

A aprendizagem do Teorema de Pitágoras com recurso ao  
GeoGebra – Um estudo de caso com alunos do curso  
Vocacional

Relatório de projeto

Sandra Maria Silva Reis Pedro

Trabalho realizado sob a orientação de

Filipe Alexandre Silva Santos, IPL

Leiria, março 2019

Sandra Pedro

ESCOLA SUPERIOR DE EDUCAÇÃO E CIÊNCIAS SOCIAIS

INSTITUTO POLITÉCNICO DE LEIRIA

## AGRADECIMENTOS

Para a realização deste projeto foi determinante o contributo de várias pessoas a quem gostaria de agradecer e, em particular:

Ao meu orientador, Professor Doutor Filipe Alexandre Silva Santos, pelo constante apoio na orientação com preciosas sugestões e comentários, pela sua constante disponibilidade e incentivo durante a realização deste projeto.

À Direção do Agrupamento de escolas de Figueiró dos Vinhos, que se encontrava em funções no ano letivo de 2016/2017, em especial à Diretora, Fernanda Dias, pelo apoio demonstrado na implementação e realização deste projeto.

Aos meus alunos, que sempre se mostraram disponíveis e motivados em colaborar na concretização deste projeto.

Ao José Paulo, pelo apoio incondicional e incentivo fulcral para chegar até aqui.

## RESUMO

Os Cursos Vocacionais são uma oferta educativa que surge tendo como principal objetivo promover a redução do abandono escolar precoce e o sucesso escolar. Seguindo as indicações da tutela, a escola inclusiva, é aquela onde todos os alunos devem encontrar respostas que possibilitam a aquisição de um nível de educação e formação facilitadoras da sua plena inclusão social e, para que isso aconteça deve esta instituição reconhecer a diversidade dos seus alunos, encontrando formas de lidar com essa diferença, adequando os processos de ensino – aprendizagem às características de cada aluno, utilizando os meios necessários para que todos aprendam. Assim, os professores devem desenvolver as metodologias e estratégias facilitadoras do processo ensino-aprendizagem dos seus alunos.

As dificuldades dos alunos são potenciadas quando a ausência de determinados conhecimentos os impede de aprender novos conteúdos. Nessa perspetiva, questiona-se a possibilidade dessas dificuldades serem ultrapassadas quando se recorre à utilização das TIC no processo ensino-aprendizagem. Em particular, este estudo questiona se é possível ultrapassar essa ausência de conhecimentos quando se estuda o Teorema de Pitágoras com recurso ao software de geometria dinâmica – GeoGebra.

O GeoGebra é um software que apresenta três zonas, a algébrica, a gráfica e a folha de cálculo, interligadas dinamicamente, o que possibilita o aluno visualizar, conjecturar, validar e compreender os conceitos e propriedades de uma forma interativa e atrativa.

Este estudo integra uma investigação sobre a própria prática profissional, seguindo uma abordagem qualitativa e interpretativa. A recolha de dados foi realizada numa turma do 2ºano de um Curso Vocacional do Ensino Básico.

A análise dos dados recolhidos sugere que o uso do SGD-GeoGebra potencia, nos alunos, a capacidade de formular conjecturas que levam a uma aprendizagem significativa e assim, permite que estes aprendam o Teorema de Pitágoras, mesmo quando apresentam ausência de pré-requisitos. A generalidade dos alunos manifestou também opinião

favorável à realização de atividades com recurso ao GeoGebra, na aprendizagem do Teorema de Pitágoras.

### **Palavras chave**

Aprendizagem Significativa, Curso Vocacional, Software de Geometria Dinâmica, Teorema de Pitágoras

## ABSTRACT

Vocational courses are an educational offer aiming at promoting the reduction of early school dropout and, thus, increasing school success. According to instructions provided by the authorities, the inclusive school is the one in which all students should find a way out that allows them acquiring an education level and training that enables their full social inclusion. Therefore, the school should acknowledge the diversity of its students, find ways of coping with the difference, adapt the teaching-learning process to the needs of each and every student, and use all strategies needed so as to allow all students to learn. Hence, teachers should develop methodologies and strategies that ease the teaching-learning process of their students.

Difficulties shown by students are boosted when the lack of certain knowledges prevents them from learning new content. In this context, the possibility of overcoming these difficulties when using ICT in the teaching-learning process is considered. This study's intends, particularly, to verify whether it is possible that students can overcome the lack of prerequisites when studying the Pythagorean Theorem by using the dynamic geometry software resource- "*GeoGebra*".

"GeoGebra" is a software that exhibits three areas, the algebraic, the graphical and the spreadsheet, all dynamically interconnected. Thus, it allows the student to envision, infer, validate and understand the principles and properties in an attractive and interactive way.

This study is part of a research about the professional practice, following a qualitative and interpretative approach. Data collection was done in a 2<sup>nd</sup> year class of a vocational course of middle school.

Data analysis suggests that using "SGD – *GeoGebra*" enhances in students the ability to draft suppositions leading to a meaningful learning, allowing them to learn the Pythagorean Theorem, even when they lack prerequisites. Most students expressed an approving opinion to using "SGD – *GeoGebra*" when learning the Pythagorean Theorem.

## **Keywords**

Meaningful learning, vocational course, Dynamic Geometry Software, the Pythagorean Theorem

# ÍNDICE GERAL

Agradecimentos .....	ii
Resumo .....	iii
Abstract .....	v
Índice Geral .....	vii
Índice de Figuras .....	x
Índice de Tabelas .....	xi
Índice de Gráficos .....	xii
Abreviaturas .....	xiii
CAPÍTULO I - Introdução .....	1
1. Contexto e definição do problema .....	1
2. Objetivos e questão de investigação.....	2
3. Estrutura da investigação .....	3
CAPÍTULO II - Enquadramento Teórico .....	4
1. Os cursos Vocacionais.....	4
1.1. Inclusão.....	5
2. O Teorema de Pitágoras .....	8
3. Ambientes de Geometria Dinâmica .....	11
3.1 GeoGebra .....	13
4. Ensino Exploratório.....	15
4.1. Tarefas .....	16
5. Teorias de Aprendizagem .....	17
5.1. Aprendizagem Significativa.....	17
CAPÍTULO III - PROJETO DE INTERVENÇÃO .....	22
1. Tarefas de investigação .....	23

2. Estratégia pedagógica.....	23
3. Perceção relativa ao uso do GeoGebra.....	29
CAPÍTULO IV – Metodologia.....	30
1. Opções metodológicas.....	30
1.1. Paradigma de investigação .....	30
1.2. Tipo de estudo.....	31
2. Técnicas de recolha de dados.....	31
2.1. Registo de vídeo.....	32
2.2. Produções dos alunos .....	32
2.3. Inquérito.....	33
3. Tratamento de dados .....	34
4. Ética.....	36
CAPÍTULO V - Apresentação e discussão de resultados.....	37
1. Resultados para o Objetivo 1 .....	37
1.1. Conjetura e verifica o Teorema de Pitágoras utilizando o GeoGebra.....	37
2. Resultados para o Objetivo 2.....	50
2.1. Aplica o Teorema de Pitágoras na resolução de problemas. ....	50
3. Resultados para o Objetivo 3.....	53
3.1. Conhecer a perceção dos alunos sobre a utilização do GeoGebra no desenvolvimento de competências. ....	53
Capítulo VI – Conclusões .....	62
1. Conclusões do estudo .....	62
2. Limitações do estudo.....	66
3. Trabalho futuro .....	67
Bibliografia.....	68
Anexos.....	1
Anexo 1 – Ficha número1 .....	2

Anexo 2 – Ficha número 2 .....	5
Anexo 3 – Ficha número 3 .....	6
Anexo 4– Ficha número 4 .....	8
Anexo 5 – Plano de aula 1 .....	10
Anexo 6 – Plano de aula 2.....	11
Anexo 6 – Plano de aula 3.....	13
Anexo 8 – Plano de aula 4.....	15
Anexo 9- Construções no GeoGebra.....	17
Anexo 10- Excertos das resoluções dos alunos (Conjeturar e verificar o Teorema de Pitágoras).....	20
Anexo 11- Apresentações orais das conjeturas realizadas e verificação do Teorema de Pitágoras. ....	24
Anexo 12- Apresentações orais da demonstração geométrica do Teorema de Pitágoras. ....	28
Anexo 13- Resolução dos alunos da Demonstração algébrica do Teorema de Pitágoras. ....	31
Anexo 14 - Excertos das resoluções dos alunos (aplicar o Teorema de Pitágoras na resolução de problemas).....	33
Anexo 15 – Inquérito .....	40
Anexo 16 – Autorização do Conselho Pedagógico para realização do estudo.....	42
Anexo 17 – Autorização dos Encarregados de Educação para realização do estudo .	43

## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1- Demonstração original do Teorema de Pitágoras.....	9
Figura 2 - Janela principal do GeoGebra .....	13
Figura 3 - Relação entre os diversos tipos de tarefas em termos de desafio e abertura..	16
Figura 4 - A aprendizagem mecânica ou significativa – a aprendizagem por recepção ou por descoberta (Novak e Gowin 1999, adaptada).....	19
Figura 5- Resolução do exercício 1.4- Ficha nº2 - Par 3 .....	43
Figura 6- Resolução do exercício 1.6- Ficha nº2- Par 1 .....	44
Figura 7- Resolução do exercício 2 - Ficha nº2 - Par 1.....	44
Figura 8- Resolução do exercício 2 - Ficha nº2 - Par 3.....	45
Figura 9 – Resolução do Exercício 3 - Ficha nº2 - Par 1.....	45

## ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 1 – Fichas implementadas e calendarização .....	25
Tabela 2 - Objetivos de Investigação e Instrumentos de recolha de dados.....	33
Tabela 3 - Categorias, subcategorias e instrumentos de recolha .....	34
Tabela 4- Categorias, subcategorias e Indicadores .....	34
Tabela 5 - Registo de Vídeo da resolução da ficha nº2 (excerto) .....	38
Tabela 6 - Resultados obtidos nas apresentações orais sobre Conjetura e verificação do Teorema de Pitágoras .....	40
Tabela 7 – Síntese dos resultados obtidos nas apresentações orais .....	42
Tabela 8 - síntese dos resultados obtidos nas construções geométricas .....	43
Tabela 9 – Resultados obtidos nas apresentações orais sobre a demonstração geométrica do Teorema de Pitágoras.....	46
Tabela 10 – Síntese dos resultados obtidos nas apresentações orais sobre a demonstração geométrica do Teorema de Pitágoras.....	48
Tabela 11 – Síntese dos resultados obtidos na demonstração algébrica do Teorema de Pitágoras.....	49
Tabela 12 – Síntese do registo de vídeo sobre aplicação do Teorema de Pitágoras na resolução de problemas.....	50

## ÍNDICE DE GRÁFICOS

Gráfico 1 - Motivação para a aprendizagem com a utilização do GeoGebra.....	54
Gráfico 2 - Atenção à aula com utilização do GeoGebra .....	54
Gráfico 3 - interesse pela disciplina com utilização do GeoGebra .....	55
Gráfico 4 - Envolvimento nas tarefas propostas com utilização do GeoGebra.....	55
Gráfico 5 - Desinibição perante a aprendizagem com utilização do GeoGebra.....	56
Gráfico 6 - Tomada de decisões mais facilmente com utilização do GeoGebra .....	56
Gráfico 7 - Maior autonomia na aprendizagem com utilização do GeoGebra .....	57
Gráfico 8 - confiança nas suas capacidades com utilização do GeoGebra .....	57
Gráfico 9 - Gosto por colocar questões com utilização do GeoGebra.....	58
Gráfico 10 - Facilidade na interpretação dos conceitos com a utilização do GeoGebra	58
Gráfico 11 - Esforço para realizar melhor as tarefas propostas na aula com a utilização do GeoGebra .....	59
Gráfico 12 - Realização das tarefas propostas com mais prazer com a utilização do GeoGebra .....	59
Gráfico 13 - Gostar mais das aulas de GeoGebra do que das outras .....	60
Gráfico 14 - No próximo ano gostaria de voltar a realizar tarefas com GeoGebra, nas aulas de Matemática.....	60

## ABREVIATURAS

AGD- Ambiente de Geometria Dinâmica

NCTM- National Council of Teachers of Mathematics

SGD - Software de geometria dinâmica

ZDP- Zona Desenvolvimento Proximal

# CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO

## 1. CONTEXTO E DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

Lecionei Matemática a uma turma do segundo ano de um curso Vocacional do 3º ciclo. Os alunos que frequentam esta turma foram encaminhados para esta oferta educativa, após um processo de avaliação, por apresentarem insucesso repetido nos seus percursos escolares e, regra geral, serem alunos desmotivados, desinteressados pelas atividades escolares e com problemas de comportamento. A motivação aproxima o sucesso e o sucesso fortalece a motivação (Vasconcelos, 2015) e a indisciplina é o resultado da desmotivação dos alunos para a aprendizagem (Estanqueiro, 2010).

No entanto, não é suficiente a tutela legislar no sentido de criar percursos educativos alternativos, também existe a necessidade de o professor adaptar as práticas pedagógicas de acordo com as características, necessidades e interesses dos alunos (César, Machado & Ventura, 2014), o ajustamento dos métodos de ensino à diversidade dos alunos e ao conhecimento que detêm é coadjuvante da motivação (Ramos, 2009).

Na disciplina de matemática, muitas vezes, os problemas atrás descritos são potenciados pelo facto de se tratar de uma disciplina de conhecimentos cumulativos em que a ausência de pré-requisitos compromete a aprendizagem de novos conteúdos.

Especificamente na aprendizagem do Teorema de Pitágoras os alunos necessitam, de pré-requisitos de Geometria e Álgebra. Um aluno pode compreender o Teorema de Pitágoras e não ser capaz de o utilizar/aplicar, nas diferentes situações práticas, por não possuir os conhecimentos necessários de álgebra.

Em relação às minhas práticas tenho verificado que a utilização de softwares de Geometria Dinâmica, nomeadamente o GeoGebra, têm mostrado aumentar a atenção destes alunos quando comparados com a mesma abordagem de papel e lápis. Além disso, sabe-se que este tipo de softwares facilita a resolução de problemas e a formulação de conjeturas, ultrapassando os cálculos de rotina que, em muitas situações, não constituem objetivo principal de aprendizagem.

Contudo, sou levada a crer que:

- o aluno pode compreender e aplicar o teorema de Pitágoras com recurso ao GeoGebra, ainda que revele ausência de pré-requisitos de álgebra, e assim pode ter sucesso à disciplina e conseqüentemente, em teoria, ficar mais motivado. Isto porque o aluno pode explorar inúmeras situações e formular conjecturas que se recorresse apenas ao papel e lápis seria difícil, por uma questão de tempo.

A escolha do software de geometria dinâmica “GeoGebra” prende-se com o facto de este programa permitir manipular os objetos, depois de construídos, facilitando a aprendizagem e a formulação de conjecturas. Também é de considerar como vantagem a possibilidade de, simultaneamente, visualizar as características geométricas e algébricas de um objeto e desta forma colmatar eventuais ausências de pré-requisitos. Assim o GeoGebra é um software, gratuito, que apela à participação dos alunos potencializando a aprendizagem dos conteúdos visados.

## 2. OBJETIVOS E QUESTÃO DE INVESTIGAÇÃO

Tendo em conta o exposto no ponto anterior este estudo tem como objetivo principal: ***verificar se é possível aprender o Teorema de Pitágoras, por parte dos alunos com ausência de pré requisitos, com recurso ao GeoGebra.***

Por forma a verificar a hipótese colocada no objetivo principal pretende-se responder aos seguintes objetivos:

- Verificar se o uso do SGD – GeoGebra – potencia a formulação de conjecturas que levem a uma aprendizagem significativa.
- Verificar se com o SGD – GeoGebra- é possível aprender o Teorema de Pitágoras quando se tem a alunos com ausência de pré- requisitos necessários.
- Conhecer a opinião dos alunos relativamente à aprendizagem do Teorema de Pitágoras, com recurso ao SGD – GeoGebra.

### 3. ESTRUTURA DA INVESTIGAÇÃO

Este projeto está estruturado em sete capítulos.

**Capítulo um** é a “Introdução”, onde é feita uma contextualização do problema e é referida a pertinência do mesmo. São apresentados os objetivos.

**Capítulo dois** é o “Enquadramento Teórico”, com base na revisão da literatura e nos normativos legais é realizada uma abordagem sobre os Cursos Vocacionais, um tipo de percurso educativo alternativo. Também é feita uma pequena abordagem da importância do uso da tecnologia em contexto educativo, em particular do GeoGebra. É feita uma pequena abordagem do ensino exploratório com recurso a tarefas matemáticas, bem como o papel do professor e dos alunos. Posteriormente é feita uma abordagem à teoria de aprendizagem significativa e a sua relação com o construtivismo, construtivismo social e a importância do trabalho desenvolvido tendo por referência o conceito de zona de desenvolvimento proximal.

**Capítulo três**, “Projeto de intervenção” são descritos os procedimentos do estudo, as estratégias a desenvolver com os alunos, os recursos utilizados,

**Capítulo quatro**, “Metodologia” são apresentadas as opções metodológicas para que sustentam o estudo, são caracterizados os participantes do estudo e apresentados os instrumentos de recolha de dados.

**Capítulo cinco**, “Apresentação e discussão de resultados”, são apresentados e analisados os dados recolhidos tendo em vista o objetivo da investigação.

**Capítulo seis**, “Conclusões”, são apresentados as conclusões, algumas reflexões que apontam para certas limitações da investigação e breves recomendações para futuros estudos.

## CAPÍTULO II - ENQUADRAMENTO TEÓRICO

Nos relatórios de estágio ou de projeto poderá ser pertinente subdividir (ou criar 2 capítulos distintos) este capítulo em:

- Enquadramento contextual do estágio/relatório
- Enquadramento teórico da problemática do estágio/relatório

### 1. OS CURSOS VOCACIONAIS

A partir de 1987, a aplicação da Lei de Bases leva à criação dos primeiros programas de promoção do sucesso e combate ao abandono escolar. De 1987 a 2002, o objetivo principal das políticas educativas é o combate ao insucesso e ao abandono escolar, com vista à concretização dos 9 anos de escolaridade. Inicialmente o combate ao insucesso passou essencialmente por implementação de medidas de promoção de **apoios sociais** na escola que visavam combater as dificuldades económicas das famílias. A partir de 1995 começa a haver um maior investimento nos **processos de ensino-aprendizagem** e uma maior diversificação de oferta educativa para que o sistema educativo responda a novas procuras. Assim “A intervenção passou pela criação de novas ofertas **vocacionais** e formativas que visavam os alunos com maiores níveis de insucesso e retenção escolar, como os Cursos de Educação-Formação (CEF) e os Percursos Curriculares Alternativos (PCA)” (Álvares e Calado, 2014, p. 217). Contudo, a situação financeira e económica que o país atravessa desde o início da presente década veio condicionar estas medidas, “A conjuntura a que se assiste desde 2011, de redução do investimento público em educação e de retração dos orçamentos familiares, constitui-se como uma conjuntura crítica para as políticas de educação” (Álvares e Calado, 2014, p. 227), diminuindo a “autonomia das escolas para definirem ofertas formativas (como cursos CEF ou cursos profissionais)” (Rodrigues et. al., 2014, p. 83) e aumentando o risco de insucesso e abandono escolar. Os Cursos de Educação-Formação deixam de ser oferta educativa e são substituídos pelos Cursos Vocacionais. “As escolas da rede pública deixaram de ter condições de autonomia para definir as suas ofertas formativas, (...), recebendo

orientações para abandonar os cursos de educação e formação (...) e para adotar esta nova modalidade. (Rodrigues et. al., 2014, p. 84). Atualmente vive-se o reverso da situação, as escolas estão a terminar os projetos iniciados mas esta oferta educativa vai ser abandonada e novamente substituída pelos Cursos de Educação-Formação (CEF) reforçando a ideia de que se vive (...) um contínuo zapping político, que leva alguns teóricos a aderir momentaneamente a determinadas propostas e soluções sem se fixarem verdadeiramente a nenhuma, como se, deste modo, inovassem e, mais, se redimissem do pecado das políticas antes professadas (Estêvão, 2013, p. 78).

A massificação do ensino trouxe às escolas uma multiplicidade de indivíduos com vivências e interesses muito díspares e para os quais a escola nem sempre está preparada para fazer face a esta situação.

### *1.1. INCLUSÃO*

A escola deve acompanhar e adaptar-se às constantes alterações da sociedade criando situações de equidade e igualdade de oportunidades, assegurando a inclusão de todos no percurso escolar e garantindo a oportunidade de conclusão da escolaridade obrigatória, e embora o termo “inclusão” esteja ligado a alunos com necessidades educativas especiais é um facto que cada vez mais existem alunos que, não sendo considerados alunos com essas características, revelam problemas de aprendizagem e de comportamento que interferem nos seus percursos escolares. A escola “pretende cada vez mais inserir no seu seio todos os alunos, sejam quais forem as suas características e necessidades” (Correia, 2013, p. 7).

*A inclusão é um movimento educacional, mas também social e político que vem defender o direito de todos os indivíduos participarem, de uma forma consciente e responsável, na sociedade de que fazem parte, e de serem aceites e respeitados naquilo que os diferencia dos outros. No contexto educacional, vem, também, defender o direito de todos os alunos desenvolverem e concretizarem as suas potencialidades, bem como de apropriarem as competências que lhes permitam exercer o seu direito de cidadania, através de uma educação de qualidade, que foi talhada tendo em conta as suas necessidades, interesses e características. (Freire, S. 2008)*

Nesta linha de pensamento, surgem os cursos vocacionais que funcionaram pela primeira vez no ano letivo de 2012-13, numa experiência-piloto no ensino básico, com cursos do 2º ciclo e do 3º ciclo, num total de 15 turmas em 13 escolas públicas e privadas<sup>1</sup>, regulamentados pela Portaria n.º 292-A/2012, posteriormente revogada pela Portaria n.º 341/2015. Esta via educativa pretende completar a resposta a necessidades fundamentais dos alunos e assegurar a inclusão de todos no percurso escolar. Estes cursos pretendem garantir uma igualdade efetiva de oportunidades privilegiando tanto a aquisição de conhecimentos em disciplinas estruturantes, como o português, a matemática e o inglês, como o primeiro contato com diferentes atividades vocacionais e desta forma preparar os jovens para a vida, dotando-os de ferramentas que lhes permitam, para além de desenvolver a escolarização básica, a assimilação de regras de trabalho de equipa, o espírito de iniciativa e o sentido de responsabilidade, levando-os a adquirir conhecimentos e a desenvolver capacidades e práticas que facilitem futuramente a sua integração no mundo do trabalho. (Portaria n.º 292-A/2012).

A experiência-piloto previa a integração de alunos com mais de 13 anos que tivessem duas retenções no mesmo ciclo ou três retenções em ciclos distintos, posteriormente, em 2015, quando esta oferta formativa foi alargada a todas as escolas, passou a destinar-se a jovens com idade igual ou superior a 13 anos, que tivessem pelo menos uma retenção no seu percurso escolar ou que se encontrassem identificados como estando em risco imediato de abandono escolar.

A frequência desta via de ensino requer o acordo dos encarregados de educação e admite a permeabilidade com outras vias para prosseguimento de estudos. Os cursos que dão equivalência ao 9.º ano não conferem certificação profissional e podem ser concluídos em um ou dois anos, dependendo do nível prévio de conhecimentos dos alunos, a estrutura é constituída por três componentes, a geral com 350 horas anuais, a complementar com 180 horas anuais e a vocacional com 570 horas anuais, sendo esta última formada por disciplinas de três áreas de educação e formação, com Prática Simulada em todas as áreas e estando previstas para o efeito 210 das 570 horas. As condições e termos de funcionamento da Prática Simulada são estabelecidos em protocolo autónomo, celebrado entre a empresa ou instituição em que irá decorrer e o

---

<sup>1</sup> No ano letivo de 2013-14, esta experiência alargou-se, tendo sido criadas 495 novas turmas em 386 escolas e iniciou-se uma experiência-piloto no ensino secundário com 20 turmas em 19 escolas

agrupamento de escolas ou escola em que o curso vocacional se desenvolve. As disciplinas da componente de Formação Geral, onde se integra matemática, devem ter como referência os programas das correspondentes disciplinas das componentes do currículo do ensino Básico geral. A avaliação é feita por módulos.

Em julho de 2015 é apresentado um relatório final fruto de uma avaliação externa da experiência piloto dos cursos vocacionais onde se regista que numa perspetiva global, os professores são de opinião que os cursos vocacionais constituem uma resposta manifestamente adequada face aos alunos que os frequentam, sendo de apenas 16%, a percentagem de professores que consideram tratar-se de uma resposta inadequada. Alguns professores referem que esta oferta formativa tem como benefícios para os alunos a “redução do abandono escolar” e uma melhoria na “autoestima” dos seus alunos através da realização de trabalhos práticos, como aspetos negativos mais salientados estão a “indisciplina dos alunos” e a “falta de responsabilidade dos alunos e dos seus encarregados de educação”. Os professores também referem a grande dificuldade em trabalhar com alunos muito desmotivados e desinteressados.

Os alunos reconhecem que os cursos vocacionais têm um grau de dificuldade mediano (61,6%) e cerca de 31% consideram-no mesmo “Fácil” ou “Muito Fácil” e apontam como aspetos positivos o contributo destes cursos na perspetiva do emprego, ajudando-os a “encontrar uma profissão” (29,9%), valorizando o “contacto com as empresas” (17,2%), a sua “dimensão prática forte” (14,9%) e a “ligação ao mundo real” (13%) e como aspetos negativos, que em conjunto representam 58,2% das respostas, os aspetos comportamentais/disciplinares e aos horários dos cursos, “demasiado exigentes”.

Os pais e encarregados de educação, no geral, sentem que os seus filhos “estão mais motivados para ir à escola” (34%), que “são mais apoiados pelos professores” (19,1%) e que “aprendem melhor” (18,2%) ou ainda que, “aprendem coisas mais úteis que no ensino regular” (14,4%). Como aspetos negativos, 37,1% afirmam que a “turma tem alunos que se portam mal” e 13,3% refere a diversidade de alunos na turma (alunos de anos/idades diferentes). De notar que 15,5% dos pais afirmam não encontrar “nenhum” aspeto negativo neste curso.

De acordo com o referido relatório verifica-se que os cursos vocacionais apresentam uma taxa de conclusão mais elevada que os Cursos de Educação e Formação (CEF) e que o ensino regular (alunos com pelo menos, mais dois anos que a idade normal), já a

taxa de desistência (abandono e absentismo) é marginalmente mais elevada nos cursos vocacionais que nos CEF, embora essa diferença não pareça ser significativa é bastante mais elevada que no ensino regular. Pelo contrário, a taxa de retenção é muito mais elevada no ensino regular para estes alunos mais velhos.

## 2. O TEOREMA DE PITÁGORAS

Pitágoras terá nascido numa data que se situa entre 590 a 570 a.C. numa pequena ilha grega, situada no mar Egeu, chamada Samos. Consta que já em criança se revelava prodigioso, a sua educação privilegiada e diversificada, deveu-se ao seu pai, um joalheiro rico que financiou os seus estudos e explorações, assim, até os 18 anos foi aluno do mestre Hermodamas, de Samos e posteriormente, de Tales de Mileto e, também terá recebido instrução matemática e filosófica nas conferências de Anaximandro, onde foi ouvinte. Pitágoras realizou uma viagem em busca de conhecimento sobre o mundo e o universo e chegou ao Egipto onde permaneceu cerca de 20 anos a estudar com os sacerdotes de Mênfis.

Após a invasão do Egipto pelos Persas, Pitágoras tornou-se prisioneiro de guerra, mas tal serviu apenas para o levar para a Babilónia, onde encontrou novas culturas, e diferentes filosofias como o Kabbalah dos Hebreus e o Zoroastrismo teológico dos Persas. Aos 56 anos, terá voltado para Samos, com a intenção de fundar uma escola iniciática o que veio a atrair a atenção de muitos discípulos, mas também a inimizade de Polícrates, tirano de Samos. Sentindo-se perseguido partiu para o sul de Itália, Crotona, onde fundou a Escola Pitagórica, uma instituição religiosa e intelectual, cujos principais conceitos eram: prática de rituais religiosos na crença de que as almas se transmigram de um corpo a outro após a morte; lealdade entre os membros; total entrega da mente ao estudo de Geometria, Aritmética, Música e Astronomia.

*"Num triângulo retângulo, a área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos"*, esta importante relação ficou conhecida como Teorema de Pitágoras e é no 1.º Livro dos Elementos de Euclides, 47ª Proposição, que aparece pela primeira vez escrito em grego.

É certo que Pitágoras não o inventou pois séculos antes da sua existência, o teorema já era conhecido por babilônios, egípcios e chineses, que utilizavam o resultado na

resolução de problemas, mas é possível que tenha sido ele ou algum dos seus discípulos a ser o primeiro a fazer uma demonstração do mesmo. Como a Escola Pitagórica, além de secreta era comunitária, ou seja, todo o conhecimento e todas as descobertas pertenciam a todos, é possível que tenha sido um dos seus discípulos a demonstrar o teorema e o mesmo tenha sido atribuído ao mestre. Esta primeira demonstração formal do teorema, seguia uma abordagem geométrica e sem qualquer ligação à expressão algébrica que se vulgarizou na matemática moderna (cerca de 1600 d.C.). De facto, a demonstração algébrica nem sequer foi tentada pela superstição dos Gregos Antigos com os números e o seu significado. A descoberta da irracionalidade de  $\sqrt{2}$  levou a atrasos milenares, dada a relutância de trabalhar com números hoje conhecidos como irracionais.

Pensa-se que Pitágoras terá *demonstrado* o teorema enunciado, considerando um triângulo retângulo de lados de comprimento 3, 4 e 5 unidades.

São construídos quadrados sobre os lados de um triângulo retângulo de catetos  $a, b$  e hipotenusa  $c$  e cada um desses quadrados são divididos em quadrados menores, correspondendo cada um a uma unidade de área. Calcula-se as áreas  $Aa, Ab, Ac$  dos três quadrados construídos, respetivamente, sobre os lados  $a, b, c$  do triângulo retângulo. Facilmente se constata, como sugere a figura seguinte, que  $Aa+Ab=Ac$ .

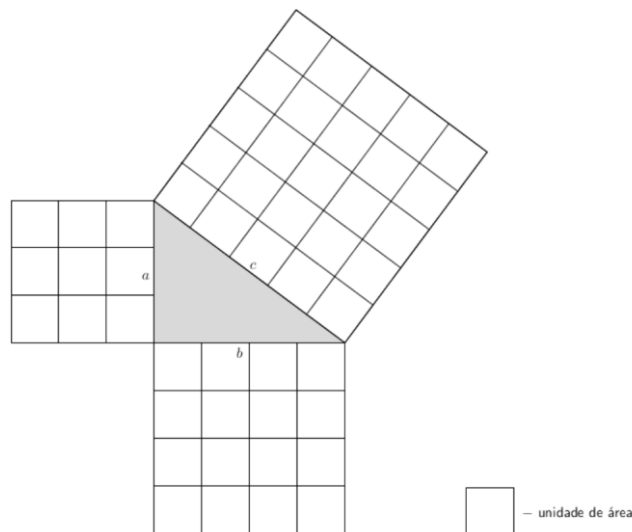


Figura 1- Demonstração original do Teorema de Pitágoras

Hoje sabemos que existem mais de 400 demonstrações diferentes do Teorema de Pitágoras. Há inúmeras demonstrações feitas por personalidades como são o caso:

James Abram Garfield, general, que foi eleito como vigésimo presidente dos Estados Unidos em 1881;

Henry Ernest Dudeney (1857 – 1930), escritor Inglês e matemático que se especializou em quebra-cabeças lógicos e jogos matemáticos;

Pappus de Alexandria (290 – 350 d.C.) terá nascido em Alexandria, no Egito, e é um dos matemáticos gregos mais importantes da antiguidade;

Leonardo Da Vinci (1452 – 1519), detentor de grande conhecimento e uma das figuras mais importantes do Alto Renascimento;

Euclides (330 a.C.) escritor de origem provavelmente grega, matemático da escola platônica, e conhecido como o Pai da Geometria, enuncia e demonstra o Teorema de Pitágoras no seu livro “Os Elementos”;

Bhaskara, matemático hindu do século XII;

George Pólya húngaro, nasceu em 1887 e estudou Direito, Línguas e Literatura, interessou-se por Latim, Física, Filosofia e Matemática.

O clássico livro *The Pythagorean Proposition*, do professor norte-americano Elisha Scott Loomis (1852 – 1940), publicado em 1940 e reeditado em 1968, contém uma compilação de 370 demonstrações diferentes do Teorema de Pitágoras. O Professor Loomis classifica as demonstrações do Teorema de Pitágoras em basicamente dois tipos: provas “algébricas”, baseadas nas relações métricas nos triângulos retângulos e provas “geométricas”, baseadas em comparações de áreas.

Hoje em dia a maioria dos manuais didáticos enuncia o Teorema de Pitágoras “*Num triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos*”, embora, com a intenção de facilitar a memorização seja frequente enunciar “*Num triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos*”.

O Recíproco do Teorema de Pitágoras que se enuncia “Um triângulo cujas medidas dos lados sejam  $a$ ,  $b$  e  $c$ , reais positivos, tais que  $a^2 = b^2 + c^2$ , é retângulo no vértice oposto

ao lado da medida de  $a$ ”, é demonstrado em "Os Elementos" de Euclides, última proposição do Livro I.

Também é relevante referir a generalização de Polya onde o padrão pitagórico (relação entre as áreas) é válido para quaisquer tipos de figuras semelhantes construídas sobre os lados de um triângulo retângulo, sendo o Teorema de Pitágoras um caso particular.

*Se a figuras construídas sobre os lados de um triângulo retângulo, independentes de sua forma geométrica, forem semelhantes, então o padrão pitagórico das áreas é satisfeito, isto é, a área da figura construída sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas das figuras construídas sobre os catetos. George Polya (1887 – 1985)*

O Teorema de Pitágoras é muito útil na resolução de problemas cotidianos. É de grande importância para a análise geométrica em diferentes áreas do conhecimento

### 3. AMBIENTES DE GEOMETRIA DINÂMICA

O NCTM (2000) refere que, o computador e outros recursos tecnológicos, quando utilizados nas atividades de ensino e aprendizagem, permitem explorar e testar conjecturas, visualizar diferentes formas de representação de conceitos matemáticos, e estabelecer conexões entre as múltiplas representações dos conceitos matemáticos, o que se reflete no desenvolvimento cognitivo do aluno. Também possibilitam a criação de contextos propícios à comunicação matemática entre alunos e entre alunos e professor e Jonassen (2000) diz que os recursos computacionais podem promover uma aprendizagem significativa na medida em que apoiam: i) a construção do conhecimento; ii) a exploração; iii) a aprendizagem pela prática; iv) a aprendizagem através da interação e v) a aprendizagem pela reflexão e desenvolvimento do pensamento cognitivo.

As atividades exploratórias podem ser potenciadas pela utilização das tecnologias (Candeias e Ponte, 2006) e assim permitir que os alunos passem “a trabalhar em níveis mais elevados de generalização ou abstração”. Quando os alunos utilizam recurso tecnológicos, os professores tem a possibilidade de observar os seus raciocínios de uma forma diferente à que é feita no decorrer das aulas formais.

No entanto, o NCTM faz referência ao facto de a tecnologia não ser a solução de todos os problemas. Ainda hoje é válida a opinião de Cuban (2001) quando refere que as tecnologias serão ineficazes, sem uma profunda alteração do paradigma educativo. À medida que as tecnologias entram na sala de aula, é necessário que o aluno deixe de ter um papel passivo e passe a ter um papel ativo.

A importância da Geometria no currículo advém, segundo o NTCM (1991), da fonte de problemas não rotineiros que proporciona, o que favorece o desenvolvimento de capacidades como a visualização espacial, raciocínio e argumentação. A aprendizagem da geometria é potenciada com utilização de recursos computacionais, nomeadamente Ambientes de Geometria Dinâmica (AGD). No entanto, importa esclarecer que, como refere Barros (2010), a geometria dinâmica não é uma nova área na geometria, mas sim como se designa um método dinâmico e interativo do ensino e aprendizagem de geometria, que recorre a recursos computacionais que permitem a criação e manipulação de figuras geométricas, respeitando as suas propriedades.

O AGD possibilita a representação de objetos geométricos que respeitam toda a axiomática de Euclides e as relações determinadas no processo de construção mantêm-se inalteráveis quando há manipulação desses objetos (Raposo, 2009). Ao AGD são apontadas vantagens tais como:- A possibilidade de construir um objeto matemático e através do arrastamento de objetos livres, poder movimentar sem alterar as propriedades e características previamente estabelecidas e desta forma garantir um grande grau de liberdade aos utilizadores; - A Capacidade de explorar, graficamente, as implicações das relações geométricas estabelecidas durante a construção; -Permite a interação entre os alunos e entre estes e o professor (Ribeiro, 2005), e assim são uma oportunidade em termos de desenvolvimento social dos alunos; - Permite que alunos e professores possam despende de mais tempo para um trabalho mais ativo em geometria porque os libertam de trabalhos mais mecânicos e rotineiros como construção e medição (Ferreira, 2005); - Pode proporcionar espaços de ensino e de aprendizagem efetivos, estimulantes e inovadores na medida em que possibilitam a construção e a manipulação dinâmica de objetos (Breda, Serrazina, Menezes, Sousa & Oliveira, 2011; Cabrita, Pinheiro, Pinheiro & Sousa, 2008; Serrazina, Canavarro, Guerreiro, Rocha, Portela, & Saramago, 2005); - Permite diversificar as atividades a propor aos alunos e de os apoiar na resolução de problemas (Ribeiro, A., 2005).

### 3.1 GEOGEBRA

Citado por Raposo (2009), o GeoGebra é considerado, por vários investigadores como Sangwin (2008), Chris Little (2008) e pelo seu autor Markus Hohenwarter (2007), um software de matemática dinâmica.

O GeoGebra é um AGD que foi desenvolvido na linguagem Java, o que permite uma interação com todos os browsers, não só no processo de instalação do programa em qualquer sistema operativo, mas também na partilha de construções online. É um software de distribuição gratuita disponível em [www.GeoGebra.org](http://www.GeoGebra.org) e seu objetivo é contribuir para a aprendizagem e ensino da matemática nas escolas e disponibiliza três funcionalidades que se traduzem em três zonas: a zona algébrica, a zona gráfica e a folha de cálculo (Ver Figura 2).



Figura 2 - Janela principal do GeoGebra

A Barra de Menus do GeoGebra permite realizar diversas configurações no ambiente de trabalho do software. A Barra de Ferramentas contém uma grande variedade de objetos matemáticos e funcionalidades sobre os mesmos e são utilizados para se obter as representações na zona Gráfica. A Zona Gráfica, que é a mais utilizada, mostra a representação gráfica dos objetos matemáticos, por exemplo: pontos, segmentos de reta, polígonos, funções, curvas e retas. Na Zona Algébrica os objetos da construção são representados algebricamente, por exemplo, as coordenadas de um ponto ou a equação

de uma reta. As três zonas estão interligadas dinamicamente, ou seja, o mesmo objeto pode ser representado nas três zonas e se sofrer alteração, numa delas, automaticamente se verifica nas restantes.

São várias as razões as vantagens que se podem atribuir ao GeoGebra, começa por apresentar uma interface muito intuitiva, de fácil utilização, sem a necessidade de perder muito tempo com apresentações, ou demonstrações da aplicação (Mehanovic, 2009). Como abrange as três grandes áreas da Matemática – a Geometria, a Álgebra e o Cálculo, permite um estudo da Geometria recorrendo a atividades de exploração e investigação. Segundo Hohenwarter e Preiner (2007), a possibilidade de cada expressão na zona algébrica possuir uma representação na zona gráfica e vice-versa, constitui a característica mais peculiar do GeoGebra, comparada com outros ambientes dinâmicos. Também King & Schattschneider (2003) aponta a possibilidade de múltiplas representações possibilitar ao aluno visualizar, conjecturar, validar e compreender os conceitos e propriedades de uma forma interativa e atrativa. O aluno pode obter enumeras construções a partir da inicial pela possibilidade de arrastamento dos objetos livres e assim, segundo Bravo (2010) ser possível um maior número de ações e mais complexas do que as ferramentas de utilização tradicional permitem. Também, Veloso e Candeias (2003) especificam potencialidades do GeoGebra das quais se destacam o poder ser utilizado na aula de Matemática e, especialmente em, Geometria como um processo de visualização; adaptar-se com perfeição à exploração, à descoberta e à investigação; provocar uma convicção forte que pode motivar o desejo de uma demonstração pela evidência experimental que fornece. Já Cabrita & Silveira (2013) referem que o GeoGebra, sendo de cariz predominantemente construtivista, constitui um excelente recurso para o estudo da Geometria, pois possibilita ao aluno visualizar, explorar, conjecturar, validar, compreender e comunicar os conceitos geométricos de uma forma interativa e atrativa.

No entanto, nem todos os estudos indiciam que a utilização do GeoGebra é uma mais-valia no processo ensino-aprendizagem, assim, Cadavez (2013), realizou um estudo de caso, sobre “A utilização de software educativo na aprendizagem da Geometria por alunos do 3º Ciclo do Ensino Básico”, aplicado a uma turma de 18 alunos do 8ºano, do ensino regular, e com uma média de idades de 13,4 anos. A turma tinha sido constituída no 7ºano e tinha quatro alunos retidos, pelo menos uma vez ao longo do seu percurso escolar. É ainda de referir que no final do 7ºano 55,6% dos alunos teve nível inferior a

três à disciplina de matemática. A escolha do software recaiu sobre o GeoGebra que foi utilizado para realizar as tarefas do manual escolar adotado e referentes aos conteúdos de Geometria. Nas suas conclusões, Cadavez (2013), refere que os resultados do teste escrito, aplicados aos alunos, não evidenciaram qualquer vantagem em termos de desempenho na utilização do software de geometria dinâmica GeoGebra mas, também aplicou um inquérito, no final da realização das tarefas, que pretendia conhecer as perceções dos alunos sobre a utilização do GeoGebra no estudo da Geometria e aí concluiu que os resultados foram bastante motivadores, nomeadamente relativamente ao aumento da motivação para aprender, pela concentração na sala de aula e interesse na disciplina.

#### 4. ENSINO EXPLORATÓRIO

Uma estratégia de ensino, que podemos designar de exploratória (Ponte, 2005), consiste em, através de explorações de situações abertas, levar os alunos a criarem estratégias para resolverem os problemas. Canavarro (2011) afirma que o ensino exploratório da Matemática permite que os alunos realizem uma aprendizagem a partir de um trabalho sério utilizando para isso tarefas valiosas que fazem despontar a necessidade das ideias matemáticas que são sistematizadas em discussão de grande grupo. Os alunos, para além de desenvolverem capacidades matemáticas como a capacidade de resolução de problemas, o raciocínio matemático e a comunicação matemática, podem assumir os conhecimentos e os procedimentos com significado. Torna-se para isso essencial a escolha da tarefa e os procedimentos de exploração. O professor tem um papel importante, quer na escolha da tarefa a aplicar e respetivos procedimentos de exploração, quer na promoção da argumentação e discussão coletiva e também compreender e interpretar os raciocínios dos alunos por forma a aferir se estes aprenderam o pretendido. Este tipo de ensino é uma atividade complexa e considerada difícil por muitos professores (Stein *et al.*, 2008). No ensino exploratório, “a ênfase desloca-se da atividade ‘ensino’ para a atividade mais complexa ‘ensino-aprendizagem’” (Ponte, 2005, p. 13), e desta forma ambos estão envolvidos no processo.

Os alunos desenvolvem a capacidade de argumentar através da exploração de tarefas que promovem a formulação e prova de conjecturas (Boavida, 2005; Douek & Pichat, 2003)

Em ambiente escolar, Abrantes (1999) considera a geometria a área que mais se adequa à exploração matemática, recorrendo, para isso, a atividades de investigação e exploração. De Villiers (2003) refere-se à exploração de conjecturas geométricas desenvolvidas em ambientes de geometria dinâmica, como uma forma de levar os alunos a novos conhecimentos. Sendo as conjecturas, as afirmações que resultam de um grupo de evidências com uma determinada regularidade e que carecem de investigação relativamente à sua veracidade. (Mason et al., 1982)

#### 4.1. TAREFAS

Ponte (2005) refere que existem muitos tipos de tarefa matemática e apresenta o esquema da figura 2

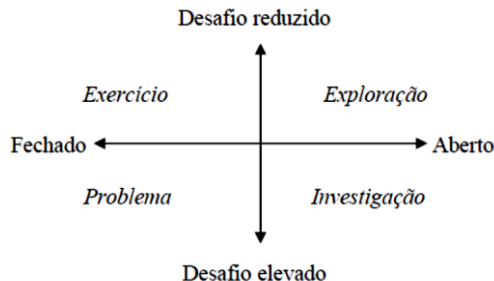


Figura 3 - Relação entre os diversos tipos de tarefas em termos de desafio e abertura

Segundo o esquema apresentado, um exercício é uma tarefa fechada com um desafio reduzido, um problema é uma tarefa fechada com elevado desafio, uma investigação é uma tarefa aberta com elevado grau de desafio e uma exploração é uma tarefa aberta mas com um desafio não muito elevado. Assim, segundo o autor, a diferença entre tarefa de exploração e tarefa de investigação está no grau do desafio. Quando o aluno consegue logo começar a trabalhar trata-se de uma tarefa de exploração, por outro lado quando necessita de um planeamento anterior então é uma tarefa de investigação. Segundo o autor a tarefa é proposta pelo professor mas o aluno deve desenvolver uma atividade de reflexão para que dessa forma seja um agente ativo na construção do seu

conhecimento. Ponte (2003) diz que frequentemente as tarefas chamam-se apenas de “investigações” porque como a distinção entre tarefas de investigação e de exploração depende do grau de dificuldade então também depende do grupo de alunos dado que nem sempre é fácil saber à partida qual o grau de dificuldade que uma tarefa aberta terá para um certo grupo de alunos.

Cunha, Oliveira e Ponte (1996) apontam quatro grandes razões para incluir atividades de investigações na sala de aula de Matemática:

*(a) constituem uma parte essencial da experiência matemática e, por isso, permitem uma visão mais completa desta ciência; (b) estimulam o envolvimento dos alunos, necessário a uma aprendizagem significativa; (c) podem ser trabalhadas por alunos de ciclos diferentes, a níveis de desenvolvimento também diferentes; e (d) potenciam um modo de pensamento holístico (ao relacionarem muitos tópicos), essencial ao raciocínio matemático (p. 173).*

Carvalho & Neves (2006) referem a importância de ter em conta o conceito de zona de desenvolvimento proximal quando se propõem as tarefas aos alunos, para que o processo de acomodação de novos conhecimentos favoreça um desenvolvimento cognitivo que contribua para que o aluno atinja níveis de conhecimento mais elevados.

## 5. TEORIAS DE APRENDIZAGEM

### 5.1. APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA

Ausubel (1980) diz que os seres humanos, ao relacionarem ideias, conceitos e proposições com ideias já existentes na sua estrutura cognitiva estão a aprender de forma significativa. Valadares (2014) diz que a aprendizagem significativa é um processo que permite que uma nova informação se relaciona, de uma forma substantiva e não arbitrária, com conceitos já existentes na estrutura cognitiva de quem aprende. A

esses conceitos Ausubel chamava de subsunçores e na língua portuguesa também são conhecidos por conceitos integradores. Coll (2001) diz que a aprendizagem significativa é a capacidade de modificar os significados já adquiridos mas também a capacidade de interpretar aquilo que é novo de forma a poder integrá-lo e torná-lo próprio

Em oposição à aprendizagem significativa aparece a aprendizagem mecânica, onde a informação é guardada de forma arbitrária e literal e praticamente não há relacionamento com informação já existente na estrutura cognitiva.

Novak (1980) apresenta quatro vantagens da aprendizagem significativa relativamente à aprendizagem por memorização (mecânica):

- A aprendizagem significativa permite que o conhecimento seja mais duradouro;
- Os conceitos integradores que serviram de âncora ficam mais diversificados com o novo conhecimento e assim aumenta-se a capacidade de aprendizagem de novos conhecimentos relacionados.
- Os conhecimentos esquecidos, que foram adquiridos com aprendizagem significativa, deixam sempre um efeito residual no conceito apreendido e em todos os conceitos relacionados.
- Os conhecimentos assimilados significativamente podem ser aplicados em novos problemas e contextos.

No entanto, a aprendizagem pode ser significativa ou mecânica independentemente de ser por receção ou por descoberta.

Como se pode observar na figura 4, um aluno pode construir um puzzle, o que é considerado uma aprendizagem por descoberta e no entanto realizou essa tarefa de forma mecânica, sem perceber as razões da construção. Pelo contrário o aluno pode realizar uma aprendizagem significativa ao clarificar relações entre conceitos através de receção dos conhecimentos, conclui-se assim que mais mecânica ou mais significativa, o que não tem a ver com o facto de ser mais por descoberta ou por receção (Novak e Gowin, 1999)

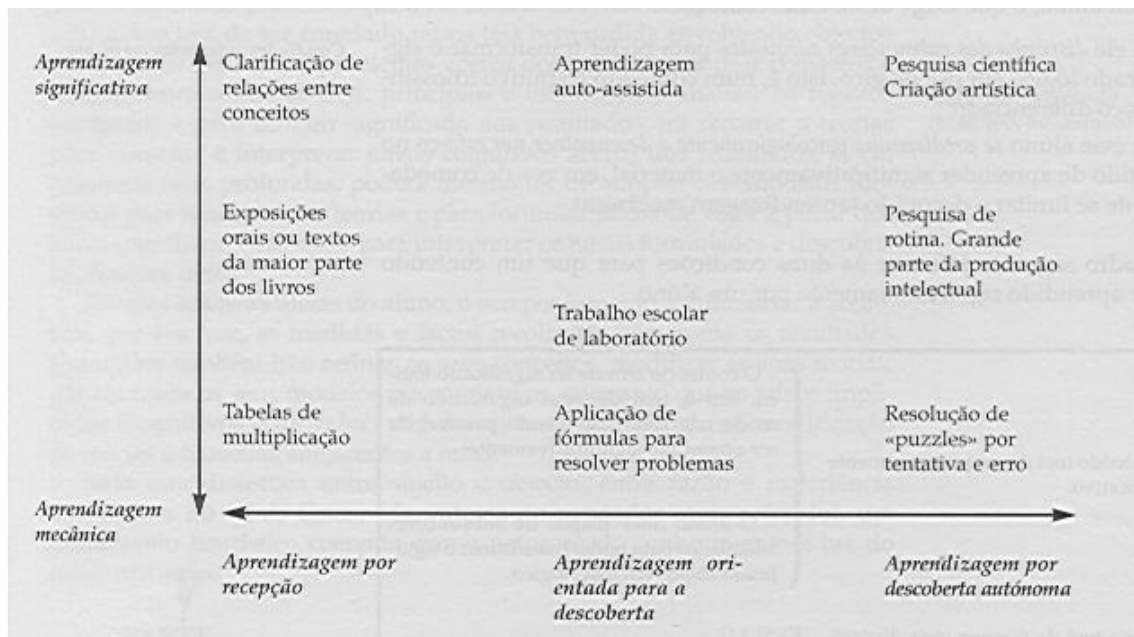


Figura 4 - A aprendizagem mecânica ou significativa – a aprendizagem por recepção ou por descoberta (Novak e Gowin 1999, adaptada)

Segundo Valadares (2014) a aprendizagem significativa depende essencialmente de dois fatores:

- A tarefa de aprendizagem é potencialmente significativa, ou seja, se de alguma forma disser respeito a algo a que o aluno é sensível ou lhe faz sentido lógico uma vez que já possui os conceitos integradores necessários à aprendizagem.
- O aluno empenha-se psicologicamente de modo ativo na tarefa de aprendizagem e desse modo relaciona os novos conhecimentos com os conhecimentos que já faziam parte da sua estrutura cognitiva.

### 5.1.1. A aprendizagem significativa e o construtivismo

De acordo com Valadares (2011) a aprendizagem Significativa é construtivista porque afirma que o sujeito é o elemento estruturante do seu próprio conhecimento, tendo de associar bem os novos conhecimentos aos conceitos subsunçores existentes na sua estrutura cognitiva e assim desenvolver o processo de aprendizagem de forma construtiva e reconstrutiva. Também Novak (1980) seguidor da teoria da aprendizagem significativa de Ausebel, refere, que a aprendizagem significativa está subjacente à integração construtiva de pensamentos, sentimentos e ações e Moreira (2011) refere que

a aprendizagem significativa é um conceito subjacente e subentendido, nas teorias construtivistas, sejam elas cognitivistas ou humanistas.

Citado por Valadares (2014), uma aprendizagem construtivista exige um ambiente construtivista (Cunningham, Duffy and Knuth, 1993, Savery & Duffy, 1995, Wilson, 1996). Um ambiente construtivista tem de ter como base boas relações pessoais para desse modo proporcionar um ambiente favorável ao envolvimento total dos alunos e também facultar o tempo necessário para que os alunos possam refletir sobre as suas ideias, aprendizagens e problemas a ultrapassar. Segundo Brooks e Brooks (1999), uma sala de aula construtivista deve ter presentes cinco princípios:

- Os professores devem tentar conhecer e valorizar a perspectiva dos alunos.
- As atividades devem desafiar os pressupostos dos alunos.
- Deverão ser colocados problemas que façam manifestar interesse nos alunos.
- As aulas devem ser concebidas tendo por base conceitos primários e daí partir para a sua generalização e abrangência.
- A avaliação das aprendizagens deve ser feita em contexto de aula.

### **5.1.2. A aprendizagem significativa com uma abordagem Vygotskyana**

Para Lev Vygotsky (1987), o desenvolvimento cognitivo tem referências no contexto social, histórico e cultural em que ocorre e assim, o desenvolvimento cognitivo é a transformação de relações sociais em funções mentais. Para este pensador, o desenvolvimento cognitivo depende da reconstrução interna que é feita através de instrumentos e signos. Quanto mais o indivíduo utiliza os signos, mais se modificam, fundamentalmente, as operações psicológicas que ele é capaz de fazer e quanto mais instrumentos ele vai aprendendo a usar maior é o número de atividades nas quais pode aplicar suas novas funções psicológicas. A internalização de significados depende da interação social e tal como na perspectiva ausubeliana podem ser apresentados ao aluno na sua forma final (Moreira, 2011). O mesmo autor refere como argumento para o facto da interação social se apresentar relevante para a aprendizagem significativa a importância que Ausubel atribui à língua, tendo este, inicialmente chamado à sua teoria de psicologia da aprendizagem verbal significativa (1963). Também se pode argumentar em sentido contrário e afirmar que a aprendizagem significativa depende da troca de significados através da interação social.

Moreira (2011) diz que para Vygotsky, o ensino para ser bom tem de estar à frente do desenvolvimento cognitivo e da mesma forma a aprendizagem é boa quando está avançada em relação ao desenvolvimento. Carvalho & Neves (2006) referem que para o aluno aprender significativamente é necessária que a distância entre o que ele já sabe e o novo conteúdo de aprender seja a adequada. Essa distância Vygotsky (1978) definiu como a zona de desenvolvimento proximal (ZDP), sendo a distância entre a capacidade de um indivíduo resolver um problema sozinho e de resolver um problema com a orientação ou colaboração de indivíduos mais capazes.

O professor deve preparar e aplicar tarefas de ensino aprendizagem que potenciem a janela de oportunidades que é a ZDP tendo o cuidado de não aplicar tarefas que estão para além da zona de desenvolvimento proximal, correndo o risco de o aluno não entender a tarefa, e conseqüentemente não ser capaz de a realizar ou fazê-lo incorretamente. Se a distância é muito pequena também pode produzir um efeito de desmotivação porque o aluno já conhece o novo conteúdo e deixa de ser um desafio. É também muito importante o professor assumir um papel mediador entre os alunos e objetos de aprendizagem e entre os alunos e os seus pares, pois é nessa zona que a interação social que leva à aprendizagem deve ocorrer.

## CAPÍTULO III - PROJETO DE INTERVENÇÃO

Neste capítulo para além da descrição dos alunos também traduzo de que forma foi feita a intervenção, como foi feito o planeamento das atividades e que objetivos de aprendizagem são visados.

O presente relatório descreve um projeto de intervenção assente no estudo do Módulo 7- Geometria III onde é lecionado o conteúdo “Teorema de Pitágoras” e destina-se a alunos do 2ºano do Curso Vocacional do 3ºciclo do Agrupamento de Escolas de Figueiró dos Vinhos. Os conteúdos a lecionar nestes cursos são planificados pelos grupos disciplinares de cada escola ou Agrupamento de escolas e aprovados pelo conselho Pedagógico e tem por base o currículo nacional de Matemática para o 3ºciclo.

O curso está organizado com a duração de dois anos letivos e de acordo com a Lei pode ser frequentado por alunos, no mínimo com aprovação no 6ºano de escolaridade e no máximo a frequência do 8ºano

### **A turma**

A turma é composta por doze alunos, oito do sexo masculino e quatro do sexo feminino com uma média de idades de 16,25 anos, esta turma tem 83,3% dos alunos com aprovação do 6ºano e 26,7% dos alunos com frequência do 7ºano. Constata-se que todos os alunos da turma apresentam retenções sendo que 83,3 % apresentam duas ou mais retenções ao longo dos seus percursos escolares e 58,3% iniciaram o processo de retenção ainda no decorrer do 1ºciclo. Quando foram admitidos no curso, apenas 25% dos alunos da turma não apresentavam qualquer participação disciplinar no seu percurso escolar e todos eles já tinham experimentado o insucesso a Matemática através de avaliações inferiores ao nível três no final de um ou vários períodos de avaliação.

Fui professora da turma no ano letivo anterior o que me permite saber as potencialidades e limitações da mesma ao nível de conhecimentos e comportamental. Ao nível de conhecimentos são alunos que apresentam dificuldades de cálculo, nomeadamente operações com potências, radiciação, cálculo de áreas e resolução de equações. Estes conteúdos são necessários no estudo do Teorema de Pitágoras.

## 1. TAREFAS DE INVESTIGAÇÃO

Foram aplicadas tarefas de investigação e exploração adaptadas de originais cujos autores são os professores das turmas-pilotos do 8ºano dos Novos Programas de Matemática que estiveram em vigor de 2007 a 2013. Estas tarefas foram divulgadas pela Direção Geral de Educação no ano letivo de 2009/2010 quando o novo Programa da Matemática foi generalizado e simultaneamente foi criado um website que incluía materiais de apoio, nomeadamente, textos, planos de aula, tarefas e outros.

Palm (2009) refere que as circunstâncias devem ser favoráveis às aprendizagens e o professor mais do que uma fonte de conhecimento é um orientador criando uma interação **construtivista** entre os alunos. Devem proporcionar-se diversos **materiais e tecnologias** para que os alunos se sintam cómodos ao apresentar e argumentar as suas opiniões. As **tarefas**, segundo Fonseca (2000), permitem os alunos explorarem situações abertas, fazerem e testarem conjecturas, procurarem regularidades, argumentarem e comunicarem por escrito ou oralmente as suas conclusões. Partem de uma situação complexa, tentam compreendê-la, descobrem padrões e relações e alcançam generalizações.

Para a realização das tarefas escolhi o software GeoGebra porque permite que a aprendizagem do Teorema de Pitágoras seja atrativa e prática. Este software permite construções dinâmicas e deste modo sempre que o aluno movimentar a construção pode comparar os resultados obtidos e assim conjecturar e verificar conceitos, não menos importante para a escolha do GeoGebra é o facto de esta ferramenta apresentar uma zona gráfica e simultaneamente uma zona algébrica o que pode vir a revelar-se um elemento facilitador para a compreensão do conceito mesmo para alunos com dificuldades de cálculo.

## 2. ESTRATÉGIA PEDAGÓGICA

O objetivo principal das tarefas é possibilitar aos alunos um **ambiente de investigação**, proporcionando uma aprendizagem significativa dos conceitos envolvidos no Teorema de Pitágoras. No final da resolução das tarefas os alunos devem ser capazes de perceber

que, ao utilizar o teorema, estão a calcular áreas de quadrados e que, a partir dessas áreas, haveria a possibilidade de encontrar a medida de um dos lados de um triângulo retângulo, caso fosse ela desconhecida.

Foram elaboradas quatro fichas que seguiram a numeração das fichas elaboradas para a turma até à data, e assim são as fichas nº 22, 23, 24 e 25 (Ver anexos 1, 2, 3 e 4). No presente estudo e por uma questão de simplificação sempre que forem feitas referência às fichas nº 22, 23, 24 e 25 serão referidas as fichas nº 1, 2, 3 e 4, respetivamente.

Embora os alunos já tenham trabalhado com o GeoGebra em conteúdos anteriores, tomei a decisão de elaborar a ficha número 1 que tem como aprendizagens visadas o domínio das ferramentas/comandos do GeoGebra necessários para a realização das fichas números 2, 3 e 4 uma vez que dificuldades de utilização da ferramenta podem ser um ponto comprometedor dos resultados do estudo.

As tarefas que constam nas fichas números 2, 3 e 4 (ver anexos 2, 3 e 4) foram selecionadas por considerar que cumprem o objetivo dos alunos conjeturarem e estabelecerem conexões entre conhecimentos, despertando neles a motivação necessária para se envolverem na sua resolução. A ficha número 2 está conforme a original e pretende que os alunos desenvolvam tarefas que levem à conjetura da relação das áreas dos quadrados desenhados sobre os lados de um triângulo retângulo e posteriormente escrevam uma expressão algébrica que traduza a relação encontrada. Também pretende que os alunos conjeturem sobre a validade da relação encontrada anteriormente quando se desenham outros polígonos regulares sobre os lados do triângulo retângulo e ainda a validade da mesma relação para triângulos não retângulos. A ficha número 3 foi adaptada, tendo sido retiradas as tarefas que envolviam o Teorema de Pitágoras no espaço, conteúdo que não fazia parte do módulo que estava a ser lecionado e também foram introduzidas tarefas relacionadas com situações do dia-a-dia dos alunos, pretendendo assim uma maior motivação. Esta ficha tem tarefas que pretendem verificar se os alunos desenvolveram uma aprendizagem significativa que lhes permita aplicar o conhecimento “Teorema de Pitágoras” na resolução de problemas de cálculo de elementos de um triângulo, cálculo de áreas e verificação de triângulos retângulos. A ficha número 4 foi adaptada para ser resolvida com recurso ao AGD- GeoGebra por

considerar que é facilitador, para os alunos da turma, na confirmação de conjecturas que visam a demonstração do Teorema de Pitágoras. A tabela 1 identifica as aulas que foram planeadas para a realização das tarefas.

Tabela 1 – Fichas implementadas e calendarização

Aula	Tarefa
1 (90 minutos)	Ficha nº1- GeoGebra
1(90minutos)	Ficha nº2 – Tarefa- Teorema de Pitágoras Discussão da Tarefa- Teorema de Pitágoras
3(90minutos)	Ficha nº3 – Tarefa -Teorema de Pitágoras – Resolução de problemas
4(45 minutos)	
5(90minutos)	Ficha nº4 – Tarefa – Teorema de Pitágoras – Demonstração Discussão da Tarefa – Teorema de Pitágoras – Demonstração

### **Ficha 1**

Esta atividade foi planeada para 90 minutos e no início da aula o professor apresenta a metodologia de trabalho, distribuí o enunciado da ficha e passa a expor a ferramenta, mostrando os comandos e funções necessárias para a resolução da mesma. Posteriormente, os alunos iniciam a resolução da ficha a pares e durante a atividade o professor circula pela sala dirigindo-se aos alunos. O trabalho da turma será interrompido sempre que surja uma dúvida pertinente de discussão ou esclarecimento coletivo. No final será feita uma discussão e correção da tarefa.

### **Ficha 2**

Os alunos conjecturarem e verificarem o Teorema de Pitágoras são as aprendizagens visadas com a ficha nº2. Esta atividade está planeada para uma aula de 90 minutos com recurso ao GeoGebra. Como a classificação de triângulos é um conhecimento prévio necessário à resolução da atividade o professor inicia a aula colocando as seguintes questões: como se classificam os triângulos quanto aos ângulos e quanto aos lados? O que é um polígono? O que é um polígono regular? Respondidas as questões, pela turma, ou esclarecidas pelo professor, este informa os alunos sobre a metodologia de trabalho e distribuí a ficha de trabalho. Durante a resolução da ficha, em trabalho de pares, o professor circula pela sala dirigindo-se aos alunos. O trabalho da turma será

interrompido sempre que surja uma dúvida pertinente de discussão ou esclarecimento coletivo.

- **Questão 1:** pretende-se que os alunos conjeturem e verifiquem que a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos é igual à área do quadrado construído sobre a hipotenusa e ainda que escrevam uma expressão algébrica que traduza esta igualdade.
- **Questão 2:** pretende-se que os alunos conjeturem e verifiquem que a igualdade encontrada na questão 1 é válida para qualquer polígono regular de  $n$  lados construído sobre os lados de um triângulo retângulo (extensão do teorema de Pitágoras).
- **Questão 3:** é fundamental para que os alunos percebam que esta relação só se verifica em triângulos retângulos, fazendo a atividade com triângulos diferentes e verificar que a igualdade não se mantém.

No final será feita uma apresentação das conclusões seguida de discussão no grupo turma e a correção da tarefa. As discussões coletivas são uma oportunidade de partilha e construção de ideias, concepções, resultados e estratégias. O professor decide a ordem das intervenções, promove a discussão solicitando justificações fundamentadas e verifica se todas as dúvidas dos alunos ficam esclarecidas. No fecho da discussão será colocado no quadro o Teorema de Pitágoras que todos os alunos devem registar no caderno diário.

### Ficha 3

A ficha número 3 tem como aprendizagem visada a aplicação do Teorema de Pitágoras na resolução de problemas. Esta atividade está planificada para duas aulas, uma de 90 minutos e outra de 45 minutos. No início da aula o professor apresenta a metodologia de trabalho e distribui o enunciado da ficha. Os alunos dão início à resolução da ficha a pares e durante esse período de tempo o professor circula pela sala e intervém para colocar questões que promovam o raciocínio, esclarecer pequenas dúvidas, envolver os alunos nas questões levantadas pelos pares, remeter questões para os colegas, interromper o trabalho de pares caso surja uma dúvida que necessita de esclarecimento global para a turma. No final da aula é feita a correção e discussão da tarefa e o professor dinamiza a discussão solicitando justificações fundamentadas, verifica se são apresentadas todas as resoluções distintas que existam, garante o esclarecimento das

dúvidas dos alunos. Os alunos dirigem-se ao quadro sempre que seja solicitada a apresentação de cálculos ou exista uma resolução alternativa que deva ser registada por todos. As questões relativas ao cálculo de elementos do triângulo, áreas de polígonos e de aplicação do Teorema de Pitágoras em contexto de vida real devem ser resolvidas com papel e lápis, para poder começar haver um maior formalismo na comunicação matemática e apresentação de raciocínios, no entanto os alunos podem recorrer ao GeoGebra para verificarem soluções. O bloco de 45 minutos é a continuação do trabalho seguindo a mesma metodologia e no início da aula deve relembrar-se o ponto de situação. As resoluções feitas pelos pares devem ser recolhidas para serem avaliadas, posteriormente serão devolvidas aos alunos.

#### **Ficha 4**

A aplicação da ficha número 4 pretende que os alunos trabalhem a demonstração para que gradualmente justifiquem de forma rigorosa os procedimentos. A atividade contempla uma demonstração geométrica e uma demonstração algébrica e está planeada para 90 minutos e no início da aula o professor apresenta a metodologia de trabalho e distribui o enunciado da ficha. Os alunos iniciam a resolução da ficha a pares e acedem ao e-mail institucional para terem acesso ao link (<https://www.GeoGebra.org/m/wCgsQRWE>) que lhes dará acesso a uma demonstração do Teorema. Embora o link esteja disponível na ficha, entregue em papel ao aluno, a disponibilização do mesmo através do e-mail tem como objetivo evitar erros na sua transcrição e ser mais rápido. Durante a resolução da ficha o professor circula pela sala e intervém para colocar questões que promovam o raciocínio, esclarecer pequenas dúvidas, envolver os colegas nas questões levantadas pelos pares, remeter questões para os colegas e interromper o trabalho de pares caso surja uma dúvida que necessita de esclarecimento global para a turma. Na correção e discussão da tarefa o professor dinamiza a discussão solicitando justificações fundamentadas e garante o esclarecimento das dúvidas dos alunos. Os alunos dirigem-se ao quadro sempre que se verifique uma dúvida que deva ser apresentada a toda a turma ou exista uma resolução alternativa que deva ser registada por todos. Os alunos devem reconhecer algumas propriedades de figuras e relações entre elas e com atividades sucessivas reconheçam uma demonstração geométrica e uma demonstração com recurso a expressões algébricas do Teorema de Pitágoras. O professor deve registar as questões feitas pelos alunos, as interações entre alunos e as conclusões apresentadas.

## **Grupos**

Os pares foram formados partido do princípio que na aprendizagem colaborativa os alunos com mais dificuldades são apoiados ou guiados por alunos com menos dificuldades. A tutoria entre pares é para Lopes e Silva (2010) um método de aprendizagem cooperativa que possibilita que os alunos se tornem professores dos seus colegas, aprendendo tanto como aqueles a quem ensinam. Segundo Gisbert (2002) a tutoria entre iguais é uma atividade de aprendizagem cooperativa onde os pares de alunos são criados com uma relação desigual, em que um deles faz de tutor e o outro de tutorado, mas com um objetivo comum. Também as Normas NCTM (1991) defendem o trabalho em pequenos ou grandes grupos como estratégia que promove o confronto de opiniões, a reflexão e partilha de pontos de vista entre si, desenvolvendo a capacidade de trabalho em equipa, indispensável na sociedade hodierna. Outra das razões de se optar por esta metodologia de trabalho teve por base o facto deste grupo de alunos, tal como já foi referido anteriormente, apresentar pouca motivação na aprendizagem dos conteúdos escolares, poucos hábitos e métodos de trabalho e dificuldades no cumprimento de regras, assim a opção por desenvolver as atividades em grupo teve a ver com o facto de para além dos conteúdos académicos, os alunos necessitam de aprender competências sociais, em especial as intrínsecas ao trabalho de grupo, para assegurar que estes sejam bem-sucedidos. É fundamental motivar os alunos para o uso dessas competências e Freitas e Freitas (2003) referem que as competências sociais devem ser ensinadas da mesma forma que os conteúdos curriculares.

## **Discussão com o grupo turma**

Pretendo com a realização de uma **discussão com o grupo turma**, no final das fichas números 2 e 4, que os alunos sejam mais reflexivos e assim tenham uma maior participação na sua aprendizagem. Lafortune e Saint-Pierre (2001) sugerem que os alunos e os professores sejam capazes de fazer uma “viagem retrospectiva” ao interior do seu pensamento, para que consigam ser conscientes dos procedimentos cognitivos utilizados, verbaliza-los e avaliar a sua eficácia. Acrescentam que só assim se poderão desenvolver os seus próprios conhecimentos metacognitivos. O desenvolvimento da metacognição na escola tem como objetivo que os alunos abandonem um processo baseado na repetição de procedimentos direcionados para a aplicação de regras matemáticas e procura de solução de problemas semelhantes aos já estudados, para uma

atitude mais consciente, focada, principalmente, na autorregulação dos processos mentais que podem surgir durante a resolução de uma atividade.

### 3. PERCEÇÃO RELATIVA AO USO DO GEOGEBRA

No final da aplicação das fichas os alunos irão responder a um inquérito que pretendia avaliar a percepção dos alunos relativamente ao uso do software GeoGebra no estudo do teorema de Pitágoras e o desenvolvimento de competências. Para isso utilizou-se um inquérito validado e que tinha sido utilizado por Cadavez (2013) para verificar, precisamente, o desenvolvimento de competências com a utilização do software GeoGebra no ensino da geometria.

## CAPÍTULO IV – METODOLOGIA

Neste capítulo serão apresentados os procedimentos adotados no planeamento e concretização do estudo empírico com vista a alcançar o objetivo proposto, bem como as questões de investigação geradas por este estudo. Assim, neste capítulo faz-se referência às opções metodológicas consideradas na investigação, às características dos participantes do estudo, à indicação dos instrumentos de recolha de dados e o modo como estes foram recolhidos bem como algumas considerações sobre a ética deste estudo.

### 1. OPÇÕES METODOLÓGICAS

Na persecução do objetivo do estudo optou-se por uma metodologia de investigação qualitativa e interpretativa e em particular uma metodologia de estudo de caso.

#### *1.1. PARADIGMA DE INVESTIGAÇÃO*

A investigação qualitativa em educação proporciona métodos e técnicas que permitem a melhoria da prática letiva, uma vez que facilita a compreensão de determinados fenómenos dentro de contextos particulares (Costa e Oliveira, 2015).

Segundo Bogdan e Biklen (1994) na investigação qualitativa o objetivo principal do investigador é o de construir conhecimento e um estudo é útil quando tem a capacidade de gerar teoria. Segundo os mesmos autores este tipo de metodologia apresenta cinco características. A saber: - A fonte de dados é o ambiente natural. O investigador preocupa-se com o contexto e entende que as ações são melhor compreendidas quando observadas diretamente no “terreno”; - Os dados recolhidos são descritivos e incluem vídeos, transcrições de entrevistas, documentos pessoais, notas de campo e outros registos; - Há uma preocupação com os processos em detrimento dos resultados ou produtos; - Os dados são analisados de forma indutiva. As teorias são desenvolvidas de

“baixo para cima” uma vez que os dados não são recolhidos para confirmar hipótese previamente estabelecidas mas são construídas à medida que os dados particulares recolhidos se vão agrupando; - o processo de investigação não é abordado de forma neutra, o investigador dá relevo ao modo como as diferentes pessoas dão sentido às suas vidas. Face aos objetivos do estudo pareceu adequado, em termos metodológicos, uma abordagem qualitativa, onde a perspetiva interpretativa parece ser a adequada para a descrição do processo e a análise dos pormenores fundamentais à compreensão dos resultados.

## *1.2. TIPO DE ESTUDO*

Segundo Ponte (2006), um estudo de caso é uma investigação de uma situação muito específica, que visa descobrir o que há nela de mais característico e assim contribuir para a compreensão global de um certo fenómeno. Já Yin (1984) refere que um estudo de caso é uma investigação de natureza empírica que estuda uma dada entidade em contexto real e para isso utiliza as entrevistas, observações e artefactos. Merriam (1988) citado por Bogdan e Biklen (1994) refere que o estudo de caso consiste na observação detalhada dum contexto, ou indivíduo, de uma única fonte de documentos ou de um acontecimento específico. São inúmeras as definições de estudo de caso que se podem encontrar mas todas elas parecem adequar-se ao estudo uma vez que pretende analisar especificamente o impacto da utilização do GeoGebra no estudo do Teorema de Pitágoras com este grupo específico de alunos e não se pretende de todo generalizar os resultados a outras entidades. Ponte (2006) diz que os estudos de caso não se usam para conhecer propriedades gerais de uma população mas para compreender a especificidade de uma situação e tem como objetivo a melhoria, o conhecimento e a compreensão da situação em causa.

## **2. TÉCNICAS DE RECOLHA DE DADOS**

Lessard-Hébert, Goyette e Boutin (2008), referem três formas de recolha de dados: a observação de aulas; a análise documental dos produtos dos alunos; o inquérito, que quando considerado na forma oral é uma entrevista e na forma escrita é um questionário.

Segundo Ludke & Marli (1986), a recolha de dados na investigação qualitativa faz-se essencialmente a partir da observação. Para este estudo não foi feito um guião de observação mas foi dada especial atenção às interações e ao grau de envolvimento dos alunos na realização das tarefas. Verifica-se a influência do investigador no registo das observações pois foi um participante no processo através de intervenções e reações às interações na sala de aula.

Assim, a recolha de dados foi feita em ambiente natural de sala de aula e para cumprir os objetivos do estudo recolheram-se os dados utilizando as seguintes fontes:

### *2.1. REGISTO DE VÍDEO*

O registo em vídeo possibilita verificar com rigor as interações dos alunos, as suas respostas às questões colocadas e ainda analisar o conteúdo das suas apresentações e assim averiguar se a realização das tarefas potenciaram a formulação de conjeturas que levem a uma aprendizagem significativa.

### *2.2. PRODUÇÕES DOS ALUNOS*

Para complementar as informações recolhidas pela observação, foi feita uma análise das respostas dos alunos em suporte papel e das construções realizadas no GeoGebra. Permite complementar a informação recolhida em Vídeo e assim verificar se a aprendizagem do Teorema de Pitágoras se realizou mesmo em situações em que os alunos revelavam dificuldades sobretudo ao nível dos cálculos algébricos. Isto ajudaria a dar resposta aos objetivos de investigação 1 e 2.

Os documentos produzidos pelos alunos em suporte de papel foram recolhidos para posteriormente serem fotocopiados. Os documentos em suporte informático, nomeadamente as construções realizadas pelos alunos no GeoGebra, foram guardados numa pasta no ambiente de trabalho e no final da aula enviados, pelos alunos, para o correio eletrónico institucional da professora por WeTransfer ou em algumas situações e por se verificarem algumas condicionantes com a internet, recolhidos diretamente pela professora para um dispositivo portátil de armazenamento “pendrive”

### 2.3. INQUÉRITO

Para conhecer a opinião dos alunos relativamente à aprendizagem do Teorema de Pitágoras, com recurso ao GeoGebra, construí um questionário (ver anexo ....) no Google Drive. O inquérito foi retirado da dissertação de Mestrado “A utilização de software educativo na aprendizagem da Geometria por alunos do 3º Ciclo do Ensino Básico” da Cadavez (2013) e pretende saber se com a utilização do software de Geometria Dinâmica o “GeoGebra” os alunos: sentem motivação para aprender; sentem que está mais atento(a); aumentam o interesse pela disciplina; envolvem-se mais nas tarefas propostas; ficam mais desinibidos(as) perante a aprendizagem; tomam decisões mais facilmente; sentem mais autonomia na aprendizagem; têm mais confiança nas suas capacidades; gostam de colocar questões; têm mais facilidade na interpretação de conceitos; esforçam-se por realizar melhor as tarefas propostas na aula; realizam as tarefas propostas com mais prazer; gostam mais das aulas de GeoGebra do que das outras; no próximo ano gostariam de voltar a realizar tarefas com o GeoGebra, nas aulas de Matemática.

Após a conclusão da implementação das fichas os alunos responderam ao inquérito no Google Drive, de forma anónima e para tal foi enviado para o e-mail institucional de cada aluno o seguinte link:

<https://docs.google.com/forms/d/1P2JSEVI8CpBg1LXfUhDJmZCzHqD7F2iAHCx5mvj5Nzg/edit>

Para dar resposta aos objetivos de Investigação utilizaram-se as técnicas de recolha de dados, sintetizadas na tabela 1:

Tabela 2 - Objetivos de Investigação e Instrumentos de recolha de dados

Objetivo de Investigação	Instrumentos de medida dos dados recolhidos e localização				
	Produções dos alunos			Registo de vídeo	Inquérito
	Apresentação oral	Fichas	Construções do GeoGebra		
Objetivo 1	x	x	x	x	
Objetivo 2		x		x	
Objetivo 3					x

### 3. TRATAMENTO DE DADOS

Para o tratamento de dados foram criadas as categorias: (i) Conjeturar e verificar o Teorema de Pitágoras; (ii) Demonstrar o Teorema de Pitágoras; (iii) Aplicar o Teorema de Pitágoras na resolução de problemas e (iv) GeoGebra e o desenvolvimento de competências. Na categoria (ii) foram criadas duas subcategorias: (a) Demonstração geométrica e (b) Demonstração algébrica.

Na tabela 3 resume-se as categorias e subcategorias analisadas e os instrumentos utilizados para a recolha de dados.

Tabela 3 - Categorias, subcategorias e instrumentos de recolha

Categorias	Subcategorias	Instrumentos de medida dos dados recolhidos e localização			
		Produções dos alunos			Registo de vídeo Inquérito
		Apresentação oral	Fichas	Construções do GeoGebra	
Conjeturar e verificar o Teorema de Pitágoras	---	Anexo 11	Anexo 10	Anexo 9	x
Demonstrar o Teorema de Pitágoras	Demonstração geométrica	Anexo 12	---	---	x
	Demonstração algébrica	---	Anexo 13	---	x
Aplicar o Teorema de Pitágoras na resolução de problemas	---	---	Anexo 14	---	x

Para a análise das categorias (i), (ii) e (iii) foram criados indicadores que se resumem na tabela 4

Tabela 4- Categorias, subcategorias e Indicadores

Categorias	Subcategorias	Indicador
<b>(i) - Conjeturar e verificar o Teorema de Pitágoras</b>	-----	Estabelece relação entre as áreas dos quadrados desenhados sobre os lados do triângulo retângulo.
		Escreve a relação algébrica que traduza a relação encontrada
		Verifica se a relação entre as áreas se mantém se se constroem outros polígonos regulares sobre os lados do triângulo.
		Verifica que a relação encontrada não é válida para triângulos não retângulos.

<b>(ii) - Demonstrar o Teorema de Pitágoras</b>	<b>(a) Demonstração geométrica</b>	Justifica que Q1 é um quadrado.
		Generaliza a justificação anterior, quando os triângulos têm outras dimensões mas continuam congruentes.
		Escreve a igualdade
		Generaliza a Igualdade quando os triângulos têm outras dimensões mas continuam congruentes.
		Relaciona com o Teorema de Pitágoras
	<b>(b) Demonstração algébrica</b>	Escreve a expressão algébrica da área do quadrado BCHG.
		Escreve a expressão algébrica da área do triângulo.
		Escreve a expressão algébrica da área do quadrado AFED.
		Valida as expressões algébricas para polígonos semelhantes
		Escreve a igualdade que relacione a área do quadrado AEFD com a área dos polígonos que o compõem
		Simplifica a igualdade
<b>(iii) - Aplicar o Teorema de Pitágoras na resolução de problemas</b>	----	Reconhece a relação entre as áreas dos quadrados desenhados sobre os lados de um triângulo retângulo.
	----	Identifica triângulos retângulos recorrendo ao Teorema de Pitágoras.
	----	Utiliza o Teorema de Pitágoras para determinar alguns elementos de polígonos (lados, diagonais, alturas).
	----	Utiliza o Teorema de Pitágoras para calcular áreas.
	----	Utiliza o Teorema de Pitágoras para resolver situações da vida real.

Pretende-se, com a análise dos resultados obtidos na categoria (i) e (ii) responder ao objetivo de investigação 1 e com os dados das categorias (iii) responder ao objetivo de investigação 2.

#### 4. ÉTICA

Por forma a garantir os princípios éticos próprios de qualquer investigação científica foram tomadas algumas medidas logo no início do estudo a saber: foi pedida autorização à Diretora do Agrupamento para a realização do estudo e do registo de vídeo das aulas referentes a este estudo (ver Anexo 16) que veio a ser autorizada pela própria e pelo Conselho Pedagógico do Agrupamento. Também foi solicitada a mesma autorização aos Encarregados de Educação dos alunos envolvidos na investigação (ver Anexo 17). Os alunos foram informados de todos os procedimentos a que iam ser sujeitos no âmbito desta investigação e foi garantido o seu anonimato, assim todos os nomes utilizados são ficcionados.

# CAPÍTULO V - APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DE RESULTADOS

Neste capítulo serão apresentados e analisados os dados recolhidos, usando as técnicas de tratamento de dados descritas no capítulo anterior. Assim, apresenta-se a análise de dados com base nas categorias definidas e com base nas evidências dos três instrumentos de recolha de dados, também referenciados no capítulo IV precedente.

## 1. RESULTADOS PARA O OBJETIVO 1

### *1.1. CONJETURA E VERIFICA O TEOREMA DE PITÁGORAS UTILIZANDO O GEOGEBRA*

Para verificar se se tinha concretizado o objetivo de alunos conjeturarem e verificaram o Teorema de Pitágoras analisou-se, através de:

- Registo de vídeo
- Apresentações orais
- Construções do GeoGebra.
- Fichas

Para determinar a relação algébrica pedida na questão 1.6 da ficha 2, a professora teve necessidade de interromper a elaboração da tarefa e dirigir-se à turma, questionando os alunos, “se o lado de um quadrado mede  $a$  como se determina a sua área?”. A maioria dos alunos respondeu  $a \times a$  e a professora voltou a questionar os alunos como se poderia representar esse produto na forma de potência e, novamente a maioria dos alunos respondeu  $a^2$ . Depois deste esclarecimento os alunos retomaram a atividade

## Análise do registo de vídeo

Fez-se o registo de alguns diálogos, que constam da tabela 5. Salientando-se a negrito as partes dos diálogos que podem evidenciar a aprendizagem visada e os indicadores considerados para aferir a referida aprendizagem

Após análise do registo de vídeo elaborou-se a seguinte tabela relativa à elaboração da ficha nº2.

Tabela 5 - Registo de Vídeo da resolução da ficha nº2 (excerto)

Indicadores	Excerto de registo de Vídeo.		
	Par 1	Par 2	Par 3
<b>Estabelece relação entre as áreas dos quadrados desenhados sobre os lados do triângulo retângulo.</b>	<p><i>Professora:</i> [...] e agora já estabeleceram alguma relação entre as áreas?</p> <p><i>Andreia:</i> Acho que já encontramos.</p> <p><i>Professora:</i> Se arrastares um dos vértices do triângulo a relação que encontras-te mantém-se?</p> <p><i>Luís:</i> Sim. <b>As áreas dos pequenos somadas dá a mesma coisa que a área do grande.</b></p>	<p><i>Professora:</i> [...] e agora já estabeleceram alguma relação entre as áreas?</p> <p><i>Telmo:</i> Já sei professora, o grande a <b>dividir por três dá o médio.</b></p> <p><i>Professora:</i> Se arrastares um dos vértices do triângulo a relação que encontras-te mantém-se?</p> <p><i>Telmo:</i> Não.</p> <p><i>Professora:</i> Volta a analisar melhor as áreas obtidas.</p> <p><i>Bruno:</i> Já vi. <b>A área da grande menos a do médio dá a área do pequeno.</b> Não é professora?</p> <p><i>Professora:</i> Movimentem um dos vértices do triângulo e confirmem.</p>	<p><i>Professora:</i> [...] e agora já estabeleceram alguma relação entre as áreas?</p> <p><i>Inês:</i> Professora, reparamos que a área do quadrado grande menos a área do quadrado pequeno dá <b>aproximadamente</b> o mesmo que a área do quadrado médio, mas tem sempre um pequeno erro.</p> <p><i>Professora:</i> Verifiquem a vossa construção, é um triângulo retângulo?</p> <p><i>Jorge:</i> Pois não. Eu não te disse Inês. A construção não está bem, <b>medi os ângulos e não tem nenhum de 90 °</b>. Apaga e vamos construir de novo.</p>
<b>Escreve a relação algébrica que traduza a relação encontrada</b>	<p><i>Professora:</i> O GeoGebra atribuiu letras aos lados do triângulo, podem utilizar essas letras para resolver a questão 1.6</p> <p><i>Andreia:</i> então a <b>área do quadrado grande é <math>a^2</math>, do quadrado médio é</b></p>	<p><i>Professora:</i> O GeoGebra atribuiu letras aos lados do triângulo, podem utilizar essas letras para resolver a questão 1.6</p> <p><i>Bruno:</i> é <b><math>a^2 - c^2 = b^2</math></b></p>	<p><i>Professora:</i> O GeoGebra atribuiu letras aos lados do triângulo, podem utilizar essas letras para resolver a questão 1.6</p> <p><i>Jorge:</i> é <b><math>a^2 - b^2 = c^2</math></b></p>

	$b^2$ e do pequeno $c^2$ .		
<p>Verifica se a relação entre as áreas se mantém se se construir outros polígonos regulares sobre os lados do triângulo.</p>	<p><b>Professora:</b> Ainda se lembram o que é um polígono regular?  <b>Luís:</b> é um polígono com os lados todos iguais.  <b>Professora:</b> Só os lados?  <b>Luís:</b> e os ângulos também.  [...]  <b>Andreia:</b> Professora, desenhamos um <b>octógono e acontece o mesmo com as áreas.</b> As duas pequenas dá a mesma coisa que a grande.  <b>Professora:</b> desenha outros polígonos e verifica o que acontece.  <b>Andreia:</b> <b>Acontece sempre a mesma coisa com as áreas.</b></p>	<p><b>Professora:</b> Ainda se lembram o que é um polígono regular?  <b>Bruno:</b> Tem lados e ângulos iguais  [...]  <b>Telmo:</b> no lugar dos quadrados desenhamos <b>pentágonos e aconteceu o mesmo com as áreas.</b>  <b>Professora:</b> desenha outros polígonos e verifica o que acontece e registem as vossas conclusões para apresentarem à turma.</p>	<p><b>Professora:</b> Ainda se lembram o que é um polígono regular?  <b>Jorge:</b> Tem lados e ângulos iguais  [...]  <b>Inês:</b> Fiz um <b>octógono e deu a mesma coisa, a área do grande menos a do médio dá a área do pequeno.</b>  <b>Professora:</b> desenha outros polígonos e verifica o que acontece e registem as vossas conclusões para apresentarem à turma.</p>
<p>Verifica que a relação encontrada não é válida para triângulos não retângulos.</p>	<p><b>Andreia:</b> [...]Não dá. Soma o quadrado médio com o pequeno e dá um resultado maior que o quadrado grande.  <b>Luís:</b> Pois é. E se arrastarmos um vértice por vezes a soma até dá menos que o quadrado grande. Já viste?  <b>Andreia:</b> Pois é. [...] <b>já não dá para usar a mesma relação.</b></p>	<p><b>Telmo:</b> <b>Fizemos um triângulo não retângulo e a soma dos dois pequenos não deu a área do grande.</b></p>	<p><b>Jorge:</b> desenhamos um <b>triângulo regular e já não dá a mesma coisa.</b> Se arrastarmos o vértice não acontece o mesmo que acontecia com a primeira figura.</p>

Ao analisarmos a Tabela 5, parece existir a evidência que o par 1 encontrou uma relação entre as áreas dos quadrados desenhados sobre os lados do triângulo retângulo embora posteriormente não tenha sido capaz de escrever a relação algébrica que traduz a relação encontrada. O par 2 não obteve logo a relação correta, mas depois de recorrer ao GeoGebra acabou por ultrapassar a dificuldade e escreveu a relação algébrica que a traduzia. O par 3 começou por fazer uma construção de um triângulo que não era retângulo e como tal não estava a conseguir desenvolver corretamente a atividade

proposta, depois de detetarem o problema iniciaram todo o processo, verificaram a relação entre as áreas e fizeram a sua representação algébrica.

### Análise das Apresentações Oraís

Para analisar as apresentações orais, aplicou-se a mesma técnica de análise utilizada no registo dos vídeos.

Da análise das apresentações orais relativas à Conjetura e verificação do Teorema de Pitágoras elaborou-se a Tabela 6 tendo sido selecionados alguns diálogos relevantes (ver Anexo 11).

Tabela 6 - Resultados obtidos nas apresentações orais sobre Conjetura e verificação do Teorema de Pitágoras

Indicadores	Excerto de registo		
	Par 1	Par 2	Par 3
<b>Estabelece relação entre as áreas dos quadrados desenhados sobre os lados do triângulo retângulo.</b>	<i>Luís:</i> Depois como tínhamos de encontrar uma relação entre as áreas chegamos à conclusão que quando fazíamos $100+16=116$ , a soma das duas menores era igual à área do maior.	<i>Telmo:</i> Então depois acabamos por desenhar um triângulo em que a área do quadrado grande era 74 e dos outros era 25 e 49. Como $74-49=25$ vimos que a área do quadrado grande menos a do médio dava a do pequeno.	<i>Inês:</i> [...] E depois de calcular as áreas vimos que $A=34$ , $B=9$ e $C=25$ . <i>Professora:</i> O que é o A, B e C? <i>Inês:</i> São as áreas dos quadrados. Concluimos que $34 - 9=25$ , ou seja a área de A menos a área de B dá a área de C, que $25+9=34$ , a área de B mais a área de C dá a área de A e $34 - 25=9$ , a área de A menos a área de C dá a área de B.
<b>Escreve a relação algébrica que traduza a relação encontrada</b>	<b>Não Escrevem</b>	[...] <i>Bruno:</i> Acho que sim. E depois concluímos que $a^2 - b^2 = c^2$ <i>Telmo:</i> Bruno, está enganado. Tem de ser $a^2 - c^2 = b^2$ <i>Professora:</i> Mas porquê? O que é $a^2$ , $b^2$ e $c^2$ ? <i>Telmo:</i> Então, são as áreas dos quadrados grande, pequeno e médio e o $c^2$ é do quadrado médio.	<i>Jorge:</i> E também vimos que quando arrastávamos um vértice o triângulo tinha medidas diferentes mas as relações das áreas eram sempre as mesmas e escrevemos a expressão $a^2 - b^2 = c^2$ . <i>Professora:</i> Tinham relacionado as áreas de três formas, só escreveram uma expressão algébrica para uma das

			relações? <b>Jorge:</b> Sim. Só pedia uma.
<b>Verifica se a relação entre as áreas se mantém se se construir outros polígonos regulares sobre os lados do triângulo.</b>	<b>Andreia:</b> Então professora, com o GeoGebra calculamos as áreas dos pentágonos e voltamos a verificar que se somássemos a duas áreas mas pequenas era igual à maior. <b>Professora:</b> Será que só dá com quadrados e pentágonos? <b>Andreia:</b> Não, também fizemos a experiência com triângulos regulares e também deu.	[...] <b>Telmo:</b> Então, no lugar dos quadrados construímos pentágonos e depois construímos octógonos. <b>Professora:</b> Pentágonos e octógonos quaisquer? <b>Bruno:</b> Regulares. <b>Professora:</b> E o que verificaram? <b>Bruno:</b> Que a relação era sempre a mesma. O que acontece com os quadrados também acontece com os pentágonos e octógonos. [...]	<b>Inês:</b> Depois fizemos um triângulo retângulo mas em vez de desenharmos quadrados nos lados do triângulo desenhamos octógonos e hexágonos e nas duas situações vimos que as relações são as mesmas dos quadrados. Concluimos que dá com todos os polígonos regulares.
<b>Verifica que a relação encontrada não é válida para triângulos não retângulos.</b>	<b>Luís:</b> Depois disso construímos um triângulo não retângulo, desenhamos os quadrados sobre os seus lados e achamos as suas áreas e agora já não batia nada certo. <b>Professora:</b> O que querem dizer com isso de não bater nada certo. <b>Luís:</b> Quando arrastávamos um vértice do triângulo, às vezes a soma das áreas dos dois mais pequenos dava mais que o maior outras vezes dava menos.	<b>Bruno:</b> Na questão 3, desenhamos um triângulo que não era retângulo e construímos os quadrados sobre os lados e não aconteceu a mesma relação da primeira figura. Mesmo quando arrastávamos o vértice a relação entre as áreas não era a mesma.	<b>Jorge:</b> [...]Na questão 3, construímos um triângulo regular e em cada lado um quadrado. Quando calculamos as áreas já não dava certo como na figura do início.

Após esta análise, elaborou-se a Tabela 7, que sintetiza os resultados obtidos nas referidas apresentações orais

Tabela 7 – Síntese dos resultados obtidos nas apresentações orais sobre Conjetura e verificação do Teorema de Pitágoras

Indicadores	Par 1	Par 2	Par 3
Estabelece relação entre as áreas dos quadrados desenhados sobre os lados do triângulo retângulo.	Sim	Sim	Sim
Escreve a relação algébrica que traduza a relação encontrada	Não	Sim	Sim
Verifica se a relação entre as áreas se mantém se se construir outros polígonos regulares sobre os lados do triângulo.	Sim	Sim	Sim
Verifica que a relação encontrada não é válida para triângulos não retângulos.	Sim	Sim	Sim

Também se verifica, nas apresentações orais (Ver Anexo 11) que os três pares generalizam a conjectura efetuada relativamente à relação entre as áreas encontradas, pois todos concluem que quando arrastam um dos vértices do triângulo retângulo as dimensões alteram-se mas a relação entre as áreas mantém-se. Este momento foi muito importante porque permitiu, através do arrastamento dos elementos da figura e do seu movimento, que os alunos constatassem as suas conjecturas através da observação.

#### Análise das Construções no GeoGebra

Fez-se a análise de alguns exemplos das construções feitas pelos alunos no GeoGebra (Anexo 9) que permitiam aos alunos fazerem as várias conjecturas possíveis. Como já foi referido anteriormente, o par 3, inicialmente, não fez a construção a partir de um triângulo retângulo e isso não lhes permitia posteriormente elaborar as conjecturas desejadas. Podemos verificar que **todas as construções foram elaboradas de acordo com o que era pedido** validando assim as conjecturas.

Também é visível a utilização da parte geométrica e da parte algébrica possibilitada pelo GeoGebra. Parece existir uma evidência que os alunos, ainda que tivessem alguma dificuldade no cálculo das áreas pretendidas, essa dificuldade foi ultrapassada ao utilizar as potencialidades do GeoGebra

Após esta análise, elaborou-se a Tabela 8, que sintetiza os resultados obtidos nas referidas construções no GeoGebra

Tabela 8 - síntese dos resultados obtidos nas construções geométricas com GeoGebra

Par	Construída de acordo com o pedido	Utilizou a parte algébrica
1	Sim	Sim
2	Sim	Sim
3	Sim (após a 2ª tentativa)	Sim (após a 2ª tentativa)

### Análise das fichas

Para a análise da resolução escrita das fichas (Ver Anexo 10), também se procuraram evidências dos 4 indicadores:

- **Estabelece relação entre as áreas dos quadrados desenhados sobre os lados do triângulo retângulo.**

É notório que os três pares estabeleceram uma relação entre as áreas dos quadrados desenhados sobre os lados do triângulo retângulo, tendo mesmo o par 3 estabelecido as três relações possíveis (Figura 5), embora existam algumas lacunas no formalismo da escrita, sendo exemplo disso a área de um quadrado ser representada por  $A$  e por  $A^2$ . Na apresentação oral esta dificuldade pareceu ultrapassada.

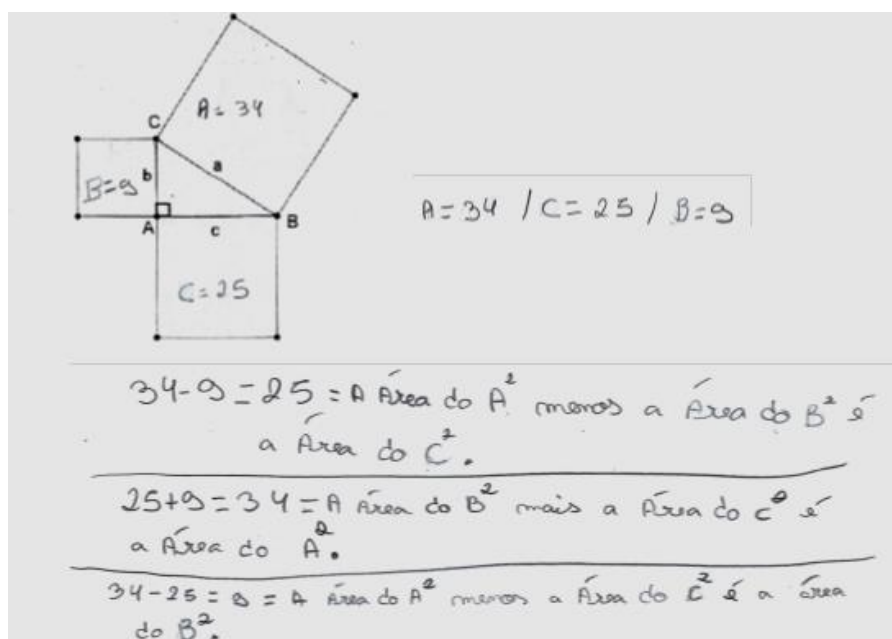


Figura 5- Resolução do exercício 1.4- Ficha nº2 - Par 3

- **Escreve a relação algébrica que traduza a relação encontrada**

O par 1 conseguiu traduzir algebricamente as áreas dos quadrados mas não conseguiu escrever a relação algébrica que traduzisse a relação entre as áreas, como se vê na Figura 1.

$a^2 = a \times a$   
 $b^2 = b \times b$   
 $c^2 = c \times c$

Figura 6- Resolução do exercício 1.6- Ficha nº2- Par 1

Os restantes pares traduziram algebricamente a relação.

- **Verifica se a relação entre as áreas se mantém se se construir outros polígonos regulares sobre os lados do triângulo.**

Pretendia-se que os alunos conjecturassem acerca da relação entre as áreas de outros polígonos regulares construídos sobre os lados do mesmo triângulo retângulo, parecendo ser evidente que os pares conseguiram generalizar a relação anteriormente encontrada. É disso exemplo a resolução dos pares 1 e 3 que constam das Figuras 7 e 8. Mais uma vez é notório o pouco rigor na escrita matemática e ainda, no caso do par 1, a ausência de referência ao facto dos polígonos terem de ser regulares.

Polígono  
 Área a = 197.20  
 Área b = 43.01  
 Área c = 84.3

experimentamos com o polígono e verificamos-se a mesma relação.  
 A Área Polígono maior é a soma dos outros dois, com o mesmo resultado.

mantêm-se as mesmas conclusões com outros polígonos (figura)

Figura 7- Resolução do exercício 2 - Ficha nº2 - Par 1

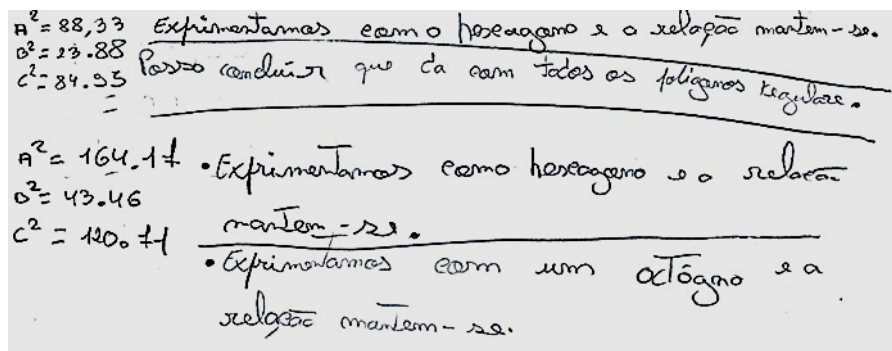


Figura 8- Resolução do exercício 2 - Ficha nº2 - Par 3

- **Verifica que a relação encontrada não é válida para triângulos não retângulos.**

Os três pares concluíram que a relação entre as áreas anteriormente encontradas deixava de existir quando o triângulo desenhado não era retângulo. É disso exemplo a exercício realizado pelo par 1 e apresentado na figura 9.

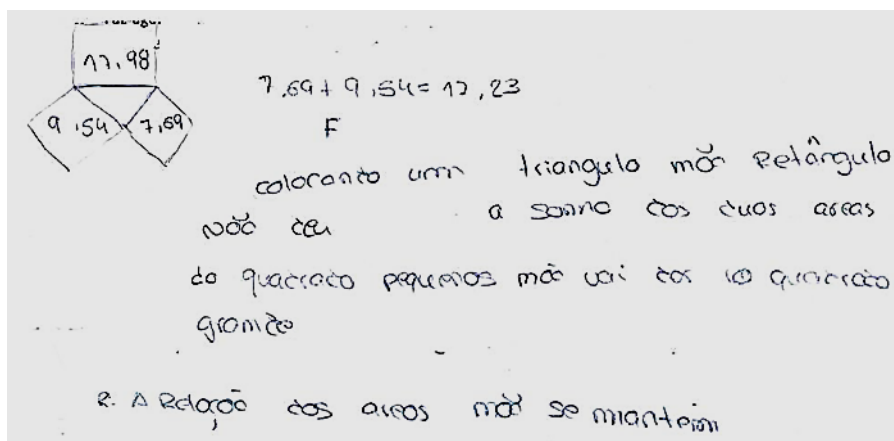


Figura 9 – Resolução do Exercício 3 - Ficha nº2 - Par 1

Perante o exposto parece haver evidência que os alunos:

- Conjeturaram uma relação entre as áreas dos quadrados desenhados sobre os lados de um triângulo;
- A maioria escreveu uma relação algébrica que traduzia a relação encontrada;
- Constataram a conjetura ao arrastar um dos vértices do triângulo retângulo e assim alterando as suas dimensões não alteravam a relação encontrada;
- Generalizaram a relação encontrada a outros polígonos regulares;
- Verificaram que a relação encontrada só é válida para triângulos retângulos.

Assim o objetivo de aprendizagem “Conjetura e Verifica o Teorema de Pitágoras” evidência ter sido atingido.

## 2. Demonstra o Teorema de Pitágoras.

Para verificar se se tinha concretizado o objetivo de alunos demonstrarem o Teorema de Pitágoras analisou-se, através de:

- Apresentações orais
- Fichas

Assim, a análise da Demonstração Geométrica foi feita com base nas apresentações orais dos alunos (Ver Anexo 12) e da Demonstração Algébrica recorreu-se às fichas feitas pelos alunos (Ver Anexo 13).

### 2.1. Demonstração Geométrica

Da análise apresentações orais (Ver Anexo 12) elaborou-se a Tabela 9.

Tabela 9 – Resultados obtidos nas apresentações orais sobre a demonstração geométrica do Teorema de Pitágoras

Indicadores	Excerto de registo		
	Par 1	Par 2	Par 3
<b>Justifica que Q1 é um quadrado.</b>	<p>[...]</p> <p><b>Luís:</b> [...] porque os lados eram todos iguais, mediam todos o mesmo.</p> <p><b>Professora:</b> Como podem ter essa certeza?</p> <p><b>Luís:</b> Porque vê-se, todos têm o mesmo comprimento.</p> <p><b>Andreia:</b> [...] Também tem de ter ângulos de 90° e tem, por isso é um quadrado.</p> <p><b>Professora:</b> E como concluíram que tinha ângulos de 90°?</p> <p><b>Andreia:</b> Porque se vê.</p>	<p><b>Telmo:</b> [...] porque tem os lados todos iguais, todos medem c.</p> <p><b>Bruno:</b> Todos medem c porque os triângulos são congruentes e assim essa medida é igual para todos.</p> <p><b>Telmo:</b> Também concluímos que tem ângulos de 90°, porque a soma dos ângulos dos triângulos tem de dar 180°.</p> <p><b>Professora:</b> Que ângulos?</p> <p><b>Telmo:</b> [...] Os internos.</p> <p><b>Professora:</b> Expliquem melhor o vosso raciocínio.</p> <p><b>Bruno:</b> [...] Como o triângulo é retângulo estes dois</p>	<p><b>Inês:</b> [...] os lados são as hipotenusas dos triângulos e os triângulos são congruentes. Tem ângulos de 90° porque a soma dá 180°.</p> <p><b>Professora:</b> Conseguem explicar melhor o ângulo de 90°?</p> <p><b>Inês:</b> Acho que não. [...]</p>

		juntos valem $90^\circ$ , assim sobra $90^\circ$ para este [...].	
<b>Generaliza a justificção anterior, quando os triângulos têm outras dimensões mas continuam congruentes.</b>	[...] <b>Luís:</b> Depois fomos ao tablet, mexemos no cursor e vimos que só mudava o tamanho mas ficava um quadrado à mesma.	<b>Telmo:</b> Depois mexemos no seletor e verificamos que se mantém porque continua a ser a hipotenusa dos triângulos, que como continuam a ser congruentes os ângulos ficam com a mesma amplitude de $90^\circ$ . [...]	<b>Inês:</b> Depois vimos no tablet que mesmo mexendo o seletor os quatro triângulos ficavam iguais e o lado do quadrado continuava a ser a hipotenusa do triângulo. Era na mesma um quadrado.
<b>Escreve a igualdade</b>	[...] <b>Andreia:</b> Depois escrevemos que a soma da área do quadrado 2 com a área dos quadrados três dá a área do quadrado 1. <b>Professora:</b> Foi fácil fazer essa? <b>Luís:</b> Não. [...] não tínhamos números.	<b>Telmo:</b> [...] Depois vimos que a soma da área do quadrado 2 com a área do quadrado 3 dá a área do quadrado 1 e escrevemos a expressão $AQ1=AQ2+AQ3$	<b>Jorge:</b> escrevemos a igualdade $AQ1=AQ2+AQ3$ [...]
<b>Generaliza a Igualdade quando os triângulos têm outras dimensões mas continuam congruentes.</b>	<b>Andreia:</b> Depois voltamos ao tablet, mexemos o cursor e vimos que os triângulos ficavam iguais [...]	<b>Telmo:</b> Então, os quadrados grandes são iguais e os quatro triângulos também são iguais. Se tirarmos os quatro triângulos do quadrado grande sobra o Q1 e se tirarmos os quatro triângulos no outro quadrado sobra Q2 e Q3. Então são iguais.	<b>Jorge:</b> [...] e dissemos que era sempre válida porque os triângulos são sempre iguais.
<b>Relaciona com o Teorema de Pitágoras</b>	<b>Andreia:</b> (silêncio) ..... Também é o quadrado grande igual à soma dos quadrados pequenos. [...]	<b>Telmo:</b> Os quadrados Q2 e Q3 medem de lado os catetos dos triângulos e o Q1 mede de lado a hipotenusa dos triângulos.	<b>Inês:</b> É como o Teorema, a área do quadrado maior é igual à soma dos outros dois.

Após esta análise, elaborou-se a Tabela 10, que sintetiza os resultados obtidos nas referidas apresentações orais.

Tabela 10 – Síntese dos resultados obtidos nas apresentações orais sobre a demonstração geométrica do Teorema de Pitágoras

Indicadores	Excerto de registo		
	Par 1	Par 2	Par 3
<b>Justifica que Q1 é um quadrado.</b>	Não Justifica	Justifica	Justifica a igualdade dos lados mas tem dificuldade em justificar a amplitude dos ângulos.
<b>Generaliza a justificação anterior, quando os triângulos têm outras dimensões mas continuam congruentes.</b>	Confirma, mas apresenta a conclusão com pouco rigor matemático.	Confirma.	Confirma
<b>Escreve a igualdade</b>	Escreve	Escreve	Escreve
<b>Generaliza a Igualdade quando os triângulos têm outras dimensões mas continuam congruentes.</b>	Generaliza, mas apresenta a justificação com pouco rigor.	Generaliza	Generaliza.
<b>Relaciona com o Teorema de Pitágoras</b>	Relaciona mas de uma forma pouco rigorosa.	Relaciona	Relaciona de uma forma pouco rigorosa

Parece evidente que a maioria dos alunos teve dificuldade na demonstração geométrica do Teorema de Pitágoras, nomeadamente na formulação de raciocínios dedutivos. Essa dificuldade foi visível quando se pretendeu justificar que Q1 era um quadrado, bem como na generalização da justificação. Também é notória a dificuldade que os alunos manifestaram em relacionar os factos encontrados com o Teorema de Pitágoras, pelo menos de uma forma autónoma e formal. Pode-se concluir que este grupo de alunos ainda não se encontrava preparado para resolver uma atividade deste género por ainda terem dificuldades em justificar de forma rigorosa os procedimentos.

## 2.2. Demonstração algébrica.

Da análise da resolução da demonstração algébrica do Teorema de Pitágoras (Ver Anexo 13) elaborou-se a Tabela 11.

Tabela 11 – Síntese dos resultados obtidos na demonstração algébrica do Teorema de Pitágoras.

<b>Indicadores</b>	<b>Par 1</b>	<b>Par 2</b>	<b>Par 3</b>
<b>Escreve a expressão algébrica da área do quadrado BCHG.</b>	Escreve	Escreve	Escreve
<b>Escreve a expressão algébrica da área do triângulo.</b>	Escreve	Escreve	Escreve
<b>Escreve a expressão algébrica da área do quadrado AFED.</b>	Apresenta erros na expressão	Apresenta erros na expressão que são ultrapassados. Parece ser um lapso.	Escreve
<b>Valida as expressões algébricas para polígonos semelhantes</b>	Valida	Não valida	Valida
<b>Escreve a igualdade que relacione a área do quadrado AEFD com a área dos polígonos que o compõem</b>	Escreve	Escreve	Escreve, com um erro que parece ser um lapso.
<b>Simplifica a igualdade</b>	Não conclui. Apresenta erros de cálculo.	Simplifica. Apresenta um erro	Simplifica

Como se pode verificar, dois pares obtiveram a fórmula do Teorema de Pitágoras. Mais uma vez, evidencia-se alguma dificuldade sentida pelos alunos no cálculo algébrico. A utilização do simulador construído em GeoGebra parece ter sido uma mais-valia para que os alunos conseguissem generalizar as situações. É no entanto de referir que um par não o conseguiu fazer e ainda assim continuou a resolução da tarefa e não questionou a validade dos resultados.

Após análise destes resultados, parece evidente que os alunos ainda não possuem uma maturidade matemática que lhes permita desenvolver os raciocínios dedutivos necessários à compreensão da demonstração do Teorema de Pitágoras, quer geometricamente quer algebricamente. Assim o objetivo de aprendizagem “Demonstra o Teorema de Pitágoras” não evidência ter sido atingido na sua plenitude.

## 2. RESULTADOS PARA O OBJETIVO 2

### 2.1. APLICA O TEOREMA DE PITÁGORAS NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS.

Para se verificar se o objetivo de aprendizagem “Aplica o Teorema de Pitágoras na resolução de problemas” foi atingido analisou-se o **registo de Vídeo** e as **fichas**, feitas pelos alunos (Ver Anexo 14)

- **Registo de Vídeo**

Da análise do Registo de Vídeo elaborou-se a tabela 12.

Tabela 12 – Síntese do registo de vídeo sobre aplicação do Teorema de Pitágoras na resolução de problemas.

Indicadores	Excerto de registo de Vídeo e resolução da ficha	
Reconhece a relação entre as áreas dos quadrados desenhados sobre os lados de um triângulo retângulo. (Questão 1)	Par 1	Não reconhece de imediato a relação, uma vez que Inicialmente desenharam dois quadrados e pretendem por tentativas encontrar o terceiro. Como se revelou um problema acabaram por concluir que a resolução passava por desenhar um triângulo retângulo.
	Par 2	Reconhece
	Par 3	Reconheceram
Identifica triângulos retângulos recorrendo ao Teorema de Pitágoras. (Questão 2)	Par 1	Identifica.
	Par 2	Identifica.
	Par 3	Identifica.
Utiliza o Teorema de Pitágoras para determinar alguns elementos de polígonos (lados, diagonais, alturas). (Questão 3, alíneas a), b) e c))	Par 1	Utiliza.
	Par 2	Utiliza.
	Par 3	Utiliza.
Utiliza o Teorema de Pitágoras para calcular áreas. (Questão 3, alíneas d) e e))	Par 1	Na alínea d) utiliza mas não conclui o exercício. Na alínea e) utiliza e conclui o exercício.
	Par 2	Na alínea d) utiliza mas não conclui o exercício. Na alínea e) utiliza e conclui o exercício.
	Par 3	Na alínea d) utiliza mas não conclui o exercício. Na alínea e) utiliza mas não conclui o exercício.
Utiliza o Teorema de Pitágoras para	Par 1	Utiliza

<b>resolver situações da vida real.</b> <i>(Questões 4 e 5)</i>	<b>Par 2</b>	Utiliza
	<b>Par 3</b>	Utiliza

- **Fichas**

Ao analisar a resolução dos alunos conclui-se:

- A maioria dos alunos reconhece a relação entre as áreas dos quadrados desenhados sobre os lados de um triângulo retângulo. Também parece evidente que as dificuldades deste exercício foram ultrapassadas com a utilização do GeoGebra, situação que foi mais evidente no par que começou a resolver o exercício por tentativas tendo acabado por verificar que só iria ultrapassar a situação se comesse por desenhar um triângulo retângulo.
- Todos os alunos Identificam triângulos retângulos recorrendo ao Teorema de Pitágoras. Dois dos pares referem-se, de forma correta, aos lados do triângulo retângulo como catetos e hipotenusa. Parece notório que o uso do GeoGebra foi essencial para ultrapassar as dificuldades de cálculo algébrico, uma vez que já era do conhecimento dos alunos o enunciado do Teorema de Pitágoras e a sua fórmula e no entanto, nenhum par a utiliza com rigor matemático.
- Todos os alunos utilizam o Teorema de Pitágoras para determinar alguns elementos de polígonos. Regra geral os alunos continuaram a revelar pouco rigor de escrita o que provavelmente evidência as suas dificuldades de cálculo algébrico e comunicação matemática, no entanto todos conseguiram resolver as questões propostas.
- Os alunos utilizaram o Teorema de Pitágoras, de forma correta, mas nem sempre conseguiram calcular as áreas pedidas. Na questão 3, alínea d) nenhum par calculou a área pedida, embora tenham utilizado o Teorema de Pitágoras para calcular o lado do referido quadrado, e ainda assim, um dos pares não concluiu. É notório que os alunos compreenderam que, tratando-se de um quadrado, os lados são iguais e os quadrados desenhados sobre esses lados têm a mesma área,

assim, ao calcularem a área do quadrado desenhado sobre a diagonal e dividindo-a em duas partes iguais, obtinham a área dos quadrados desenhados sobre os lados do quadrado. Dois pares calcularam a raiz quadrada dessa área determinando assim o lado do quadrado. Relativamente à alínea e), houve necessidade da professora fazer alguns esclarecimentos para que os alunos conseguissem ultrapassar as dificuldades que estavam a colocar em causa a resolução da alínea. A professora induziu os alunos a concluir que o hexágono regular podia decompor-se em seis triângulos equiláteros e ao determinarem a área de um desses triângulos poderiam determinar a área do hexágono. Depois de analisar as resoluções verifica-se que dois pares conseguem utilizar o Teorema de Pitágoras e determinar a área pedida, o terceiro par determina o apótema do hexágono, utilizando O Teorema de Pitágoras, mas não conclui o exercício.

- Os alunos utilizam o Teorema de Pitágoras nas questões que se prendia resolver situações da vida real.

Depois de analisadas as resoluções, parece existir evidências que os alunos, embora revelem dificuldades de cálculo algébrico, cálculo de áreas e de comunicação matemática, reconhecem situações onde devem utilizar o Teorema de Pitágoras e conseguem utilizá-lo. É de referir que os alunos utilizam sempre a estratégia de resolução que passa pela relação entre as áreas dos quadrados desenhados sobre os lados de um triângulo retângulo e não utilizam a fórmula do Teorema de Pitágoras. É notória a falta de rigor matemático na escrita de algumas conclusões.

Assim o objetivo de aprendizagem “Aplica o Teorema de Pitágoras na resolução de problemas” evidência ter sido atingido.

### 3. RESULTADOS PARA O OBJETIVO 3

#### 3.1. CONHECER A PERCEÇÃO DOS ALUNOS SOBRE A UTILIZAÇÃO DO GEOGEBRA NO DESENVOLVIMENTO DE COMPETÊNCIAS.

Relativamente ao objetivo “Conhecer a percepção dos alunos sobre a utilização do GeoGebra no desenvolvimento de competências” foram analisados os resultados obtidos com a aplicação do inquérito (Ver anexo 15).

O inquérito foi aplicado aos alunos no final da implementação das tarefas, relativas ao conteúdo “Teorema de Pitágoras”, com recurso ao GeoGebra.

O inquérito foi desenvolvido por Cadavez (2013) na sua dissertação de mestrado com título “A utilização de *software* educativo na aprendizagem da Geometria por alunos do 3º Ciclo do Ensino Básico” e estava validado.

Na apresentação de resultados, embora não seja possível fazer uma análise comparativa entre os dois estudos, uma vez que os objetivos de estudo não são os mesmos e as condições criadas também são diferentes, pareceu pertinente dispor os resultados lado a lado de forma a serem colocadas algumas hipóteses resultantes da análise.

Doravante, sempre que forem referidos os resultados do presente estudo utiliza-se a terminologia “Turma A” e quando forem referidos os resultados do estudo de Cristina Cadavez utiliza-se a terminologia “Turma B”.

No gráfico 1 apresentam-se os resultados relativos à pergunta “sinto motivação para aprender”. Verifica-se que, na Turma A, 92% dos alunos concordam que se sentem mais motivados (58% concordam e 33% concordam completamente) e na Turma B 100% dos alunos concordam que se sentem mais motivados (67% concordam e 33% concordam completamente). Relativamente a esta questão podemos afirmar que as respostas são similares, havendo apenas 8% dos alunos da Turma A que não concordam nem discordam.

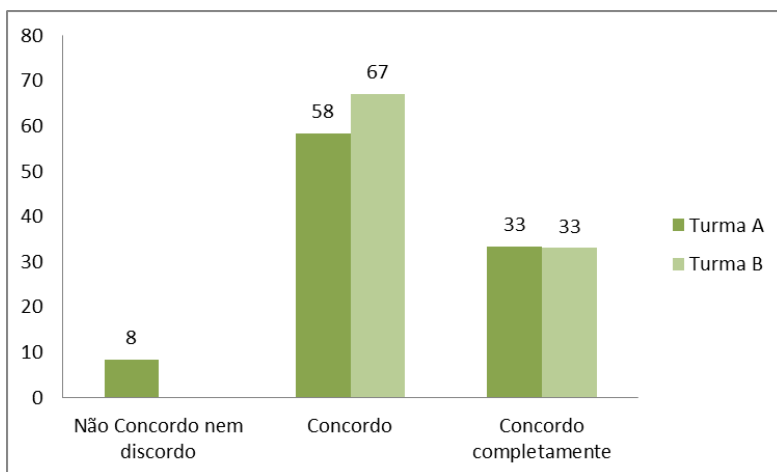


Gráfico 1- Motivação para a aprendizagem com a utilização do GeoGebra

Relativamente à questão “Sinto que estou mais atento”, como se pode ver no gráfico 2 existe uma diferença significativa entre os dois estudos, na Turma A apenas 66% concorda e na turma B 100% dos alunos concorda. Salienta-se no entanto que a autora do estudo que incide sobre a turma B refere “*Os dezoito alunos inquiridos responderam concordo completamente, pelo que a utilização desta tecnologia em ambiente de sala de aula pode contribuir para melhorar o ambiente de aprendizagem e, desta forma, melhorar o desempenho escolar dos alunos, o que não se verificou neste estudo...*”. Parece-nos no entanto que 66% dos alunos manifestarem que se sentem mais atentos à aula é um bom indicador para a utilização deste *software* em ambiente de sala de aula.

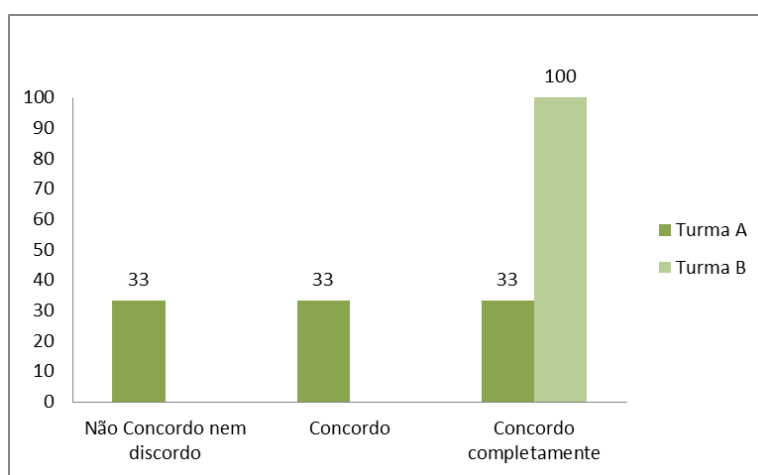


Gráfico 2 - Atenção à aula com utilização do GeoGebra

No gráfico 3 podemos verificar que 75 % dos alunos da Turma A concordam que o *software* “GeoGebra” contribui para aumentar o interesse pela disciplina, sendo que

desses, 42% afirmam concordar completamente. Na Turma B a percentagem de alunos que concordam é maior, 94%, mas nenhum aluno concorda completamente. Podemos assim concluir que as opiniões na Turma A são mais heterogêneas mas que existem alunos que se sentem verdadeiramente interessados pela disciplina quando utilizam o GeoGebra.

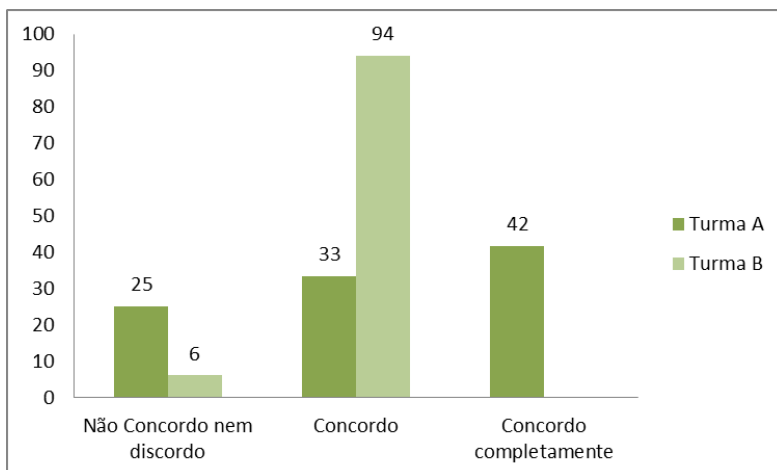


Gráfico 3 - interesse pela disciplina com utilização do GeoGebra

Como se lê no gráfico 4, 84% dos alunos sentem-se mais envolvidos nas tarefas propostas quando utilizam o GeoGebra para as realizar. Na turma B, 56% dos alunos concorda que se sentem mais envolvidos as tarefas, mas 45 % mostram-se indiferentes à utilização do software “GeoGebra”.

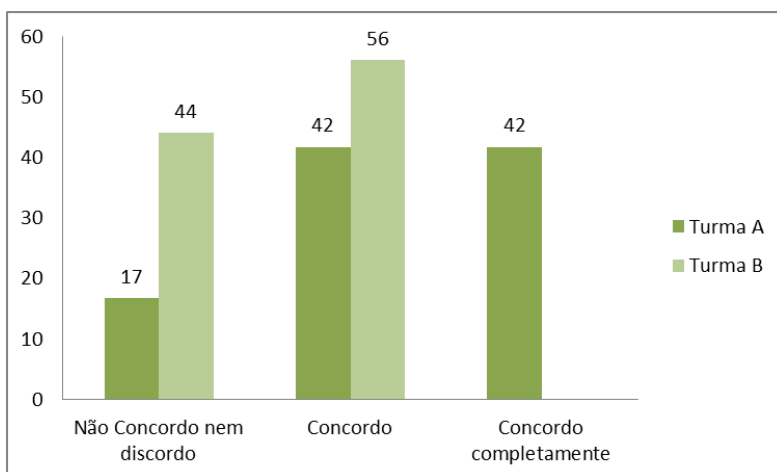


Gráfico 4 - Envolvimento nas tarefas propostas com utilização do GeoGebra

No gráfico 5, lê-se que na turma A, 67% dos alunos dizem sentir-se mais desinibidos perante a aprendizagem quando utilizam o GeoGebra e desses, 25% concordam

completamente. Já na Turma B, 50% dos alunos concordam que se sentem mais desinibidos e os outros 50% mostram-se indiferentes à situação. Provavelmente a diferença de resultados entre as duas turmas relaciona-se com da média de idades das turmas, apresentando a Turma A uma maior desinibição.

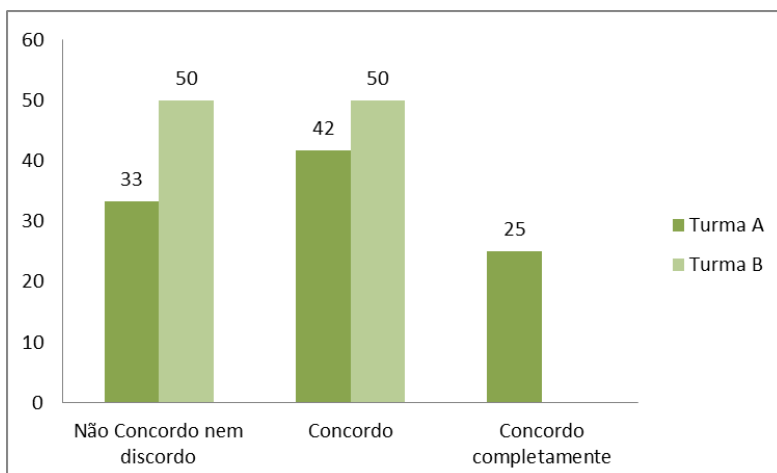


Gráfico 5 - Desinibição perante a aprendizagem com utilização do GeoGebra

No gráfico 6 verificamos que na turma A 66% dos alunos referem que o uso do GeoGebra permite tomarem decisões mais facilmente em contrapartida na Turma B todos os alunos manifestam indiferença em relação a esta questão. Também, presumivelmente, a grande diferença de resultados entre as duas turmas relaciona-se com da média de idades das turmas, apresentando a Turma A uma maior maturidade relativamente à tomada de decisões.

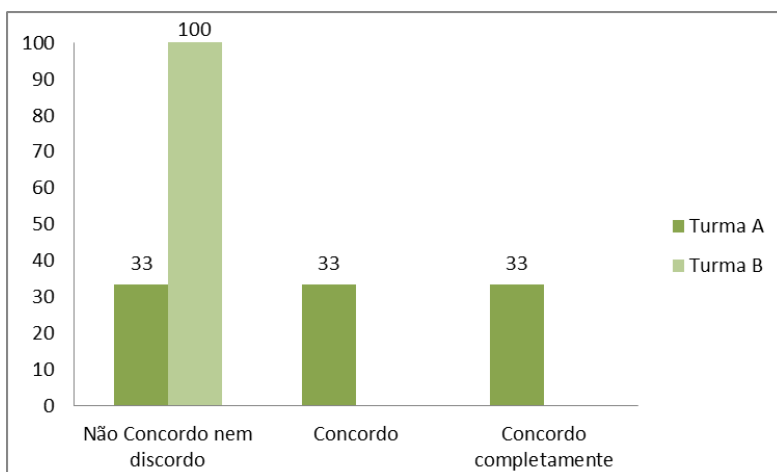


Gráfico 6 - Tomada de decisões mais facilmente com utilização do GeoGebra

No gráfico 7 verifica-se que 84% dos alunos da Turma A sentem uma maior autonomia na aprendizagem quando utilizam o GeoGebra e na Turma B são 61% dos alunos que consideraram sentir mais autonomia.

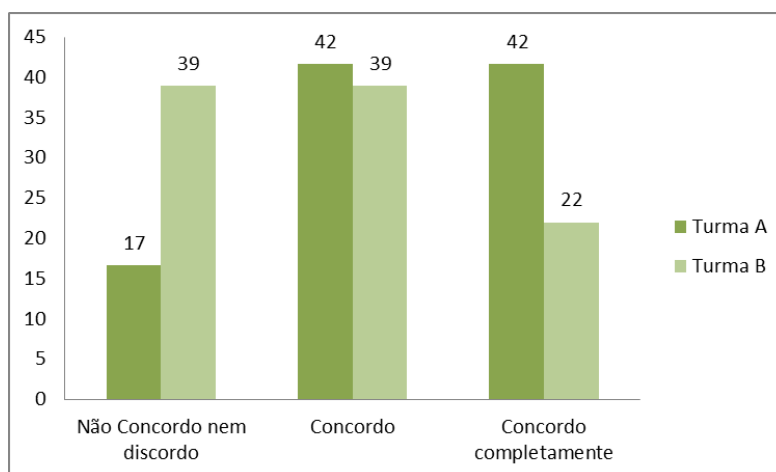


Gráfico 7 - Maior autonomia na aprendizagem com utilização do GeoGebra

Podemos observar no gráfico 8 que 84% dos alunos da Turma A concordam que a utilização do “GeoGebra”, como estratégia de ensino aprendizagem, contribuiu para aumentar a confiança nas suas capacidades. Já na Turma B são 72 % dos alunos que partilham dessa opinião.

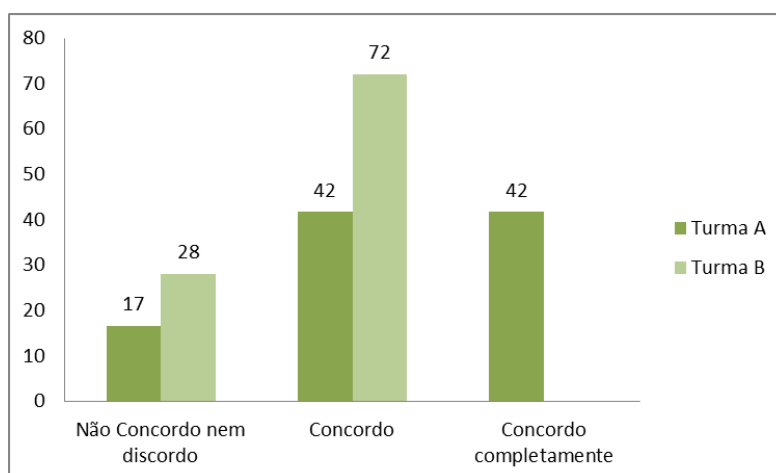


Gráfico 8 - confiança nas suas capacidades com utilização do GeoGebra

No gráfico 9 lê-se que na turma A, 69% dos alunos consideram que quando utilizam o GeoGebra têm um maior gosto em colocar questões, e cerca de 33% manifesta indiferença em relação à questão. Na turma B, todos os alunos concordam com esta opinião sendo que 50% afirma mesmo, concordar completamente.

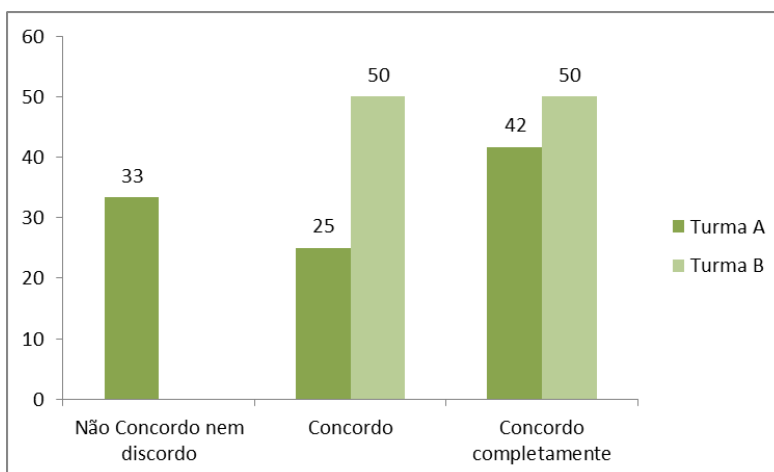


Gráfico 9 - Gosto por colocar questões com utilização do GeoGebra

No gráfico 10 verifica-se que 76% dos alunos da Turma A consideram que sentiram mais facilidade na interpretação dos conceitos com a utilização do “GeoGebra“ como estratégia de ensino-aprendizagem. Na Turma B apenas 28% dos alunos partilham dessa opinião e 72% manifestaram-se indiferentes.

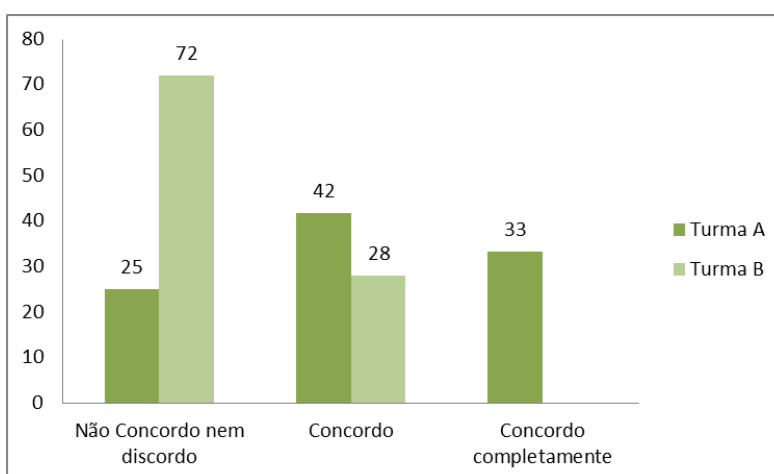


Gráfico 10 - Facilidade na interpretação dos conceitos com a utilização do GeoGebra

De acordo como gráfico 11, na Turma A, 75 % dos alunos concordam (42% concordaram e 33% concordaram completamente) que se esforçaram para realizar melhor os trabalhos propostos na aula quando utilizaram o “GeoGebra“ como estratégia de ensino-aprendizagem. Na Turma B, 89% dos alunos partilham dessa opinião (44,4% concordaram e 44,4% concordaram completamente).

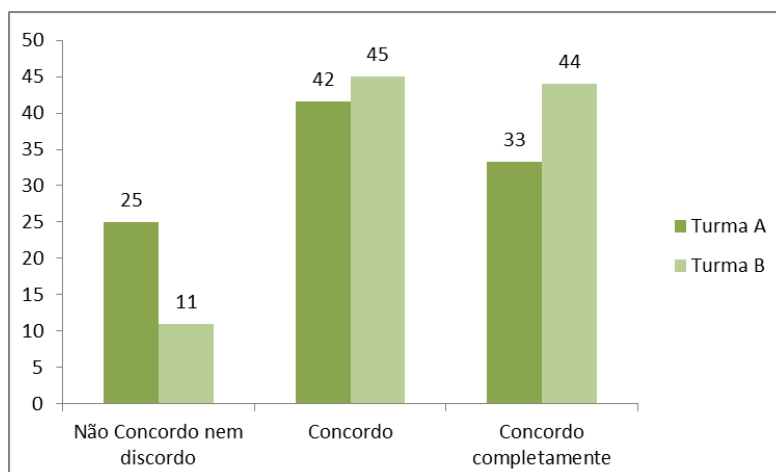


Gráfico 11 - Esforço para realizar melhor as tarefas propostas na aula com a utilização do GeoGebra

No gráfico 12 verifica-se que na Turma A, 83% dos alunos concordam (58% concordaram e 25% concordaram completamente) que realizaram os trabalhos com mais prazer, quando utilizaram o software de geometria dinâmica “GeoGebra” no processo de ensino aprendizagem. Na Turma B, todos os alunos partilham dessa opinião.

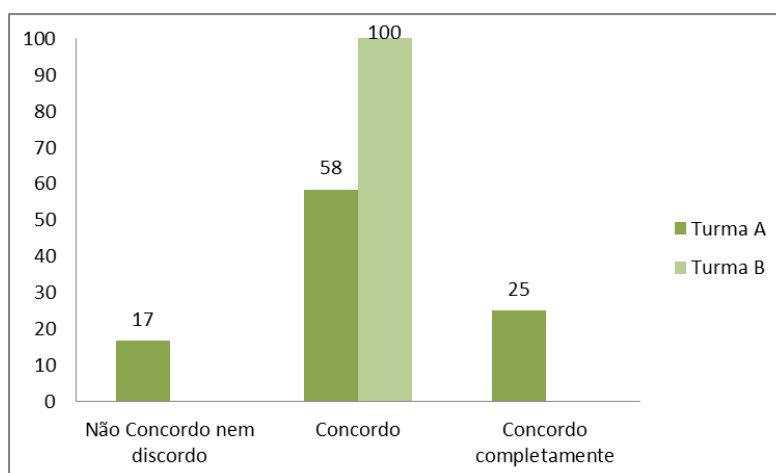


Gráfico 12 - Realização das tarefas propostas com mais prazer com a utilização do GeoGebra

Os gráficos 13 e 14 referem-se a questões que só foram colocadas à turma A.

No gráfico 13 podemos verificar que 92% dos alunos afirmam gostar mais das aulas em que se utiliza o GeoGebra (17% concorda e 75% concorda completamente) e apenas 8% manifestam-se indiferente à situação.

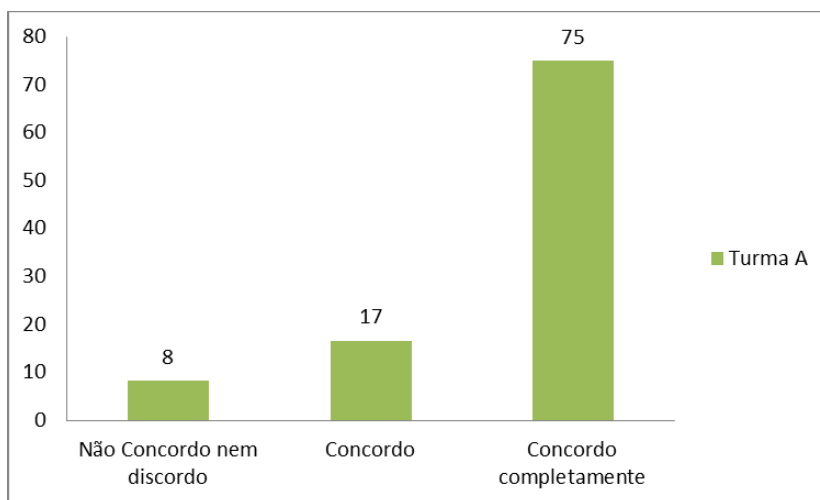


Gráfico 13 - Gostar mais das aulas de GeoGebra do que das outras

No gráfico 14 verifica-se que 84% dos alunos da Turma A gostariam de, no próximo ano letivo, realizar tarefas utilizando o Software GeoGebra (17% concorda e 67% concorda completamente) e 17% manifesta-se indiferente à situação.

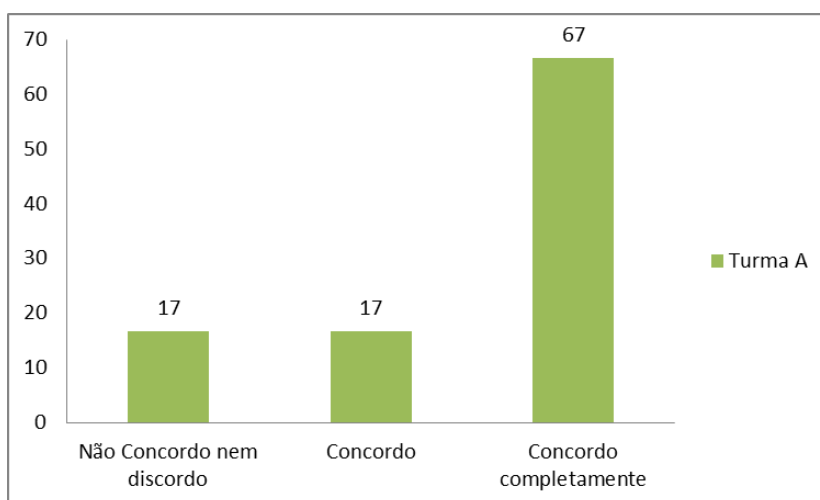


Gráfico 14 - No próximo ano gostaria de voltar a realizar tarefas com GeoGebra, nas aulas de Matemática

Da comparação dos resultados dos inquéritos aplicados às duas turmas em estudos distintos e onde se pretendia conhecer a percepção dos alunos sobre a utilização do *software* de geometria dinâmica GeoGebra no desenvolvimento de competências, podemos verificar que os alunos da Turma A manifestaram sentir-se mais envolvidos nas tarefas, com uma maior desinibição e autonomia na aprendizagem, mais facilidade em tomar decisões, mais confiança nas suas capacidades e maior facilidade na compreensão de conceitos, já os alunos da Turma B disseram sentir-se mais atentos, com um maior interesse pela disciplina, um gosto acrescido em colocar questões e capazes de se esforçarem por realizar melhor e com mais prazer as tarefas propostas. Relativamente à motivação, os resultados são muito similares nas duas turmas.

Em síntese, pela comparação de dados, parece poder justificar-se as diferenças encontradas, pelas características dos alunos que integravam os dois grupos. Assim a Turma A, com alunos de média de idades superior, com um percurso educativo mais marcado pelo insucesso e a frequentarem uma oferta educativa diferente, referiram melhorias em competências mais relacionadas com a autoestima e a aprendizagem enquanto a Turma B referiu competências mais ligadas ao gosto pessoal, bem-estar e prazer.

É ainda de referir que a Investigadora que levou a cabo o estudo que envolveu a Turma B revelou que, apesar dos resultados do inquérito serem bastante motivadores, os outros dados do seu estudo não evidenciam qualquer vantagem em termos de desempenho na utilização do *software* de geometria dinâmica “GeoGebra”. O mesmo não se aplica ao presente estudo pois, a par com os resultados motivadores do Inquérito, existem outros dados que se revelaram igualmente motivadores como já foi apresentado.

A Turma A respondeu a duas questões que não faziam parte do questionário da Turma B e é notório que os alunos gostaram a metodologia utilizada, sendo que 92% dos alunos dizem ter gostado mais das aulas onde utilizaram o GeoGebra e 84% dos alunos diz querer voltar a utilizar a *software* GeoGebra em atividades do próximo ano letivo.

## CAPÍTULO VI – CONCLUSÕES

Neste capítulo, começo por apresentar as principais conclusões do estudo realizado, procurando responder às questões de investigação, considerando os resultados obtidos. É ainda feita menção às principais limitações que surgiram ao longo do estudo e ainda algumas considerações para estudos futuros.

### 1. CONCLUSÕES DO ESTUDO

Neste trabalho procurou-se *verificar se é possível aprender o Teorema de Pitágoras, por parte dos alunos com ausência de pré requisitos, com recurso ao GeoGebra* tendo para isso sido formuladas as seguintes objetivos de investigação:

- Verificar se o uso do SGD – GeoGebra – potencia a formulação de conjeturas que levem a uma aprendizagem significativa.
- Verificar se com o SGD – GeoGebra- é possível aprender o Teorema de Pitágoras quando se tem alunos com ausência de pré- requisitos necessários.
- Conhecer a opinião dos alunos relativamente à aprendizagem do Teorema de Pitágoras, com recurso ao SGD – GeoGebra.

Foi aplicada uma ficha inicial que tinha como objetivo único, os alunos dominarem as ferramentas/ comandos do GeoGebra, necessário para conjeturar, aplicar e demonstrar o Teorema de Pitágoras. Pretendia-se desta forma evitar que futuras fragilidades na utilização deste AGD pusessem em causa os objetivos do estudo. Revelou-se uma boa estratégia e houve necessidade de prolongar a aula de 90 minutos, inicialmente planeada, para duas aulas de 90 minutos.

Para verificar se o objetivo “*o uso do, SGD – GeoGebra – potencia a formulação de conjeturas que levem a uma aprendizagem significativa*” foi atingido analisaram-se os dados recolhidos com os instrumentos que tinham como objetivo de aprendizagem “Conjetura e verifica o Teorema de Pitágoras” e “Demonstra o Teorema de Pitágoras”.

**Parece evidente que o objetivo da investigação foi atingido**, embora os alunos não tenham conseguido uma aprendizagem significativa relativamente à demonstração do Teorema de Pitágoras. Isto poderá estar ligado ao facto de certos raciocínios dedutivos ainda não serem possíveis nestes alunos, Fazendo querer que ainda está fora da Zona de Desenvolvimento Proximal, ou como refere Fino (2001), fora da “Janela de aprendizagem” onde a intervenção do professor no processo de cognição ainda não é suficiente para o aluno ter o controlo metacognitivo.

Os alunos conjecturaram o Teorema de Pitágoras depois de obterem uma relação entre as áreas dos quadrados desenhados sobre os lados do triângulo retângulo. Também conjecturaram sobre a validade da relação no caso de se construírem outros polígonos regulares sobre os lados do triângulo retângulo e dos triângulos não serem retângulos. Todas as conjecturas foram validadas recorrendo ao GeoGebra. Tendo em conta que a “ancoragem” dos novos conceitos a estruturas cognitivas previamente existentes, nos alunos, tornará os novos conceitos recordáveis e, conseqüentemente, passíveis de serem utilizados em futuras aprendizagens (Praia, J. 2000) podemos afirmar que houve uma aprendizagem significativa, pois em tarefas posteriores os alunos utilizaram o Teorema de Pitágoras sem terem recorrido à fórmula do Teorema de Pitágoras, mas recorrendo ao conceito, ou seja, não mecanizaram o conhecimento recorrendo à simples memorização da fórmula.

Quando se pretendeu que os alunos demonstrassem o Teorema de Pitágoras e dessa forma, gradualmente justificassem os procedimentos com rigor, a maioria dos alunos revelou e este objetivo de aprendizagem não foi atingido na sua plenitude e assim parece ser evidente que a aprendizagem não foi significativa, por, aparentemente, os alunos ainda não dominarem os conceitos necessários para interagirem com a nova informação e assim assimilarem significativamente o novo conteúdo (Valadares, 2011)

A natureza exploratória e investigativa das tarefas realizadas, o trabalho de pares, e as apresentações orais parecem ter desenvolvido nos alunos uma maior capacidade de discutirem os seus raciocínios, avaliarem a eficiência das suas estratégias e a razoabilidade das suas respostas. Assim, e num processo metacognitivo, os alunos comunicaram ideias, desenvolveram argumentos, confrontaram ideias com os seus pares

e tomaram consciência dos procedimentos que necessitaram mobilizar para encontrar a solução do problema apresentado.

Para verificar se o objetivo “*com o SGD – GeoGebra- é possível aprender o Teorema de Pitágoras quando se tem alunos com ausência de pré- requisitos necessários*” foi atingido, analisaram-se os dados recolhidos nas tarefas executadas e que tinham como objetivo de aprendizagem “Aplica o Teorema de Pitágoras na Resolução de problemas” e **parecem existir evidências que os alunos conseguiram atingir o objetivo mesmo em casos onde é evidente a falta de pré-requisitos.**

Um dos pares começou por desenhar, no GeoGebra, dois quadrados diferentes e após várias tentativas verificou que era extramente difícil desenhar, com o rigor necessário, um terceiro quadrado cuja área fosse igual à soma das áreas dos outros dois quadrados inicialmente desenhados. Após reflexão em conjunto e interação com a professora, concluíram que não estavam a utilizar a estratégia mais adequada e chegaram à conclusão que tinham de começar a construção a partir de um triângulo retângulo onde posteriormente desenhariam os quadrados sobre os lados do triângulo, ou seja utilizaram o Teorema de Pitágoras, conhecimento anteriormente adquirido. Este momento de discussão e reflexão revelou-se uma aprendizagem significativa.

Os alunos, regra geral, reconheceram as situações em que era necessário a utilização do teorema de Pitágoras, nomeadamente para verificar se o triângulo era retângulo ou ainda determinar elementos dos polígonos, como altura, lado ou diagonal. Revelaram dificuldades no cálculo de áreas de polígonos, é no entanto de referir que estas dificuldades não foram ao nível da aplicação do Teorema de Pitágoras mas posteriormente no cálculo da referida área por aplicação de fórmulas ou decomposição da figura. Houve necessidade da intervenção da professora para que os alunos conseguissem ultrapassar a dificuldade do cálculo da área do hexágono regular. Nas questões que traduziam situações em contexto real e cuja resolução dependia em exclusivo da aplicação do Teorema de Pitágoras, foram resolvidas sem aparente dificuldade. Os alunos frequentemente resolvem as questões aplicando a relação entre as áreas dos quadrados construídos sobre os lados do triângulo retângulo em detrimento da fórmula do Teorema de Pitágoras e a sua resolução algébrica, numa aparente forma de ultrapassar as dificuldades de cálculo que possam apresentar, e a ausência de pré-

requisitos, comprometendo no entanto o rigor e o formalismo da comunicação matemática.

Para verificar se o objetivo “Conhecer a opinião dos alunos relativamente à aprendizagem do Teorema de Pitágoras, com recurso ao SGD – GeoGebra” foi atingido, analisaram-se os dados recolhidos dos inquéritos aplicados aos alunos. **Os resultados obtidos foram bastantes motivadores** e leva-nos a acreditar que “Parafraseando Papert, os aprendizes não aprendem melhor pelo facto do professor ter encontrado melhores maneiras de os instruir, mas por lhes ter proporcionado melhores oportunidades de construir.” (Fino, 2004).

Foi feito um estudo de análise onde também se teve em conta os resultados obtidos pela investigadora e autora do Inquérito (Cadavez, 2013) e conclui-se que os alunos deste estudo manifestaram sentir-se mais envolvidos nas tarefas, com uma maior desinibição e autonomia na aprendizagem, mais facilidade em tomar decisões, mais confiança nas suas capacidades e maior facilidade na compreensão de conceitos. As competências apontadas anteriormente são aquelas que estão mais ligadas à aprendizagem e à autoestima e aponta-se como possíveis razões o facto dos alunos deste estudo terem uma média de idades significativamente mais alta, serem alunos marcados pelo insucesso ao longo dos seus percursos escolares, com motivação pelo saber académico diminuta e por isso serem alunos em risco de abandono escolar.

As duas questões finais revelaram que os alunos sentiram-se motivados ao realizar as tarefas com recurso ao GeoGebra e até referem que gostariam de continuar a utilizar este recurso de aprendizagem. É muito importante esta predisposição, pois ainda que o material seja potencialmente significativo para o aluno, este tem de estar psicologicamente motivado para levar a cabo o processo de assimilação significativa, que não é necessariamente fácil (Valadares, 2011).

Foi no entanto notório, ao longo de todo o estudo, as dificuldades na comunicação matemática. Estas dificuldades foram sentidas tanto nas apresentações orais como na parte escrita. Os alunos sentiram dificuldades em expressar as suas ideias, os seus raciocínios e as suas conclusões, provavelmente, pelo facto dos alunos ao longo do seu percurso escolar não estarem habituados a este tipo de trabalho em sala de aula, onde

escrever uma conjectura foi uma novidade. Também o rigor da escrita matemática não existe, muitas vezes por desconhecimento da simbologia matemática ou mesmo por não a saberem utilizar.

A abordagem de investigação utilizada não permite a generalização a outras situações e nunca foi esse o objetivo desta investigação. Porém, face ao exposto, os resultados sugerem que é possível aprender o Teorema de Pitágoras, por parte dos alunos com ausência de pré requisitos, com recurso ao GeoGebra.

## 2. LIMITAÇÕES DO ESTUDO

Mesmo aplicando a ficha que tinha como objetivo familiarizar os alunos com as ferramentas e comandos do GeoGebra necessário para levar a cabo esta investigação, houve situações em que os alunos demonstraram alguma dificuldade em formular as conjecturas e houve necessidade da intervenção do professor. Essas dificuldades foram ultrapassadas, na maioria das vezes, quando os alunos perceberam que não tinham feito as construções de forma correta. É exemplo disso, o par que começou a tarefa construindo um triângulo que não era retângulo.

Outra limitação do estudo está relacionada com o facto da exploração de tarefas ser uma metodologia que requer tempo. A ficha nº2 e nº4 foram realizadas num tempo superior ao que estava planificado. No primeiro caso, 45 minutos e no segundo caso, 90 minutos. O curso Vocacional, onde estavam integrados estes alunos, estava organizado num sistema modular e o número de aulas previstas para cada módulo não devia ser ultrapassado, assim a gestão do tempo tinha que ter algum rigor para não comprometer os conteúdos seguintes.

A falta de autonomia dos alunos, a dificuldade que os alunos revelaram em expressar os seus raciocínios, em formularem conjecturas e em justificarem as suas conclusões também se revelou uma limitação do estudo, onde muitas vezes a professora teve de interferir, questionando os alunos para que estes conseguissem clarificar ou criar novas linhas de pensamento. Estas limitações também se refletiram ao nível da comunicação matemática e dos raciocínios efetuados.

### 3. TRABALHO FUTURO

Seria interessante alargar esta experiência a outro público-alvo, designadamente ao ensino regular, que também evidenciam, segundo a minha experiência, algumas das limitações (falta de pré-requisitos), para se perceber se esta metodologia tem efeitos diferentes, ou não, em alunos com características de aprendizagem distintas e motivações escolares diferentes.

Não menos interessante seria fazer o mesmo estudo, mas aplicado a outros conteúdos, utilizando outras tarefas de exploração que permitissem verificar se a ausência de pré-requisitos se conseguia ultrapassar e se os alunos conseguiam formular novas conjecturas que levassem a uma aprendizagem significativa.

Por fim, também seria estimulante aplicar o mesmo estudo recorrendo a outros AGD. O facto de outros SGD terem funcionalidades diferentes bem como filosofias de interação diferentes, sugere que teriam outras potencialidades e limitações que permitir-me-iam adequar ainda mais a minha prática à natureza do objetivo de aprendizagem

## BIBLIOGRAFIA

- Alvares, M. & Calado, A. (2014). Insucesso e Abandono Escolar: os Programas de Apoio. In. Rodrigues, M.L (Org.), *40 anos de Políticas de Educação em Portugal - Volume I - a construção do sistema democrático de ensino*. Lisboa: Almedina, 197 -229.
- Abrantes, P. (1999). Investigações em geometria na sala de aula. Investigações matemáticas na aula e no currículo. Lisboa: APM. Consultado em outubro, 15, 2018 de [http://www.rc.unesp.br/igce/demac/maltempi/cursos/curso3/Artigos/Artigos\\_arquivos/p\\_153-167.pdf](http://www.rc.unesp.br/igce/demac/maltempi/cursos/curso3/Artigos/Artigos_arquivos/p_153-167.pdf)
- Ausubel, D.P. (1963). *The psychology of meaningful verbal learning*. New York, Grune and Stratton.
- Ausubel, D.P. (1968). *Educational psychology: a cognitive view*. New York, Holt, Rinehart and Winston.
- Ausubel, D.P. et al. (1980). *Psicologia Educacional*. Rio de Janeiro: Ed. Interamericana.
- Barros, L. & Bellemain, F. (2010). Geometria Dinâmica com o auxílio do LOGO: um estudo exploratório, XIV EBRAPEM. Campo Grande, 4 a 6 de Setembro de 2010.
- Boavida, A. M. (2005). A argumentação na aula de Matemática: Um olhar sobre o trabalho do professor. In J. Brocardo, F. Mendes, & A. M. Boavida (Eds.), *Atas do XVI Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Setúbal: APM.13-43.
- Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação - uma*

introdução à teoria e aos métodos. Coleção Ciências da Educação. Porto: Porto Editora.

Bravo, F. (2010). Incursão pelo Geometer's Sketchpad com alunos do 1º ciclo do E.B. Educação e Matemática, 108, Lisboa: APM, 37-41.

Breda, A. et al. (2011). Geometria e Medida no Ensino Básico. Lisboa: Ministério da Educação, Direcção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular. Consultado em janeiro, 25, 2018 de [http://repositorio.ipv.pt/bitstream/10400.19/1150/4/070\\_Brochura\\_Geometria.pdf](http://repositorio.ipv.pt/bitstream/10400.19/1150/4/070_Brochura_Geometria.pdf)

Brooks, J & Brooks, M. (1999). In Search of Understanding – The Case for Constructivist Classrooms (revised edition)

Cabrita, I. et al. (2008). Novas Trajetórias em Matemática. Aveiro: Universidade de Aveiro.

Cabrita, I. & Silveira, A. (2013). O GeoGebra como ferramenta de apoio à aprendizagem significativa das Transformações Geométricas Isométricas. ID, 5(1), 149-170. Consultado em outubro, 12, 2018 de <http://revistas.ua.pt/index.php/ID/article/view/2425>

Cadavez, C. (2013). A utilização de software educativo na aprendizagem da Geometria por alunos do 3º Ciclo do Ensino Básico. Bragança: Instituto Politécnico de Bragança, Escola Superior de Educação. Consultado em janeiro, 12, 2018 de <https://bibliotecadigital.ipb.pt/bitstream/10198/7641/3/teseCristinaV3finalCapa.pdf>

Canavarro, A.P. (2011). Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. Educação e Matemática, 115, 11-17. Consultado em setembro, 16, 2018 de <https://dspace.uevora.pt/rdpc/bitstream/10174/4265/1/APCanavarro%202011%20EM115%20pp11-17%20Ensino%20Explorat%C3%B3rio.pdf>

- Candeias, N., & Ponte, J. P. (2006). Uma proposta curricular para o ensino da geometria do 8.º ano. Actas do XV Encontro de Investigação em Educação Matemática (CD-ROM). Encontro de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação, 7-9 Maio, Monte Gordo
- Carneiro, R. (2000). *Educar Hoje – Ajudar a Aprender*. Lisboa: Lexicultural.
- Carvalho, C. & Neves, M.C. (2006). A importância da afetividade na aprendizagem da matemática em contexto escolar: Um estudo de caso com alunos do 8.º ano. *Análise Psicológica – XXIV*, 201-215. Consultado em novembro, 23, 2018 de <http://www.scielo.mec.pt/pdf/aps/v24n2/v24n2a07.pdf>
- César, M et al. (2014). Praticar a inclusão e não apenas falar de inclusão. *Interações*, 10 (33), 18 – 72. Consultado em maio, 20, 2018 de <https://revistas.rcaap.pt/interaccoes/issue/view/84>
- Coll, C. et al. (2001). *O construtivismo na sala de aula. Novas perspetivas para a ação pedagógica*. Porto: Edições ASA
- Correia, D. S. M. L. (2013). A perceção dos docentes de educação regular e da educação especial sobre a sua prática colaborativa inclusiva, na educação pré-escolar e no ensino básico. Escola Superior de Educação João de Deus, Lisboa.
- Costa, A & Oliveira, L. (2015) Investigação qualitativa em educação: O professor – investigador. *Revista Portuguesa de Investigação*, 28(2), 183-188
- Cuban, L. (2001). *Oversold And Underused Computers in The Classroom*. Harvard.
- Cunha, H., et al. (1996). Investigações matemáticas na sala de aula. In P. Abrantes, L. C. Leal, & J. P. Ponte (Orgs.), *Investigar para aprender matemática*. Lisboa: APM, 173-191. Consultado em janeiro, 24, 2018 de [https://www.researchgate.net/publication/242306039\\_Investigacoes\\_matematicas\\_na\\_sala\\_de\\_aula](https://www.researchgate.net/publication/242306039_Investigacoes_matematicas_na_sala_de_aula)

- Cunningham, D. et al. (1993). Textbook of the Future. In C. McKnight (Ed.). Hypertext: A psychological perspective. London: Ellis Horwood Publishing.
- De Villiers, M. (2003). Rethinking Proof with the Geometr's Sketchpad. Key Curriculum Press. Emeryville, CA: USA.
- Douek, N. & Pichat (2003). From oral to written texts in grade I and the approach to mathematical argumentation. In N. A. Pateman, B. J. Dougherty & J. T. Zilliox (Eds.), Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education held jointly with the 25th Conference of PME-NA , Volume 2). Honolulu: CRDG, College of Education of University of Hawai. 341–348. Consultado em novembro, 12, 2018 de <https://eric.ed.gov/?id=ED500950>
- Estanqueiro, A. (2010). Boas Práticas na Educação – O Papel dos Professores. 1ª ed. Lisboa: Editorial Presença.
- Estêvão, C.V. (2013). Políticas de Educação e Autonomia: Algumas Reflexões Perversas Sobre Temáticas Abençoadas. Revista Educação -Temas e Problemas, 12 e 13, 77-88.
- Ferreira, E. M. B. (2005). Ensino e Aprendizagem de Geometria em Ambientes Geométricos Dinâmicos: O tema de Geometria do Plano no 9º ano de escolaridade. Dissertação de Mestrado em Educação. Universidade do Minho.
- Fino, C. (2001). Vygotsky e a Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP): Três implicações pedagógicas. Revista Portuguesa de Educação, 14 (2). Consultado em dezembro, 1, 2018 de <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=37414212>
- Fino, C. (2004). Convergência entre a teoria de Vigotsky e o Construtivismo. Universidade da Madeira. Consultado em dezembro, 20, 2018 de [http://www3.uma.pt/carlosfino/Documentos/Draft\\_Convergencia\\_Vygotsky\\_construtivismo\\_construcionismo.pdf](http://www3.uma.pt/carlosfino/Documentos/Draft_Convergencia_Vygotsky_construtivismo_construcionismo.pdf)

- Fonseca, H. (2000). Os processos matemáticos e o discurso em atividades de investigação na sala de aula (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.
- Fontes, A. & Freixo, O. (2004). Vygotsky e a Aprendizagem Cooperativa. Lisboa: Livros Horizonte.
- Freire, S. (2008). Um olhar sobre a inclusão. *Revista de Educação*, Vol. XVI, nº1, 5-20.
- Freitas, L. e Freitas, C. (2003). *Aprendizagem Cooperativa*. Porto: Edições Asa.
- Gisbert, D. (2002). Tutoria entre iguais. Barcelona: Departamento de Psicologia da Educação da Universidade Autónoma de Barcelona.
- Hohenwart, M., & Jones, K. (2007). Ways of linking geometry and algebra: the case of Geogebra. In D. Kuchemaan (Ed.) *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 27(3).
- Hohenwarter, M., & Preiner, J. (2007). Dynamic Mathematics With GeoGebra. *Journal of Online Mathematics and its Applications*. ID 1448, vol. 7, March 2007. Consultado em setembro, 25, 2018 de <https://www.maa.org/press/periodicals/loci/joma/dynamic-mathematics-with-geogebra>.
- Jonassen, D. H. (2000). *Computadores, Ferramentas Cognitivas. Desenvolver o pensamento crítico nas escolas*. Porto: Porto Editora. ISBN: 978-972-0-34173-0.
- Justino, D. (2010). *Difícil é Educá-los*. Lisboa: Fundação Francisco Manuel dos Santos.

- King, J., & Schattschneider, D. (2003). Geometria dinâmica. Selecção de textos do livro Geometry Turned On! Lisboa: APM
- Lafortune, L. e Saint-Pierre, L. (2001). A Afectividade e a Metacognição na Sala de Aula. Lisboa: Instituto Piaget.
- Leitão, F. A. R. (2006). Aprendizagem Cooperativa e Inclusão. Mira-Sintra: Edição do autor.
- Lessard-Hérbert, M. et al.(2008). Investigação qualitativa. Fundamentos e práticas. Lisboa: Instituto Piaget.
- Little, C. (2008). Interactive geometry in the classroom: old barriers and new opportunities. Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics, 28 (2).
- Loomis, E. S. (1968). The Pythagorean Proposition, Classics in Mathematics Education Series. Washington D.C.: National Council of Teachers of Mathematics.Consultado em abril, 27, 2017 de <https://eric.ed.gov/?id=ED037335>
- Lopes, J. & Silva, H. S. (2009). A Aprendizagem Cooperativa na sala de aula – um guia prático para o professor. Lisboa: Lidel - Edições Técnicas.
- Lopes, J. e Silva, H. S. (2010). O Professor faz a Diferença. Lisboa: Lidel - Edições Técnicas
- Loura, C. et al. (2015). Monitorização dos Cursos Vocacionais. Anos letivos 2012/13, 2013/14 e 2014/15. Lisboa: Direção-Geral de Estatística da Educação e Ciência. Consultado em abril, 20, 2017, de [http://www.dgeec.mec.pt/np4/299/%7B\\$clientServletPath%7D/?newsId=553&fileName=Relat\\_rioMonitoriza\\_\\_oCursosVocacionais2.pdf](http://www.dgeec.mec.pt/np4/299/%7B$clientServletPath%7D/?newsId=553&fileName=Relat_rioMonitoriza__oCursosVocacionais2.pdf)
- Lüdke L, M. e Marli A. (1986) Pesquisa em educação: abordagens qualitativas. São Paulo: EPU.

- Mason, J. et al.(1982). *Thinking mathematically*. Bristol: Addison-Wesley.
- Matos, J. & Serrazina, M. (1996). *Didática da Matemática*. Lisboa: Universidade Aberta
- Mehanovic, S. (2009). Learning Based on Dynamic Software Geogebra. Consultado em novembro, 12, 2018 de <http://isis.ku.dk/kurser/blob.aspx?feltid=229084>
- Moreira, M. (2011). Aprendizagem significativa: um conceito subjacente. *Meaningful Learning Review* – V1(3), 25-46 Consultado em 15, novembro, 2018 de [https://lief.if.ufrgs.br/pub/cref/pe\\_Goulart/Material\\_de\\_Apoio/Referencial%20Teorico%20-%20Artigos/Aprendizagem%20Significativa.pdf](https://lief.if.ufrgs.br/pub/cref/pe_Goulart/Material_de_Apoio/Referencial%20Teorico%20-%20Artigos/Aprendizagem%20Significativa.pdf)
- NCTM (1991). *Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar*. Lisboa: Associação de professores de Matemática e Instituto de Inovação Educacional.
- NCTM (2000). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM
- Nelsen, B. (1993) - *Proofs without words: exercises in visual thinking*. Washington: MAA. Consultado em abril, 20, 2017 de [https://is.muni.cz/el/1441/podzim2013/MA2MP\\_SMR2/um/Nelsen--Proofs\\_without\\_Words.pdf](https://is.muni.cz/el/1441/podzim2013/MA2MP_SMR2/um/Nelsen--Proofs_without_Words.pdf)
- Novak, J.& Gowin D. (1999). *Aprender a Aprender*, 2ª ed. Lisboa: Plátano Edições Técnicas.
- Oliveira, H. & Varandas, J. (1999). História do Teorema de Pitágoras. ICM - Página dos alunos. Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. Consultado em abril, 20, 2017 de <http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm25/pitagoras/geralhpitagoras.htm>

- Paiva, J. et al.(2015). *O multimédia no ensino das ciências*. Lisboa: Fundação Francisco Manuel dos Santos.
- Palm, T. (2009). Theory of authentic task situations. In L. Verschaffel, B. Greer, W. Van Dooren & S. Mukhopadhyay (Eds.), *Words and worlds: Modeling verbal descriptions of situations* Rotterdam: Sense, 3-19. Consultado em janeiro, 22, 2018 de <https://www.sensepublishers.com/media/1281-words-and-worlds.pdf#page=32>
- Ponte, J. P. (2003). Investigar, ensinar e aprender. Atas do ProfMat 2003 (CD-ROM). Lisboa: APM. 23-39. Consultado em maio, 27, 2018 de [http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/03-Ponte\(Profmat\).pdf](http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/03-Ponte(Profmat).pdf)
- Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* Lisboa: APM. 11-34. Consultado em maio, 20, 2018 de [http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/fdm/textos/ponte%2005\\_gti-tarefas-gestao2.pdf](http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/fdm/textos/ponte%2005_gti-tarefas-gestao2.pdf)
- Ponte, J. P. (2006). Estudos de caso em educação matemática. *Bolema*, 25, 105-132. Consultado em maio, 5, 2018 de [https://www.researchgate.net/publication/277117517\\_Estudos\\_de\\_Caso\\_em\\_Educacao\\_Matematica](https://www.researchgate.net/publication/277117517_Estudos_de_Caso_em_Educacao_Matematica)
- Ponte, J.P. & Canavarro, A. (1997). *Matemática e Novas Tecnologias*. Lisboa: Universidade Aberta.
- Portaria n.º 292-A/2012 de 26 de setembro de 2012. Diário da República nº187, 1ª Série. Ministério da Educação. Lisboa. Consultado em abril, 27, 2017 em [https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/EPIPSE/portaria\\_n.o\\_292-a-2012\\_de\\_23\\_de\\_agosto.pdf](https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/EPIPSE/portaria_n.o_292-a-2012_de_23_de_agosto.pdf)

- Portaria n.º 341/2015 de 9 de outubro de 2015. Diário da República nº198, 1ª Série. Ministério da Educação. Lisboa. Consultado em abril, 27, 2017 em <https://dre.pt/application/conteudo/70497208>
- Praia, J. (2000). Aprendizagem significativa em D. Ausubel: Contributos para uma adequada visão da sua teoria e incidências no ensino. In M. A. Moreira, J. A. Valadares, C. Caballero, V. D. Teodoro (Org.) Contributos do III Encontro Internacional sobre Aprendizagem Significativa, Peniche, 2000, 121-134. Consultado em novembro, 15, 2018 de <https://repositorioaberto.uab.pt/bitstream/10400.2/1320/1/Livro%20Peniche.pdf>
- Ramos, M. (2009). Teoria do Caos – Potencialidades na Modelização da Aprendizagem de Conceitos Científicos. Lisboa: Edições Colibri.
- Raposo, R. (2009) O Trabalho Colaborativo em Plataforma LMS (Moodle) e a Aprendizagem Matemática. Universidade de Lisboa. Consultado em outubro, 12, 2018 de <http://repositorio.ul.pt/handle/10451/3583>
- Reis, A.B.& Rei, C.M. (2015). Avaliação externa da experiência piloto dos cursos vocacionais- relatório final. Lisboa: Direção-Geral de Estatística da Educação e Ciência; Agência Nacional para a Qualificação e o Ensino Profissional, EP Consultado em abril, 20, 2017 de [http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Noticias\\_Imagens/2015\\_08\\_avaliacao\\_externa\\_da\\_experiencia\\_piloto.pdf](http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Noticias_Imagens/2015_08_avaliacao_externa_da_experiencia_piloto.pdf)
- Ribeiro, A. (2005). O Cabri-Géomètre e a construção de uma nova cultura matemática. Tese de Doutoramento. Aveiro: Universidade de Aveiro, Departamento de Didática e Tecnologia Educativa. Consultado em setembro, 12, 2018 de <https://ria.ua.pt/bitstream/10773/1474/1/2009000712.pdf>
- Rodrigues, M. L., et al. (2014). A construção do sistema democrático de ensino. In Rodrigues, M.L (Org.), 40 anos de Políticas de Educação em Portugal- Volume I- a construção do sistema democrático de ensino. Lisboa: Almedina, 35-88

- Sangwin, C. J. (2008). Geometrical functions: tools in GeoGebra. *MSOR Connections*, 8(4), 18–20. Consultado em novembro, 5, 2018 de <https://www.heacademy.ac.uk/system/files/msor.8.4f.pdf>
- Savery, J. & Duffy, T. (1995). Problem Based Learning: An Instructional Model and Its Constructivist Framework. *Educational Technology*, 35(5), 31-38 consultado em novembro, 13, 2018 de <https://pdfs.semanticscholar.org/549c/9ea78fe19aa609a66e84ea0b2ecda5e731bf.pdf>
- Serrazina, L., et al. (2005). Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores do 1.º ciclo.
- Stein, M. et al. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning*, 10(4), 313–340. Consultado em novembro, 17, 2018 de <http://www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/GU/L930MA/H13/Mathematical%20Thinking%20and%20Learning.pdf>
- Struik, D.J. (1997). *História Concisa das Matemáticas*, 3ª edição. Lisboa: Ciência Aberta-Gradiva
- Swetz, F. & Katz, V. (2011). *Mathematical treasures - Zhou Bi Suan Jing*. Loci. Mathematical Association of America. Consultado em maio, 25, 2017 de <https://www.maa.org/press/periodicals/convergence/mathematical-treasures-zhoubi-suanjing>
- Topping, K. (2000). Tutoria. Academia Internacional de Educação-UNESCO. Consultado em janeiro, 30, 2019 de [http://www.ibe.unesco.org/sites/default/files/resources/edu-practices\\_05\\_por.pdf](http://www.ibe.unesco.org/sites/default/files/resources/edu-practices_05_por.pdf)

- Valadares, J. (2011). A teoria da aprendizagem significativa como teoria construtivista. *Meaningful Learning Review* – V1(1), 36-57. Consultado em novembro, 12, 2018 de <http://www.if.ufrgs.br/asr/?go=artigos&idEdicao=1>
- Valadares, J. (2014). *Organizadores Gráficos facilitadores da Aprendizagem Significativa- Diagramas em Vê e Mapas de conceitos*. Lisboa : UIED – Series on Educational and Development.
- Vasconcelos, O. (2015). *Motivação e Disciplina- Percepção de Alunos e Professores da Escola de Ensino Básico e Secundário da Bemposta, em Portimão*. Universidade Fernando Pessoa. Consultado em abril, 15, 2017 de <https://bdigital.ufp.pt/bitstream/10284/4815/1/DISSERTA%C3%87%C3%83O%20OLGA%20VASCONCELOS.pdf>
- Veloso, E., & Candeias, N. (2003). Prefácio. In J. King & D. Schattschneider, (Eds.). *Geometria dinâmica. Seleção de textos do livro Geometry Turned On!* Lisboa: APM.
- Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes* Cambridge, Mass.: Harvard University Press.
- Vygotsky, L.S. (1987). *The Collected Works of LS. Vygotsky. vol. 1, Problems of General Psychology*, N.Y.: Plenum Press.
- Wilson, B. (1996). *Constructivist learning environments: Case studies in instructional design*. Englewood Cliffs, NJ: Educational Technologies Publications.310-312. Consultado em novembro, 13, 2018 de <https://ris.utwente.nl/ws/files/6687033/00650010.pdf>
- Yin, R. (1984). *Case study research: Design and methods*. Thousand Oaks: Sage Publications.

# ANEXOS

Objetivo: Dominar ferramentas do GeoGebra necessários para o estudo do Teorema de Pitágoras.

Tarefa - GeoGebra

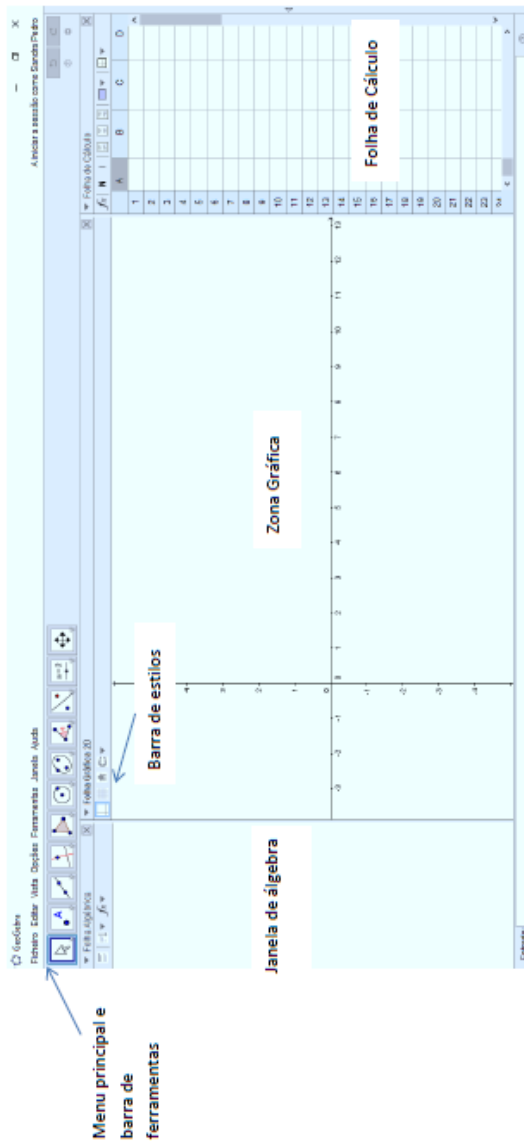
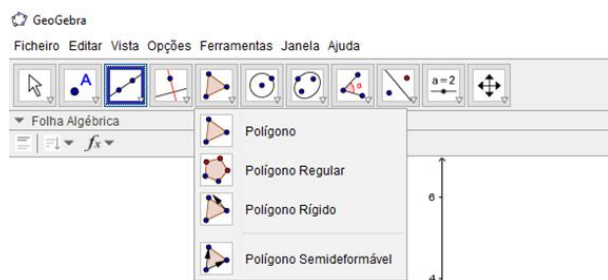





















Figura 1

Para além dos ícones visíveis na barra de ferramentas, em cada um podemos encontrar mais opções, clicando no triângulo que está desenhado no canto inferior direito, como se pode ver no exemplo da figura 2



Alguns comandos importantes :

Comando	Breve descrição
 Mover	arrasta e move pontos livres.
 novo ponto	Cria um ponto. As coordenadas podem ser alteradas na folha algébrica.
 interseção de dois objetos	Clica-se em dois objetos e cria-se o ponto correspondente à interseção
 reta (dois pontos)	Selecionam-se dois pontos para obter a reta que passa por eles.
 Segmento de reta (dois pontos)	Selecionam-se dois pontos para obter o segmento de reta que tem início e fim nestes.
 segmento de reta(ponto, comprimento)	Seleciona-se um ponto e digita-se o comprimento do segmento no quadro que surge.
 semirreta (dois pontos)	Selecionar um primeiro ponto que será a origem da semirreta e um segundo ponto que é por onde a semirreta irá passar.
 reta perpendicular	Seleciona-se um ponto e depois seleciona-se a reta à qual a nova reta será perpendicular.
 polígono	Seleciona-se o número de pontos correspondentes com os vértices do polígono. O último ponto coincide com o primeiro.
 polígono regular	Seleciona-se dois pontos, correspondentes a um lado do polígono e depois digita-se o número de lados no quadro que surge.
 circunferência (centro e ponto)	Seleciona-se o primeiro ponto que corresponde ao centro da circunferência e um segundo ponto sobre a circunferência.
 circunferência (centro e raio)	Seleciona-se um ponto que é o centro da circunferência e digita-se o comprimento do raio no quadro que surge.
 ângulo	Seleciona-se três pontos e obtém-se o ângulo formado pelas semirretas.
 ângulo com uma dada amplitude	Seleciona-se dois pontos e digita-se a amplitude do ângulo no quadro que surge.

 distância ou comprimento	Seleciona-se dois pontos e obtêm-se a sua distância.
 área	Seleciona-se um polígono e obtêm-se a sua área.
 inserir texto	Clica-se na folha gráfica e digita-se o texto no quadro que aparece.
 arrastar a folha gráfica	Seleciona-se e arrasta a folha gráfica,
 Ampliar	Amplia a folha gráfica,
 reduzir	Reduz a folha gráfica
 mostrar/ esconder objeto	Alterna-se entre mostrar e esconder um objeto
 mostrar/esconder rótulo	Alterna-se entre mostrar e esconder o nome do objeto
 apagar	Seleciona-se o objeto que se pretende apagar.
 Mostrar e esconder eixos	Comando na barra de estilos
 Mostrar e esconder grelha	Comando na barra de estilos

Usando o GeoGebra:

1. Marca um ponto e atribui-lhe a letra G.
2. Desenha e mede um segmento de reta.
3. Constrói um triângulo RST sabendo que:
  - 3.1. os lados medem 3, 5 e 7 cm.
  - 3.2. dois lados medem 4 e 6 cm e o ângulo por eles formado é de  $45^\circ$
  - 3.3. um lado mede 5 cm e os ângulos adjacentes são de  $35^\circ$  e  $62^\circ$
4. Constrói um triângulo retângulo e:
  - 4.1. Mede os comprimentos dos lados
  - 4.2. Determina a sua área
  - 4.3. Mede os seus ângulos
  - 4.4. Insere um texto com a classificação do triângulo quanto aos ângulos e quanto aos lados.
5. Constrói um segmento de reta e uma reta perpendicular a esse segmento. Determina o ponto de interseção.
6. Desenha um segmento de reta e constrói um quadrado cujo lado é o segmento de reta.

Módulo 7 –Ficha nº23

Matemática

Curso Vocacional

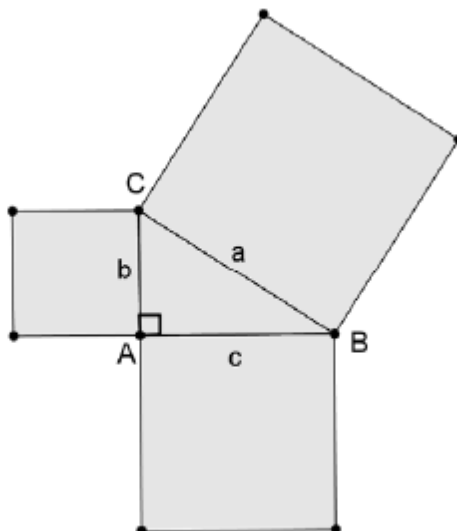
2016/17

**Objetivo:** Conjeturar e verificar o Teorema de Pitágoras

Tarefa - Teorema de Pitágoras

1.

- 1.1. Constrói um triângulo retângulo escaleno.
- 1.2. Sobre cada lado do triângulo constrói quadrados, conforme a figura.



- 1.3. Usando o GeoGebra, determina a área de cada um desses quadrados.
  - 1.4. Estabelece uma relação entre as áreas desses quadrados.
  - 1.5. Se arrastares um dos vértices do triângulo essa relação mantém-se?
  - 1.6. Atribuindo letras às medidas dos comprimentos dos lados do triângulo, escreve uma expressão algébrica que traduza a relação encontrada.
2. Será que a relação entre as áreas se mantém se em vez de quadrados se construir outros polígonos regulares sobre os lados do triângulo retângulo? Investiga com outros polígonos regulares e regista as tuas conclusões.
3. Faz agora o mesmo estudo que fizeste na pergunta 1, mas considerando um triângulo não retângulo. Será que a relação entre as áreas dos quadrados também se mantém?

## ANEXO 3 – FICHA NÚMERO 3

### Módulo 7 –Ficha nº24

#### Matemática

Curso Vocacional

2016/17

**Objetivo:** Aplicação do Teorema de Pitágoras na resolução de problemas

Tarefa - Teorema de Pitágoras – Resolução de problemas

1. Utilizando o GeoGebra, desenha dois quadrados diferentes e depois desenha um terceiro quadrado cuja área seja a soma das áreas dos quadrados dados. Explica o teu raciocínio.
  
2. Verifica se são triângulos retângulos, os triângulos cujos lados têm as medidas a seguir indicadas (resolve esta questão utilizando o GeoGebra e efetuando os cálculos):
  - a. 5, 12, e 15 cm
  - b. 3, 4 e 5 cm
  - c. 5, 12 e 13 cm
  - d. 7, 8 e 10 cm
  - e. 12, 16 e 20 cm

**NOTA: A partir daqui debes resolver os problemas utilizando papel, lápis e calculadora.**

**Podes utilizar o GeoGebra para verificar soluções.**

3. Utilizando valores aproximados ao mm, determina:
  - a. O comprimento da diagonal de um quadrado cujo lado mede 8 cm;
  - b. A altura de um triângulo equilátero cujo lado mede 8 cm;
  - c. O lado de um losango sabendo que as diagonais medem 12 e 16 cm;respetivamente;
  - d. A área de um quadrado cuja diagonal mede 32 m;
  - e. A área dos hexágonos regulares cujo perímetro é 72 cm.

4. Nos próximos Figueirólimpicos pretende-se colocar, na parede do bloco A, uma faixa alusiva ao evento. A faixa, de acordo com a figura 1, vai do ponto A ao ponto C. Quantos metros tem a faixa? Apresenta o resultado arredondado às décimas.



Figura 1

5. A figura 2 é o primeiro lance de escadas para a biblioteca. Determina a altura e largura de cada um dos 10 degraus. Apresenta os resultados aproximados ao cm.

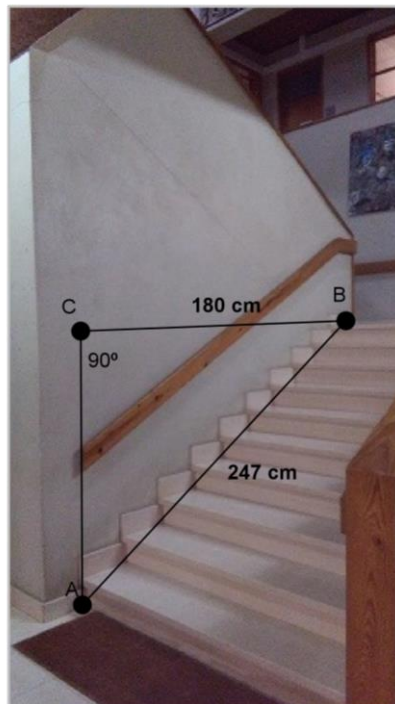
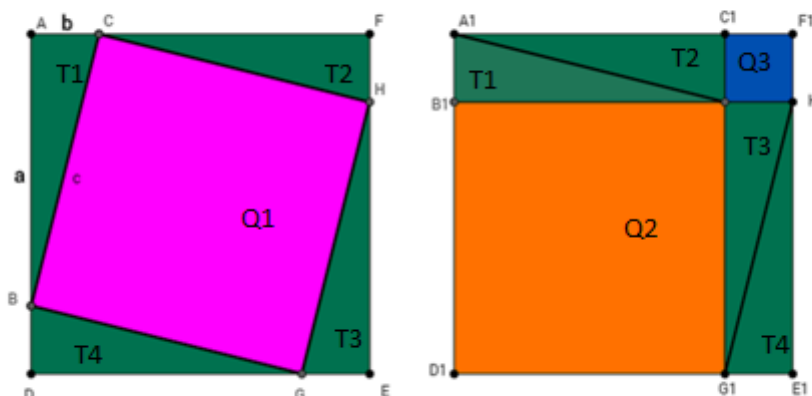


Figura 2

**Objetivo:** Confirmar conjecturas demonstrando o Teorema de Pitágoras.

Tarefa - Teorema de Pitágoras – Demonstração

2. Utiliza o link <https://www.GeoGebra.org/o/qb9jMj2h> para visualizares a seguinte figura:



- 1.1. Estão representados dois quadrados iguais, ADEF e  $A_1D_1E_1F_1$ . Cada um dos quadrados apresenta uma decomposição. **Os triângulos são todos congruentes.**
- Justifica que  $Q_1$  é um quadrado.
  - Se movimentares o seletor  $a$ , a justificação anterior mantém-se válida?
  - Escreve uma igualdade que relacione as áreas de  $Q_1$ ,  $Q_2$  e  $Q_3$ .
  - A igualdade anterior continua válida se movimentares o seletor  $a$ ?
- 1.2. Observa o quadrado ADEF:
- Utilizando os comprimentos  $a, b$  e  $c$  encontra expressões algébricas para exprimir as áreas dos seguintes polígonos:
    - quadrado BCHG
    - triângulo ABC
    - quadrado AFED

- b) As expressões algébricas encontradas na alínea anterior continuam válidas se movimentares o seletor a.
- c) Escreve uma igualdade que relacione a área do quadrado AFED com a área dos cinco polígonos que o compõem.
- d) Simplifica essa igualdade o mais possível.

## ANEXO 5 – PLANO DE AULA 1

### Módulo 7

### Matemática

Curso Vocacional

2016/17

#### Plano de Aula - Fichanº22

- Pretende-se com esta ficha que os alunos dominem as ferramentas/comandos do GeoGebra necessários para a demonstração e aplicação do Teorema de Pitágoras.
- Módulo: Geometria III
  
- Conteúdo: Conhecimentos de GeoGebra para o estudo do Teorema de Pitágoras
  
- Conhecimentos prévios dos alunos: Classificação de triângulos; polígonos regulares; áreas de polígonos; determinação de ângulos de um triângulo; retas perpendiculares.
  
- Aprendizagens visadas:

Domínio das ferramentas do GeoGebra necessárias para o estudo do Teorema de Pitágoras.

- Recursos: Tablets; GeoGebra; videoprojetor; computador
  
- Duração prevista: 1 bloco de 90 minutos
  
- Metodologia de trabalho:
  - Apresentação da ferramenta
  - Trabalho de pares.
    - o aluno terá um papel ativo, explicando e justificando as estratégias utilizadas e as conclusões obtidas.
    - o professor terá um papel orientador assegurando intervenções ordeiras; esclarecimento de dúvidas e apresentação de diferentes possibilidades de resolução.

- Desenvolvimentos da aula:

No início da aula o professor apresenta a metodologia de trabalho e distribui o enunciado da ficha. (5 minutos)

Apresenta a ferramenta, mostrando os comandos e funções necessárias para a resolução da ficha. (20 minutos).

Os alunos iniciam a resolução da ficha a pares (45 minutos). Durante a resolução da ficha o professor circula pela sala dirigindo-se aos alunos. O trabalho da turma será interrompido sempre que surja uma dúvida pertinente de discussão ou esclarecimento coletivo. O professor regista a interação entre os alunos e as questões que lhe são colocadas. No final será feita uma discussão e correção da tarefa (20 minutos).

## ANEXO 6 – PLANO DE AULA 2

### Módulo 7

### Matemática

Curso Vocacional

2016/17

#### Plano de Aula –Ficha de trabalho nº23

- Pretende-se com esta ficha que os alunos conjeturem e verifiquem o Teorema de Pitágoras, utilizando o GeoGebra (AGD)

- Módulo: Geometria III

- Conteúdo: Teorema de Pitágoras.

- Conhecimentos prévios dos alunos: Classificação de triângulos.

- Capacidades transversais:

Raciocínio matemático: formulação e teste de conjeturas.

Comunicação matemática: interpretação, representação e discussão.

- Aprendizagens visadas:

Conjetura e verificação do Teorema de Pitágoras

- Recursos: Tablets; GeoGebra; Videoprojetor; computador

- Duração prevista: 1 bloco de 90 minutos

- Metodologia de trabalho:

-Trabalho de pares

- Discussão em grande grupo

- o aluno terá um papel ativo, explicando e justificando as estratégias utilizadas e as conclusões obtidas.

- o professor terá um papel orientador, colocando questões que facilitem, promovam e desafiem o pensamento de cada aluno; ouvindo as ideias dos alunos; pedindo aos alunos que clarifiquem e justifiquem as suas ideias oralmente e por escrito; decidindo como e quando se deve fornecer informação ou esclarecer uma questão; gerindo a participação dos alunos na discussão.

➤ Desenvolvimentos da aula:

No início da aula o professor coloca as seguintes questões: como se classificam os triângulos quanto aos ângulos e quanto aos lados? O que é um polígono? O que é um polígono regular? (10 minutos)

Respondidas as questões, pela turma, o professor informa os alunos sobre a metodologia de trabalho e distribui a ficha de trabalho.

Durante a resolução da ficha, em trabalho de pares, o professor circula pela sala dirigindo-se aos alunos. O trabalho da turma será interrompido sempre que surja uma dúvida pertinente de discussão ou esclarecimento coletivo. O professor regista a interação entre os alunos e as questões que lhe são colocadas. (60 minutos)

Questão 1

Pretende-se que os alunos conjeturem e verifiquem que a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos é igual à área do quadrado construído sobre a hipotenusa e ainda que escrevam uma expressão algébrica que traduza esta igualdade. Nesta fase os alunos ainda não ouviram falar em catetos e hipotenusa.

Questão 2

Nesta questão pretende-se que os alunos conjeturem e verifiquem que a igualdade encontrada na questão 1 é válida para qualquer polígono regular de  $n$  lados construído sobre os lados de um triângulo retângulo (extensão do teorema de Pitágoras)

Questão 3

Esta questão é fundamental para que os alunos percebam que esta relação só se verifica em triângulos retângulos.

No final será feita uma discussão e correção da tarefa (20 minutos).

As discussões coletivas são uma oportunidade de partilha e construção de ideias, conceções, resultados e estratégias.

O professor decide a ordem das intervenções, promove a discussão solicitando justificações fundamentadas e verifica se todas as dúvidas dos alunos ficam esclarecidas.

No fecho da discussão será colocado no quadro o Teorema de Pitágoras que todos os alunos devem registar no caderno diário.

O professor deve registar as questões feitas pelos alunos, os erros mais frequentes e as diferentes conjeturas/conclusões.

**Plano de Aula–Ficha de trabalho nº24**

- Pretende-se com esta ficha que os alunos resolvam problemas aplicando o Teorema de Pitágoras.
- Módulo: Geometria III
- Conteúdo: Teorema de Pitágoras.
- Conhecimentos prévios dos alunos: Teorema de Pitágoras
- Capacidades transversais:

Raciocínio matemático: seleção e utilização de fórmulas e métodos matemáticos para resolver problemas;

Comunicação matemática: interpretação de enunciados, justificação de raciocínios, desenvolvimento e discussão de argumentos;

Resolução de problemas: compreensão do problema e utilização de estratégias adequadas.

- Aprendizagens visadas:

Aplicação do Teorema de Pitágoras na resolução de problemas.

- Recursos: Tablets; GeoGebra; videoprojetor; computador
- Duração prevista: 1 bloco de 90 minutos+ 1 bloco de 45 minutos
- Metodologia de trabalho:

-Trabalho de pares

- Apresentação dos resultados.

- o aluno terá um papel ativo, explicando e justificando as estratégias utilizadas e as conclusões obtidas.

- o professor terá um papel orientador assegurando intervenções ordeiras; esclarecimento de dúvidas e apresentação de diferentes possibilidades de resolução.

➤ Desenvolvimentos da aula:

No início da aula o professor apresenta a metodologia de trabalho e distribui o enunciado da ficha.(10 minutos)

Os alunos iniciam a resolução da ficha a pares. (50 minutos). Durante a resolução da ficha o professor circula pela sala e intervém para: colocar questões que promovam o raciocínio; esclarecer pequenas dúvidas; envolver os colegas nas questões levantadas pelos pares; Remeter questões para os colegas; interromper o trabalho de pares caso surja uma dúvida que necessita de esclarecimento global para a turma.

Na correção e discussão da tarefa (30 minutos) o professor dinamiza a discussão solicitando justificações fundamentadas; verifica se são apresentadas todas as resoluções distintas que existam; garante o esclarecimento das dúvidas dos alunos.

Os alunos dirigem-se ao quadro: sempre que seja solicitada a apresentação de cálculos; exista uma resolução alternativa que deva ser registada por todos.

São apresentados os resultados de todas as questões.

As questões 3, 4 e 5 devem ser resolvidas com papel e lápis, no entanto os alunos podem recorrer ao GeoGebra para verificarem soluções.

O bloco de 45 minutos é a continuação do trabalho seguindo a mesma metodologia, utilizando 5 minutos para relembrar o ponto de situação, 30 minutos para resolução da tarefa e 15 minutos para apresentação/ discussão de resultados.

O professor deve registar as questões feitas pelos alunos, os erros mais frequentes e as diferentes resoluções.

As resoluções feitas pelos pares devem ser recolhidas para serem avaliadas, posteriormente serão devolvidas aos alunos.

## ANEXO 8 – PLANO DE AULA 4

### Módulo 7 –Ficha de trabalho nº25

#### Matemática

Curso Vocacional

2016/17

#### Plano de Aula

- Pretende-se com esta ficha que os alunos trabalhem a demonstração para que gradualmente se justifiquem de forma rigorosa os procedimentos.
- Módulo: Geometria III
- Conteúdo: Demonstração do Teorema de Pitágoras.
- Conhecimentos prévios dos alunos: Teorema de Pitágoras
- Capacidades transversais:

Raciocínio matemático: formulação e teste de conjeturas e generalizações, e desenvolvimento e avaliação de argumentos matemáticos incluindo cadeias dedutivas. Comunicação oral e escrita recorrendo à linguagem natural e à linguagem matemática, interpretando expressando e discutindo resultados, processos e ideias matemáticas.

- Aprendizagens visadas:

Confirmar conjeturas demonstrando.

- Recursos: Tablets; GeoGebra; papel; lápis; calculadora; videoprojetor; computador; moodle
- Duração prevista: 1 bloco de 90 minutos
- Metodologia de trabalho:

-Trabalho de pares

- Discussão em grande grupo

- o aluno terá um papel ativo, explicando e justificando as estratégias utilizadas e as conclusões obtidas.
- o professor terá um papel orientador, colocando questões que facilitem, promovam e desafiem o pensamento de cada aluno; ouvindo as ideias dos alunos; pedindo aos alunos que clarifiquem e justifiquem as suas ideias oralmente e por escrito; decidindo como e quando se deve fornecer

informação ou esclarecer uma questão; gerindo a participação dos alunos na discussão.

➤ Desenvolvimentos da aula:

No início da aula o professor apresenta a metodologia de trabalho (trabalho de pares) e distribui o enunciado da ficha. (10 minutos)

Os alunos iniciam a resolução da ficha a pares. (50 minutos). Os alunos acedem ao moodle para ter acesso ao link ( <https://www.GeoGebra.org/m/wCgsQRWE> ) que lhes dará acesso a uma demonstração do Teorema. Durante a resolução da ficha o professor circula pela sala e intervém para: colocar questões que promovam o raciocínio; esclarecer pequenas dúvidas; envolver os colegas nas questões levantadas pelos pares; Remeter questões para os colegas; interromper o trabalho de pares caso surja uma dúvida que necessita de esclarecimento global para a turma.

Na correção e discussão da tarefa (30 minutos) o professor dinamiza a discussão solicitando justificações fundamentadas e garante o esclarecimento das dúvidas dos alunos.

Os alunos dirigem-se ao quadro sempre que se verifique uma dúvida que deva ser apresentada a toda a turma; exista uma resolução alternativa que deva ser registada por todos.

Os alunos devem reconhecer algumas propriedades de figuras e relações entre elas e que com atividades sucessivas reconheçam uma demonstração geométrica e uma demonstração com recurso a expressões algébricas do Teorema de Pitágoras.

O professor deve registar as questões feitas pelos alunos, as interações entre alunos e as conclusões apresentadas.

# ANEXO 9- CONSTRUÇÕES NO GEOGEBRA

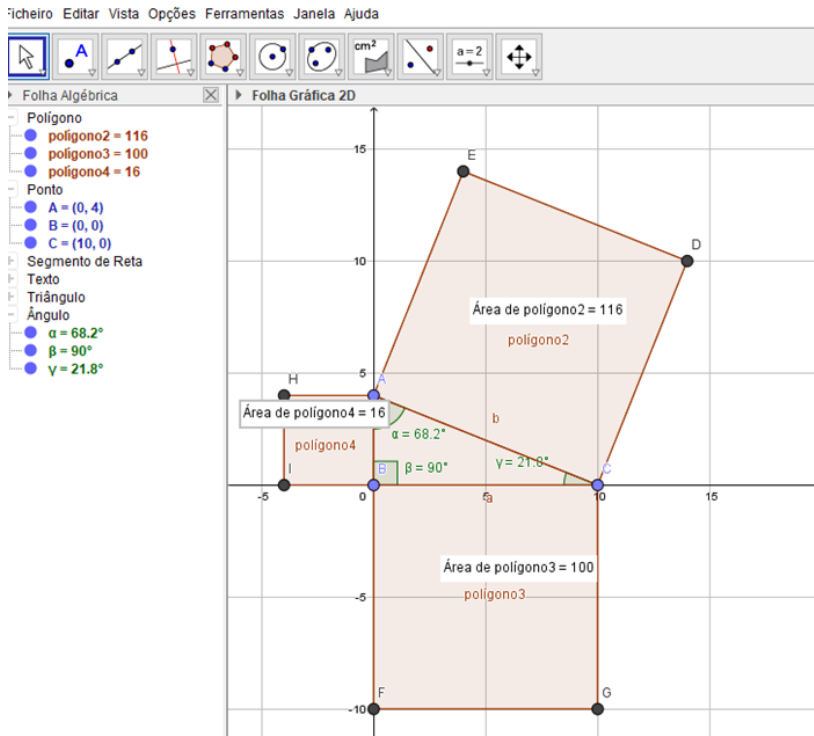


Figura exercício 1 -Par 1

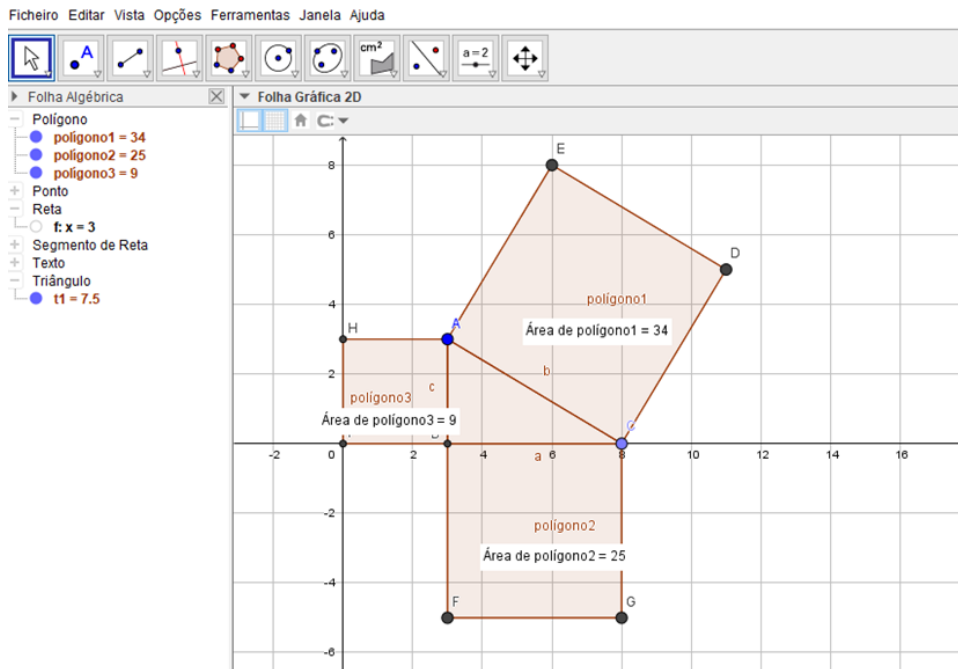
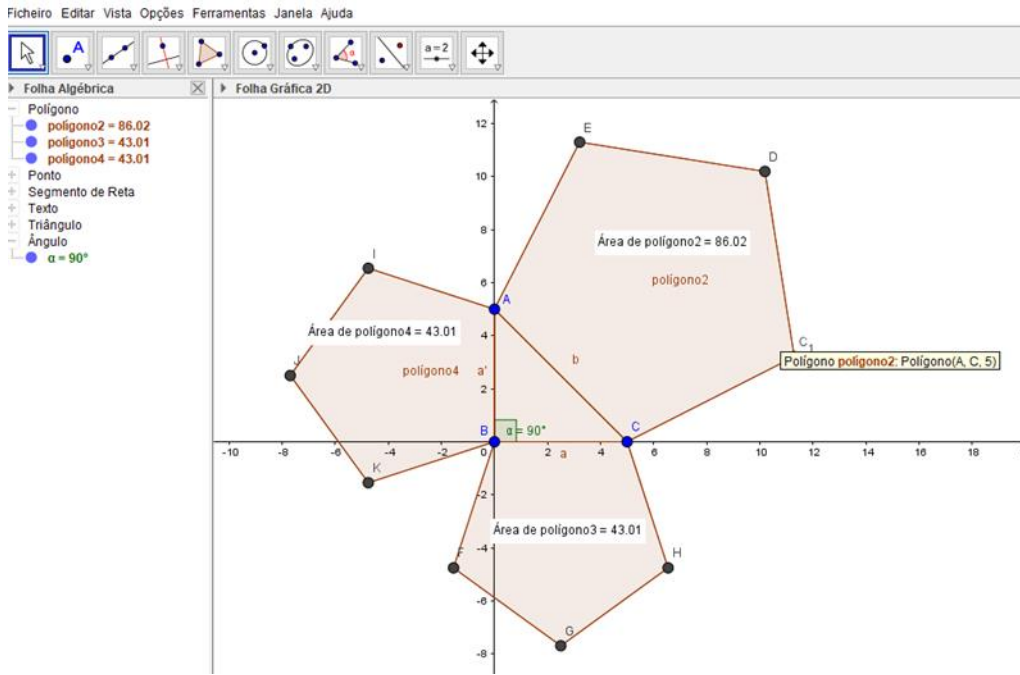
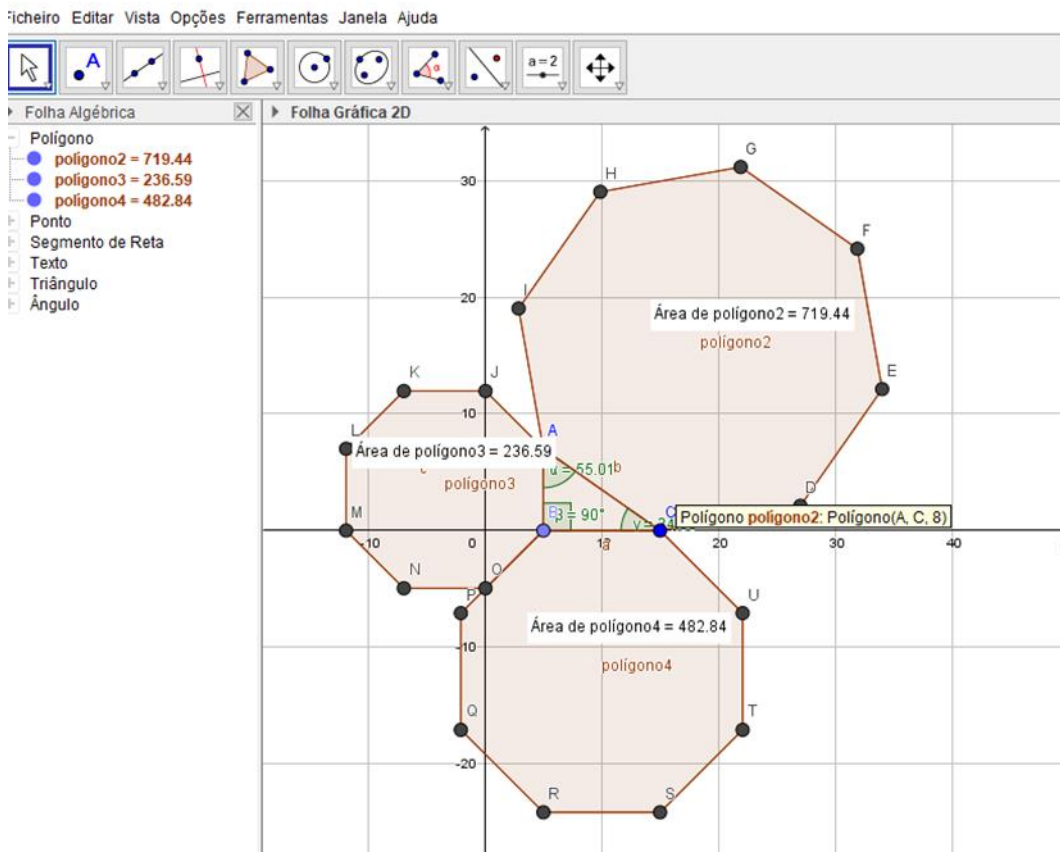


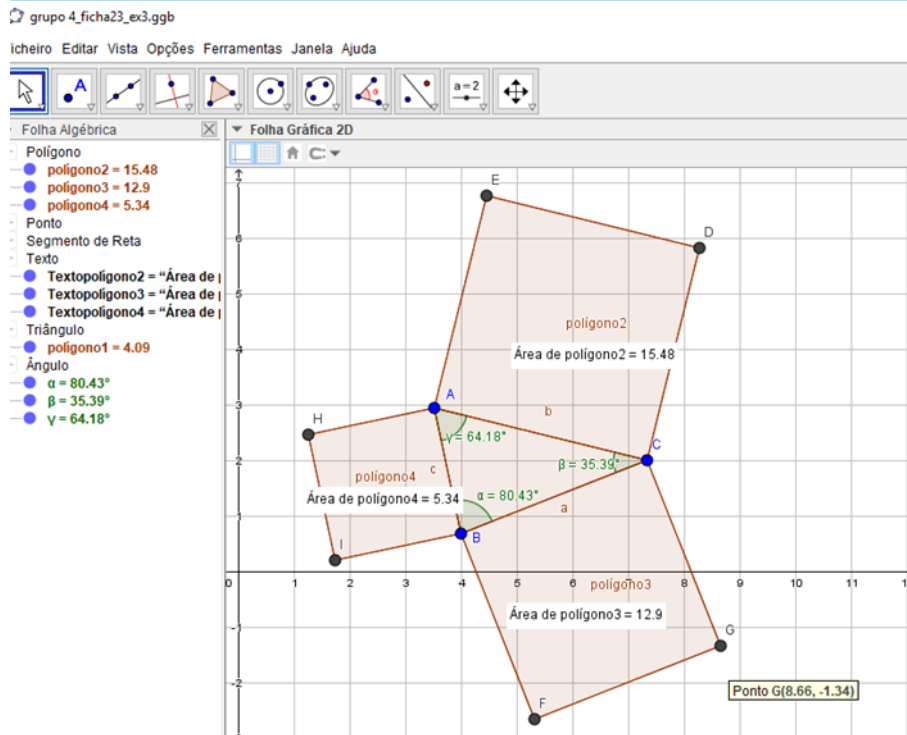
Figura exercício 1-par 3



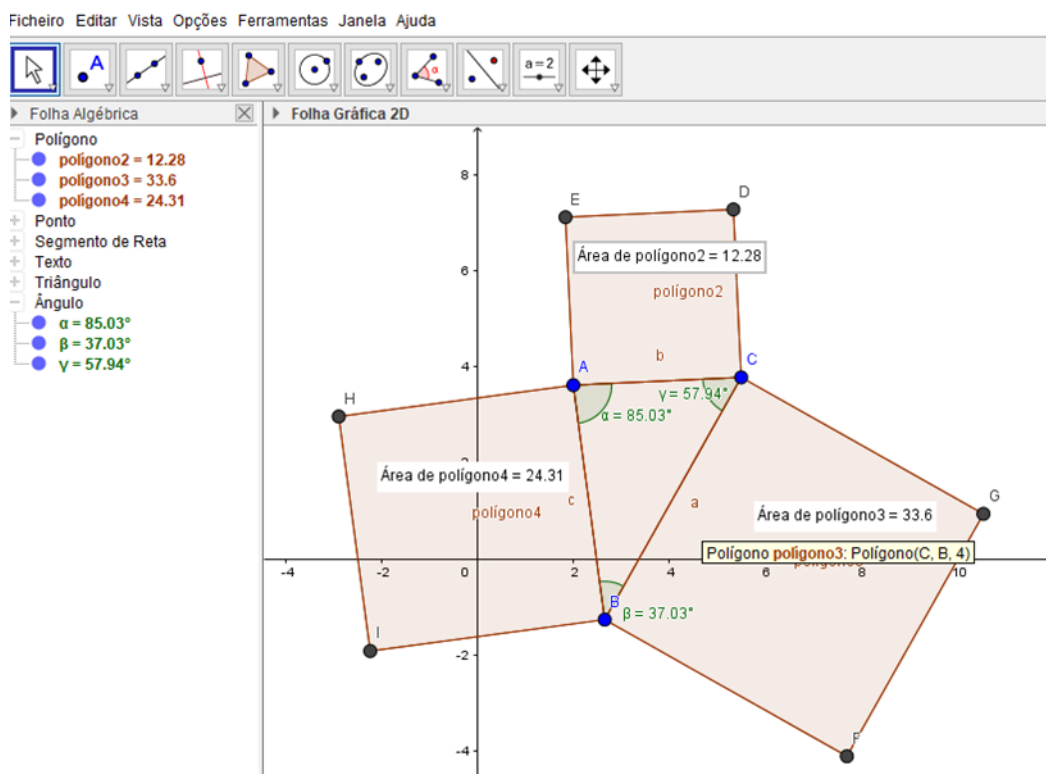
Exercício 2 -Par 2



Exercício 2- Par 3

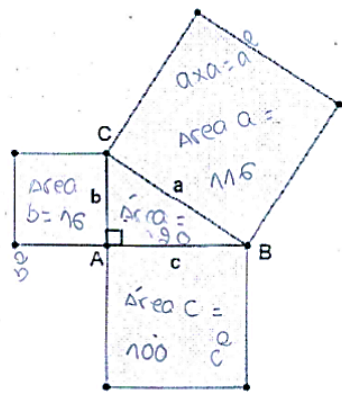
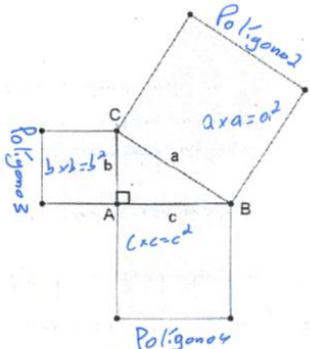


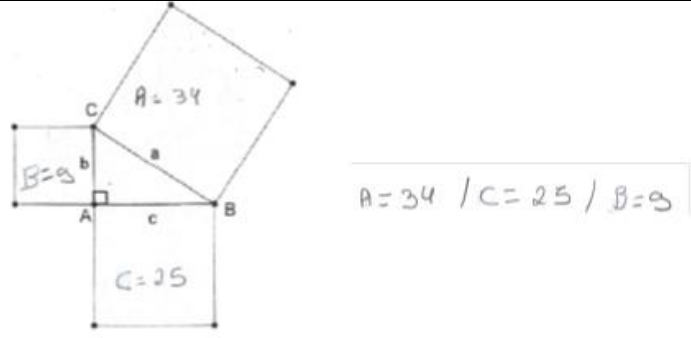
Exercício 3 -Par 1



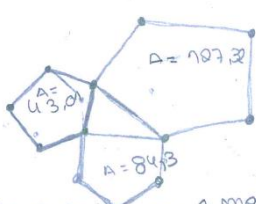
Exercício 3 -Par 2

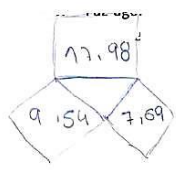
ANEXO 10- EXCERTOS DAS RESOLUÇÕES DOS ALUNOS (CONJETURAR E VERIFICAR O TEOREMA DE PITÁGORAS)

Indicador	Excertos da ficha nº2 resolvida pelos alunos	
<p>Estabelece relação entre as áreas dos quadrados desenhados sobre os lados do triângulo retângulo.</p>	<p>Par 1</p>	<p>Questão</p>  <p> <math>Área\ b = 16</math>  <math>Área\ a = 116</math>  <math>Área\ c = 100</math> </p> <p>A área do quadrado maior é a soma dos outros dois</p>
	<p>Par 2</p>	 <p> <math>Polígono\ 2 = 74</math>  <math>Polígono\ 3 = 25</math>  <math>Polígono\ 4 = 49</math> </p> <p>A área do Polígono 2 menos a área do polígono 4 é igual a área do polígono 3.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>↳ quadrado grande</li> <li>↳ Quadrado Médio</li> <li>↳ Quadrado Pequeno</li> </ul>

	<b>Par 3</b>	 <p style="text-align: center;"> <math>A=34 \quad C=25 \quad B=9</math> </p> <hr/> <p style="text-align: center;"> <math>34 - 9 = 25 = A \text{ Área do } A^2 \text{ menos a Área do } B^2 \text{ é a Área do } C^2.</math> </p> <hr/> <p style="text-align: center;"> <math>25 + 9 = 34 = A \text{ Área do } B^2 \text{ mais a Área do } C^2 \text{ é a Área do } A^2.</math> </p> <hr/> <p style="text-align: center;"> <math>34 - 25 = 9 = A \text{ Área do } A^2 \text{ menos a Área do } C^2 \text{ é a Área do } B^2.</math> </p>
--	--------------	---

Indicador	Excertos da ficha nº2 resolvida pelos alunos	
Escreve a relação algébrica que traduza a relação encontrada	<b>Questão</b>	
	<b>Par 1</b>	$a^2 = a \times a$ $b^2 = b \times b$ $c^2 = c \times c$
	<b>Par 2</b>	$a^2 - b^2 = c^2$
	<b>Par 3</b>	$A^2 - C^2 = B^2$

Indicador	Excertos da ficha nº2 resolvida pelos alunos	
Verifica se a relação entre as áreas se mantém se se construir outros polígonos regulares sobre os lados do triângulo.	<b>Questão</b>	<p>Par 1</p> <p>           retângulo            Área a = 197,32            Área b = 43,01            Área c = 84,3         </p>  <p>           Experimentamos com o polígono e mantêm-se a mesma relação.            A Área Polígono maior é a soma dos outros dois, com exceção mantêm-se.            mantêm-se as mesmas conclusões com outros figuras.         </p>
	<b>Par 2</b>	<p>           Pentágono grande = 194,41            " Médio = <del>110,71</del>            " Pequeno = 84,3         </p> <p>           Daí, a conclusão é igual a anterior         </p> <p>           Polígono grande = 199,44            Polígono médio = 482,84            Polígono pequeno = 236,59         </p> <p>           Também ver. f. que também dá            Ver. ficando que resulta com todos os polígonos regulares que os cálculos do grande e do médio dá o resultado do mais pequeno.         </p>
	<b>Par 3</b>	<p> <math>A^2 = 88,33</math>  <math>B^2 = 23,88</math>  <math>C^2 = 84,53</math> </p> <p>           Experimentamos como hexágono e a relação mantém-se.            Podemos concluir que dá com todos os polígonos regulares.         </p> <hr/> <p> <math>A^2 = 164,14</math>  <math>B^2 = 43,46</math>  <math>C^2 = 120,44</math> </p> <p>           • Experimentamos como hexágono e a relação mantém-se.            • Experimentamos com um octógono e a relação mantém-se.         </p>

Indicador	Excertos da ficha nº2 resolvida pelos alunos	
<p>Verifica que a relação encontrada não é válida para triângulos não retângulos.</p>	<b>Questão</b>	
	<b>Par 1</b>	 <p><math>17,98^2</math> <math>9,54^2</math> <math>7,69</math></p> <p><math>7,69 + 9,54 = 17,23</math></p> <p>F</p> <p>colorando um triângulo não retângulo não deu a soma dos duas áreas do quadrado pequenos não vai dos 10 quadrado grande</p> <p>R. A Relação dos áreas não se mantem</p>
	<b>Par 2</b>	<p><math>Q.G = 9,28</math> <math>Q.M = 5,22</math> <math>Q.P = 5,08</math></p> <p>Não dá porque se somarmos o quadrado médio com o quadrado pequeno dá um resultado maior do quadrado grande.</p>
<b>Par 3</b>	<p>Desenhemos um Triângulo regular e concluímos se axastamos um vertice não acontece como na (Figura 4).</p>	

## ANEXO 11- APRESENTAÇÕES ORAIS DAS CONJETURAS REALIZADAS E VERIFICAÇÃO DO TEOREMA DE PITÁGORAS.

### Par 1

**Professora:** Andreia e Luís expliquem quais foram os vossos procedimentos para realizar a ficha e quais foram as vossas conclusões.

**Luís:** Então, começamos por desenhar um triângulo retângulo.

**Professora:** Luís, o que é um triângulo retângulo?

**Luís:** é um triângulo com  $90^\circ$ .

**Professora:** Tens a certeza que o triângulo era retângulo?

**Luís:** Tenho porque usamos o GeoGebra para medir os ângulos do triângulo.

**Andreia:** Depois construímos quadrados sobre os lados do triângulo e usamos o GeoGebra para calcular a área de cada um deles. O quadrado grande ficou com área 116, o médio 100 e o pequeno 16.

**Luís:** Depois como tínhamos de encontrar uma relação entre as áreas chegamos à conclusão que quando fazíamos  $100+16=116$ , a soma das duas menores era igual à área do maior.

**Professora:** Essa relação só acontece com esse triângulo?

**Andreia:** Não. Acontece com outros. Fizemos o que a atividade dizia, arrastamos um dos vértices do triângulo e voltamos a somar os dois mais pequenos e deu igual ao maior. E dava sempre assim...

**Luís:** Depois, como o triângulo já tinha as letras a, b e c e eram os lados dos quadrados, calculamos a área de cada um deles. Fizemos  $b \times b = b^2$ ,  $a \times a = a^2$  e  $c \times c = c^2$ .

**Professora:** Usaram essas “letras” para escrever outra expressão que relacionasse as áreas?

**Luís:** Não. Só escrevemos assim.

**Andreia:** Depois construímos um novo triângulo retângulo e em vez de quadrados desenhamos pentágonos sobre os seus lados.

**Professora:** Uns pentágonos quaisquer?

**Andreia:** Não, não! Pentágonos regulares.

**Professora:** Isso serviu para quê, Andreia?

**Andreia:** Então professora, com o GeoGebra calculamos as áreas dos pentágonos e voltamos a verificar que se somássemos a duas áreas mas pequenas era igual à maior.

**Professora:** Será que só dá com quadrados e pentágonos?

**Andreia:** Não, também fizemos a experiência com triângulos regulares e também deu.

**Luís:** Depois disso construímos um triângulo não retângulo, desenhamos os quadrados sobre os seus lados e achamos as suas áreas e agora já não batia nada certo.

**Professora:** O que querem dizer com isso de não bater nada certo.

**Luís:** Quando arrastávamos um vértice do triângulo, às vezes a soma das áreas dos dois mais pequenos dava mais que o maior outras vezes dava menos.

## Par 2

**Professora:** Telmo e Bruno expliquem quais foram os vossos procedimentos para realizar a ficha e quais foram as vossas conclusões.

**Bruno:** Começamos por construir um triângulo retângulo e depois construímos três quadrados nos lados do triângulo e determinamos a área de cada um deles. Quando tentamos relacionar as áreas chegamos à conclusão que a área do quadrado grande a dividir por três dava a área do quadrado médio.

**Telmo:** Mas a professora disse para arrastarmos um vértice do triângulo e vermos se era sempre assim e acabámos por concluir que não.

**Professora:** Então depois o que fizeram.

**Telmo:** Então depois acabamos por desenhar um triângulo em que a área do quadrado grande era 74 e dos outros era 25 e 49. Como  $74 - 49 = 25$  vimos que a área do quadrado grande menos a do médio dava a do pequeno.

**Professora:** Verificaram isso acontecia com outros triângulos? Ou era só com esse?

**Telmo:** verificamos.

**Professora:** Como?

**Telmo:** Então, arrastamos um vértice e fomos vendo que dava sempre bem.

**Professora:** Aparentemente chegaram a uma conclusão diferente do par 1, será?

**Bruno:** Acho que sim. E depois concluímos que  $a^2 - b^2 = c^2$

**Telmo:** Bruno, está enganado. Tem de ser  $a^2 - c^2 = b^2$

**Professora:** Mas porquê? O que é  $a^2$ ,  $b^2$  e  $c^2$  ?

**Telmo:** Então, são as áreas dos quadrados grande, pequeno e médio e o  $c^2$  é do quadrado médio.

**Professora:** Ok. E depois prosseguiram com a atividade e concluíram mais alguma coisa?

**Telmo:** Sim. Experimentamos com pentágonos, octógonos e outros polígonos.

**Professora:** Experimentaram como? Explica melhor o que fizeram.

**Telmo:** Então, no lugar dos quadrados construímos pentágonos e depois construímos octógonos.

**Professora:** Pentágonos e octógonos quaisquer?

**Bruno:** Regulares.

**Professora:** E o que verificaram?

**Bruno:** Na questão 3, desenhamos um triângulo que não era retângulo e construímos os quadrados sobre os lados e não aconteceu a mesma relação da primeira figura. Mesmo quando arrastávamos o vértice a relação entre as áreas não era a mesma.

### **Par 3**

**Professora:** Inês e Jorge expliquem quais foram os vossos procedimentos para realizar a ficha e quais foram as vossas conclusões.

**Inês:** Começamos por construir um triângulo retângulo e depois em cada lado do triângulo construímos um quadrado e calculamos área de cada um deles.

**Jorge:** Quando tentamos relacionar as áreas parecia que a área do quadrado grande menos a área do quadrado pequeno dá a área do quadrado médio.

**Professora:** E tiraram logo essa conclusão?

**Jorge:** Não. Como não “batia” certinho chamamos a professora que disse para vermos se o triângulo era mesmo retângulo. Eu até já tinha dito à Inês que o triângulo estava mal construído e quando fomos medir os ângulos com o GeoGebra vimos que estava mesmo, não era retângulo.

**Professora:** Então o que decidiram fazer?

**Inês:** Apagamos tudo e começamos de novo. Construímos o triângulo como tínhamos aprendido na primeira ficha, quando estivemos a “treinar” o GeoGebra. E depois de calcular as áreas vimos que  $A=34$ ,  $B=9$  e  $C=25$ .

**Professora:** O que é o A, B e C?

**Inês:** São as áreas dos quadrados. Concluímos que  $34 - 9 = 25$ , ou seja a área de A menos a área de B dá a área de C, que  $25 + 9 = 34$ , a área de B mais a área de C dá a área de A e  $34 - 25 = 9$ , a área de A menos a área de C dá a área de B.

**Professora:** Vocês relacionaram as áreas de três formas.

**Jorge:** E também vimos que quando arrastávamos um vértice o triângulo tinha medidas diferentes mas as relações das áreas eram sempre as mesmas e escrevemos a expressão  $a^2 - b^2 = c^2$ .

**Professora:** Tinham relacionado as áreas de três formas, só escreveram uma expressão algébrica para uma das relações?

**Jorge:** Sim. Só pedia uma.

**Professora:** Ok. E depois?

**Inês:** Depois fizemos um triângulo retângulo mas em vez de desenharmos quadrados nos lados do triângulo desenhamos octógonos e hexágonos e nas duas situações vimos que as relações são as mesmas dos quadrados. Concluímos que dá com todos os polígonos regulares.

**Jorge:** Que a relação era sempre a mesma. O que acontece com os quadrados também acontece com os pentágonos e octógonos. Na questão 3, construímos um triângulo regular e em cada lado um quadrado. Quando calculamos as áreas já não dava certo como na figura do início.

## ANEXO 12- APRESENTAÇÕES ORAIS DA DEMONSTRAÇÃO GEOMÉTRICA DO TEOREMA DE PITÁGORAS.

### **Par 1**

**Professora:** Andreia e Luís expliquem quais foram os vossos procedimentos para realizar a ficha e quais foram as vossas conclusões.

**Luís:** Começamos por olhar para as figuras e vimos que era um quadrado porque os lados eram todos iguais, mediam todos o mesmo.

**Professora:** Como podem ter essa certeza?

**Luís:** Porque vê-se, todos têm o mesmo comprimento.

**Professora:** Basta ter os lados todos iguais para ser um quadrado?

**Andreia:** Não. Também tem de ter ângulos de  $90^\circ$  e tem, por isso é um quadrado.

**Professora:** E como concluíram que tinha ângulos de  $90^\circ$ ?

**Andreia:** Porque se vê.

**Luís:** Depois fomos ao tablet, mexemos no cursor e vimos que só mudava o tamanho mas ficava um quadrado à mesma.

**Professora:** E depois.

**Andreia:** Depois escrevemos que a soma da área do quadrado 2 com a área dos quadrados três dá a área do quadrado 1.

**Professora:** Foi fácil fazer essa?

**Luís:** Não. Não estávamos a perceber nada porque não tínhamos números, mas chamamos a professora que nos disse que era um caso geral, tínhamos de usar letras e depois já percebemos melhor.

**Andreia:** Depois voltamos ao tablet, mexemos o cursor e vimos que os triângulos ficavam iguais e por isso a soma da área do quadrado 2 com a área do quadrado três dá a área do quadrado um.

**Professora:** O que é que esta atividade tem a ver com o Teorema de Pitágoras.

**Andreia:** (silêncio) ..... Também é o quadrado grande igual à soma dos quadrados pequenos.

**Professora:** A soma de quê?

**Andreia:** Das áreas.

## Par 2

**Professora:** Bruno e Telmo expliquem quais foram os vossos procedimentos para realizar a ficha e quais foram as vossas conclusões.

**Telmo:** Tínhamos de justificar que Q1 é um triângulo e dissemos que é porque tem os lados todos iguais, todos medem c.

**Bruno:** Todos medem c porque os triângulos são congruentes e assim essa medida é igual para todos.

**Professora:** O lado do triângulo que mede c, como se chama?

Silêncio

**Professora:** Se ADEF é um quadrado quanto mede o ângulo DAF?

**Bruno:**  $90^\circ$ .

**Professora:** Como classificas o triângulo BAC, quanto aos ângulos?

**Bruno:** É retângulo.

**Professora:** Então, o lado do triângulo que mede c, como se chama?

**Telmo:** Ah, pois é! É a hipotenusa.

**Professora:** Continuem.

**Telmo:** Também concluímos que tem ângulos de  $90^\circ$ , porque a soma dos ângulos dos triângulos tem de dar  $180^\circ$ .

**Professora:** Que ângulos?

**Telmo:** Estes (aponta para a figura que está projetada no quadro branco). Os internos.

**Professora:** Expliquem melhor o vosso raciocínio.

**Bruno:** (O aluno utiliza a figura projetada e aponta para os ângulos agudos ACB e FCH) Como o triângulo é retângulo estes dois juntos valem  $90^\circ$ , assim sobra  $90^\circ$  para este (aponta para o ângulo BCH).

**Professora:** Continuem.

**Telmo:** Depois mexemos no seletor e verificamos que se mantém porque continua a ser a hipotenusa dos triângulos, que como continuam a ser congruentes os ângulos ficam com a mesma amplitude de  $90^\circ$ .

Depois vimos que a soma da área do quadrado 2 com a área do quadrado 3 dá a área do quadrado 1 e escrevemos a expressão  $AQ1=AQ2+AQ3$

**Professora:** Como viram essa relação.

**Telmo:** Então, os quadrados grandes são iguais e os quatro triângulos também são iguais. Se tirarmos os quatro triângulos do quadrado grande sobra o Q1 e se tirarmos os quatro triângulos no outro quadrado sobra Q2 e Q3. Então são iguais.

**Professora:** O que é que esta atividade tem a ver com o Teorema de Pitágoras.

**Telmo:** Os quadrados Q2 e Q3 medem de lado os catetos dos triângulos e o Q1 mede de lado a hipotenusa dos triângulos.

### **Par 3**

**Professora:** Inês e Jorge expliquem quais foram os vossos procedimentos para realizar a ficha e quais foram as vossas conclusões.

**Inês:** Nós vimos que era um quadrado porque os lados são as hipotenusas dos triângulos e os triângulos são congruentes. Tem ângulos de  $90^\circ$  porque a soma dá  $180^\circ$ .

**Professora:** Conseguem explicar melhor o ângulo de  $90^\circ$ ?

**Inês:** Acho que não. Nesta parte conversamos a Denise (aluna da turma que fazia parte de outro par), ela explicou e eu percebi mas agora já não me lembro.

**Jorge: (silêncio)**

**Inês:** Depois vimos no tablet que mesmo mexendo o seletor os quatro triângulos ficavam iguais e o lado do quadrado continuava a ser a hipotenusa do triângulo. Era na mesma um quadrado.

**Jorge:** escrevemos a igualdade  $AQ1=AQ2+AQ3$  e dissemos que era sempre válida porque os triângulos são sempre iguais.

**Professora:** O que é que esta atividade tem a ver com o Teorema de Pitágoras.

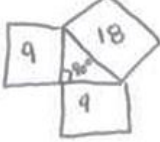

**Inês:** É como o Teorema, a área do quadrado maior é igual à soma dos outros dois.

ANEXO 13- RESOLUÇÃO DOS ALUNOS DA DEMONSTRAÇÃO ALGÉBRICA DO TEOREMA DE PITÁGORAS.

Indicadores	Excerto de registo	
Escreve a expressão algébrica da área do quadrado BCHG.	Par 1	A área do quadrado é igual ao $c^2$ $A_0 = c^2$
	Par 2	$A = c^2$
	Par 3	A Área do quadrado é igual a $c^2 = c \times c$
Escreve a expressão algébrica da área do triângulo.	Par 1	$A_1 = \frac{b \times a}{2}$ A área do triângulo é base x altura : 2
	Par 2	$A_1 = \frac{b \times a}{2}$
	Par 3	A Área do triângulo $\left(\frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}\right) \frac{b \times a}{2}$
Escreve a expressão algébrica da área do quadrado AFED.	Par 1	<del><math>A_0 =</math></del> $(A+B) \times (A+B) =$
	Par 2	$A_0 = (a+b) \times (a+b) = (a+b)^2$
	Par 3	$b + a = \text{lado (um)}$ $(b+a) \times (b+a)$ área do quadrado
Valida as expressões algébricas para polígonos	Par 1	sim continuam válidas


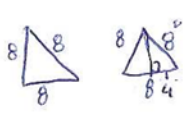
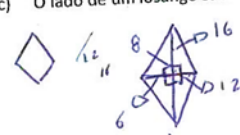
semelhantes	Par 2	Não, porque os triângulos continuam congruentes
	Par 3	Sim continuam válidas
Escreve a igualdade que relacione a área do quadrado AEFD com a área dos polígonos que o compõem	Par 1	$(a+b) \times (a+b) = c^2 + \frac{b \times a}{2} \times 4$ <p>Área do quadrado grande e a área do quadrado rosa.</p>
	Par 2	$(a+b)^2 = c^2 + \frac{b \times a}{2} + \frac{b \times a}{2} + \frac{b \times a}{2} + \frac{b \times a}{2}$ $(a+b)^2 = c^2 + \frac{4 \times b \times a}{2}$
	Par 3	$(a+b) \times (a+b) = c^2 + \frac{b \times a}{2} \times 4$
Simplifica a igualdade	Par 1	$(a+b)^2 = c^2 + 2ab \quad (2 \times a \times b)$ $a^2 + 2 \times a \times b + b^2 = c^2 + 2 \times a \times b$
	Par 2	$(a+b)^2 = c^2 + \frac{4 \times b \times a}{2}$ $(a+b)^2 = c^2 + 2 \times a \times b$ $a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2 \times ab$ $a^2 + b^2 = c^2 + \cancel{2 \times ab} = \cancel{2 \times ab} (=) a^2 + b^2 = c^2$
	Par 3	$(a+b)^2 = c^2 + 2 \times a \times b$ $\Leftrightarrow a^2 + 2 \times a \times b + b^2 = c^2 + 2 \times a \times b$ $\Leftrightarrow a^2 + b^2 = c^2 + 2 \times a \times b - 2 \times a \times b$ <p style="text-align: right;"><math>\Leftrightarrow a^2 + b^2 = c^2</math></p>

ANEXO 14 - EXCERTOS DAS RESOLUÇÕES DOS ALUNOS (APLICAR O TEOREMA DE PITÁGORAS NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS)

Indicador	Excertos da ficha nº3 resolvida pelos alunos	
Reconhece a relação entre as áreas dos quadrados desenhados sobre os lados de um triângulo retângulo.	<b>Questão 1</b>	
	Par 1	 <p data-bbox="694 526 1380 638">Fizemos dois quadrados com sua área de <math>9\text{cm}^2</math> e depois somamos e deu <math>18\text{cm}^2</math> e aí fizemos outro quadrado com área de <math>18\text{cm}^2</math></p>
	Par 2	<p data-bbox="486 694 1380 828">Tive que fazer no geogebra colocar o triângulo retângulo e depois somar a área do quadrado pequeno com a área do quadrado médio que deu o resultado do quadrado grande. Os quadrados grande, médio e pequeno foram construídas nos lados do triângulo.</p>
Par 3	 <p data-bbox="542 884 1380 1019">Fogendo um triângulo Rectângulo (<math>90^\circ</math>) e fogendo quadrados dos lados vai dar um um quadrado pequeno (cateto) um quadrado médio (cateto) e um quadrado grande (hipotenusa).</p> <p data-bbox="790 1008 1396 1064"><math>H^2 = c_1^2 + c_2^2</math> ou <math>H^2 - c_1^2 = c_2^2</math> ou <math>H^2 - c_2^2 = c_1^2</math></p>	

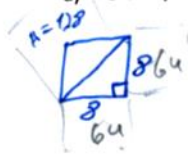
Indicador	Excertos da ficha nº2 resolvida pelos alunos	
Identifica triângulos retângulos recorrendo ao Teorema de Pitágoras.	Questão 2	<p>e) 5, 12, e 13 cm</p> <p>☉ A triângulo não retângulo porque a soma dos ângulos é de <math>117,82^\circ</math>.</p> <p>Não, porque se fizermos <math>5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169</math> e <math>13^2 = 169</math>.</p> <p>c) 5, 12 e 13 cm</p> <p><math>5^2 = 25 \text{ cm}^2</math>  <math>12^2 = 144 \text{ cm}^2</math>  <math>13^2 = 169 \text{ cm}^2</math></p> <p>É porque a soma dos ângulos é de <math>90^\circ</math></p> <p>É porque se somamos <math>5^2 + 12^2 = 169 \text{ cm}^2</math> e a soma de <math>13^2</math> é igual a <math>169 \text{ cm}^2</math>.</p> <p>d) 7, 8 e 10 cm</p> <p><math>7^2 = 49 \text{ cm}</math>  <math>8^2 = 64 \text{ cm}</math>  <math>10^2 = 100 \text{ cm}</math></p> <p>Não porque os ângulos não são de <math>90^\circ</math>.</p> <p>Não porque se somamos o lado 7 com o lado 8 da maior que o lado 10.</p>
	Par 2	<p>c) 5, 12 e 13 cm</p> <p><math>5^2 = 25</math>  <math>12^2 = 144</math>  <math>13^2 = 169</math></p> <p><math>25 + 144 = 169</math> A soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa.</p> <p>d) 7, 8 e 10 cm</p> <p><math>7^2 = 49</math>  <math>8^2 = 64</math>  <math>10^2 = 100</math></p> <p>A soma do quadrado pequeno com a soma do quadrado médio que não deu a soma do quadrado grande.</p>

	<p>a) 5, 12, e 15 cm</p> $\left. \begin{array}{l} 5^2 = 25 \\ 12^2 = 144 \\ 15^2 = 225 \end{array} \right\} 25 + 144 = 169$ <p>Não é retângulo porque a soma dos quadrados menores não dá a soma do quadrado grande.</p> <p>c) 5, 12 e 13 cm</p> $\left. \begin{array}{l} 5^2 = 25 \\ 12^2 = 144 \\ 13^2 = 169 \end{array} \right\} 25 + 144 = 169$ <p>É retângulo porque a soma dos quadrados dos catetos é igual a soma do quadrado da Hipotenusa.</p> <p>O Geogebra confirmou que na construção havia um ângulo de <math>90^\circ</math>.</p> <p>d) 7, 8 e 10 cm</p> $\left. \begin{array}{l} 7^2 = 49 \\ 8^2 = 64 \\ 10^2 = 100 \end{array} \right\} 49 + 64 = 113$ <p>Não é retângulo porque a soma dos quadrados menores não dá a soma do quadrado grande.</p>
--	--

Indicador	Excertos da ficha nº2 resolvida pelos alunos
<p>Utiliza o Teorema de Pitágoras para determinar alguns elementos de polígonos (lados, diagonais, alturas).</p>	<p><b>Questão 3</b></p> <p>a) O comprimento da diagonal de um quadrado cujo lado mede 8 cm;</p>  $\begin{aligned} 8^2 &= 64 & 64 \times 2 &= 128 \\ 8^2 &= 64 & \sqrt{128} &= 11,3137... \\ c^2 &= 64 & \text{hipotenusa} &= 11,314 \\ c &= 8 \end{aligned}$ <p>R: O comprimento da diagonal de um quadrado cujo lado mede 8 cm é 11,314 mm</p> <p>b) A altura de um triângulo equilátero cujo lado mede 8 cm;</p>  $\begin{aligned} 8^2 &= 64 \\ 4^2 &= 16 \\ 64 - 16 &= 48 \\ \sqrt{48} &= 6,928 \text{ cm} \end{aligned}$ <p>R: A altura do triângulo é de 6,928 cm.</p> <p>c) O lado de um losango sabendo que as diagonais medem 12 e 16 cm; respectivamente;</p>  $\begin{aligned} 8^2 &= 64 \\ 6^2 &= 36 \\ 64 + 36 &= 100 \\ \text{lado } 6 &= \sqrt{100} \\ \sqrt{100} &= 10 \end{aligned}$ <p>R: O lado do losango mede 10 cm.</p>

Par 2

a) O comprimento da diagonal de um quadrado cujo lado mede 8 cm;



$$8 \times 8 = 64$$

$$64 + 64 = 128$$

$$\sqrt{128} \approx 11.312$$

b) A altura de um triângulo equilátero cujo lado mede 8 cm;



$$8 \times 8 = 64$$

$$64 - 16 = 48$$

$$\sqrt{48} \approx 6.928$$

R: Altura e = 6.928

c) O lado de um losango sabendo que as diagonais medem 12 e 16 cm; respetivamente;



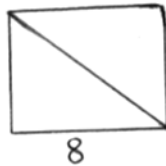
$$8^2 + 6^2 =$$

$$64 + 36 = 100$$

$$\sqrt{100} = 10$$

Par 3

a) O comprimento da diagonal de um quadrado cujo lado mede 8 cm;



b) A altura de um triângulo equilátero cujo lado mede 8 cm;



$$8 \times 8 = 64$$

$$4 \times 4 = 16$$

$$64 - 16 = 48 =$$

$$\sqrt{48} = 6.92$$

c) O lado de um losango sabendo que as diagonais medem 12 e 16 cm; respetivamente;



$$8 \times 8 = 64$$

$$6 \times 6 = 36 = \underline{\underline{100}}$$

$$\sqrt{100} = 10$$

Indicador

Excertos da ficha nº2 resolvida pelos alunos

Utiliza o Teorema de Pitágoras para calcular áreas.

Questão 3

Par 1

d) A área de um quadrado cuja diagonal mede 32 m;

$32 \times 32 = 1024$   
 $1024 : 2 = 512$   
 $\sqrt{512} \approx 22,627417$   
 R: O valor é 22,627mm.

e) A área dos hexágonos regulares cujo perímetro é 72 cm.

$72 : 6 = 12$   
 $12 \times 10,392 = 124,704$   
 $124,704 : 2 = 62,352$   
 $62,352 \times 6 = 374,112 \text{ cm}$   
 R: A Área do hexágono é 374,1

Par 2

d) A área de um quadrado cuja diagonal mede 32 m;

$32 \times 32 = 1024 \rightarrow$  Quadrado grande  
 $1024 : 2 = 512 \rightarrow$  2 quadrados iguais

e) A área dos hexágonos regulares cujo perímetro é 72 cm.

$12 \times 12 = 144$   
 $6 \times 6 = 36$   
 $144 - 36 = 108$   
 $\sqrt{108} \approx 10,392$   
 $62,352 \times 6 = 374,112$   
 R: A área do hexágono é 374,112

Par 3

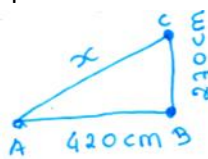
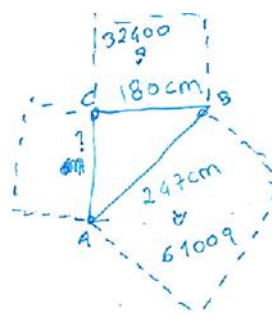
d) A área de um quadrado cuja diagonal mede 32 m;

$32 \times 32 = 1024$   
 $\sqrt{512} = 22,6$

e) A área dos hexágonos regulares cujo perímetro é 72 cm.

$6 \times 6 = 36$   
 $12 \times 12 = 144$   
 $144 - 36 = 108$   
 $\sqrt{108} = 10,3$   
 $10,3 \times 6 = 61,8$

Utiliza o Teorema de Pitágoras para resolver situações da vida real.

Indicador	Excertos da ficha nº2 resolvida pelos alunos
	<p>Questão 4 e 5</p>
	<p>Questão 4</p>  $270 \times 270 = 72900$ $420 \times 420 = 176400$ $176400 + 72900 = 249300$ $\sqrt{249300} \approx 499,2995093$ <p>R: O Resultado é 499,3 cm.</p> $\sqrt{249300} \approx 499,3$ <p>cm</p> <p>Questão 5</p>  $180 \times 180 = 32400$ $247 \times 247 = 61009$ $61009 - 32400 = 28609$ $\sqrt{28609} \approx 169,1419522$ $\sqrt{28609} \approx 169$ <p>169 : 10 = 16,9      R: cada altura dos degraus é de  180 : 10 = 18,      16,9 cm e largura = 18 cm</p>

Par 2	<p>Questão 4</p> $420 \times 420 = 176400$ $270 \times 270 = 72900$ $176400 + 72900 = 249300$ $\sqrt{249300} \approx 499.3$ <p>Questão 5</p> $244 \times 244 = 61009$ $180 \times 180 = 32400$ $61009 - 32400 = 28609$ $\sqrt{28609} \approx 169$ <p><math>169 : 10 = 16.9</math></p> <p>R: A altura de cada degrau</p> <p>R: A altura de 16.9 cm e a largura é 18 cm</p>
	Par 3

## ANEXO 15 – INQUÉRITO

### Inquérito - Estudo do Teorema de Pitágoras com recurso ao GeoGebra

Considerando a utilização do software de Geometria Dinâmica o “Geogebra” no ensino do Teorema de Pitágoras, manifesta a tua opinião selecionando a opção que melhor a traduz:

\*Obrigatório

#### Estudo do Teorema de Pitágoras com recurso ao GeoGebra

---

1. 1. Género: \*

Marcar apenas uma oval.

Masculino

Feminino

2. 2. Com a utilização do software de Geometria Dinâmica o “Geogebra”:

Marcar apenas uma oval por linha.

	Discordo Totalmente	Discordo	Não concordo nem discordo	Concordo	Concordo completamente
Sinto motivação para aprender	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Sinto que estou mais atento(a)	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Aumento o meu interesse pela disciplina	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Envolve-me mais nas tarefas propostas	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Fico mais desinibido(a) perante a aprendizagem	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Tomo decisões mais facilmente	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Sinto mais autonomia na aprendizagem	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Tenho mais confiança nas minhas capacidades.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Gosto de colocar questões	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Tenho mais facilidade na interpretação de conceitos	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Esforço-me por realizar melhor as tarefas propostas na aula	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Realizo as tarefas propostas com mais prazer	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>


**3. 3. Depois de realizar as tarefas, com recurso ao GeoGebra, para aprender o Teorema de Pitágoras posso afirmar que: \***

*Marcar apenas uma oval por linha.*

	Discordo Totalmente	Discordo	Não concordo nem discordo	Concordo	Concordo completamente
Gostei mais das aulas de GeoGebra do que das outras	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
No próximo ano gostaria de voltar a realizar tarefas com o Geogebra, nas aulas de Matemática	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

**Obrigada pela tua colaboração.**

---

Com tecnologia  
 Google Forms

## ANEXO 16 – AUTORIZAÇÃO DO CONSELHO PEDAGÓGICO PARA REALIZAÇÃO DO ESTUDO



Escola Secundária de Figueiró dos Vinhos

8 de março de 2017

Exma. Senhora:

Diretora do Agrupamento de Escolas de Figueiró dos Vinhos

Sandra Maria Silva Reis Pedro, docente do quadro do agrupamento, Grupo 500, aluna do Mestrado em Utilização Pedagógica das TIC, na Escola Superior de Educação e Ciências Sociais do Instituto Politécnico de Leiria, pretende desenvolver um projeto de investigação, envolvendo os alunos do curso Vocacional do 3ºciclo, desta Escola, subordinado ao tema *A aprendizagem do Teorema de Pitágoras com recurso ao Geogebra- Um estudo com alunos do Curso Vocacional do 3ºciclo.*

Pelo exposto, vem solicitar ao Conselho Pedagógico, a que V.ª Ex.ª preside, autorização para proceder à recolha de dados, prevista para os meses de março e abril.

Figueiró dos Vinhos, 8 de março de 2017

Sandra Maria Silva Reis Pedro

---

(Professora de Matemática)

## ANEXO 17 – AUTORIZAÇÃO DOS ENCARREGADOS DE EDUCAÇÃO PARA REALIZAÇÃO DO ESTUDO



Agrupamento de Escolas de Figueiró dos Vinhos



Escola Secundária de Figueiró dos Vinhos

17 de fevereiro de 2017

Exmo(a) Sr(a). Encarregado(a) de Educação

Encontro-me a desenvolver o meu projeto de mestrado em Utilização Pedagógica das TIC, na Escola Superior de Educação de Leiria, sob orientação científica do Professor Doutor Filipe Santos.

Para a concretização deste projeto é necessário analisar alguns aspetos no decorrer das aulas da disciplina de Matemática, relativos ao tema "Teorema de Pitágoras" com recurso ao software de Geometria Dinâmica GeoGebra.

Assim para assegurar uma análise rigorosa dos dados relevantes para o estudo, venho, por este meio, solicitar que V<sup>a</sup> EX<sup>a</sup>. se digne autorizar a utilização de algumas partes do trabalho realizado pelo seu educando no meu trabalho final (tese de Mestrado), garantindo desde já que os dados recolhidos serão absolutamente confidenciais, não se identificando, em nenhum momento do tratamento dos mesmos, os alunos.

Na expectativa de poder contar com a Vossa colaboração, apresento os meus respeitosos cumprimentos.

Sandra Maria Silva Reis Pedro

\_\_\_\_\_  
(Professora de Matemática)

Eu, \_\_\_\_\_, Encarregado de Educação do aluno \_\_\_\_\_, n.º \_\_\_\_\_, da turma do 2ºano Curso Vocacional do 3ºciclo, declaro que autorizo/não autorizo (riscar o que não interessa) a professora de Matemática a utilizar, no âmbito da sua tese de Mestrado, as produções do meu educando, realizadas no tema "Teorema de Pitágoras".

Figueiró dos Vinhos, \_\_\_\_/\_\_\_\_/2017

O Encarregado de Educação  
\_\_\_\_\_