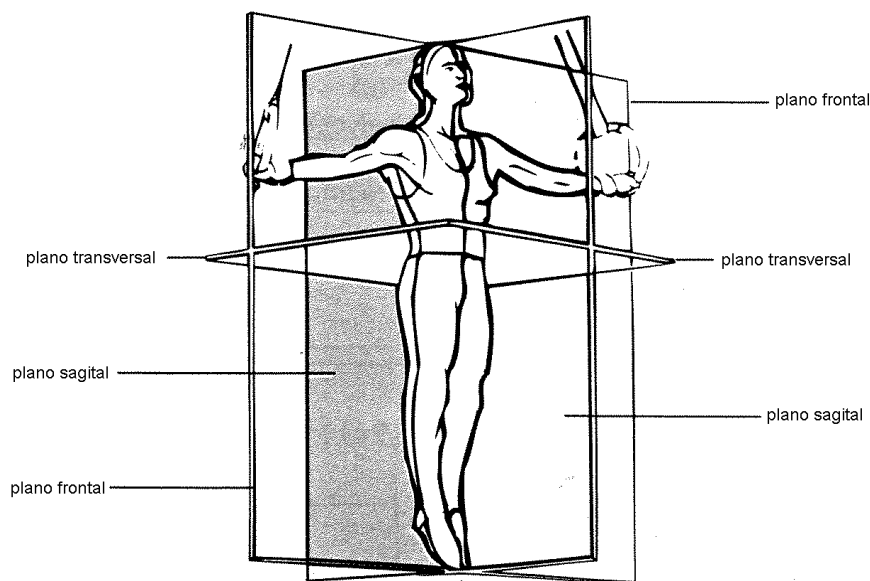


Figura 1.9 – Os três planos principais do corpo humano  
(cortesia de Ellen Kreigbaum e Katharine M. Barthels)

Quando o eixo de rotação é o **medial-lateral** (do lado direito para o lado esquerdo do corpo humano) o plano do movimento é o plano sagital. O eixo medial-lateral também é referido como o eixo frontal. Quando o corpo roda sem apoio (todo no ar, como no salto em altura) o plano do movimento e o eixo de rotação passam pelo centro de gravidade (CG), dividindo o corpo em metades de igual massa (esquerda e direita, anterior e posterior, cima e baixo) e designam-se por eixo principal e plano principal. No exemplo do salto em altura, representado na figura 1.10, o plano do movimento é o sagital e o eixo de rotação o medial-lateral. Quando o movimento é apoiado no chão os planos e os eixos não passam, normalmente, pelo centro de gravidade.

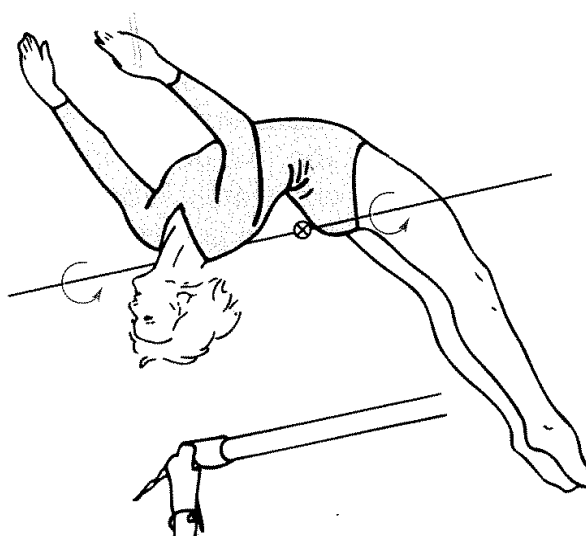


Figura 1.10 – Movimento em torno do eixo medial-lateral e no plano sagital  
(cortesia de Ellen Kreigbaum e Katharine M. Barthels)

Quando o eixo de rotação é o **antero-posterior** (de trás para a frente) o plano do movimento é o frontal. O eixo antero-posterior também é conhecido como eixo sagital.

Se o movimento é em torno do **eixo longitudinal** (de cima para baixo) o movimento é no plano transversal.

Foram definidos os três eixos e planos principais, no entanto a maioria dos movimentos naturais não são segundo estes eixos e planos. Os movimentos, normalmente, requerem descrições mais complexas, embora todos os segmentos se movam segundo eixos que passam pelo centro das articulações e no plano perpendicular a esse eixo. Como é impossível dar nome a todos os eixos e planos, estes eixos e planos não principais designam-se apenas por **diagonais ou oblíquos**. A figura 1.11 representa alguns exemplos de movimentos num plano oblíquo.

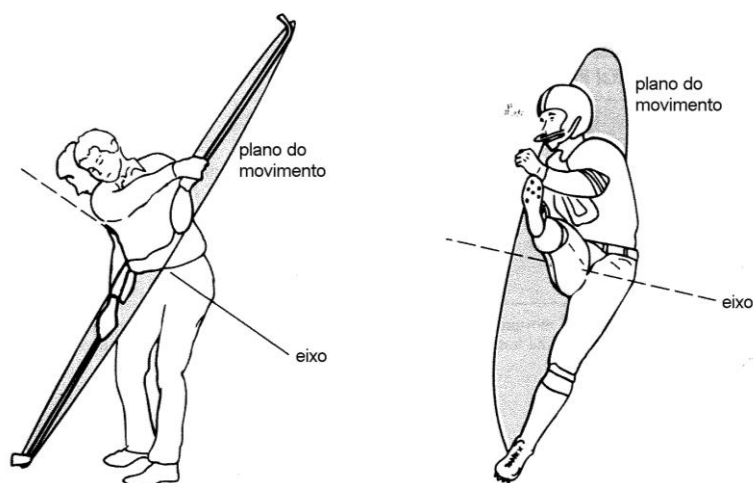


Figura 1.11 – Exemplos de movimentos no plano oblíquo  
(cortesia de Ellen Kreigbaum e Katharine M. Barthels)

Como já foi referido os segmentos do esqueleto movem-se em torno de um eixo que passa pela articulação. Muitos movimentos segmentares têm designação própria dependendo do plano do movimento e eixo de rotação. Nas tabelas 1.1, 1.2 e 1.3 estão alguns exemplos ilustrados nas figuras 1.12, 1.13, 1.14 e 1.15. Por exemplo, o movimento no plano sagital em torno da anca, do joelho e do ombro é designado por flexão quando é para a frente e por extensão quando é para trás.

| Nome dos movimentos                       | Articulações  |
|---|---|
| Flexão, extensão e hiper-extensão         | Anca, joelho, ombro, cotovelo, pulso, falanges e coluna vertebral |
| Dorsiflexão e flexão plantar              | Tornozelo   |
| Extensão transversal e flexão transversal | Ombro e anca  |

Tabela 1.1 – movimentos em torno do eixo medial-lateral, plano sagital

| Nome dos movimentos          | Articulações                     |
|------------------------------|----------------------------------|
| Flexão lateral               | Coluna vertebral                 |
| Abdução e adução             | Ombro, anca e metatarsos-falange |
| Flexão radial e ulnar        | Pulso                            |
| Abdução e adução transversal | Ombro e anca                     |

Tabela 1.2 – movimentos em torno do eixo antero-posterior, plano frontal

| Nome dos movimentos           | Articulações                        |
|-------------------------------|-------------------------------------|
| Rotação medial e lateral      | Ombro, anca, joelho em flexão a 90° |
| Rotação transversal (lateral) | Coluna vertebral                    |

Tabela 1.3 – movimentos em torno do eixo longitudinal, plano transversal

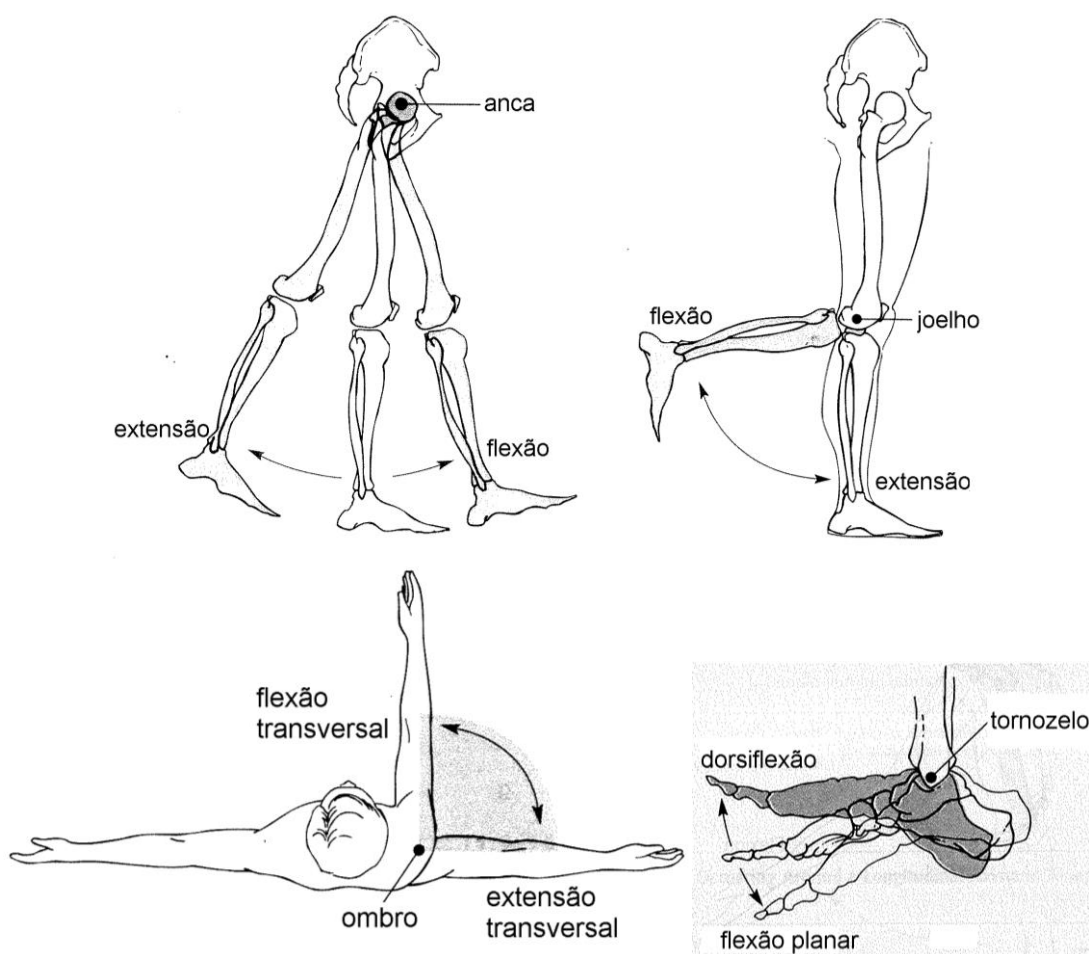


Figura 1.12 – Movimentos em torno do eixo medial-lateral, plano sagital  
(cortesia de Ellen Kreigbaum e Katharine M. Barthels)

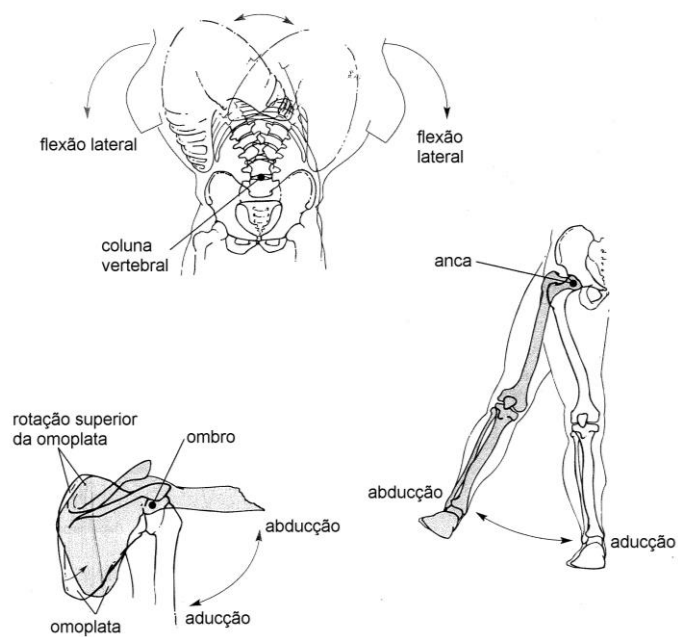


Figura 1.13– Movimentos em torno do eixo antero-posterior, plano frontal (cortesia de Ellen Kreigbaum e Katharine M. Barthels)

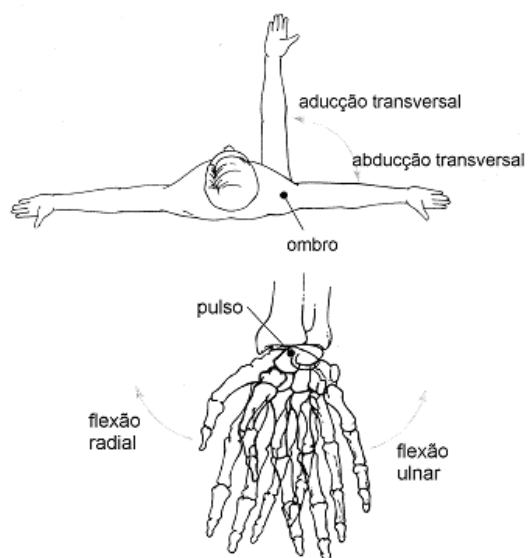


Figura 1.14 – Movimentos em torno do eixo antero-posterior, plano frontal (continuação) (cortesia de Ellen Kreigbaum e Katharine M. Barthels)

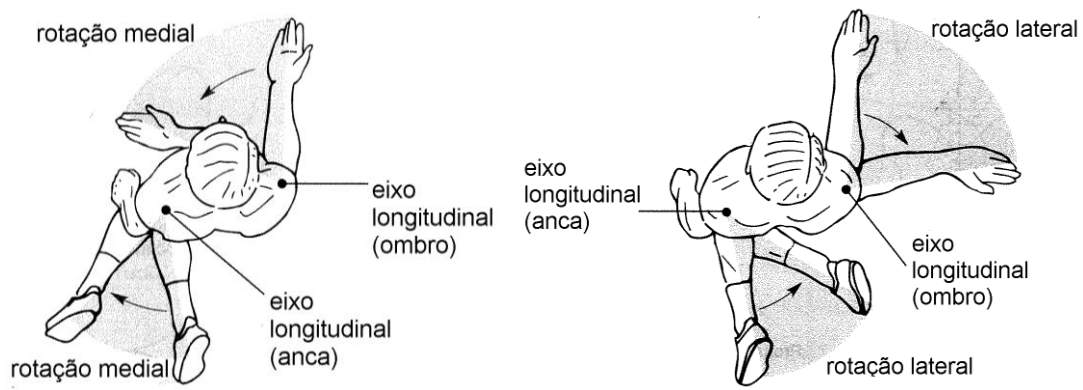


Figura 1.15 – Movimentos em torno do eixo longitudinal, plano transversal  
(cortesia de Ellen Kreigbaum e Katharine M. Barthels)

### 1.3.4 Músculos esqueléticos

O controlo do movimento é feito pelos **músculos esqueléticos**. Existem outros dois tipos de músculos, o coração e os músculos não-esqueléticos, como por exemplo os intestinais e das paredes arteriais. Neste item, de agora em diante, a palavra músculo apenas se refere aos músculos esqueléticos.

Os músculos têm importantes propriedades funcionais:

- **Irritabilidade** – responde a estímulos nervosos.
- **Condutividade** – os estímulos nervosos provocam uma onda de excitação que se propaga pelo músculo.
- **Contração** – os músculos têm a capacidade de contraírem, diminuindo o seu comprimento. Quando na sua posição de repouso dizem-se relaxados.
- **Distensão** – têm a capacidade de esticar para que os músculos antagónicos possam exercer força.
- **Elasticidade** – é a capacidade do músculo recuperar para a sua posição inicial depois da contração ou distensão.

Há quatro aspectos funcionais do conjunto músculo-tendão de grande importância no controlo motor, reabilitação e aprendizagem do movimento:

- **Flexibilidade** – também designado por capacidade de movimento de uma articulação. A flexibilidade depende dos ossos que compõem a articulação, dos ligamentos e dos conjuntos músculo-tendão. A flexibilidade é uma medida angular.

- **Resistência máxima** – é o valor máximo de força que um músculo-tendão consegue exercer.
- **Potência muscular** – é a taxa de força muscular que é aplicada para mover uma carga ou, por outras palavras, a taxa de trabalho muscular (potência muscular = força x velocidade). Se uma força muscular é aplicada de uma forma rápida, então diz-se que é um movimento potente. A máxima potência muscular nem sempre é alcançada utilizando a força máxima.
- **Endurance muscular** – é a capacidade dos músculos exercerem uma força de modo repetitivo ou constante. Qualitativamente é o oposto de fadiga muscular.

Estas características musculares podem ser alteradas com o treino ou com a falta dele.

Nas articulações há normalmente um número redundante de músculos capazes de provocar movimento. Em cada movimento específico vão actuar os músculos que minimizam o esforço ou que provoquem maior conforto. Por exemplo, quando existe um músculo lesionado são utilizados de modo inconsciente outros músculos de modo a evitar o desconforto da dor.

Os músculos raramente trabalham sozinhos, cada tarefa é executada por uma equipa de músculos de modo a maximizar a eficiência do movimento. Devido a este facto há grupos que têm designação própria já que trabalham em conjunto para efectuar determinada tarefa. Por exemplo, os músculos que provocam a extensão do cotovelo são designados por extensores do cotovelo.

Refira-se que alguns movimentos não são provocados pelos músculos mas pela gravidade.

Os anatomistas designam os músculos devido a diversas razões:

- **localização** - braquial, peitoral;
- **direcção** - abdominais rectos e oblíquos;
- **actuação** - abductor, adutor;
- **forma** – trapézio;
- **número de divisões** - bicípite, tricípite;
- **número de ligações** - esternocleidomastoideo.

Os músculos também podem ser classificados segundo a orientação das fibras. Há músculos com fibras longitudinais ao eixo axial do músculo (fusiformes) e outras fibras com diferentes orientações, como se pode observar na figura 1.16. Os músculos com

fibras com múltiplas orientações têm maior capacidade de exercer força. Pelo contrário, nos músculos fusiformes as fibras são mais longas e têm maiores capacidades de contracção. O comprimento das fibras é directamente proporcional com a velocidade de contracção, ou seja, músculos fusiformes têm velocidade de contracção mais rápidas.

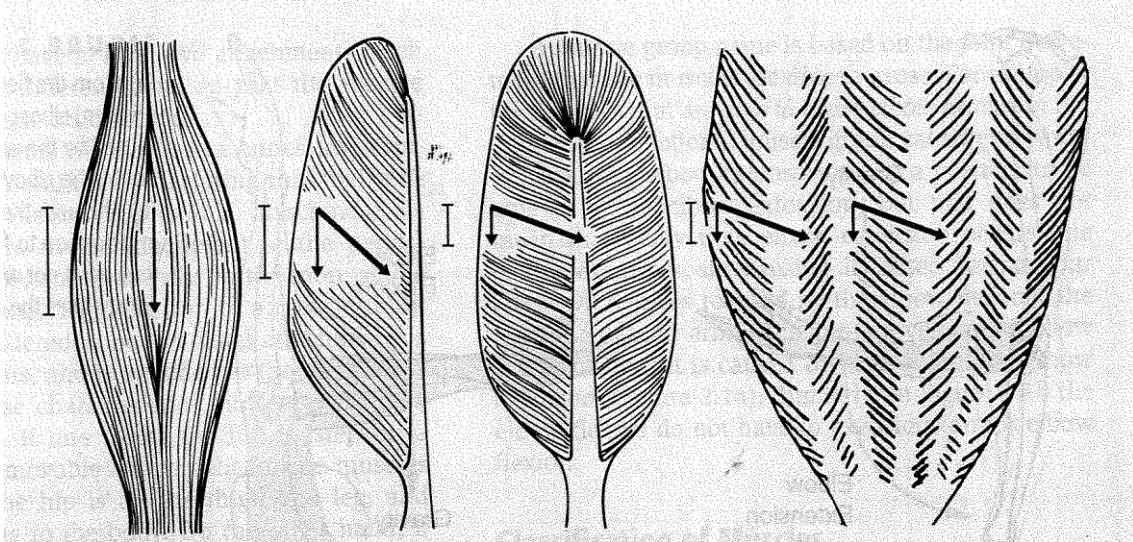


Figura 1.16 – Orientações das fibras musculares  
(cortesia de Ellen Kreigbaum e Katharine M. Barthels)

Outro modo de classificar os músculos tem a ver com o número de articulações que cruza. Os músculos podem ser **uni-articulares**, **bi-articulares** e **multi-articulares**. Os músculos uni-articulares apenas afectam uma articulação, como o próprio nome indica. Os bi-articulares afectam duas articulações sendo mais eficientes já que provocam movimento em duas articulações. Nos membros inferiores a maioria dos músculos são bi-articulares. Os músculos multi-articulares cruzam três ou mais articulações. Os músculos bi-articulares têm uma característica peculiar, já que não têm a capacidade de alcançar o movimento máximo nas duas articulações simultaneamente.

Quando o movimento é de contracção diz-se **insuficiência activa**, quando é em distensão diz-se **insuficiência passiva**.

Num movimento articular há os músculos de movimento directo que se contraem para ajudar ao movimento e os antagonistas que relaxam ou distendem para permitir o total movimento da articulação. Os movimentos articulares são sempre provocados pela contracção muscular. A distensão muscular existe para permitir o movimento.

Se um segmento se move no sentido do movimento muscular (**contracção**) ou no sentido oposto (**distensão**) diz-se que a contracção ou distensão é dinâmica. Se, pelo

contrário o músculo não se move diz-se que está em contração ou distensão estática. O movimento dinâmico também é conhecido por **isotónico** e o estático por **isométrico** que significa dimensões iguais.

As forças musculares podem ser **concêntricas**, quando promovem o movimento, ou **excêntricas** se resistem ao movimento ou **isométricas** se estabilizam ou fixam o corpo. As concêntricas e as excêntricas são forças dinâmicas.

A elasticidade muscular é de extrema importância nalgumas actividades físicas. Numa corrida importantes músculos são distendidos e depois rapidamente contraídos. Devido à elasticidade muscular acumulada no músculo a contração é muito rápida e com poupança de energia. Esta energia elástica é similar a uma simples mola de espiral. Se a mola for esticada e depois contraída, na fase de contração só é necessário exercer força do ponto de repouso em diante. Até ao ponto de repouso a mola recupera rapidamente através da energia elástica acumulada. Este efeito elástico tão útil para os corredores não é praticamente utilizado pelos ciclistas e nadadores.

### 1.3.5 Antropometria

Como foi referido no sub-capítulo 1.1, a antropometria é inter-disciplinar e compete-lhe medir o corpo humano e seus segmentos, por exemplo, peso, massa volúmica, inércia, etc.

Muitos estudos antropométricos, devido à sua dimensão, tomam valores médios. Por exemplo, numa população é normal dividir os dados por sexo, profissão, idades ou actividade física, etc. No entanto, é necessário ter cuidado com os valores médios. Se numa população a altura média dos homens é de 1.65 m e das mulheres 1.60 m não quer dizer que todos os homens são mais altos que todas as mulheres. Neste tipo de estudos também é necessário considerar o desvio dos valores médios.

Para um determinado estudo há dados antropométricos mais importantes que outros. Para um pugilista o peso e altura são mais importantes que o tamanho do pé. Para um saltador em altura a posição do centro de gravidade é mais importante do que o comprimento dos braços.

Os dados antropométricos mais comuns são a altura e a massa. A expressão

$$PI = 10^3 \frac{\sqrt[3]{m}}{h}$$

em que  $m$  é a massa do corpo e  $h$  é a altura, dá uma medida da relação entre a massa e a altura.

Estudos feitos em várias espécies de animais mostram que os mais rápidos e que mais saltam são aqueles que têm os segmentos distais mais longos, isto é, coxas pequenas e pernas longas. São exemplos o cavalo, o canguru e o gato. Estudos em atletas de velocidade mostram resultados similares: pernas proporcionalmente mais longas que a média da população. Para os ginastas as pernas longas são um obstáculo, este tipo de atletas tem pernas proporcionalmente mais curtas.

A antropometria também é de extrema importância para os estudos ergonômicos. A posição de trabalho para uma pessoa baixa não será a mesma de uma pessoa alta.

## 1.4 Princípios fundamentais da Mecânica

### 1.4.1 Análise dimensional

Todas as quantidades físicas são representadas por seres matemáticos consoante a sua natureza. A massa, o tempo, a distância, a temperatura, o trabalho, e a potência são exemplos de **grandezas escalares** pois basta um número real para as quantificar. A velocidade, a aceleração, a força, o impulso e o momento são exemplos de **grandezas vectoriais** porque para as especificar completamente são necessários um escalar, uma direcção e um sentido. Existem outras quantidades físicas que são **grandezas tensoriais**, como por exemplo o tensor de inércia e o tensor das deformações.

As quantidades físicas utilizadas em Mecânica baseiam-se no Sistema Internacional de Unidades (SI) constituído por três classes de grandezas: básicas, derivadas e suplementares.

As três **grandezas básicas** que importa referir são

- **o comprimento (L)** – é uma medida linear que pode determinar a distância entre dois pontos e a posição ou o deslocamento linear de um ponto. A unidade SI é o metro sendo o símbolo usado a letra  $m$ .
- **a massa (M)** – é uma medida da quantidade de matéria de um corpo, definindo a sua inércia. A unidade SI é o quilograma sendo o símbolo usado as letras  $kg$ .

- **o tempo (T)** – é uma medida de duração de um fenómeno ou intervalo entre fenómenos. A unidade SI é o segundo sendo o símbolo usado a letra s.

As **grandezas derivadas**, como o seu próprio nome indica, são obtidas a partir de expressões em função das grandezas básicas. Não tendo em conta os coeficientes numéricos que possam figurar nessas expressões, uma grandeza derivada toma a forma

$$X = L^{\alpha} M^{\beta} T^{\gamma}$$

denominada **equação das dimensões** sendo  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  as dimensões relativamente às grandezas de base.

### Exemplo

A velocidade  $v$  é definida como sendo a distância  $d$  percorrida num dado intervalo de tempo  $t$ , sendo então

- equação de definição:  $v = \frac{d}{t}$
- equação das dimensões:  $[v] = LT^{-1}$
- a sua unidade SI, o metro por segundo, m/s ou  $ms^{-1}$ .

Uma **grandeza suplementar** é o radiano. É uma grandeza adimensional e mede o comprimento angular entre dois segmentos de recta.

O sistema SI prevê um conjunto de prefixos em relação à unidade da grandeza. No quadro seguinte expõem-se alguns:

| Prefixo | Factor    | Símbolo | Prefixo | Factor     | Símbolo |
|---------|-----------|---------|---------|------------|---------|
| kilo    | $10^3$    | k       | mili    | $10^{-3}$  | m       |
| mega    | $10^6$    | M       | micro   | $10^{-6}$  | $\mu$   |
| giga    | $10^9$    | G       | nano    | $10^{-9}$  | n       |
| tera    | $10^{12}$ | T       | pico    | $10^{-12}$ | p       |
| peta    | $10^{15}$ | P       | fento   | $10^{-15}$ | f       |
| exa     | $10^{18}$ | E       | ato     | $10^{-18}$ | a       |

### 1.4.2 Leis de Newton

A mecânica estuda o movimento e as forças que o provocam. Pode dividir-se em três partes:

- **Estática** – estuda as forças e as condições do equilíbrio;
- **Cinemática** – estuda os movimentos, sua geometria e os parâmetros que a alteram;
- **Dinâmica** – estuda as forças e os efeitos que provocam sobre os corpos.

Deve-se a Arquimedes os primeiros estudos da Estática tendo descoberto a condição de equilíbrio estático na alavanca, que a aplicou à determinação do centro de massa de vários corpos.

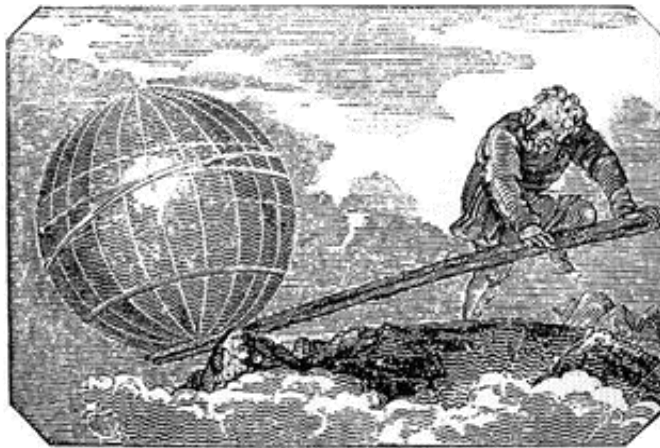


Figura 1.17 – Ilustração da Mechanics Magazine London, 1824

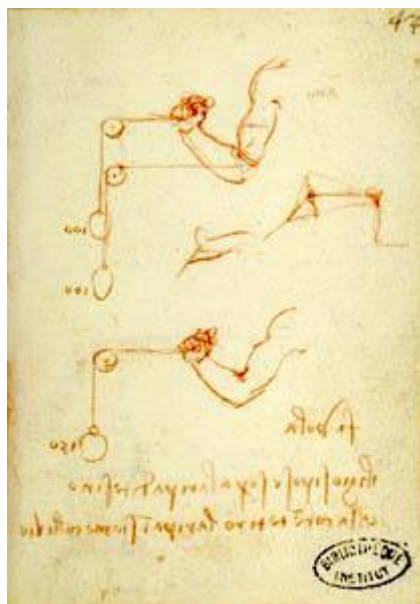


Figura 1.18 – Ilustração num documento propriedade do Istituto e Museo di Storia della Scienza

Mais tarde, Leonardo da Vinci, generalizou e aplicou a vários tipos de máquinas entre elas a roldana que usou para medir a força dos músculos.

Descobertas por Galileu, em 1638, foram formuladas em termos matemáticos por Isaac Newton que apresentou, em 1686, no livro *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, as suas três leis que formam a base de toda a mecânica:

- **1ª lei (Lei da inércia)** : Todo o corpo, sem qualquer influência exterior, permanece no seu estado de repouso ou de movimento rectilíneo uniforme, excepto se sobre ele actuar uma força externa.
- **2ª lei (Lei fundamental da dinâmica)** : Se a força resultante  $\vec{F}$  que actua num corpo de massa  $m$  não é nula, o corpo acelera na direcção e sentido da força. Essa aceleração,  $\vec{a}$ , é proporcional à força e inversamente proporcional à massa do corpo:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

(Esta é uma formulação simplificada desta lei tal como foi enunciada por Newton.)

- **3ª lei (Lei da igualdade da acção e da reacção)** : Dois corpos exercem um sobre as outras forças de igual grandeza, com a direcção da recta que os une e de sentidos opostos.

Num corpo em movimento, as diferentes partículas que o constituem movem-se de forma diferente sendo o seu estudo muito complexo. Criam-se então modelos, ou sejam simplificações, que permitam mesmo assim obter resultados com uma aproximação à realidade muito boa. Nesse sentido os corpos são **partículas materiais** se forem entendidos como um todo ou são **corpos rígidos** se os pontos materiais que os constituem mantêm as distâncias relativas invariáveis ou, ainda **corpos deformáveis** como por exemplo os corpos elásticos.

Na análise do movimento do corpo humano é possível estudar o movimento completo de um atleta em corrida ou o movimento apenas do braço no lançamento do peso ou mesmo a interacção entre vários jogadores e a bola num jogo de basquetebol.

Na análise do movimento também é necessário identificar uma **referência**. Para um maratonista a referência será o chão, no estudo do braço do lançador de peso a referência pode ser o tronco ou mesmo o ombro, e no jogo de basquetebol a referência pode ser o meio do campo. A referência deve ser algo que está parado em

relação ao objecto em estudo, por exemplo para o maratonista a referência teria que andar no chão à mesma velocidade que o atleta: referência móvel. O estudo seria sempre em relação ao chão, como por exemplo, a que altura está o pé direito do chão num determinado instante de tempo.

### 1.4.3 Graus de liberdade

Os **graus de liberdade** são o número de movimentos que um corpo pode fazer.

Um corpo quando considerado como uma partícula material tem no espaço três graus de liberdade que correspondem aos 3 movimentos de **translação** ao longo dos três eixos do sistema de referência. Na translação o corpo não muda a sua orientação podendo ser **rectilínea** quando todos os pontos do corpo se moverem sobre uma linha recta ou **curvilínea** quando todos os pontos do corpo se moverem sobre uma linha curva.

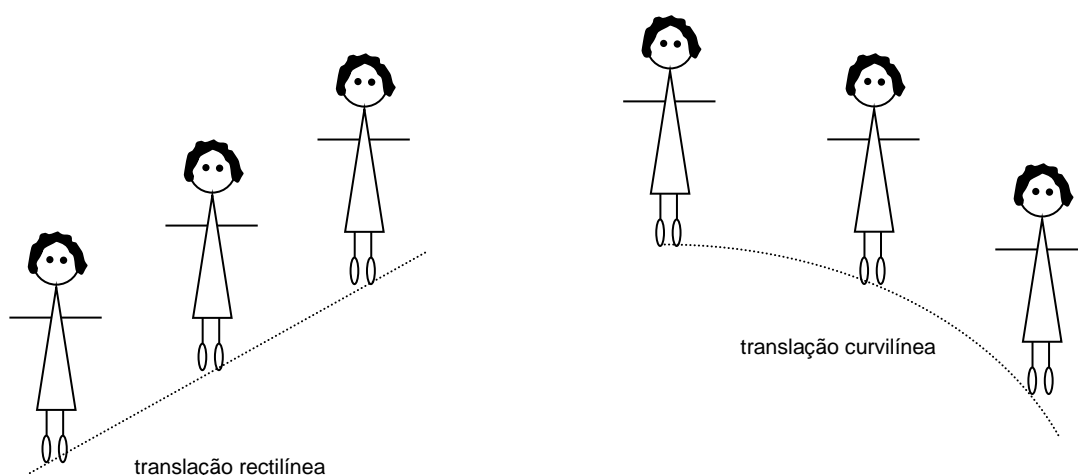


Figura 1.19 – Movimento de translação

Um corpo quando considerado como corpo rígido tem no espaço seis graus de liberdade que correspondem aos 3 movimentos de **translação** ao longo dos três eixos do referencial e aos 3 movimentos de **rotação** em torno desses três eixos. Na translação, o corpo rígido comporta-se como uma partícula material cabendo o seu estudo no caso anterior. Na rotação todos os seus pontos descrevem arcos de circunferências em relação ao mesmo eixo.

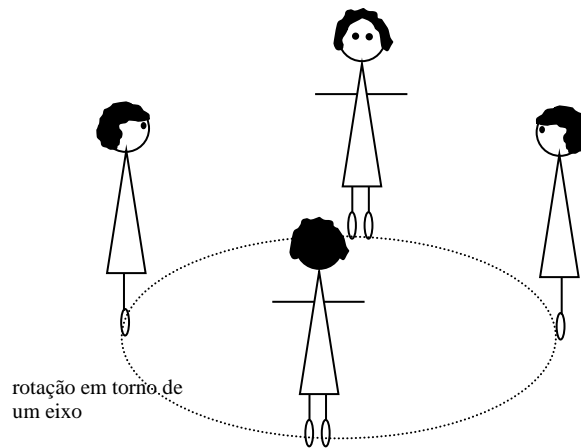


Figura 1.20 – Movimento de rotação em torno de um eixo

A maioria dos movimentos corresponde a conjunções de movimentos de translação e de rotação em corpos constituídos por vários segmentos

### Exemplo

O membro superior do corpo humano, constituído pelos segmentos braço, antebraço e mão tem 6 graus de liberdade.

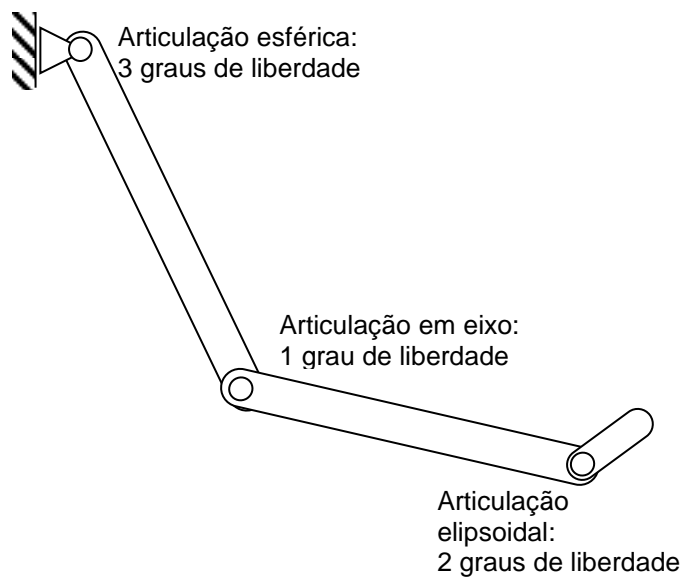


Figura 1.21 – Diagrama do membro superior do corpo humano

## 2. Mecânica do movimento

### 2.1 Equilíbrio de sistemas de forças

#### 2.1.1 Forças

Uma **força** é uma acção de um corpo sobre outro. As forças podem causar vários efeitos nos corpos: fazê-los começar a moverem-se; ficarem no mesmo lugar ou mesmo deformarem-se. Existem vários tipos de forças:

- forças de gravitação causadas por corpos com massa;
- forças eléctricas causadas por corpos com carga;
- forças magnéticas causadas por corpos magnetizados;
- forças de resistência ao movimento devidas ao facto dos corpos estarem em contacto com um meio ambiente ou com outros corpos.

O **peso de um corpo** é a força de gravidade que actua sobre ele. O peso  $P$  de um corpo de massa  $m$  perto da superfície da Terra é dado pela relação

$$P = 9,8 \times m$$

O peso de um corpo com 1kg de massa é 9,8N.

Uma força é uma grandeza vectorial com quatro características:

- **Grandeza** – é um escalar que mede a intensidade ou tamanho da força. A sua unidade SI é o Newton.
- **Direcção** – dada pela recta que define a acção da força.
- **Sentido** – determinado pelo orientação que a força tem sobre a sua linha de acção.
- **Ponto de aplicação** - local de aplicação da força.

Uma força pode ser representada por uma seta.

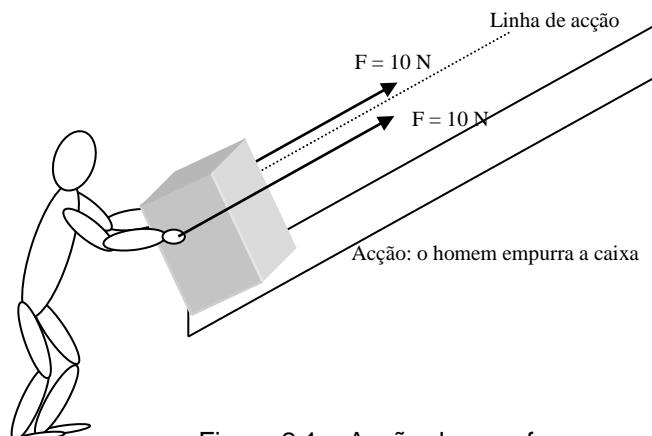


Figura 2.1 – Acção de uma força

## 2.1.2 Operações com forças

### 2.1.2.1 Soma ou resultante

A soma ou resultante,  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$ , de duas forças  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$  é obtida pela regra do paralelogramo.

Obtém-se igualmente a resultante de um conjunto de forças colocando na extremidade da primeira força a origem da segunda força e assim sucessivamente. A resultante é então representada por uma seta com a mesma origem da primeira força e a mesma extremidade da última força.

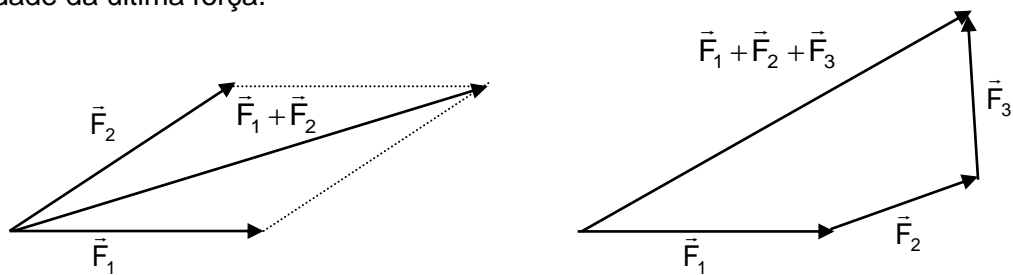


Figura 2.2 – Soma de forças

### 2.1.2.2 Diferença ou subtração

A diferença,  $\vec{F}_1 - \vec{F}_2$ , de duas forças  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$  é uma força que somada a  $\vec{F}_2$  dá  $\vec{F}_1$ .

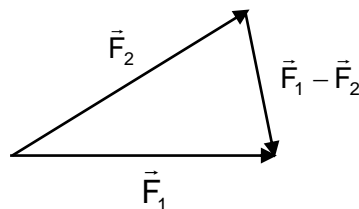


Figura 2.3 – Diferença de forças

### 2.1.2.3 Multiplicação por escalar

A multiplicação de uma força  $\vec{F}$  por um escalar  $\alpha$  é uma força  $\alpha\vec{F}$  com as seguintes características

- a sua grandeza é dada pelo produto de  $\alpha$  pela grandeza de  $\vec{F}$  ;
- a sua direcção é a mesma de  $\vec{F}$  ;
- o seu sentido é o de  $\vec{F}$  se  $\alpha > 0$  e contrário a  $\vec{F}$  se  $\alpha < 0$  ;
- se  $\alpha = 0$  então  $\alpha\vec{F} = \vec{0}$ , ou seja a força nula.

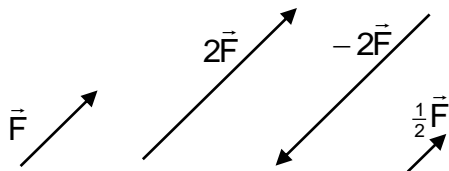


Figura 2.4 – Multiplicação de uma força por um escalar

Duas forças  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$  são paralelas se uma for um múltiplo escalar da outra, isto é, se  $\exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  tal que  $\vec{F}_1 = \lambda \vec{F}_2$ .

#### 2.1.2.4 Componentes de uma força

Seja  $(O, x, y, z)$  um sistema de eixos coordenados. Os vectores  $\hat{e}_x$ ,  $\hat{e}_y$  e  $\hat{e}_z$  que definem a escala, a direcção e o sentido dos eixos chamam-se **vectores da base**. Se os vectores da base forem unitários (grandeza igual a um) e ortogonais o sistema diz-se **ortonormado** e as coordenadas dizem-se **cartesianas**.

Qualquer ponto  $A = (a_x, a_y, a_z)$  do espaço fica determinado pelo vector posição  $\vec{r}_A$  em relação à origem das coordenadas dado por

$$\vec{r}_A = \overrightarrow{OA} = a_x \hat{e}_x + a_y \hat{e}_y + a_z \hat{e}_z$$

Uma força  $\vec{F}$  de origem em A e extremidade em B fica determinada pelo vector posição de B em relação a A

$$\vec{F} = \overrightarrow{AB} = (b_x - a_x) \hat{e}_x + (b_y - a_y) \hat{e}_y + (b_z - a_z) \hat{e}_z$$

As componentes de  $\vec{F}$  são

$$\begin{cases} F_x = (b_x - a_x) \hat{e}_x \\ F_y = (b_y - a_y) \hat{e}_y \\ F_z = (b_z - a_z) \hat{e}_z \end{cases}$$

Seja S um sistema de forças constituído por N forças  $\vec{F}_i = F_{ix} \hat{e}_x + F_{iy} \hat{e}_y + F_{iz} \hat{e}_z$ ,  $i = 1, \dots, N$ . As componentes da sua **resultante** são determinadas pela soma vectorial de todas as forças:

$$\vec{R}(S) = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i = \left( \sum_{i=1}^N F_{ix} \right) \hat{e}_x + \left( \sum_{i=1}^N F_{iy} \right) \hat{e}_y + \left( \sum_{i=1}^N F_{iz} \right) \hat{e}_z$$

## Exemplo

Na figura 2.5 está representado um sistema S constituído por duas forças  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$ .

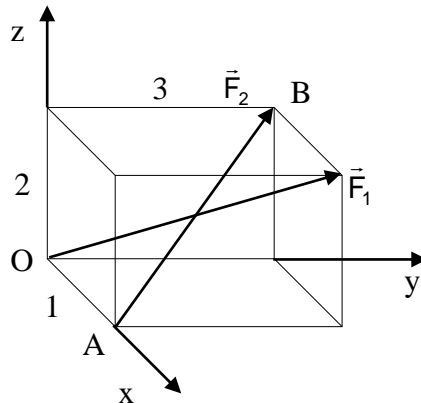


Figura 2.5 – Sistema S

As suas grandezas vectoriais são:

$$\vec{F}_1 = \overrightarrow{OP} = \hat{e}_x + 3\hat{e}_y + 2\hat{e}_z \text{ (N)}$$

$$\vec{F}_2 = \overrightarrow{AB} = -\hat{e}_x + 3\hat{e}_y + 2\hat{e}_z \text{ (N)}$$

A resultante de S é

$$\vec{R}(S) = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 6\hat{e}_y + 4\hat{e}_z \text{ (N)}$$

### 2.1.2.5 Grandeza de uma força

A **grandeza, norma, comprimento, magnitude, intensidade ou módulo** de uma força  $\vec{F} = F_x\hat{e}_x + F_y\hat{e}_y + F_z\hat{e}_z$  é obtida usando o teorema de Pitágoras, tal como mostra a figura:

$$\|\vec{F}\| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

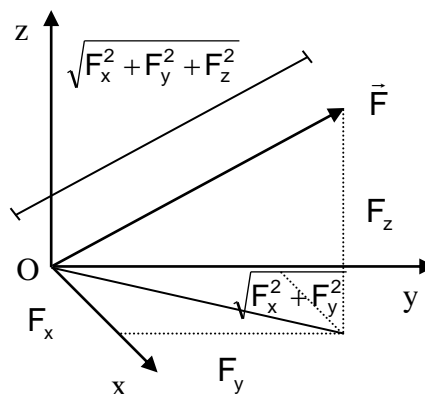


Figura 2.6 – Grandeza de uma força

Chama-se versor da direcção e sentido de  $\vec{F}$  ao vector unitário definido por

$$\hat{F} = \frac{\vec{F}}{\|\vec{F}\|}$$

Assim, qualquer força  $\vec{F}$  pode ser obtida por multiplicação da sua grandeza pelo versor que caracteriza a sua direcção e sentido:

$$\vec{F} = \|\vec{F}\| \hat{F}$$

### Exemplo

A força  $\vec{F}$ , representada na figura 2.7, tem grandeza igual a 30N e direcção e sentido do vector  $\vec{AB}$ .

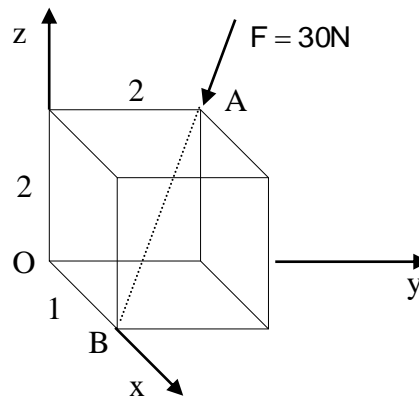


Figura 2.7 – Força  $\vec{F}$

Para determinar as componentes de  $\vec{F}$  é necessário determinar primeiro o versor da sua direcção e sentido:

$$\hat{AB} = \frac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|} = \frac{(\hat{e}_x - 2\hat{e}_y - 2\hat{e}_z)}{3} = \frac{1}{3}\hat{e}_x - \frac{2}{3}\hat{e}_y - \frac{2}{3}\hat{e}_z$$

Logo

$$\vec{F} = 30\hat{AB} = 30\left(\frac{1}{3}\hat{e}_x - \frac{2}{3}\hat{e}_y - \frac{2}{3}\hat{e}_z\right) = 10\hat{e}_x - 20\hat{e}_y - 20\hat{e}_z \text{ (N)}$$

O versor da direcção e sentido de  $\vec{F}$  é muitas vezes determinado a partir dos ângulos  $\theta_x$ ,  $\theta_y$  e  $\theta_z$  que faz, respectivamente, com os eixos do xx, dos yy e dos zz.

Para uma força no plano têm-se

$$\vec{F} = F(\cos\theta_x \hat{e}_x + \sin\theta_x \hat{e}_y) = F(\cos\theta_x \hat{e}_x + \cos\theta_y \hat{e}_y)$$

visto que  $\theta_x + \theta_y = 180^\circ$ . Ou, de outro modo, deve ser válida a relação

$$\sqrt{(\cos\theta_x)^2 + (\cos\theta_y)^2} = 1$$

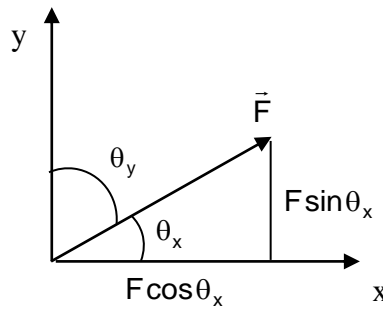


Figura 2.8 – Força definida no plano

Para uma força no espaço tem-se, de forma similar,

$$\vec{F} = F(\cos\theta_x \hat{e}_x + \cos\theta_y \hat{e}_y + \cos\theta_z \hat{e}_z)$$

com

$$\sqrt{(\cos\theta_x)^2 + (\cos\theta_y)^2 + (\cos\theta_z)^2} = 1$$

Os valores  $\cos\theta_x$ ,  $\cos\theta_y$  e  $\cos\theta_z$  chamam-se **cosenos directores** do versor da direcção da força.

### Exemplo

Para a força  $\vec{F}$ , de grandeza igual a 10N, são conhecidos dois dos ângulos que a sua direcção faz com os eixos coordenados.

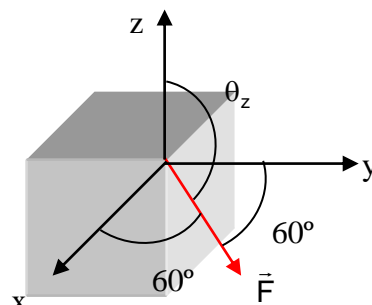


Figura 2.9 – Força  $\vec{F}$

O ângulo que falta é determinado pela relação

$$(\cos 60^\circ)^2 + (\cos 60^\circ)^2 + (\cos \theta_z)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + (\cos \theta_z)^2 = 1 \Leftrightarrow (\cos \theta_z)^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos \theta_z = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \theta_z = 45^\circ \quad \text{ou} \quad \theta_z = 135^\circ$$

Pela figura  $F_z < 0$  logo tem-se  $\theta_z = 135^\circ$ .

Logo, as componentes da força são  $\vec{F} = \frac{10}{2}\hat{e}_x + \frac{10}{2}\hat{e}_y - \frac{10}{\sqrt{2}}\hat{e}_z$  (N).

### 2.1.3 Momento de uma força

O **momento de uma força aplicada num corpo, em relação a um ponto**, mede a capacidade dessa força fazer rodar esse corpo em torno de um eixo que não intersecta a linha de acção da força nem lhe é paralelo. Depende da grandeza da força e da distância do ponto de aplicação ao pivot (denominado **braço**):

**Momento da força = braço × grandeza da força**

$$M = bF$$

#### Exemplos

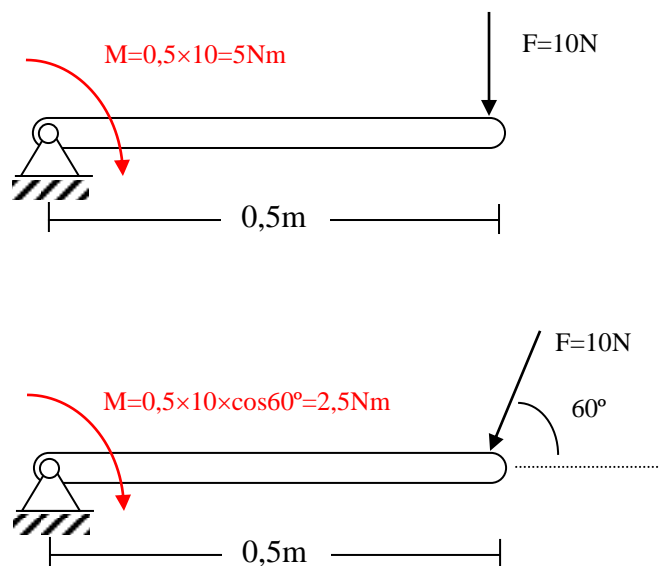


Figura 2.10 – Momento de forças

O momento de uma força de grandeza  $F$ , em relação a um ponto  $O$ , tem contudo um carácter vectorial visto estar relacionado com o efeito produzido que é de rotação. Ou seja tem não só uma grandeza como também uma direcção e sentido.

O momento em relação a um ponto O de uma força  $\vec{F}$  aplicada num ponto A é definido por  $\vec{M}_O(A, \vec{F}) = \vec{OA} \times \vec{F}$

Tem as seguintes características:

- direcção perpendicular ao plano constituído por  $\vec{F}$  e  $\vec{OA}$ ;
- sentido dado pela regra da mão direita;
- grandeza dada por  $\|\vec{M}_O(A, \vec{F})\| = bF$ ;
- ponto de aplicação: o ponto O.

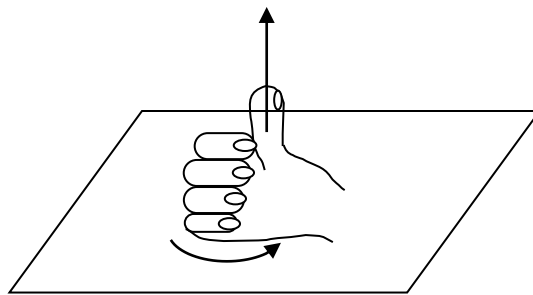


Figura 2.11 – Regra da mão direita

#### 2.1.4 Equilíbrio de forças

O equilíbrio de forças é o objecto de estudo da Estática que analisa as condições de equilíbrio dos sistemas de forças.

Os **sistemas de forças** são conjuntos de N forças  $(A_i, \vec{F}_i)$ , aplicadas num ou vários pontos de um objecto. Um sistema de forças é caracterizado pelas suas **coordenadas vectoriais**:

- **resultante** – soma de todas as forças:  $\vec{R}(S) = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i$
- **momento resultante em relação a O** – soma de todos os momentos das forças em relação a O das forças:  $\vec{M}_O(S) = \sum_{i=1}^N \vec{OA}_i \times \vec{F}_i$

Quando um sistema de forças S está em equilíbrio as suas **coordenadas vectoriais** são nulas:

$$\begin{cases} \vec{R}(S) = \vec{0} \\ \vec{M}_O(S) = \vec{0} \end{cases}$$

Estas equações constituem um sistema de seis equações. Existem sistemas particulares onde o equilíbrio é estabelecido com um número inferior de equações.

### Exemplo

O momento resultante do sistema S, constituído pelo peso da caixa e pelo esforço do músculo, em relação à articulação do cotovelo, é o vector nulo.

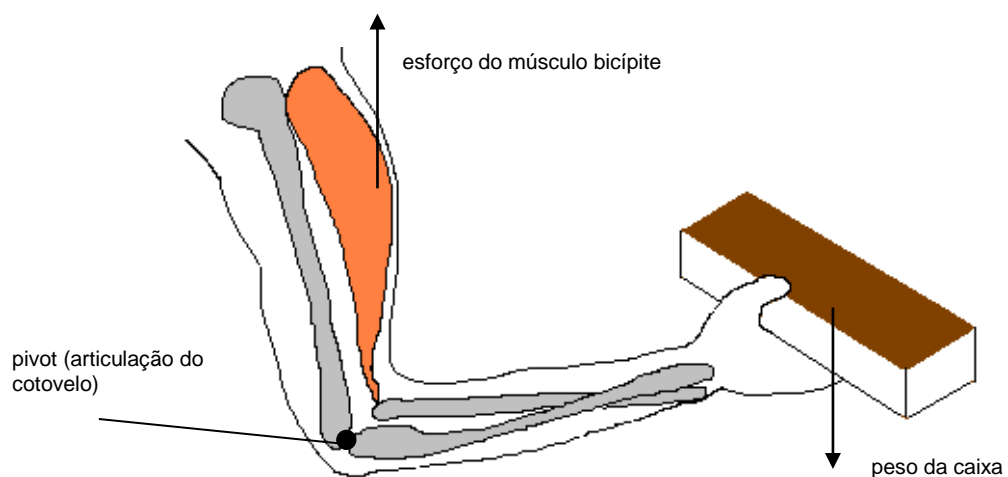


Figura 2.12 – Sistema S

A figura representa o diagrama do corpo livre (DCL) do sistema,

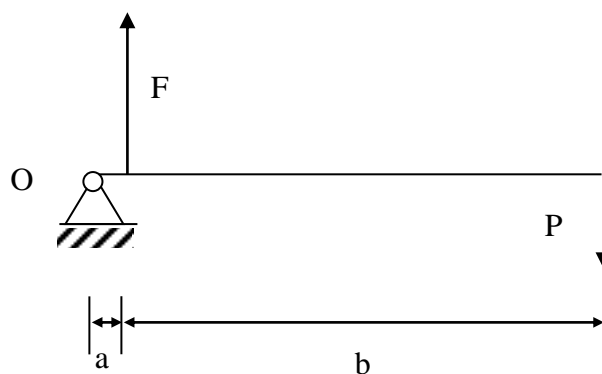


Figura 2.13 – DCL do sistema S para o momento em O

sendo

$P \rightarrow$  peso da caixa

$F \rightarrow$  esforço no músculo bicípite braquial

$a \rightarrow$  distância da linha de ação de  $F$  à articulação do cotovelo O

b → distância da linha de acção de P à articulação do cotovelo O

Estando em equilíbrio, pela equação dos momentos, vem

$$aF - bP = 0 \Leftrightarrow F = \frac{bP}{a}$$

### 2.1.5 Reacções nos apoios

O corpo humano é constituído por um conjunto de sistemas de estruturas (órgãos, ossos, músculos e outros tecidos) que exercem forças umas nas outras. Os músculos puxam os ossos através dos tendões mas, por si só, não são capazes de causar uma mudança de movimento pois as forças musculares são **forças internas**.

As **forças externas** são aquelas que agem num objecto com origem no meio exterior. O corpo humano pode ser visto como um todo em movimento, onde as forças externas são a força de gravidade e as forças de contacto.

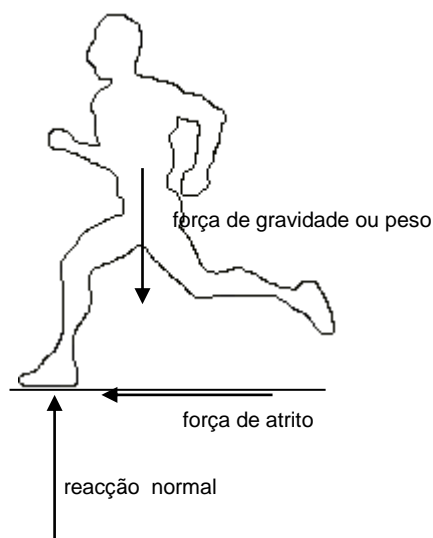


Figura 2.14 – Forças externas

Mas, o corpo humano também pode ser visto como uma estrutura constituída por segmentos anatómicos associados por articulações. A liberdade de um segmento do corpo humano poder mover-se livremente no espaço é restringida pela existência de constrangimentos articulares. Se um segmento, sob a acção de um sistema de forças, puder vir a adquirir um movimento que só não é efectuado devido à existência de um constrangimento, então a esta acção sofrida pelo segmento corresponde uma reacção que tem sentido oposto (3ª lei de Newton). Ou seja, cada reacção deve reflectir um

movimento que foi impedido pelo constrangimento. As reacções não são inicialmente conhecidas e são a natureza das restrições que permitirão posteriormente determiná-las.

### Exemplo

No exemplo anterior, o úmero serve de suporte, por meio de ligamentos, na articulação do cotovelo, aos ossos do antebraço e da mão impedindo o movimento vertical.

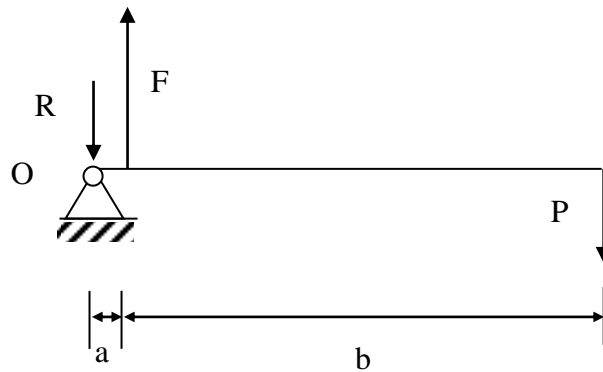


Figura 2.15 – DCL do sistema S para a vertical

Pela equação do equilíbrio de forças tem-se

$$F - P - R = 0 \Leftrightarrow R = F - P$$

onde a reacção R se manifestará nos músculos.

### 2.1.6 Centro de massa

O **centro de massa** de um corpo é o ponto no qual todo o peso pode ser concentrado, ou seja, é o ponto médio da distribuição do peso.

O centro de massa do corpo humano depende da colocação relativa dos centros de massa dos corpos parciais (cabeça, tronco e membros). A força da massa de cada uma das partes é vertical com o sentido de cima para baixo. A soma ou resultante dessas forças é o peso total do corpo que tem como ponto de aplicação um ponto em relação ao qual o momento resultante é nulo, sem ter em conta a posição absoluta do corpo. Se a posição dos corpos parciais se alterar o centro de massa alterar-se-á também.

## Exemplo

Considere um homem em três posições como mostra a figura 2.16.

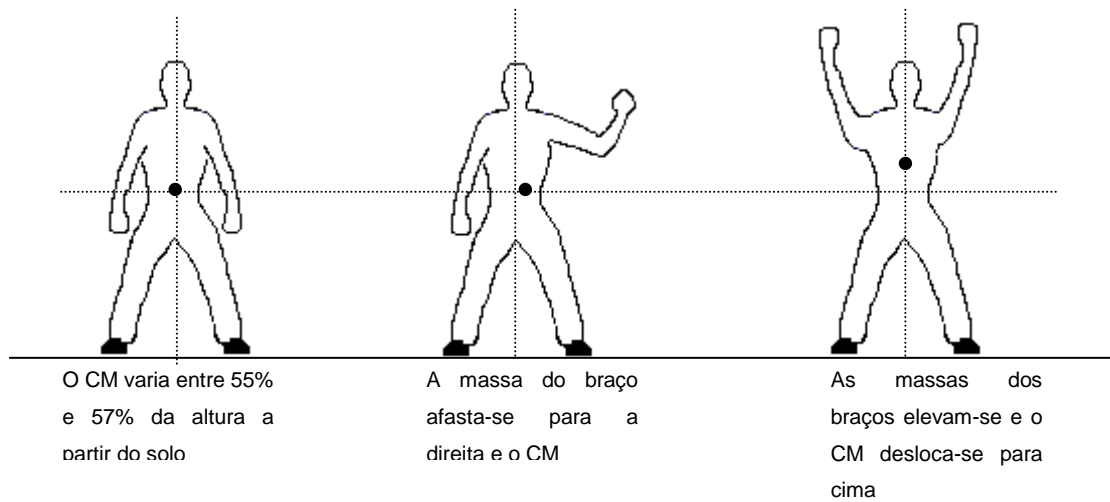


Figura 2.16 – Posição do CM

## Determinação do centro de massa de um corpo

- O centro de massa de um corpo homogêneo (massa volúmica constante), situa-se no seu centro geométrico.

O centro de massa de um corpo pode ser um ponto onde não existe qualquer massa como é o caso do anel

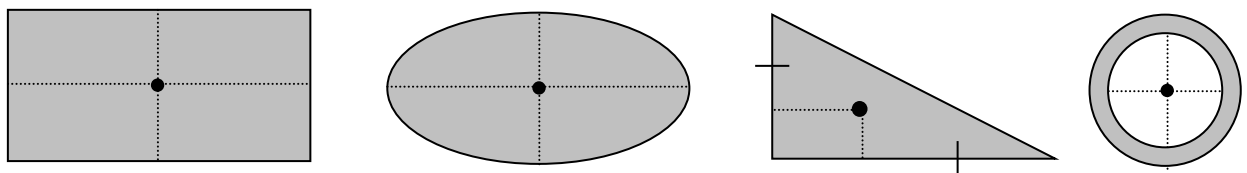


Figura 2.17 – Posição do CM de um rectângulo, uma elipse, um triângulo rectângulo e uma coroa circular

- O centro de massa de um corpo suspenso situa-se sobre a linha vertical que passa pelo ponto de suspensão. Escolhendo outro ponto de suspensão obter-se-á outra linha vertical. O centro de massa está na intersecção dessas linhas.

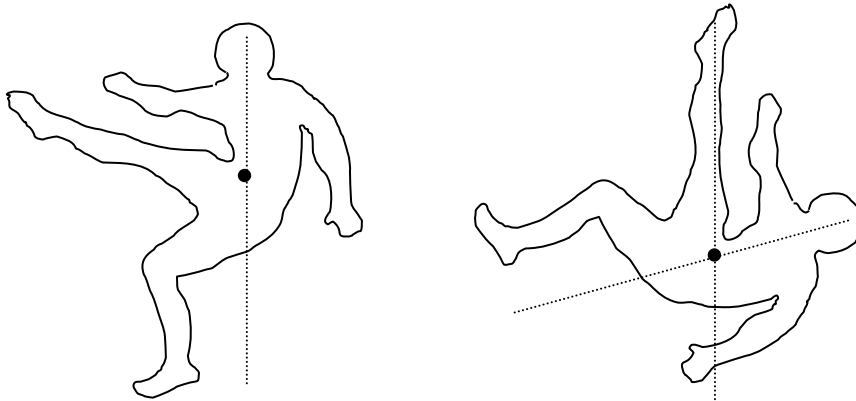


Figura 2.18 – O CM está sobre a linha de prumo

- O centro de massa de um corpo constituído por segmentos é determinado fazendo a média ponderada dos pesos relativos localizados nos respectivos centros de massa. Como o corpo é pequeno quando comparado com a dimensão da Terra, essa média pode ser substituída pela média ponderada das massas (ou dos pesos) dos segmentos

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^N m_i x_{Gi}}{\sum_{i=1}^N m_i} , \quad y_G = \frac{\sum_{i=1}^N m_i y_{Gi}}{\sum_{i=1}^N m_i} , \quad z_G = \frac{\sum_{i=1}^N m_i z_{Gi}}{\sum_{i=1}^N m_i}$$

Os anexos 1 e 2 apresentam dados antropométricos, sendo de realçar o valor médio da massa dos segmentos relativos à massa total e o valor médio da posição (proximal e distal) do centro de massa dos segmentos.

**Exemplo:**

Considere-se o membro superior direito de um homem de massa  $M = 70\text{kg}$  e altura  $H = 1,70\text{m}$  na posição horizontal.

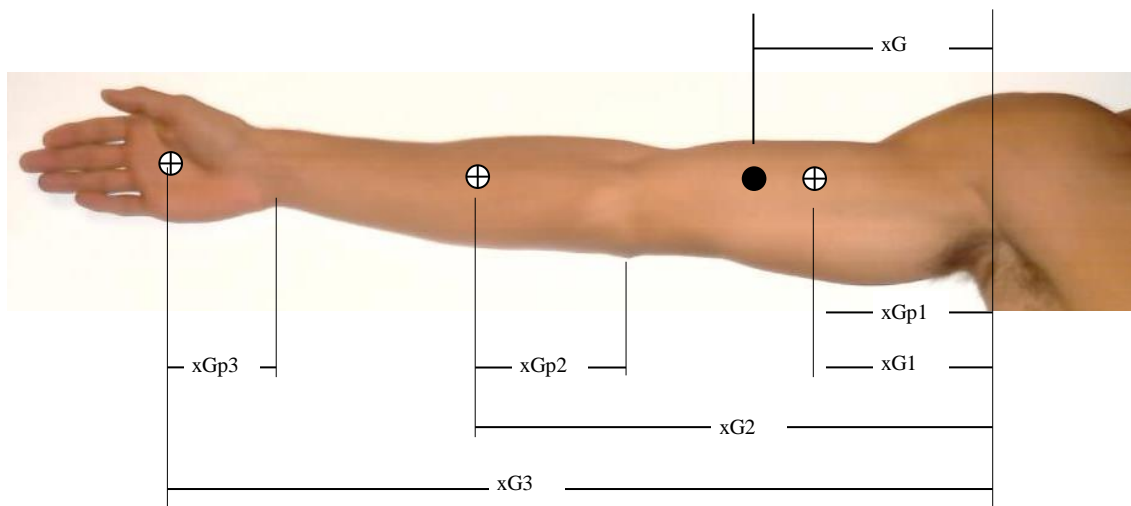


Figura 2.19 – Localização do CM do membro superior direitos e dos respectivos segmentos

Para determinar a posição horizontal do centro de massa organizam-se os dados numa tabela,

| Cálculo da distância proximal do CM do braço                           |         |               |         |              |                |                   |                  |                         |
|--|---------|---------------|---------|--------------|----------------|-------------------|------------------|-------------------------|
|  | $m_i/M$ | $m_i$<br>(kg) | $L_i/H$ | $L_i$<br>(m) | $x_{Gp_i}/L_i$ | $x_{Gp_i}$<br>(m) | $x_{G_i}$<br>(m) | $m_i x_{G_i}$<br>(kg m) |
| <b>Braço</b>   | 0,028   | 1,96          | 0,186   | 0,3162       | 0,436          | 0,137863          | 0,137863         | 0,270212                |
| <b>Antebraço</b>   | 0,016   | 1,12          | 0,146   | 0,2482       | 0,43           | 0,106726          | 0,422926         | 0,473677                |
| <b>Mão</b>   | 0,006   | 0,42          | 0,108   | 0,1836       | 0,506          | 0,092902          | 0,657302         | 0,276067                |
| <b>Total</b>   | 0,05    | 3,5           | 0,44    | 0,748        |                |                   |                  | 1,019956                |
| $X = \frac{\sum_{i=1}^3 m_i x_i}{\sum_{i=1}^3 m_i} = 0,291416\text{m}$ |         |               |         |              |                |                   |                  |                         |

em que

- $m_i/M$  – massa do segmento relativa à massa total (ver anexo 1)
- $m_i$  – massa do segmento
- $L_i/H$  – comprimento do segmento relativo à altura (ver anexo 2)

- **Li** – comprimento do segmento
- **xGpi/Li** – medida proximal do centro de massa do segmento em relação ao comprimento do segmento
- **xGpi** – medida proximal do centro de massa do segmento
- **xGi** – medida do centro de massa do segmento
- **mixGi** – massa vezes a medida do centro de massa do segmento
- **X** – coordenada do centro de massa do membro superior direito.

A localização do centro de massa é muito importante para a estabilidade do corpo. Um corpo está em equilíbrio estável se a linha que parte do centro para baixo incidir num ponto do interior da base do corpo. A posição do centro de massa e a base de sustentação do corpo humano estão constantemente a ser alterados quando este está em movimento. Também os atletas alteram a sua postura, consoante pretendam aumentar a sua estabilidade ou aumentar a sua mobilidade. Ao caminhar, o corpo humano inclina-se para a frente até que a sua linha vertical saia fora da base de sustentação forçando assim o movimento.

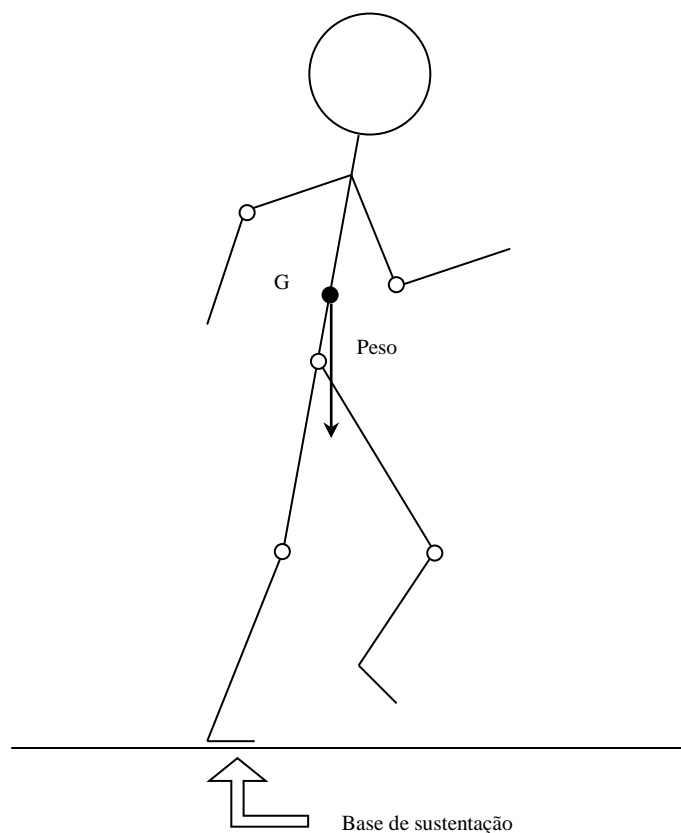


Figura 2.20 – Linha de acção do peso não passa pela base de sustentação provocando o movimento

## 2.2 Forças e movimento

### 2.2.1 Posição e deslocamento linear

O movimento de uma partícula, segundo uma dada trajectória, é determinado pela **lei horária do movimento**  $s = s(t), t \geq 0$  que indica a posição da partícula em cada instante, ou seja, a **distância percorrida** medida em metros, sobre a trajectória, a partir de uma posição inicial.

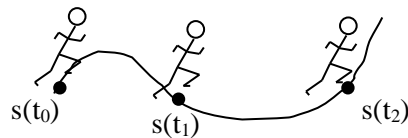


Figura 2.21 – Trajectória

Se a trajectória da partícula não é relevante, a descrição da posição absoluta da partícula é feita através do **deslocamento linear**  $\Delta s$  que dá a distância em linha recta entre a posição inicial  $P_i$  a posição final  $P_f$ .

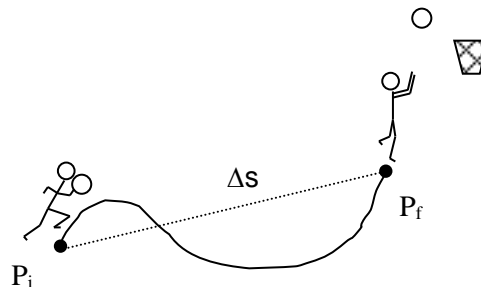


Figura 2.22 – Deslocamento linear

Seja  $(O, x, y, z)$  um referencial cartesiano. Qualquer ponto  $P = (x, y, z)$  do espaço em movimento, fica determinado pelo **vector posição**  $\vec{r}(t)$  em relação à origem das coordenadas dado por

$$\vec{r}(t) = \overrightarrow{OP}(t) = x(t)\hat{e}_x + y(t)\hat{e}_y + z(t)\hat{e}_z$$

Uma partícula em movimento descreve uma curva. Num determinado instante  $t$  a partícula está na posição  $P$  da trajectória, sendo as **equações paramétricas** da sua trajectória dadas por

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), & t \geq 0s \\ z = z(t) \end{cases}$$

Eliminando o parâmetro  $t$  obtém-se a **equação cartesiana da trajetória**.

### 2.2.2 Velocidade linear

A variação escalar da posição da partícula ao longo do tempo é medida por duas grandezas escalares, cujas unidades SI são metros por segundo, m/s:

- **Velocidade média escalar:**  $v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$
- **Velocidade escalar instantânea:**  $v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_m = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$

sendo  $\Delta s$  o deslocamento linear da partícula.

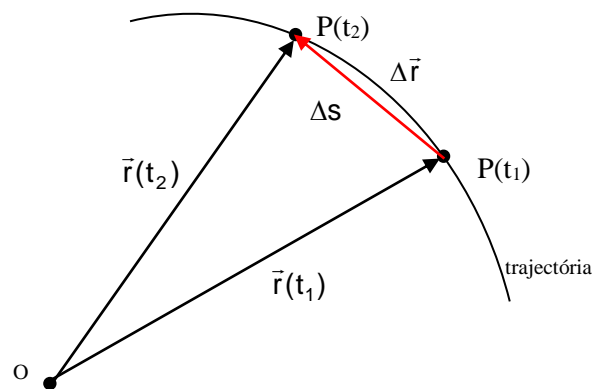


Figura 2.23 – Variação do vetor posição

A variação vectorial da posição da partícula é medida por duas grandezas vectoriais:

- **Velocidade vectorial média:**  $\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$
- **Velocidade vectorial instantânea:**  $\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{v}_m = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$   
 $\Leftrightarrow \vec{v} = \frac{dx}{dt}(t)\hat{e}_x + \frac{dy}{dt}(t)\hat{e}_y + \frac{dz}{dt}(t)\hat{e}_z$

A variação da posição é, muitas vezes, nos fenómenos cíclicos (periódicos), medida por outras grandezas. Por exemplo, a velocidade de um nadador é obtida dividindo a

distância percorrida pelo tempo gasto. No entanto, os treinadores têm duas quantidades que medem melhor a eficiência do atleta:

- a razão entre a distância percorrida pelo número de braçadas efectuadas (média de braçadas).
- a razão entre o número total de braçadas e o tempo gasto (frequência de braçadas).

### 2.2.3 Aceleração linear

A variação escalar da velocidade da partícula ao longo do tempo é medida por duas grandezas escalares, cujas unidades SI são metros por segundo ao quadrado, m/s<sup>2</sup>:

- **Aceleração média escalar:**  $a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}$
- **Aceleração escalar instantânea:**  $a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} a_m = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$

sendo  $\Delta v$  a variação da velocidade escalar da partícula.

A variação vectorial da velocidade da partícula é medida por duas grandezas vectoriais:

- **Aceleração vectorial média:**  $\bar{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$
- **Aceleração vectorial instantânea:**  $\bar{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{a}_m = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$   
 $\Leftrightarrow \bar{a} = \frac{d^2x}{dt^2}(t)\hat{e}_x + \frac{d^2y}{dt^2}(t)\hat{e}_y + \frac{d^2z}{dt^2}(t)\hat{e}_z$

A aceleração vectorial pode ser decomposta, no referencial intrínseco à sua trajectória, em duas componentes:

$$\bar{a} = \bar{a}_n + \bar{a}_t \Leftrightarrow \bar{a} = a_n \hat{n} + a_t \hat{t}$$

em que:

- **componente tangencial**  $\bar{a}_t$  está relacionada com a variação da grandeza do vector velocidade e tem as seguintes características:  
 direcção: tangente à trajectória em cada ponto  
 sentido: igual ao do movimento no caso de movimento acelerado ou contrário no caso de movimento retardado.

grandeza:  $\|\bar{a}_t\| = \frac{dv}{dt}$

- **componente normal**  $\vec{a}_n$  mede a variação da direcção e sentido do vector velocidade e tem as seguintes características:  
 direcção: perpendicular à trajectória em cada ponto  
 sentido: para dentro da trajectória  
 grandeza:  $\|\vec{a}_n\| = \frac{v^2}{R}$ , R raio da trajectória.

## 2.2.4 Posição angular

O movimento de uma partícula, segundo uma dada trajectória, é determinado pela **lei angular do movimento**  $\theta = \theta(t), t \geq 0$  que indica a posição da partícula em cada instante, ou seja, o **ângulo descrito** medido em radianos a partir de uma posição inicial.

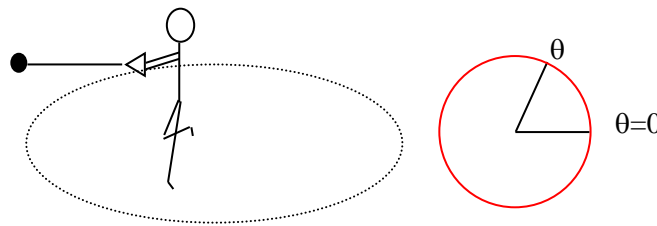


Figura 2.24 – Ângulo do movimento

Se a trajectória da partícula não é relevante, a descrição da posição angular absoluta da partícula é feita através do **deslocamento angular**  $\Delta\theta$  que dá o ângulo entre a linha recta correspondente à posição inicial  $P_i$  e a linha recta correspondente à posição final  $P_f$ .

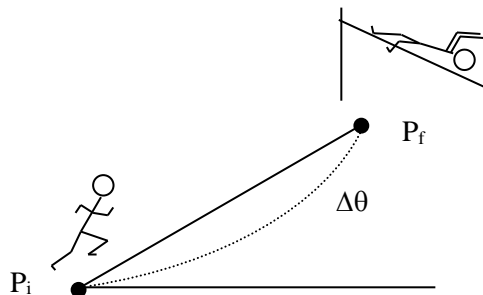


Figura 2.25 – Deslocamento angular

Para uma partícula que se move numa trajectória circular de raio R o deslocamento angular e o deslocamento linear estão relacionados através da fórmula:

$$\Delta\theta = \frac{\Delta s}{R}$$

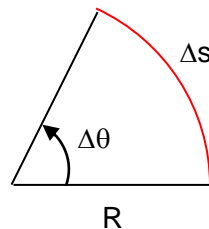


Figura 2.26 – Deslocamento linear e angular numa trajectória circular

### 2.2.5 Velocidade angular

A variação escalar da posição angular da partícula ao longo do tempo é medida por duas grandezas escalares, cujas unidades SI são metros por segundo, rad/s:

- **Velocidade angular escalar média:**  $\omega_m = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$
- **Velocidade angular escalar instantânea:**  $\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \omega_m = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$

sendo  $\Delta\theta$  o deslocamento linear da partícula.

A variação vectorial da posição da partícula é medida por duas grandezas vectoriais:

- **Velocidade angular vectorial média:**  $\vec{\omega}_m = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \hat{e}_z$
- **Velocidade angular vectorial instantânea:**  $\vec{\omega}_m = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{\omega}_m = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \hat{e}_z = \frac{d\theta}{dt} \hat{e}_z$

### 2.2.6 Aceleração angular

A variação escalar da velocidade angular da partícula ao longo do tempo é medida por duas grandezas escalares, cujas unidades SI são radianos por segundo ao quadrado, rad/s<sup>2</sup>:

- **Aceleração angular escalar média:**  $\alpha_m = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$
- **Aceleração angular escalar instantânea:**  $\alpha_m = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \alpha_m = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$

sendo  $\Delta\omega$  a variação da velocidade angular escalar da partícula.

A variação vectorial da velocidade angular da partícula é medida por duas grandezas vectoriais:

- **Aceleração angular vectorial média:**  $\bar{\alpha}_m = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \hat{e}_z$
- **Aceleração angular vectorial instantânea:**  $\vec{\alpha}_m = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{\alpha}_m = \frac{d\omega}{dt} \hat{e}_z = \frac{d\omega}{dt} \hat{e}_z$

## 2.2.7 Movimentos particulares de uma partícula

A **lei do movimento** de um corpo é dada pelo vector posição dos seus pontos em cada instante. Como, na prática, o que se conhece são as forças (acções) que actuam sobre o corpo, a lei fundamental da dinâmica permite determinar a sua aceleração. Desta, por antiderivação, determina-se a sua lei da velocidade e novamente por antiderivação a lei das posições, desde que se conheçam as condições iniciais do movimento.

### 2.2.7.1 Movimento rectilíneo

Suponha que um corpo tem movimento rectilíneo com aceleração linear  $\vec{a} = \vec{a}(t)$ .

- Se  $\vec{a} = \vec{0}$  o movimento diz-se **uniforme**, pois o valor da velocidade é constante.
- Se  $\vec{a} \neq \vec{0}$  o movimento diz-se **variado**, pois o valor da velocidade varia com o tempo. No caso de  $\vec{a} = \text{cte}$  o movimento diz-se **uniformemente variado**. Se  $\vec{a} = a(t)$  o movimento diz-se **não uniformemente variado**.

A análise do movimento pode ser feita usando os gráficos dos valores da velocidade e da distância percorrida ao longo do tempo.

## Exemplo

Os gráficos traduzem várias situações na corrida de um atleta. A existência de aceleração está sempre associada a forças musculares adicionais. A variação da aceleração no tempo (4º gráfico) gera mais desconforto e fadiga no atleta.

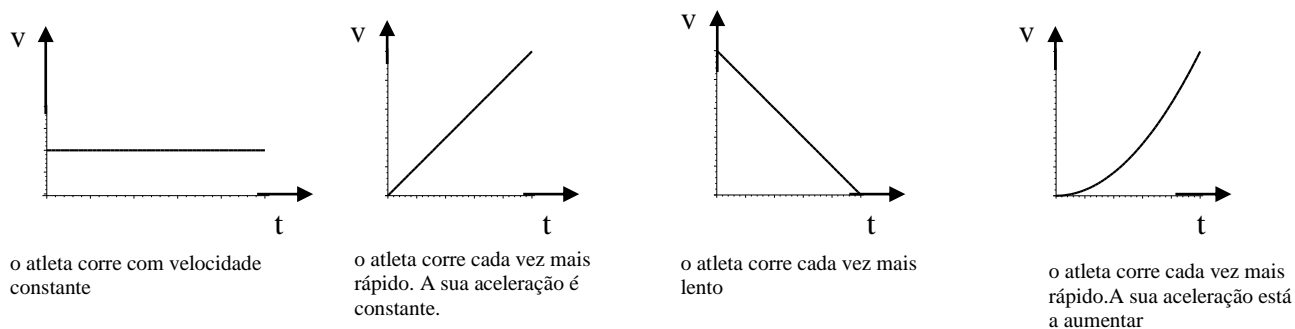


Figura 2.27 – Gráficos da função velocidade

### 2.2.7.2 Movimento de projecteis

Desprezando a resistência do ar a única força que actua no projectil é a força de gravidade que tem o sentido vertical e aponta para baixo. As leis que descrevem o movimento de um projectil lançado com velocidade inicial de grandeza  $v_0$  e direcção fazendo um ângulo  $\alpha$  com a horizontal, são

- lei das acelerações:  $\vec{a} = -g\hat{e}_y$
- lei das velocidades:  $\vec{v} = v_0 \cos\theta \hat{e}_x + (v_0 \sin\theta - gt)\hat{e}_y$
- lei das posições:  $\vec{r} = (x_0 + v_0 \cos\theta t)\hat{e}_x + (y_0 + v_0 \sin\theta t - \frac{1}{2}gt^2)\hat{e}_y$

Eliminando o parâmetro  $t$  nas equações paramétricas associadas à lei das posições obtém-se a equação da trajectória que graficamente corresponde a uma parábola.

### Exemplo

Um atleta lança uma massa de uma altura  $H$  e ângulo  $\theta$ .

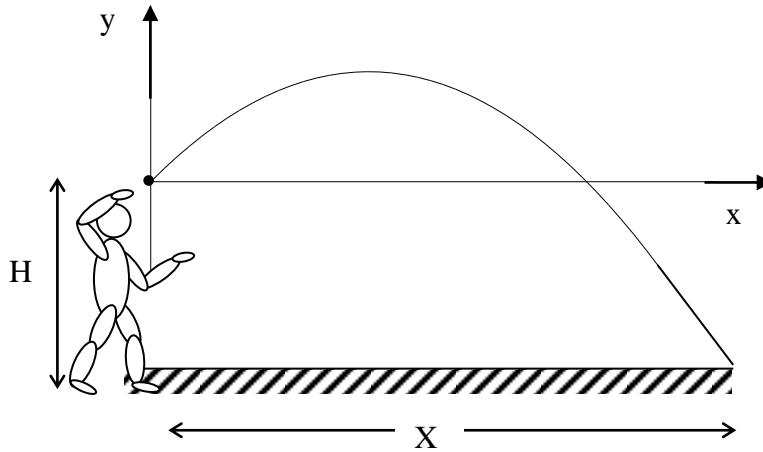


Figura 2.28 – Lançamento oblíquo de uma altura  $H$

Da lei das posições obtém-se que o alcance máximo do objecto é dado pela relação

$$X = \frac{v_0 \sqrt{v_0^2 + 2gH}}{g}$$

para um ângulo de lançamento igual a

$$\theta_m = \tan^{-1} \left( \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gH}} \right)$$

### Exemplo

Um nadador lança-se de uma prancha com velocidade inicial e um dada inclinação. Enquanto o seu corpo se vai alongando para uma entrada na água o mais linear possível, o seu centro de massa descreve uma parábola.

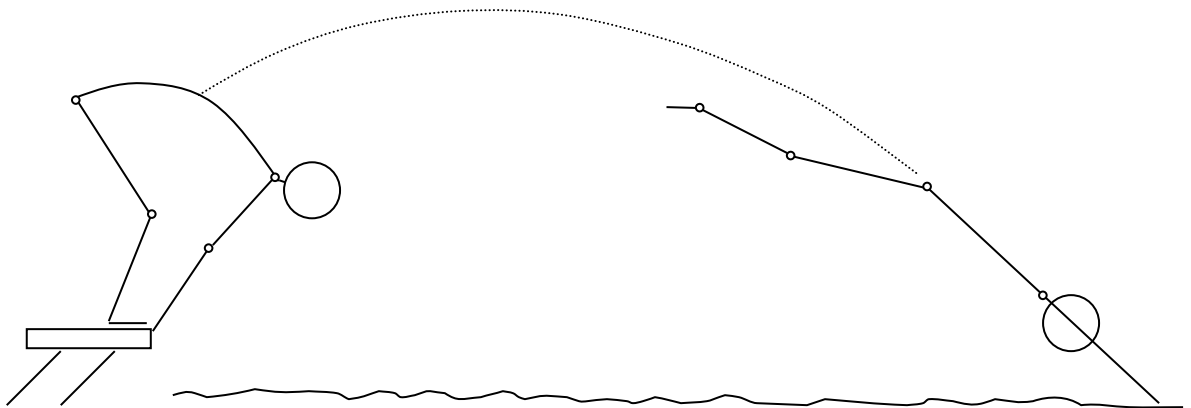


Figura 2.29 – Parábola descrita pelo CM de um nadador

### 2.2.7.3 Movimento circular

Uma partícula que descreve um arco de circunferência ocupa em cada instante uma posição determinada pelo **vector posição**, cujas componentes no referencial cartesiano e no referencial intrínseco são, respectivamente:

$$\vec{r}(t) = R \cos \theta \hat{e}_x + R \sin \theta \hat{e}_y \Leftrightarrow \vec{r}(t) = -R\hat{n}$$

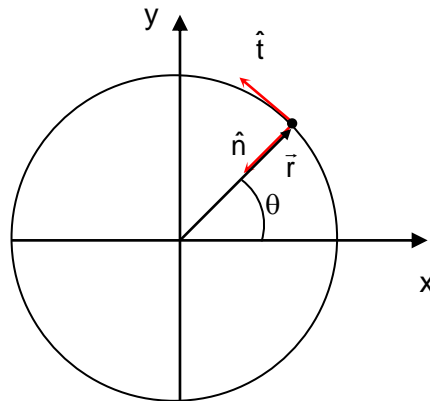


Figura 2.30 – Referencial intrínseco

Derivando obtém-se a lei das velocidades

$$\vec{v}(t) = (-R \sin \theta \hat{e}_x + R \cos \theta \hat{e}_y) \frac{d\theta}{dt} = r\omega \hat{t}$$

Derivando novamente obtém-se a lei das acelerações

$$\vec{a}(t) = (-R \sin \theta \hat{e}_x + R \cos \theta \hat{e}_y) \frac{d^2\theta}{dt^2} + (-R \cos \theta \hat{e}_x - R \sin \theta \hat{e}_y) \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 = R\alpha \hat{t} + R\omega^2 \hat{n}$$

Suponha que um corpo tem movimento circular com aceleração angular  $\alpha$ .

- Se  $\alpha = 0$  o movimento diz-se **circular uniforme**, pois o valor da velocidade é constante. O vector aceleração tem apenas componente normal.
- Se  $\alpha \neq 0$  o movimento diz-se **circular variado**. O vector aceleração tem duas componentes, a tangencial e a normal.

## Exemplo

Um lançador de martelo prepara o lançamento girando o martelo em torno de um eixo vertical. O atleta exerce uma força, denominada **força centrípeta** (acção) que é causadora do movimento circular. Esta força é orientada para o centro da circunferência e deve corresponder, de acordo com a 3ª lei de Newton, a uma força de reacção de grandeza igual e sentido oposto que se chama **força centrífuga** que o atleta sentirá na mão. O fio do martelo fica sujeito a duas forças que o mantêm tenso.

As equações do movimento são:

- na direcção tangencial:  $mR\alpha = 0$  (movimento circular uniforme)
- na direcção normal:  $mR\omega^2 = T$ , sendo T a tensão no cabo (força centrípeta)

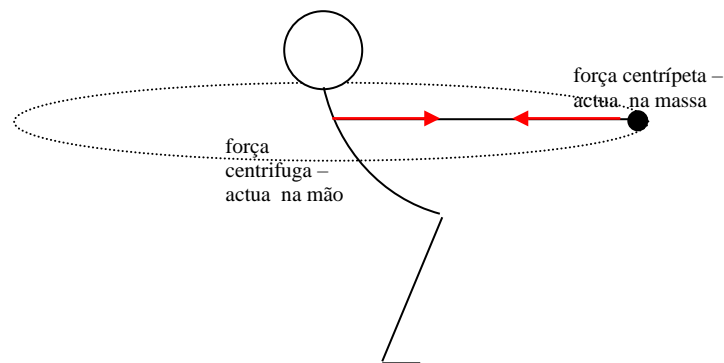


Figura 2.31 – Lançamento do martelo

### 2.2.8 Momento linear

O **momento linear** é uma grandeza vectorial que mede a inércia em movimento e é dado pelo produto da massa de um corpo pela sua velocidade.

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

### 2.2.9 Impulso e variação do momento linear

As variações no momento linear ocorrem quando há uma variação da massa ou da velocidade ou em ambos os casos. Supondo que a massa é constante, a uma variação do momento corresponde uma variação da velocidade ou seja há aceleração. E, existindo aceleração, há forças envolvidas.

A 2ª lei de Newton estabelece a relação

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

que pode ser escrita na forma

$$\vec{F}\Delta t = \Delta(m\vec{v})$$

Se uma força é aplicada durante um determinado tempo então o momento linear irá alterar-se. Uma força aplicada por um longo período de tempo produz maior alteração no momento que a mesma força aplicada instantaneamente. A grandeza que mede a quantidade força×tempo chama-se **impulso**:

$$I = \vec{F}\Delta t$$

Assim

- quanto maior a força, maior o impulso;
- quanto maior for o intervalo de tempo em que a força é aplicada, maior será o impulso.

### Exemplos

1. No lançamento de objectos leves, o atleta arrasta o objecto de modo que este permaneça o máximo de tempo em contacto de forma a aumentar a sua velocidade que inicialmente era nula. (O impulso aumenta o momento linear)
2. O jogador de futebol recebe muitas vezes a bola no peito recuando para trás. Aumentando o tempo de contacto, diminui a força do impacto no peito. (O impulso diminui o momento linear)
3. Ao saltar para o chão de um ponto mais elevado, uma pessoa flexiona as pernas para aumentar o tempo de contacto diminuindo a força de impacto. Note que a variação do momento linear neste caso é constante.

#### 2.2.10 Conservação do momento linear

Na ausência de forças exterior, segundo a 1ª lei de Newton, uma massa em movimento conserva o seu momento linear. O mesmo acontece para um sistema de N massas.

$$\sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i = \vec{cte}$$

## Exemplo

Um guarda-redes recebe uma bola de massa igual a 0,5kg com velocidade de 20m/s. Pela conservação do momento linear, o sistema guarda-redes+bola adquire uma velocidade igual a 0,142m/s.

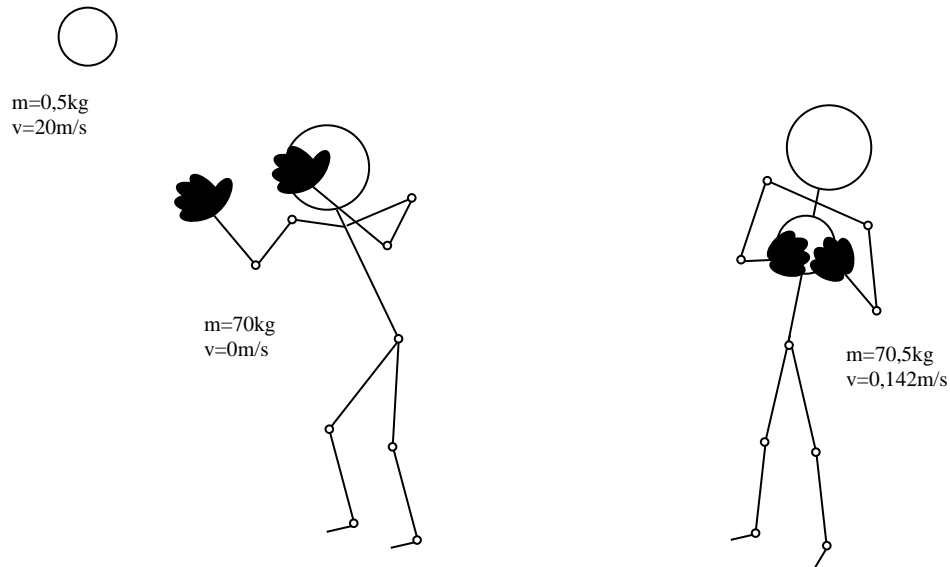


Figura 2.32 – Lei da conservação:  $0,5 \times 20 + 70 \times 0 = 70,5 \times 0,142$

## 2.3 Trabalho e energia

### 2.3.1 Trabalho realizado por uma força

O trabalho realizado por uma força ao deslocar um objecto de um ponto para outro é um grandeza escalar definida por:

$$W = Fd$$

onde  $F$  indica a força exercida no objecto e  $d$  o deslocamento do objecto ao longo da linha de acção da força. A sua unidade SI é o Joule (J).

## Exemplo

Um atleta, na sua preparação física, levanta um haltere com peso igual 500N.

No movimento ascendente o trabalho realizado foi de:  $W_a = 500 \times 0,6 = 300\text{J}$

No movimento descendente o trabalho realizado foi de:  $W_d = 500 \times (-0,6) = -300\text{J}$ ,  
sendo que o sinal negativo vem do facto do deslocamento ser negativo dado que

$$d = \text{posição final} - \text{posição inicial} = 0 - 60 = -60\text{cm}.$$

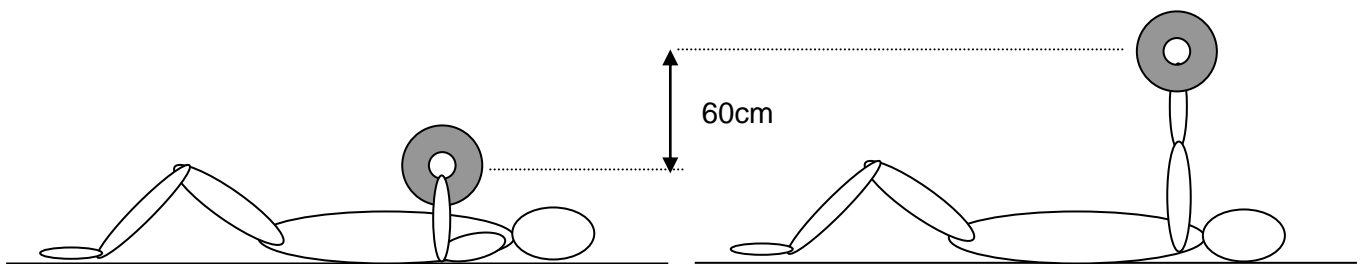


Figura 2.33 – Levantamento de um haltere

O trabalho total é  $W = W_a + W_d = 0\text{J}$ .

Note que o atleta apesar de ter realizado trabalho fisiológico, em termos mecânicos, as posições inicial e final do haltere coincidem, daí o facto do trabalho ser nulo.

### 2.3.2 Potência

A potência  $P$  é a capacidade de realização de trabalho num dado intervalo de tempo. É definida pela razão entre o trabalho  $W$  executado e o tempo  $t$  gasto:

$$P = \frac{W}{t}$$

A unidade SI para a potência é o Watt (W).

A potência também pode ser dada por

$$P = \frac{Fd}{t} = F \times v$$

sendo  $F$  a força exercida,  $d$  o deslocamento provocado pela força e  $v$  a velocidade.

O movimento humano está condicionado pela potência gerada. Um atleta de longas distâncias gera uma potência muito pequena porque gasta muito tempo. Ao contrário, um atleta de distâncias curtas gera uma potência muito grande.

A contração rápida de um músculo gera uma potência superior a uma contração mais lenta.

### Exemplo

Quando executa um salto em comprimento, durante a chamada, um atleta com 70kg de massa realiza um impulso de 80Ns durante 0,2s. Enquanto dura a fase de apoio o

atleta perde velocidade:  $\Delta v = \frac{80}{70} = 1,14\text{m/s}$ , sendo a força média dada por:

$$F = \frac{80}{0,2} = 400\text{N}.$$

### 2.3.3 Energia

**Energia** é tudo aquilo que se pode transformar em trabalho. Há muitas formas de energia, como por exemplo:

- Energia química: a transformação química no organismo vivo permite o funcionamento de todos os órgãos.
- Energia eléctrica: o trabalho é realizado muitas vezes após a transformação desta energia noutras energias.
- Energia térmica: o trabalho é realizado à custa do calor resultante de combustões.
- Energia cinética: um corpo em movimento tem a capacidade de realizar trabalho por causa do seu movimento. É dada por

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

onde  $m$  é a massa do corpo e  $v$  a sua velocidade.

- Energia potencial: um corpo tem esta energia, também chamada posicional, devido à posição que ocupa. São energias potenciais:
  - 1) a **energia potencial gravítica** (um corpo de peso  $mg$  quando é libertado a uma certa altura  $h$  do solo cai. Antes de cair a sua energia potencial é de  $mgh$ );

- 2) a **energia potencial elástica** (uma mola tensa realiza trabalho logo que a força que a deforma deixe de actuar. A sua energia potencial é de  $k\delta^2$ , sendo  $\delta$  o deslocamento da mola a partir da sua posição de equilíbrio e  $k$  o coeficiente de rigidez da mola).

### 2.3.4 Conservação da energia mecânica

A **energia mecânica** é definida pela soma das energias cinética e potencial. O princípio da conservação da energia mecânica diz que na ausência de forças de atrito e da resistência do ar a energia mecânica permanece constante ou seja

$$E_M = E_C + E_P = \text{cte}$$

#### Exemplo

Num salto para a água de uma prancha de 10m, um atleta de 500N de peso, tem uma energia potencial de 5000J que irá ser transformada em energia cinética. Ao atingir a água a energia potencial anula e energia cinética resulta em trabalho para deslocar a água afastando-a do atleta.

## 2.4 Rotação de um corpo rígido em torno de um eixo

### 2.4.1 Momento de inércia

A tendência de corpos resistirem a mudanças no movimento é chamada de **inércia**. A **massa** é uma medida da inércia de translação. O **momento de inércia** é uma medida da inércia de rotação.

O **momento de inércia I** de um corpo em relação a um eixo mede a distribuição da massa do corpo em relação a esse eixo. Este é dado pela soma do produto da massa pelo quadrado da distância de todos os seus pontos ao eixo. Assim, quanto mais afastada a massa estiver do eixo, maior o seu momento de inércia.

Se o corpo puder ser considerado como um sistema discreto de  $N$  partículas de massa  $m_i$  com dimensão desprezável relativamente à distância ao eixo de rotação, tem-se

$$I = \sum_{i=1}^N m_i d_i^2, \quad i = 1, \dots, N$$

## Exemplo

O momento de inércia em relação ao eixo de um homem com  $M=70\text{kg}$  e  $H=1,70\text{m}$  é obtido construindo uma tabela com os valores parciais necessários.

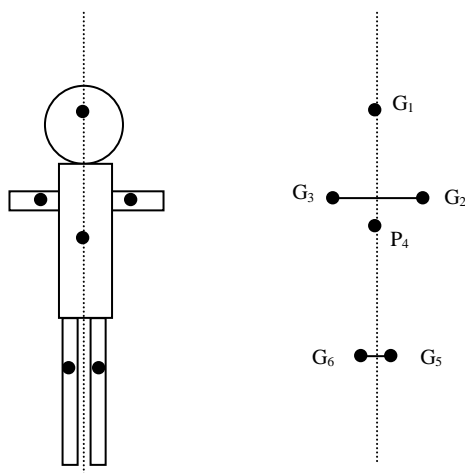


Figura 2.34 – Momento de inércia em relação ao eixo longitudinal

| Segmento                 | $G_i$ | $m_i/M$ | $m_i$ (kg) | $d_i$ (m)                                  | $m_i d_i^2$<br>( $\text{kgm}^2$ ) |
|--------------------------|-------|---------|------------|--|-----------------------------------|
| Cabeça e pescoço         | G1    | 0,081   | 5,67       | 0  | 0                                 |
| Membro superior direito  | G2    | 0,05    | 3,5        | 0,61574                                    | 3635,1                            |
| Membro superior esquerdo | G3    | 0,05    | 3,5        | 0,61574                                    | 3635,1                            |
| Tronco                   | G4    | 0,497   | 34,79      | 0  | 0                                 |
| Membro inferior direito  | G5    | 0,161   | 11,27      | 0,16235                                    | 1681,344                          |
| Membro inferior esquerdo | G6    | 0,161   | 11,27      | 0,16235                                    | 1681,344                          |
| Homem                    | -     | 1       | 70         | $I_{\text{eixo}} = 10632,89 \text{ kgm}^2$ |                                   |

em que

- $P_i$  – posição do centro de massa do segmento
- $m_i/M$  – massa do segmento relativa à massa total (ver anexo 1)
- $m_i$  – massa do segmento
- $d_i$  – distância do segmento ao eixo

- $mid_i^2$  – momento de inércia do segmento em relação ao eixo

Os valores de d2, d3, d5 e d6 foram calculados, usando dados dos anexos 1 e 2, da seguinte forma:

$$d_2 = d_3 = 0,129H + 0,530 \times (0,186 + 0,146 + 0,108)H = 0,61574m$$

$$d_5 = d_6 = 0,191H / 2 = 0,16235 m$$

Para corpos rígidos, a determinação do momento de inércia requer conhecimentos matemáticos mais complexos. Assim dão-se alguns exemplos:

| Figura          | Em relação    | Momento de inércia    |
|-----------------|---------------|-----------------------|
| Disco fino      | ao eixo       | $I = \frac{1}{2}mR^2$ |
| Disco fino      | a um diâmetro | $I = \frac{1}{4}mR^2$ |
| Cilindro oco    | ao eixo       | $I = mR^2$            |
| Cilindro maciço | ao eixo       | $I = \frac{1}{2}mR^2$ |
| Esfera oca      | a um diâmetro | $I = \frac{2}{3}mR^2$ |
| Esfera maciça   | a um diâmetro | $I = \frac{2}{5}mR^2$ |

#### 2.4.2 Momento angular

O movimento angular de um objecto em torno de um eixo é medido através do seu **momento angular**, que é igual ao momento do seu momento linear em torno do eixo. É portanto uma grandeza vectorial definida por

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

e tem as seguintes características:

direcção: perpendicular ao plano definido por  $\vec{r}$  e  $m\vec{v}$

sentido: regra da mão direita

grandeza:  $\|\vec{L}\| = \|\vec{r}\| \cdot \|m\vec{v}\| \cdot \sin\theta$

unidade SI: kg.m/s

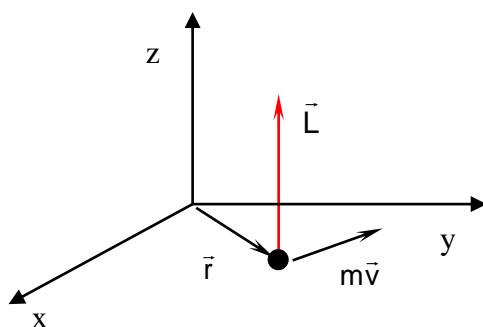


Figura 2.35 – Momento de inércia em relação ao eixo longitudinal

No caso do movimento circular uniforme tem-se

$$\|\vec{L}\| = \|\vec{r}\| \cdot \|m\vec{v}\| = mR^2\omega = I\omega$$

onde  $I$  é o momento de inércia do corpo e  $\omega$  a sua velocidade angular.

### 2.4.3 Variação do momento angular

Todos os objectos que giram mantêm o seu movimento até que alguma coisa os detenha. Na ausência de acções externas, o momento angular  $\vec{L}$  permanece constante. Em particular, na rotação de um eixo fixo, tem-se

$$L = I\omega = \text{cte}$$

onde  $I$  é o momento de inércia do corpo em relação ao eixo e  $\omega$  a grandeza da sua velocidade angular.

### Exemplo

Uma patinadora fecha os braços para diminuir o seu momento de inércia e consequentemente aumentar a sua velocidade angular.

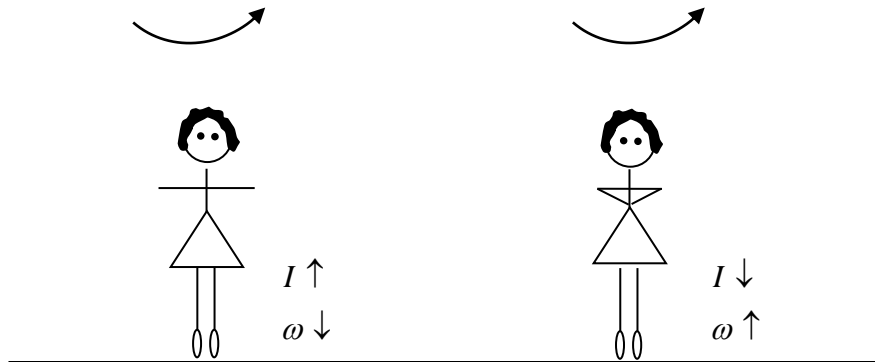


Figura 2.36 – Conservação do momento angular

Contudo, se os momentos das forças externas não forem nulos, o objecto irá sofrer uma aceleração angular na direcção do momento resultante. A sua velocidade pode sofrer alterações, quer em grandeza, quer em direcção. A lei do movimento de rotação (versão angular da 2ª lei de Newton) é expressa pela equação:

$$I \frac{d\omega}{dt} = M$$

onde  $\frac{d\omega}{dt}$  indica a aceleração angular,  $I$  o momento de inércia do objecto e  $M$  o momento resultante que actua no objecto.

### Exemplo

Ao correr um atleta movimenta os seus braços e pernas de forma alternada. O braço esquerdo balança para trás enquanto o direito balança para a frente. A perna esquerda balança para a frente enquanto a direita balança para a trás.

Em relação a um eixo medial-lateral, os momentos angulares dos braços somam zero porque se anulam entre si. Do mesmo modo os momentos angulares das pernas somam zero porque também se anulam entre si.

Em relação ao eixo longitudinal, os momentos angulares das pernas não somam zero porque ambas executam um movimento de rotação no mesmo sentido, podendo causar sérios problemas à sua estabilidade. Para evitar desequilíbrios, os atletas contrariam com o movimento de rotação dos braços contrário aos das pernas.

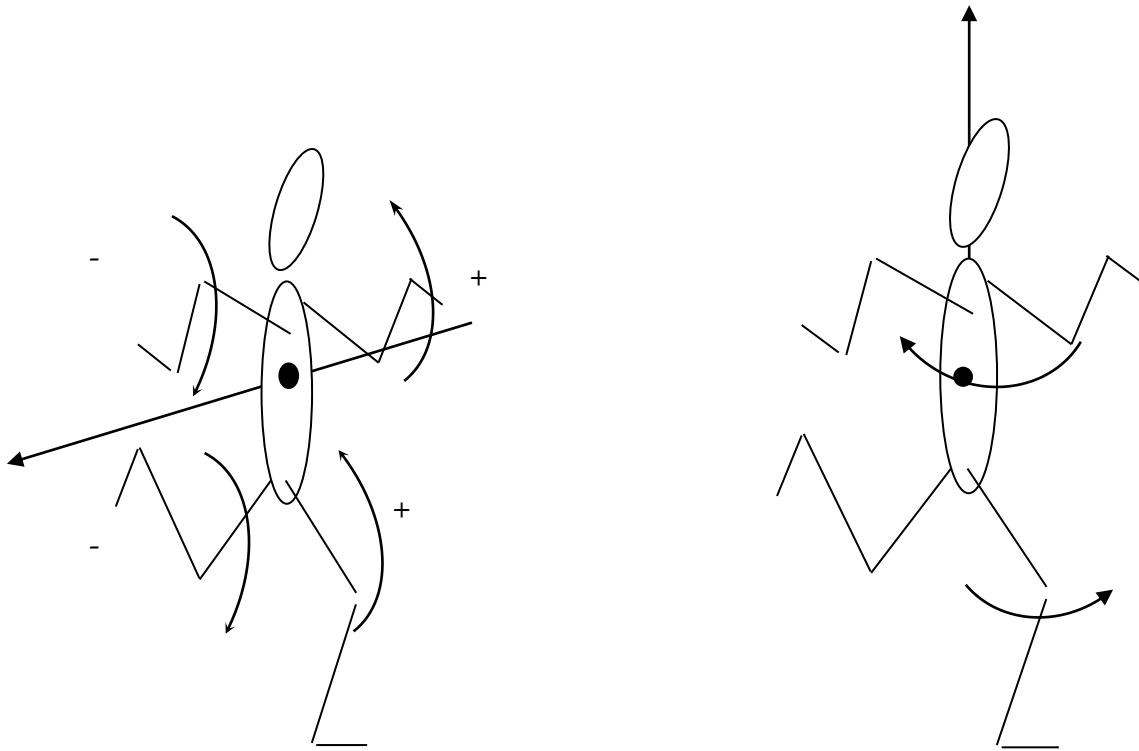


Figura 2.37 – Movimento alternado das pernas e braços

## 3. Propriedades da matéria

### 3.1 Sólidos

#### 3.1.1 Introdução

Um material sólido é aquele que tem consistência, isto é, que tem forma própria. Um fluido flui tendendo sempre a tomar a forma dos recipientes que o contem. Um fluido pode ser líquido ou gasoso. As propriedades dos sólidos são tratadas no presente sub-capítulo enquanto que os fluidos são abordados no sub-capítulo 3.2.

Os materiais são substâncias utilizadas para construir algo. A madeira, o betão, o aço, o plástico, o vidro, a borracha, o alumínio, o cobre e o papel são alguns dos materiais mais comuns na actual civilização. No entanto, novos materiais são frequentemente desenvolvidos em consequência da constante investigação.

Por conveniência a maioria dos materiais utilizados na engenharia são divididos em quatro grandes classes: **metálicos**, **poliméricos** (plásticos), **cerâmicos** e **compósitos**.

Os materiais metálicos são substâncias inorgânicas compostas por um ou mais elementos metálicos, podendo conter também alguns elementos não-metálicos. Ferro, cobre e alumínio são três exemplos de elementos metálicos e carbono, azoto e oxigénio de não-metálicos. Este tipo de materiais tem uma estrutura cristalina em que os átomos estão arrançados de forma ordenada. Os metais são, em geral, bons condutores térmicos e eléctricos. Uma liga metálica é a combinação de dois ou mais metais e/ou materiais não-metálicos. Os metais e suas ligas são divididos em duas classes: **ferrosos** e **não-ferrosos**. Os ferrosos contêm uma grande percentagem de ferro como os aços e os vários ferros. A distinção entre os ferros e os aços deve-se à percentagem de carbono, sendo que nos aços a percentagem de carbono é inferior a 1,2% do peso total. Os não-ferrosos são metais com baixa ou nenhuma percentagem de ferro. São exemplos o alumínio, o cobre, o zinco, o titânio e o níquel.

A maioria dos materiais poliméricos consistem em longas cadeias de moléculas orgânicas que contêm carbono. Estruturalmente a maioria dos polímeros são não-

cristalinos, embora alguns contenham zonas cristalinas e não-cristalinas. Devido à sua estrutura interna os polímeros são, em geral, maus condutores eléctricos.

Os materiais cerâmicos são inorgânicos e consistem na ligação química de materiais metálicos com não-metálicos, podendo ser cristalinos, não-cristalinos ou uma mistura de ambos. A maioria dos cerâmicos são muito duros mas são frágeis, apresentando também baixo atrito e propriedades isolantes, que os tornam muito utilizados no fabrico de fornos industriais.

Os materiais compósitos são a mistura de dois ou mais materiais. De um modo geral são constituídos por uma base (por exemplo polimérica, mais especificamente uma resina) reforçados por um material metálico ou por fibras orgânicas como por exemplo fibras de carbono. Os componentes não se misturam e as interfaces são fisicamente identificáveis. Dois dos mais utilizados compósitos da engenharia actual são:

- Matriz de poliéster ou epóxi reforçada com fibra de vidro;
- Matriz de epóxi reforçada por fibras de carbono.

### 3.1.2 Massa volúmica

A **massa volúmica** (density, em inglês) é uma das mais importantes propriedades dos materiais. A massa volúmica é a razão entre a massa e o volume,

$$\rho = \frac{M}{V}$$

em que M é a massa, V o volume e  $\rho$  a massa volúmica.

Os materiais poliméricos, cerâmicos e compósitos têm, de um modo geral, menor massa volúmica que os metais, ou seja, para um dado volume a massa são menores, sendo esta uma das razões para a cada vez maior substituição dos metais, obtendo-se componentes cada vez mais leves.

O ósmio, elemento metálico, é a substância mais densa existente na Terra devido à sua estrutura cristalina. A sua massa volúmica é de 22 570kg/m<sup>3</sup>, enquanto o alumínio é de 2 699kg/m<sup>3</sup> e o gelo de 917kg/m<sup>3</sup>.

### 3.1.3 Tensão

Considere-se um corpo sujeito a forças exteriores em equilíbrio estático. Suponha-se que este corpo é cortado por uma superfície S, separando-o em duas partes ( $C_1$  e  $C_2$ ) como mostra a figura 3.1.

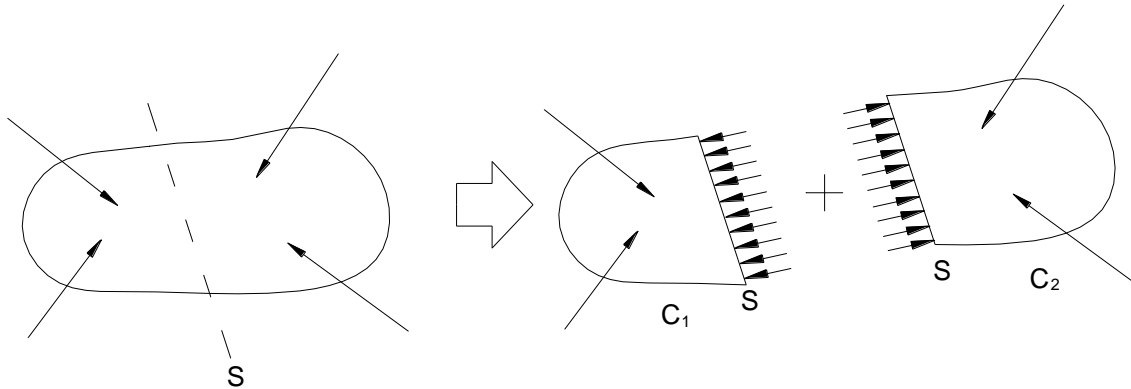


Figura 3.1 – Corpo sob a acção de um sistema de forças em equilíbrio

As várias partes do corpo exercem, nas superfícies de contacto, forças distribuídas umas sobre as outras. Deste modo, o estado de equilíbrio em cada uma das partes,  $C_1$  e  $C_2$ , não se modificará se se substituir a acção da outra parte pelas forças distribuídas correspondentes aplicadas na superfície S (ver figura 3.1). Considere-se o ponto P da superfície, sendo  $\Delta S$  um elemento da superfície centrado no ponto P, como ilustra a figura 3.2. Se  $\Delta F$  for a força exercida sobre  $\Delta S$  então a tensão no ponto P define-se vectorialmente por

$$\vec{\sigma} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta S}$$

e que traduz a acção de uma das partes sobre a outra através da superfície  $dS$ . Se tivesse sido considerado o ponto na outra metade do corpo, então o vector tensão  $\vec{\sigma}$  teria o mesmo módulo e direcção mas sentido contrário, devido ao efeito de acção-reacção.

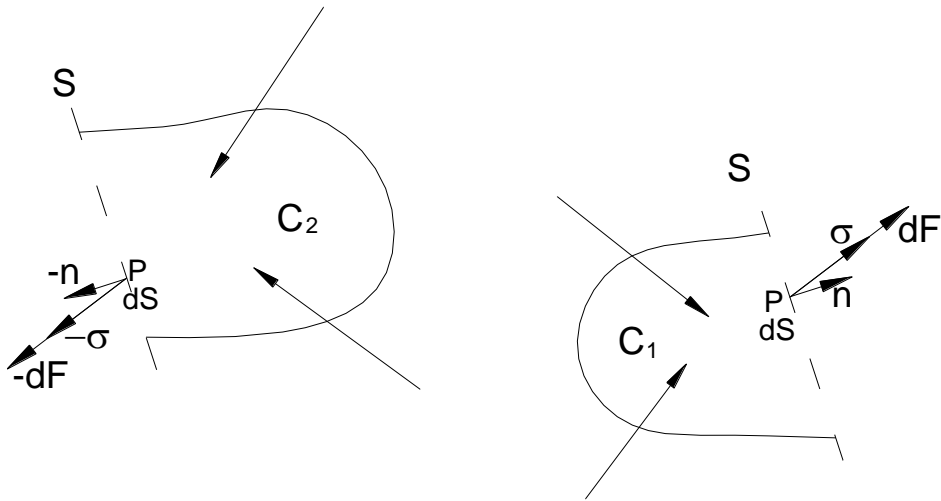


Figura 3.2 – Vector tensão

Na figura 3.2 o vector  $\vec{n}$  é o versor normal à superfície S no ponto P e está dirigido para o exterior. Como tal, o vector tensão  $\vec{\sigma}$  é função do ponto P.

A tensão tem dimensões  $[FL^{-2}]$  pelo que a unidade de tensão no sistema internacional é o Pascal ( $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$ ).

A componente do vector de tensão segundo  $\vec{n}$  chama-se **tensão normal** e o seu módulo é dado pela projecção de  $\vec{\sigma}$  na direcção  $\vec{n}$ ,

$$\sigma_n = \vec{\sigma} \cdot \vec{n}$$

A **tensão tangencial**  $\sigma_t$  é a componente perpendicular a  $\vec{n}$ ,

$$\sigma_t = \tau = \sqrt{\sigma^2 - \sigma_n^2}$$

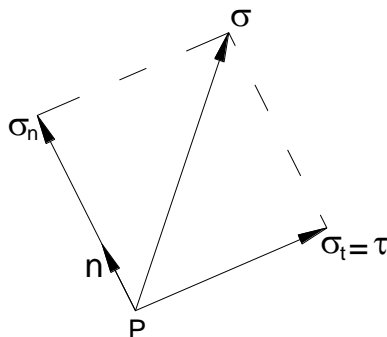


Figura 3.3 – Tensão normal e tangencial

Considere-se um tetraedro inserido numa parte do corpo. Três das faces são perpendiculares aos eixos coordenados (x, y e z) e a quarta face é inclinada como se mostra na figura 3.4.

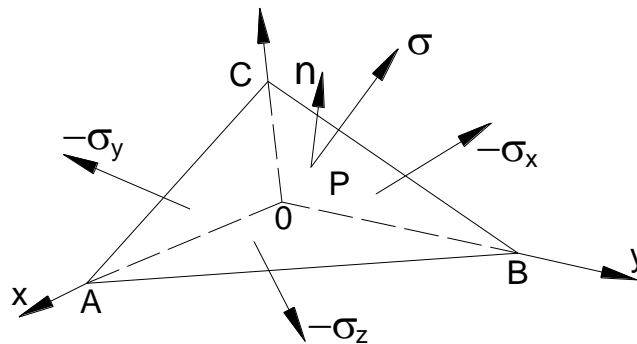


Figura 3.4 –Tetraedro elementar inserido no corpo

Na face inclinada sobre os três eixos, que tem área  $dS$  e versor normal  $\vec{n}$ , actua o vector tensão  $\vec{\sigma}$  que representa a acção da parte suprimida do corpo. Esta tensão tem 3 componentes,  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\sigma_z$ , perpendiculares aos eixos coordenados, x, y e z. Na figura 3.5 estão representadas todas as componentes de tensão. Estas componentes escalares do vector de tensão na direcção do eixo definem uma grandeza física designada de **tensor das tensões** que contem 9 componentes,

$$\sigma_{xx} = \sigma_x ; \sigma_{xy} = \tau_{xy} ; \sigma_{xz} = \tau_{xz}$$

$$\sigma_{yx} = \tau_{yx} ; \sigma_{yy} = \sigma_y ; \sigma_{yz} = \tau_{yz}$$

$$\sigma_{zx} = \tau_{zx} ; \sigma_{zy} = \tau_{zy} ; \sigma_{zz} = \sigma_z$$

Como o tensor das tensões é simétrico há apenas 6 componentes independentes,

$$\begin{matrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ & & \sigma_{zz} \end{matrix}$$

e

$$\tau_{yx} = \tau_{xy} ; \tau_{zx} = \tau_{xz} ; \tau_{yz} = \sigma_{yz}$$

Dos dois índices de  $\sigma_{ij}$ , o primeiro (i) refere a face onde actua a tensão e o segundo (j) a respectiva direcção. Por exemplo,  $\sigma_{xx}$  actua na face perpendicular ao eixo dos xx e tem a direcção de x;  $\tau_{xy}$  actua na face perpendicular ao eixos dos xx e tem a direcção

do eixo dos  $yy$ .

Numa análise bidimensional só existem 3 componentes independentes de tensão,  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  e  $\tau_{xy}$ , sendo que  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$  (ver figura 3.6).

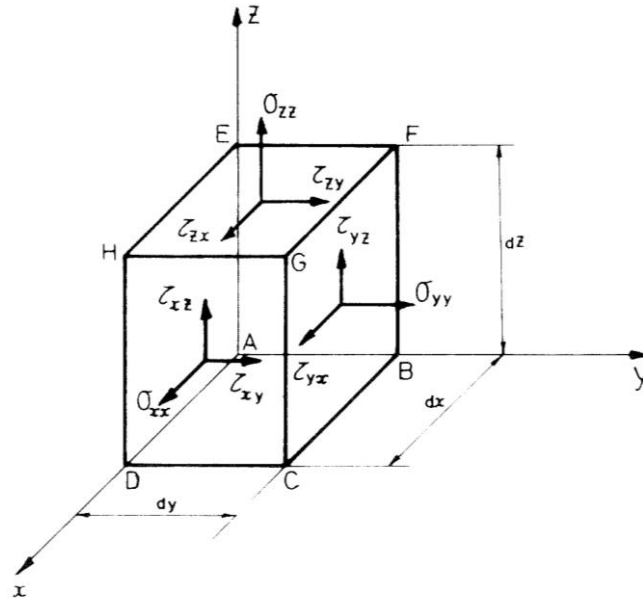


Figura 3.5 –Componentes de tensão

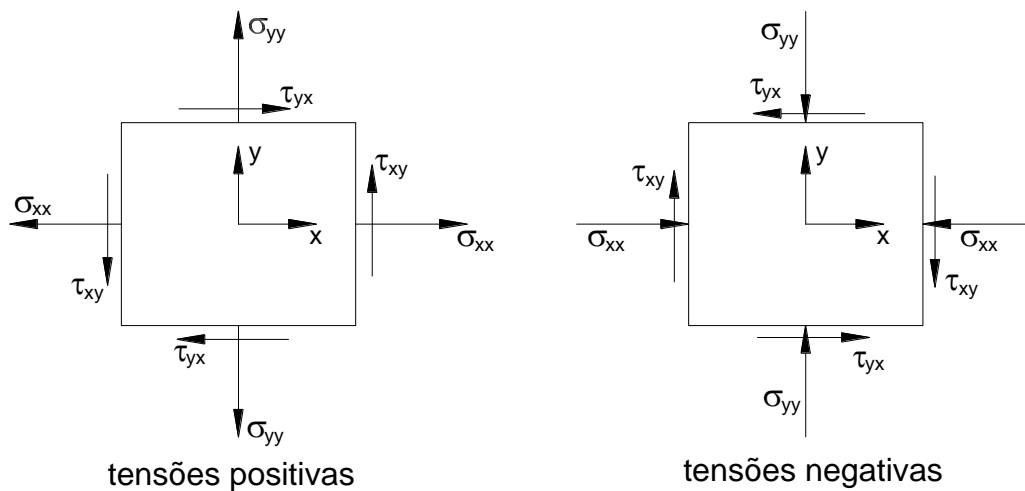


Figura 3.6 – Convenção dos sinais de tensões

Refira-se que as tensões com índices iguais ( $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$ ) são as **tensões normais**. Uma tensão normal é positiva se for de **tração**, isto é se afastar as duas partes do corpo, e é negativa se for de **compressão**. As restantes componentes de tensão designam-se por **tensões de corte ou tangenciais**. Note-se que as tensões de corte actuam em faces opostas e com sentidos opostos. No entanto convencionou-se que a tensão tangencial é positiva se a componente que actua na face positiva tiver o

mesmo sentido do eixo correspondente.

Associado a cada ponto existe um sistema de eixos ortogonais relativamente aos quais as tensões de corte são nulas. Isto é, em cada ponto existem direcções ortogonais segundo as quais não há tensões de corte, só existindo tensões normais que são designadas por **tensões principais**.

### 3.1.4 Deformação

A ideia de **deformação** de um corpo está associada à alteração da sua geometria, isto é, à variação das distâncias entre pontos de um corpo. Mais precisamente, considera-se que entre duas configurações de um corpo há deformação se a distância entre, pelo menos, dois pontos do corpo variar. Consequentemente, as mudanças de posição definidas por movimentos de corpo rígido, translações e rotações, não provocam deformação. O estado de deformação em torno de um ponto caracteriza-se através de **extensões e distorções**.

Considere-se a configuração inicial e a final de um corpo, como está ilustrado na figura 3.7 (por simplicidade o corpo é plano). Em torno do ponto P traçam-se dois segmentos de recta, PQ e PR, paralelos aos eixos coordenados. Na configuração final os pontos P, Q e R passam a ocupar as posições P', Q' e R', respectivamente.

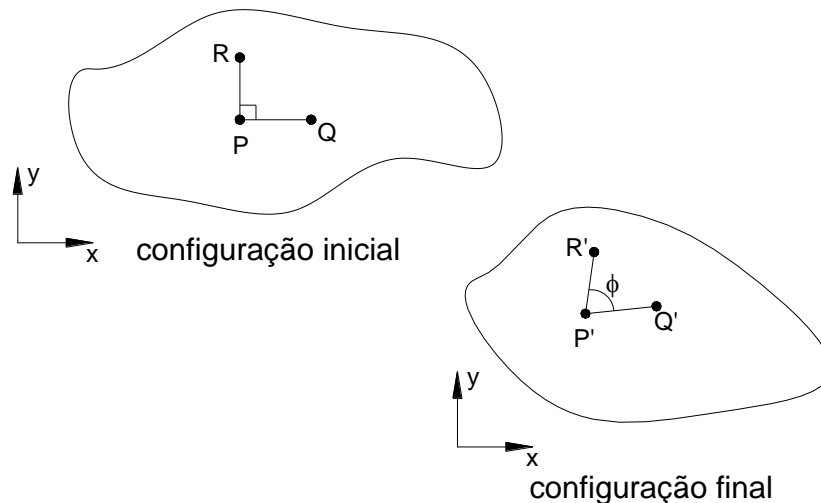


Figura 3.7 –Deformação de um corpo

A **extensão linear** é o quociente da variação de comprimento de um segmento elementar pelo comprimento inicial desse segmento, isto é, a variação de comprimento por unidade de comprimento. A extensão é uma grandeza adimensional, sendo positiva se o comprimento aumenta e negativa caso contrário. No exemplo da figura 3.7 as fibras PQ e PR sofrem extensões lineares  $e_x$  e  $e_y$  definidas por,

$$e_x = \frac{P'Q' - PQ}{PQ} \quad ; \quad e_y = \frac{P'R' - PR}{PR}$$

Por sua vez a distorção é a variação do ângulo formado por duas direcções ortogonais definidas num ponto do corpo. No exemplo da figura 3.7 a distorção é,

$$\gamma_{xy} = \frac{\pi}{2} - \phi$$

A distorção é positiva quando o ângulo definido pelas duas fibras, na configuração final, é menor que o ângulo recto. Verifica-se também que  $\gamma_{xy} = \gamma_{yx}$ .

Num ponto o estado de deformação é definido por várias componentes. Essas várias deformações definem o tensor das deformações que tal como o tensor das tensões é simétrico:

$$\begin{array}{l} \varepsilon_{xx} \quad ; \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \gamma_{xy} \quad ; \quad \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \varepsilon_{yy} \quad ; \quad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \varepsilon_{zz} \end{array}$$

com  $\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx}$  ;  $\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx}$  ;  $\varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy}$  .

Como se constatou as deformações dependem dos deslocamentos. Particularizando, para pequenos deslocamentos as deformações são dadas por,

$$\begin{array}{l} \varepsilon_{xx} = \frac{\Delta u}{\Delta x} \quad ; \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\Delta v}{\Delta y} \quad ; \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\Delta w}{\Delta z} \\ \gamma_{xy} = \frac{\Delta u}{\Delta y} + \frac{\Delta v}{\Delta x} \quad ; \quad \gamma_{xz} = \frac{\Delta u}{\Delta z} + \frac{\Delta w}{\Delta x} \quad ; \quad \gamma_{yz} = \frac{\Delta v}{\Delta z} + \frac{\Delta w}{\Delta y} \end{array}$$

em que u, v e w representam os deslocamentos segundo os eixos ortogonais x, y e z, respectivamente.

### 3.1.5 Elasticidade e plasticidade

O comportamento mecânico dos materiais é em geral bastante complexo. Na prática é usual adoptarem-se modelos simplificados que relacionam as deformações com as tensões em cada ponto.

A maioria dos materiais apresentam um comportamento elástico e plástico, sendo que os gráficos de força vs deslocamento ( $\delta$ ) ou de tensão vs deformação permitem compreender sobre o comportamento mecânico dos materiais. Deste modo, considere-se que se aplica uma carga  $F$  crescente (de zero até um determinado valor) e em seguida deixa-se de aplicar a referida carga. Se ao mesmo tempo forem medidos os deslocamentos é possível fazer os gráficos da figura 3.8.

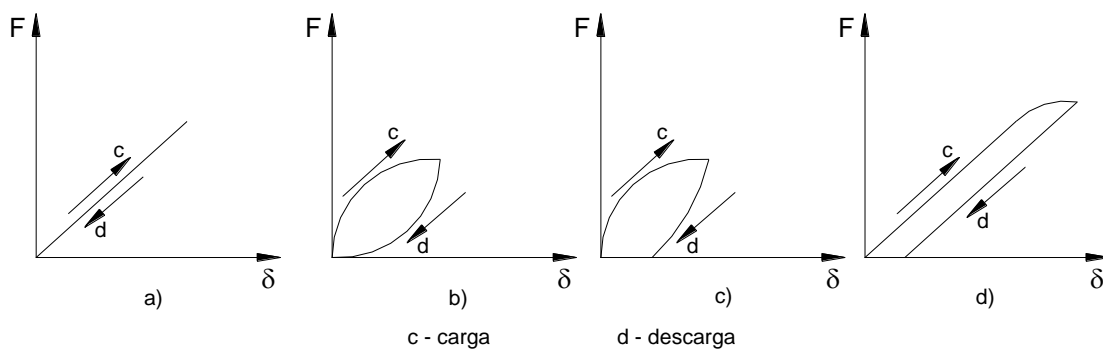


Figura 3.8 – Elasticidade e plasticidade

Na figura 3.8, o gráfico a) representa um comportamento elástico que se caracteriza pela recuperação instantânea da configuração inicial.

No gráfico b) o comportamento também é elástico mas com atrito interno, isto porque a recuperação total da configuração inicial é feita com dissipação de energia, conhecido como fenómeno de histerese.

No gráfico c) está representado um comportamento plástico. Após a descarga há uma deformação residual permanente.

No gráfico d) há um comportamento inicial linear elástico que passa a plástico a partir de um determinado valor de carga  $P$ . Se o material é descarregado em regime plástico a linha de recuperação é paralela à linha do comportamento linear elástico inicial.

No largo universo dos materiais alguns são classificados como frágeis e outros são dúcteis. Os materiais dúcteis são capazes de suportar grande deformação plástica antes da rotura. Os materiais frágeis atingem a rotura após uma muito pequena deformação plástica.

### 3.1.6 Ensaio de tracção

Uma forma de caracterizar os materiais é realizando um ensaio de tracção. Os ensaios são normalizados e realizam-se em **provete** (figura 3.9) de secção circular ou em chapa. Admite-se que o material do provete é isotrópico (tem as mesmas propriedades em todas as direcções) e homogéneo (tem as mesmas propriedades em todos os pontos). Refira-se que os materiais metálicos são, de um modo geral, homogéneos e isotrópicos.

Num ensaio de tracção coloca-se o provete preso nas duas extremidades as quais são afastadas simultaneamente a velocidade controlada. As máquinas de ensaio de tracção têm um dispositivo que traça o diagrama força vs deslocamento automaticamente. No entanto este gráfico para além das propriedades do material também depende das dimensões do provete. O diagrama de tensão ( $\sigma$ ) vs deformação ( $\epsilon$ ) tem a vantagem de depender apenas das propriedades do material, sendo que

$$\sigma = \frac{F}{A_0} \quad ; \quad \epsilon = \frac{\Delta L}{L_0}$$

em que  $F$  é a força aplicada,  $A_0$  a área inicial da secção transversal do provete,  $\Delta L$  a variação de comprimento do provete e  $L_0$  o comprimento inicial também do provete.

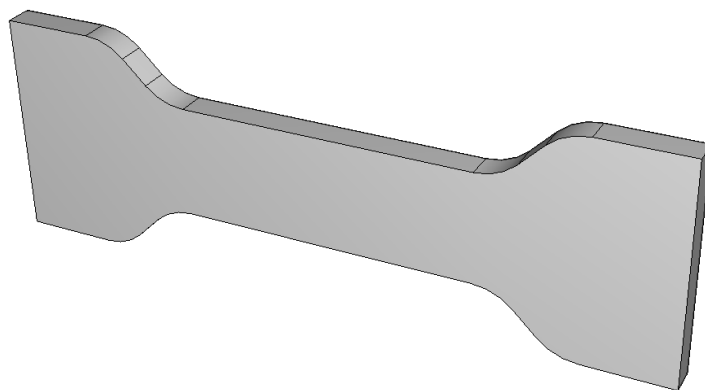


Figura 3.9 – Exemplo de provete para ensaio de tracção

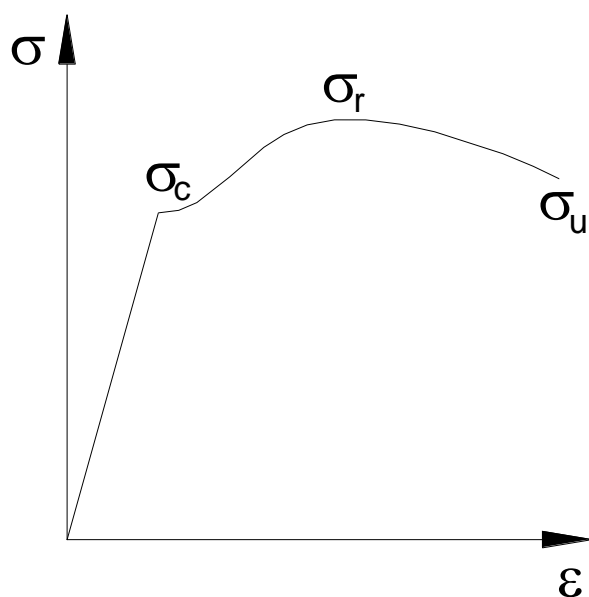


Figura 3.10 –Exemplo de diagrama de um ensaio de tracção

Na figura 3.10 é representado um diagrama típico de um material dúctil. No início o material tem um comportamento linear elástico, até atingir a tensão de cedência ( $\sigma_c$ ). A partir desse ponto o material entra em regime plástico e a tensão continua a subir até atingir a tensão de rotura ( $\sigma_r$ ). No entanto a rotura do provete não ocorre nesta fase. Este nome justifica-se porque este valor de tensão coincide com a rotura dos materiais frágeis. Após a tensão de rotura ocorre a **estricção** em que a deformação deixa de ser uniforme ao longo do provete, concentrando-se numa só zona, designada por zona de estricção. Finalmente o provete rompe pela secção mais reduzida da zona de estricção, sendo que a este ponto está associada a tensão última ( $\sigma_u$ ). Durante a estricção a tensão decresce o que constitui um fenómeno de instabilidade, uma vez que o deslocamento aumenta mesmo com a força a decrescer.

### 3.1.7 Lei de Hooke

Como se observou no diagrama tensão vs deformação da figura 3.10, no regime elástico existe uma proporção directa entre tensão e deformação. A lei de proporcionalidade designa-se por lei de Hooke,

$$\sigma = E\varepsilon$$

em que E é o coeficiente de proporcionalidade conhecido por módulo de elasticidade ou módulo de Hooke. No regime elástico o aumento da força provoca um aumento do

comprimento e uma diminuição da área da secção transversal. Poisson descobriu que a relação entre a deformação axial ( $\epsilon_x$  – segundo o comprimento) e a deformação transversal ( $\epsilon_y$  – segundo a dimensão da área transversal) é constante. O coeficiente de Poisson é,

$$\nu = -\frac{\epsilon_{yy}}{\epsilon_{xx}}$$

Observe-se que  $\epsilon_{xx}$  e  $\epsilon_{yy}$  têm sempre sinais diferentes, o que justifica o sinal negativo na expressão anterior.

A lei de Hooke apresentada em cima é aplicável apenas em situações de tensão uniaxial (forças aplicadas apenas segundo um dos eixos). Para carregamentos mais complexos é necessário aplicar a lei de Hooke generalizada,

$$\begin{aligned}\epsilon_{xx} &= \frac{\sigma_{xx}}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{zz}) \\ \epsilon_{yy} &= \frac{\sigma_{yy}}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{zz}) \\ \epsilon_{zz} &= \frac{\sigma_{zz}}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \gamma_{xz} &= \frac{\tau_{xz}}{G} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G}\end{aligned}$$

em que  $G$  é o módulo de elasticidade transversal,

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

| Material               | E (GPa) | $\nu$ |
|------------------------|---------|-------|
| Aço estrutural         | 200-210 | 0.30  |
| Ferro fundido cinzento | 69      | 0.23  |
| Ferro fundido maleável | 165     | 0.27  |
| Alumínio               | 70-75   | 0.33  |
| Titânio                | 115     | 0.30  |

Tabela 3.1 – Propriedades de alguns materiais isotrópicos

Além dos materiais isotrópicos considerados neste capítulo existem os materiais anisotrópicos e os ortotrópicos:

- **Isotrópicos** – as propriedades são iguais em todas as direcções (2 constantes independentes);
- **Ortotrópicos** – existem, pelo menos, 2 planos ortogonais de simetria, em que as propriedades são independentes em cada um dos planos (9 constantes independentes);
- **Anisotrópicos** – as propriedades variam segundo as várias direcções (21 constantes independentes).

### 3.1.8 Energia de deformação

No regime elástico o material recupera a sua forma inicial quando se retira a carga. Isto significa que o trabalho realizado pelas forças exteriores durante o regime elástico é totalmente acumulado no corpo sob a forma de energia de deformação interna (energia de deformação ou energia potencial elástica). A densidade de energia de deformação é a área sob o diagrama tensão vs deformação (figura 3.11),

$$W = \int_0^{\epsilon} \sigma \, d\epsilon = \frac{1}{2} \sigma \epsilon$$

A energia de deformação é a soma das densidade de energia de deformação dos vários elementos de volume,

$$U = \int_V W \, dV$$

em que  $V$  é o volume do corpo.

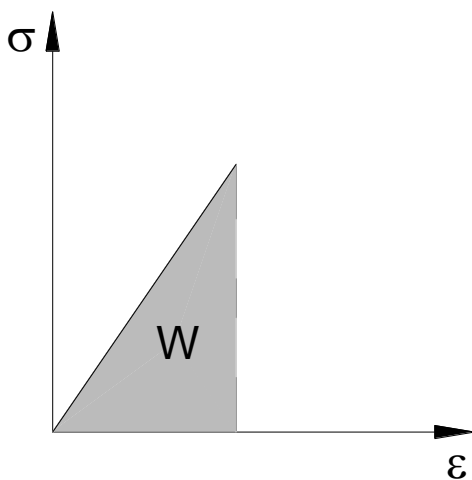


Figura 3.11 –Densidade da energia de deformação

## 3.2 Fluidos

### 3.2.1 Pressão e força de impulsão

Os líquidos exercem forças sobre as paredes do recipiente que os contêm e sobre qualquer superfície de um corpo mergulhado total ou parcialmente. Essa força tem, em cada ponto, a direcção perpendicular à superfície. A **pressão** é a quantidade de força exercida sobre uma unidade de área.

$$P = \frac{F}{A}$$

A unidade SI da pressão é o **pascal** (Pa). Os instrumentos que servem para medir a pressão de um líquido (ou gás) chamam-se manómetros.

Se a superfície que contem um ponto A for infinitamente pequena a pressão exercida denomina-se por **pressão no ponto A**.

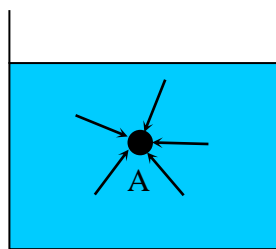


Figura 3.12 – Pressão no ponto A

### Lei fundamental da Hidrostática

dois pontos no interior de um líquido em repouso é igual ao peso da coluna cilíndrica de líquido com base igual à unidade e altura igual à diferença de nível entre os pontos:

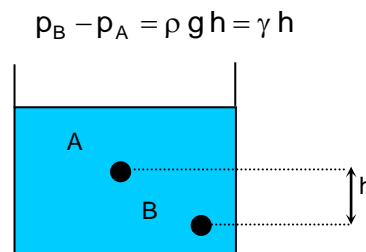


Figura 3.13 – A diferença de pressão entre A e B depende da diferença de nível h

sendo  $\rho$  a massa volúmica do fluido,  $\gamma$  o peso volúmico do fluido,  $g$  a aceleração da gravidade e  $h$  a diferença de altura.

A partir desta lei pode-se concluir:

- Todos os pontos ao mesmo nível estão submetidos a igual pressão.
- A pressão no interior de um líquido aumenta com a profundidade.
- A superfície livre é horizontal pois todos os seus pontos se encontram à mesma pressão (pressão atmosférica).

### Princípio de Pascal

Se a pressão num ponto de um líquido (ou gás), colocado num recipiente fechado, é alterada por uma força exterior aplicada, então a pressão em qualquer outro ponto do líquido sofre a mesma alteração.

### Exemplo:

Uma prensa hidráulica é um sistema de vasos comunicantes.

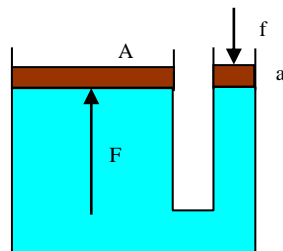


Figura 3.14 –Prensa hidráulica

Pelo Princípio de Pascal tem-se

$$p = \frac{F}{A} = \frac{f}{a}$$

### Princípio de Arquimedes

Um corpo colocado num líquido desloca parte desse líquido sendo impulsionado por este de baixo para cima por uma força, **força de impulsão**, que é a resultante das forças hidrostáticas que actuam sobre o corpo.

O Princípio de Arquimedes estabelece que: todo o corpo mergulhado num líquido recebe da parte deste uma impulsão vertical, dirigida de baixo para cima, igual ao peso do volume de líquido deslocado.

### Exemplo

Quando tentamos flutuar com as pernas na horizontal notamos que estas têm tendência a caírem, ou todo o corpo tem tendência a rodar de forma a ficar numa posição mais vertical. Isto deve-se ao facto da força de impulsão actuar sobre o centro de volume do corpo, enquanto a força de gravidade actua através do centro de gravidade. Não sendo as forças de impulsão e de gravidade colineares, as condições de equilíbrio não são preenchidas quando se tenta manter as pernas na horizontal, porque a força de impulsão e a força de gravidade criam um momento que não é nulo. Como o momento resultante não é igual a zero, a rotação ocorre até que essas forças se alinhem e o momento seja nulo. Deste modo, na natação, os nadadores têm que contrariar esta posição natural.

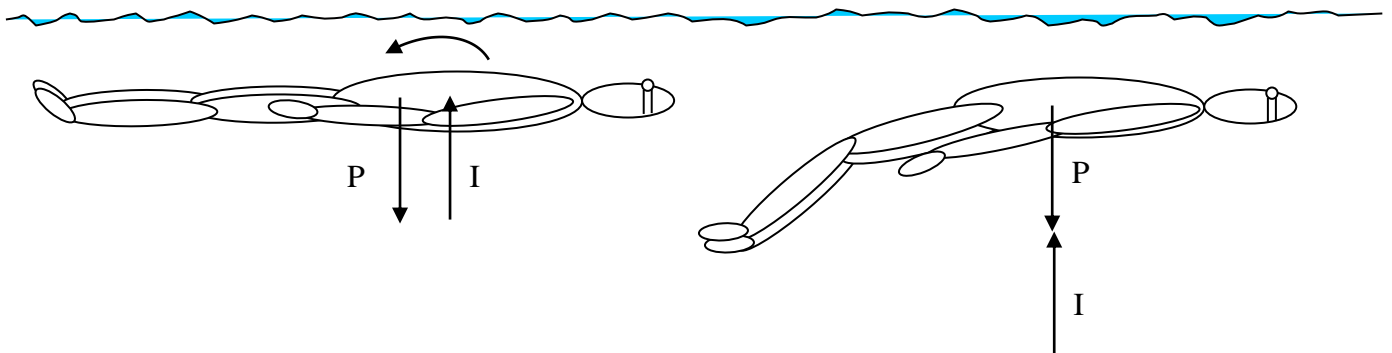


Figura 3.15 –Força de impulsão num nadador a boiar

### 3.2.2 Força dinâmica de um fluido

A **força dinâmica** que resulta do movimento dentro de um fluido é proporcional densidade do fluido, à área da superfície do objecto imerso no fluido e ao quadrado da velocidade:

$$F \approx \rho A v^2$$

Decompõe-se em duas componentes: a **força de resistência** e a **força de sustentação**.

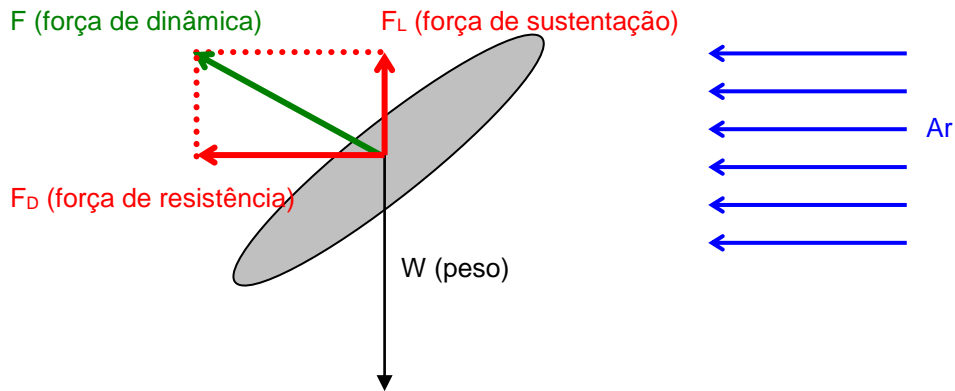


Figura 3.16 – Decomposição da força dinâmica

### Força de resistência

A força de resistência  $F_D$  é a componente da força dinâmica do fluido que actua em oposição ao movimento relativo do objecto em relação ao fluido. É definida pela equação

$$F_D \approx C_D \rho A v^2$$

onde

$C_D$  → coeficiente de resistência

$A$  → área transversal do objecto

$\rho$  → massa volúmica do fluido

$v$  → velocidade relativa do objecto

São produzidas por dois meios diferentes: **resistência de superfície** e **resistência de forma**.

### Resistência de superfície

Superfícies mais ásperas aumentam a resistência de superfície.

A resistência de superfície predomina nas velocidades menores.

## Resistência de forma

A turbulência aumenta a resistência de forma. A resistência de forma predomina nas grandes velocidades.

Para reduzir a resistência de forma, a superfície, para além lisa, deve ser levemente curvada alongando-se na direcção do fluxo de modo a preencher o espaço vazio criado pelo fluxo turbulento.

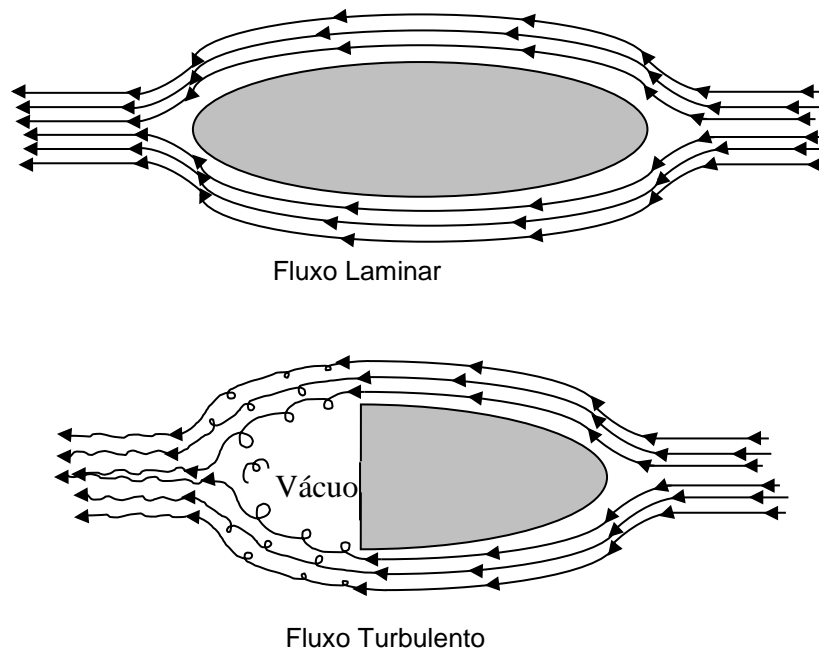


Figura 3.17 –Fluxo laminar e turbulento

## Força de sustentação

A força de sustentação  $F_L$  é a componente da força dinâmica do fluido que actua perpendicularmente ao movimento relativo do objecto em relação ao fluido.

É definida pela equação

$$F_L \approx C_L \rho A v^2$$

onde

$C_L$  → coeficiente de resistência

$A$  → área transversal do objecto

$\rho$  → massa volúmica do fluido

$v$  → velocidade relativa do objecto

A força de sustentação pode ser incrementada aumentando a velocidade (aparelhos motorizados) e modificando o formato e a orientação, logo a área frontal, dos objectos dos atletas.

Em todas as situações onde a força de sustentação é usada, o fluido é forçado a fluir mais rápido acima da superfície do que abaixo sendo então a pressão em cima inferior à de baixo. Os nadadores executam um movimento sinuoso para trás através da água para gerar forças de sustentação e também forças de resistência propulsivas.

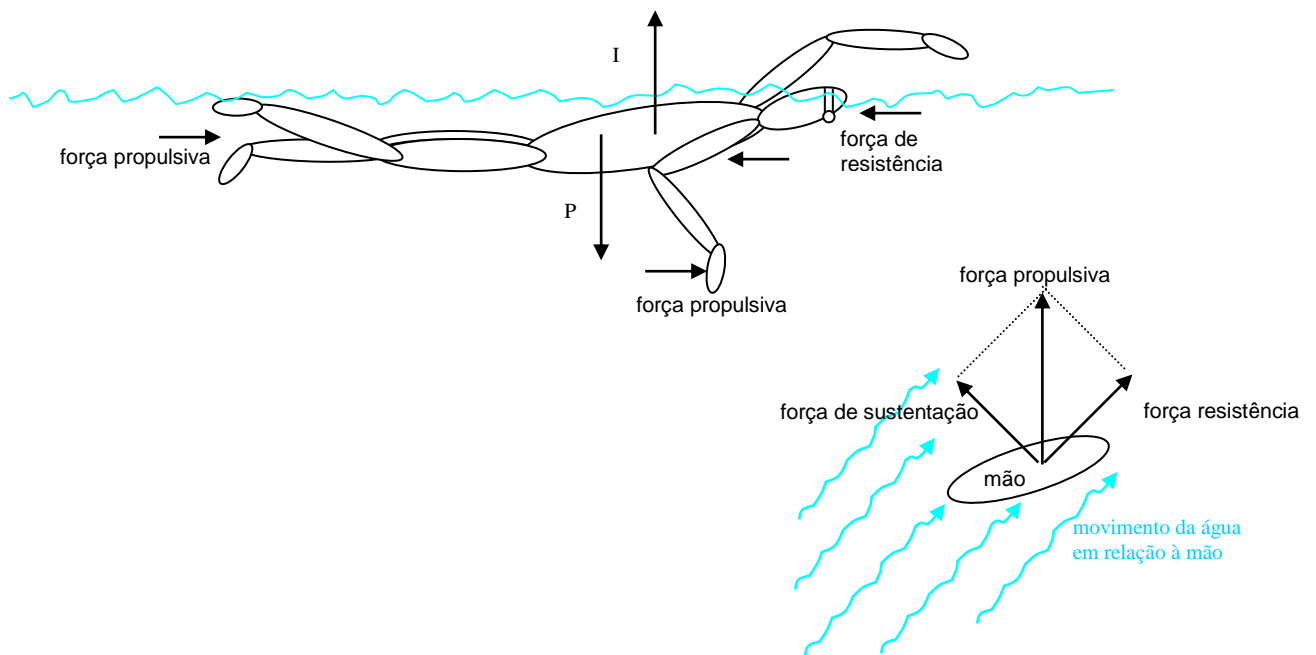


Figura 3.18 – Força de sustentação e de resistência gerando propulsão

### 3.2.3 Conservação do caudal

Em tubos, o volume de um fluido incompressível, que atravessa qualquer secção transversal, durante um certo intervalo de tempo (**caudal volúmico**), é constante:

$$Q = cte \Leftrightarrow Av = aV$$

onde Q é o caudal, A e a as áreas das secções transversais e v e V as respectivas velocidades do escoamento.

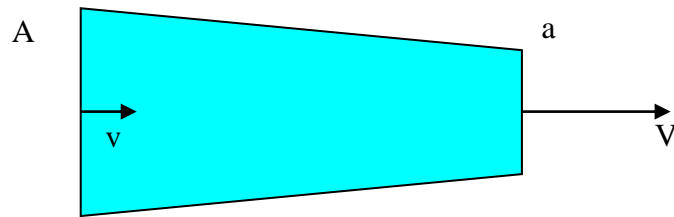


Figura 3.19 – O caudal é constante em qualquer secção do tubo

Note que a redução da secção transversal do tubo implica um aumento da velocidade do escoamento.

### 3.2.4 Princípio de Bernoulli

Daniel Bernoulli estudou o movimento de fluidos tendo descoberto, em 1738, que os fluidos de movimento mais rápido exercem menos pressão do que os fluidos em movimento mais lento (Princípio de Bernoulli).

No caso de um fluido incompressível, em regime permanente, e onde as forças de atrito são desprezáveis resulta do princípio da conservação de energia:

$$mgh + pV + \frac{1}{2}mv^2 = \text{cte} \Leftrightarrow h + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} = \text{cte}$$

onde

$m$  → massa de algum volume  $V$  do fluido

$g$  → aceleração da gravidade

$h$  → elevação do volume  $V$  do fluido

$v$  → velocidade do escoamento

$\gamma$  → peso volúmico do fluido

Note que  $mgh$  dá a energia potencial gravítica,  $pV$  dá o trabalho realizado pelas forças de pressão e  $\frac{1}{2}mv^2$  dá a energia cinética.

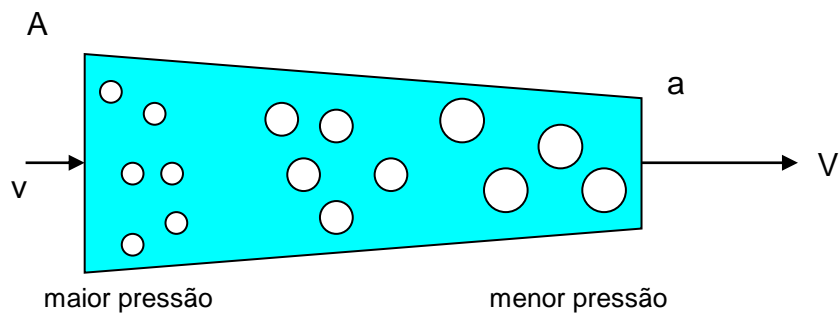


Figura 3.20 – Menor/menor velocidade maior/menor pressão

No caso do escoamento do sangue nas veias importa referir que o Princípio de Bernoulli não é válido tal como expresso na equação anterior. A existência de atrito faz com que a energia total diminua fazendo com que a velocidade diminua também, deixando o sangue de fluir, a menos que haja uma bomba que reponha os níveis energéticos. Essa bomba chama-se **coração!**

## Bibliografia

- Branco, C. Moura; *Mecânica dos materiais*; Fundação Calouste Gulbenkian, 1998.
- Fung, Y.C.; *Biomechanics: mechanical properties of living tissues*; Springer, 1993.
- Kreighbaum, Ellen e Barthels, Katharine M.; *Biomechanics: a qualitative approach for studying human movement*; Allyn and Bacon, 1996.
- McGinnis, Peter M.; *Biomecânica do esporte e exercício*, Artmed, 2002
- Martin, Bruce R.; Burr, David B. e Sharkey, Neil A.; *Skeletal tissue mechanics*; Springer, 1998.
- Nordin, Margareta e Frankel, Victor H.; *Basic biomechanics of the musculoskeletal system*; Lippincott Williams & Wilkins, 2001.
- Portela, Artur e Silva, Arlindo; *Mecânica dos materiais*, Plátano Editora, 1996.
- Winter, David A.: *Biomechanics and Motor Control of Human Movement*