

ÁLGEBRA LINEAR

Aprender Fazendo: Exercícios
Resolvidos, Exercícios Propostos,
Desafios e Vídeos Explicativos

CONCEIÇÃO NOGUEIRA
PAULA PASCOAL-FARIA

Ficha Técnica

Título

Álgebra Linear – Aprender Fazendo: Exercícios Resolvidos, Exercícios Propostos, Desafios e Vídeos Explicativos

Compilação, Organização e Revisão Técnica

Conceição Nogueira

Escola Superior de Tecnologia e Gestão | IPLeiria

ORCID 0000-0002-9269-2221

Paula Pascoal-Faria

Escola Superior de Tecnologia e Gestão | IPLeiria

ORCID 0000-0003-1474-9496

Departamento de Matemática | Escola Superior de Tecnologia e Gestão

Design

Diogo Honório

Revisão Científico-Pedagógica:

Graça Poças Santos

Susana Sardinha Monteiro

Ana Mendes

Ano

2026 | 1.^a Edição

DOI

<https://doi.org/10.25766/kytt-5d31>

ISBN

978-989-96501-9-0

Edição

OPSA 2.0 – Observatório para o Sucesso Académico

O projeto Observatório para o Sucesso Académico (OPSA 2.0) é cofinanciado pelo Plano de Recuperação e Resiliência – PRR, através do NextGenerationEU, no âmbito do Investimento RE-C06-i07 – Impulso Mais Digital, submedida Inovação e Modernização Pedagógica no Ensino Superior – Programa de Promoção de Sucesso e Redução de Abandono Escolar no Ensino Superior, sob a responsabilidade da Direção-Geral do Ensino Superior (DGES).

Revisão Científica por Pares

A presente obra foi submetida a processo de revisão científica por pares.



Cofinanciado por:



www.recuperarportugal.gov.pt

«A matemática não é apenas números, e sim envolve letras e toda a capacidade que o ser humano conseguir expressar.»

François Viète

Índice

Nota de Abertura	iv
Agradecimentos	v
Introdução	1
Capítulo 1 – Lógica Proposicional e Raciocínio Matemático	2
Capítulo 2 – Vetores	19
Capítulo 3 – Matrizes, Sistemas de Equações Lineares e Determinantes	41
Capítulo 4 – Espaços Vetoriais, Valores e Vetores Próprios	87
Capítulo 5 – Transformações Lineares	115
Bibliografia	146
Biografia dos autores	149

Nota de Abertura

O Observatório para o Sucesso Académico – **OPSA 2.0*** tem vindo a promover iniciativas que contribuem para a melhoria das experiências de aprendizagem dos estudantes e para o reforço do seu sucesso académico, prevenindo situações de insucesso e abandono escolar, particularmente entre os estudantes do 1.º ano/1.ª vez. Neste contexto, a produção de recursos pedagógicos inovadores constitui uma das estratégias fundamentais para apoiar ambientes educativos mais inclusivos e práticas de ensino centradas no estudante, estimulando a autonomia, a participação ativa e o desenvolvimento de competências essenciais ao longo do seu percurso académico.

É com grande satisfação que apresentamos, no âmbito dos **Programas Especiais de Apoio à Aprendizagem**, o livro *Álgebra Linear – Aprender Fazendo: Exercícios Resolvidos, Exercícios Propostos, Desafios e Vídeos Explicativos*, da autoria de Conceição Nogueira e Paula Pascoal-Faria, docentes da Escola Superior de Tecnologia e Gestão do Instituto Politécnico de Leiria.

Esta obra reflete o compromisso das autoras com a inovação pedagógica e com a criação de recursos que respondam às necessidades dos estudantes, oferecendo um conjunto diversificado de exercícios, desafios e materiais de apoio que favorecem a consolidação de conhecimentos e a aprendizagem autónoma. A integração de diferentes estratégias pedagógicas, incluindo recursos multimédia, constitui um exemplo da forma como é possível enriquecer os processos de ensino e aprendizagem, tornando-os mais acessíveis, motivadores e eficazes.

Às autoras deixamos uma palavra de reconhecimento pelo trabalho realizado e pelo contributo que esta publicação representa para a comunidade académica. Estamos certas de que este recurso constituirá um importante apoio para os estudantes e uma referência para todos os que procuram promover aprendizagens mais significativas e duradouras.

A Coordenação Científico-Pedagógica do OPSA 2.0,

Graça Poças Santos

Susana Sardinha Monteiro

* O Observatório para o Sucesso Académico – OPSA 2.0 é financiado pelo Programa Impulso Mais Digital, no âmbito do Plano de Recuperação e Resiliência (PRR), através da submedida “Inovação e Modernização Pedagógica no Ensino Superior – Programa de Promoção de Sucesso e Redução de Abandono Escolar no Ensino Superior”.

Agradecimentos

A concretização deste livro resulta de um percurso de aprendizagem, partilha e colaboração que não teria sido possível sem o contributo de várias pessoas e dinâmicas às quais desejamos expressar o nosso sincero agradecimento.

Em primeiro lugar, agradecemos ao Projeto OPSA 2.0 - Observatório para o Sucesso Académico do Instituto Politécnico de Leiria, pelo apoio ao desenvolvimento de práticas pedagógicas inovadoras e pela promoção de iniciativas que contribuem para o sucesso académico dos estudantes do ensino superior. Agradecemos também ao Designer do OPSA 2.0, Diogo Agostinho, que foi incansável no desenvolvimento da imagem de todos os conteúdos.

Aos nossos estudantes de Engenharia Informática da ESTG-IPLeiria, destinatários desta obra, dirigimos uma palavra muito especial de reconhecimento. O vosso entusiasmo, as vossas dúvidas, desafios e conquistas inspiram-nos diariamente a refletir sobre as nossas práticas pedagógicas e a procurar novas formas de ensinar e aprender. São a principal motivação para continuarmos a evoluir como educadoras.

Um agradecimento muito especial à Carolina, estudante do 1.^o ano da Licenciatura em Engenharia Informática da ESTG-IPLeiria, que gentilmente se disponibilizou para rever este livro durante um período particularmente exigente do seu percurso académico. A sua dedicação, espírito crítico e disponibilidade foram de enorme valor. O facto de ter concluído a Unidade Curricular de Álgebra Linear com a classificação de 19 valores constitui também um testemunho do seu mérito, empenho e excelência académica.

Expressamos igualmente o nosso agradecimento ao colega do Departamento de Matemática Nuno Dias. A sua colaboração e o trabalho de equipa desenvolvido constituíram uma base para o lançamento deste livro, contribuindo, assim, também para a sua concretização.

Por fim, agradecemos às nossas famílias, pelo apoio incondicional e pela inspiração constante que representam nas nossas vidas. Ao Rafael (Conceição) e ao Dinis, Matilde e Lourenço (Paula). É com eles que aprendemos, todos os dias, o verdadeiro significado da curiosidade, da persistência, da empatia e da vontade de crescer. São eles que nos inspiram a ser melhores educadoras, melhores profissionais e, acima de tudo, melhores humanos.

A todos, o nosso mais sincero obrigado.

Conceição Nogueira e Paula Pascoal-Faria

Introdução

A Álgebra Linear constitui uma das áreas fundamentais da Matemática, desempenhando um papel central em diversas áreas do conhecimento, em particular na Engenharia Informática. O estudo das suas estruturas e métodos fornece ferramentas essenciais para a modelação, análise e resolução de problemas de natureza científica e tecnológica.

Este livro de exercícios foi elaborado com o objetivo de complementar o estudo teórico da unidade curricular de Álgebra Linear do curso de Licenciatura em Engenharia Informática, proporcionando aos estudantes um leque diversificado de tipologias de exercícios e problemas para consolidar conceitos, desenvolver capacidades de raciocínio matemático e adquirir destreza na aplicação dos métodos estudados.

O conteúdo encontra-se organizado em cinco capítulos principais. O primeiro capítulo, **Lógica e Cálculo Proposicional**, é relativo aos fundamentos do raciocínio matemático formal, abordando proposições, conectivos lógicos, tabelas de verdade, equivalências lógicas e argumentos. O segundo capítulo, **Vetores**, trabalha os conceitos fundamentais relacionados com vetores e operações vetoriais.

No terceiro capítulo, **Matrizes e Sistemas de Equações Lineares e Determinantes**, são exploradas as técnicas de manipulação matricial, a resolução de sistemas lineares e o papel dos determinantes na análise de propriedades algébricas. O quarto capítulo, **Espaços Vetoriais e Valores e Vetores Próprios**, promove o estudo das estruturas abstratas que generalizam o conceito de vetor, incluindo subespaço, base e dimensão, bem como os conceitos de valores próprios e vetores próprios.

Por fim, o capítulo de **Transformações Lineares** é dedicado às aplicações lineares entre espaços vetoriais e as suas principais propriedades. São exploradas as representações matriciais das transformações lineares, bem como as transformações lineares planas, evidenciando a ligação entre os conceitos algébricos e a sua interpretação geométrica.

No início de cada capítulo encontram-se exercícios resolvidos, de seguida exercícios propostos, de desenvolvimento, e exercícios de escolha múltipla. Alguns dos exercícios propostos têm disponível uma proposta de resolução em vídeo (basta clicar no link). Em seguida são apresentadas as soluções de todos os exercícios. No final de cada capítulo o estudante pode encontrar aplicações dos conteúdos do capítulo e é proposto um desafio relacionado com as aplicações.

Espera-se que esta coleção de exercícios constitua um recurso útil para a aprendizagem autónoma, para a preparação de avaliações e para o aprofundamento dos conhecimentos em Álgebra Linear, incentivando uma compreensão sólida dos conceitos e das suas aplicações.



Exercícios Resolvidos

1. Simplifique as seguintes proposições, usando as propriedades de proposições.

(a) $\sim p \wedge (p \rightarrow p)$;

Resolução: $\sim p \wedge (p \rightarrow p) \equiv \sim p \wedge (\sim p \vee p) \equiv \sim p \wedge V \equiv \sim p$.

(b) $[(\sim p \vee \sim q) \wedge q] \wedge [\sim (p \vee \sim p)]$;

Resolução: $[(\sim p \vee \sim q) \wedge q] \wedge [\sim (p \vee \sim p)] \equiv [(\sim p \wedge q) \vee (\sim q \wedge q)] \wedge [\sim V] \equiv [(\sim p \wedge q) \vee F] \wedge F \equiv [\sim p \wedge q] \wedge F \equiv F$.

(c) $\sim [(p \rightarrow q) \wedge \sim (\sim p \vee q)] \wedge (p \vee \sim p)$.

Resolução: $\sim [(p \rightarrow q) \wedge \sim (\sim p \vee q)] \wedge (p \vee \sim p) \equiv \sim [(p \rightarrow q) \wedge \sim (p \rightarrow q)] \wedge V \equiv \sim F \wedge V \equiv V \wedge V \equiv V$.

2. Indique, justificando, se a proposição $(p \leftrightarrow q) \vee \sim p$ é uma tautologia, uma contradição ou nenhuma delas.

Recorde que:

- **Tautologia** é uma proposição com valor lógico verdade, quaisquer que sejam os valores lógicos das proposições que a integram.
- **Contradição** é uma proposição com valor lógico falso, quaisquer que sejam os valores lógicos das proposições que a integram.

Resolução: Começamos por construir a tabela de verdade da seguinte proposição: $(p \leftrightarrow q) \vee \sim p$.

p	q	$\sim p$	$p \leftrightarrow q$	$(p \leftrightarrow q) \vee \sim p$
V	V	F	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	F	V
F	F	V	V	V

A proposição $(p \leftrightarrow q) \vee \sim p$ não é uma tautologia nem uma contradição, pois podemos observar pela tabela de verdade acima que $(p \leftrightarrow q) \vee \sim p$ não é logicamente equivalente a verdadeiro nem a falso.

3. Sejam p, q e r proposições.

(a) Mostre que $p \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \rightarrow r$.

Resolução: Mostrar que $p \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \rightarrow r$ consiste em verificar que $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ e $(p \wedge q) \rightarrow r$ assumem sempre o mesmo valor lógico.

p	q	r	$q \rightarrow r$	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \rightarrow r$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	F	V	F
V	F	V	V	V	F	V
V	F	F	V	V	F	V
F	V	V	V	V	F	V
F	V	F	F	V	F	V
F	F	V	V	V	F	V
F	F	F	V	V	F	V

Pode verificar-se pela quinta e sétima colunas da tabela de verdade acima que as proposições $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ e $(p \wedge q) \rightarrow r$ assumem sempre o mesmo valor lógico. Consequentemente, $p \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \rightarrow r$.

(b) Analise a validade do seguinte argumento: $p \rightarrow (q \rightarrow r), \sim r \vdash q \rightarrow \sim r$.

Recorde que: Um **raciocínio** ou **argumento** é uma afirmação em que um dado grupo de proposições $P_1, P_2, \dots, P_n$, a que chamamos de **premissas** (ou hipóteses) tem como consequência uma proposição Q , a que chamamos de **conclusão** (ou tese) e denota-se por:

$$P_1, P_2, \dots, P_n \vdash Q.$$

O raciocínio $P_1, P_2, \dots, P_n \vdash Q$ é **válido** se Q é verdadeira sempre que $P_1, P_2, \dots, P_n$ forem verdadeiras.

Resolução: Começamos por construir a tabela de verdade que contém as premissas e a conclusão que constituem o argumento.

p	q	r	$q \rightarrow r$	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	$\sim r$	$q \rightarrow \sim r$
V	V	V	V	V	F	F
V	V	F	F	F	V	V
V	F	V	V	V	F	V
V	F	F	V	V	V	V
F	V	V	V	V	F	F
F	V	F	F	V	V	V
F	F	V	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V

Observa-se pela tabela de verdade acima que sempre que as premissas são verdadeiras (assinalado a verde) a conclusão também é verdadeira (assinalado a azul), logo o argumento é válido.

4. Seja $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$. Determine o valor lógico de cada uma das seguintes proposições:

(a) $\forall x \in A \ \forall y \in A, x + y \text{ é par};$

Resolução: A proposição é verdadeira. De facto, quaisquer que sejam os elementos x, y pertencentes a A tem-se que x e y são pares. Como a soma de dois números pares é um número par, conclui-se então que $x + y$ é par.

(b) $\exists x \in A \ \forall y \in A, x + y \leq 15.$

Resolução: A proposição é verdadeira. De facto, existe pelo menos um elemento x pertencente a A tal que qualquer que seja o elemento y pertencente a A considerado $x + y$ é menor ou igual a 15. Basta considerar, por exemplo, $x = 2$.

5. Sejam $A = \{2, 4, 6\}$ e $B = \{10, 20, 30\}$. Considere as seguintes proposições:

i) $\forall x \in A \ \exists y \in B, x \text{ divide } y;$

ii) $\forall x \in A \ \forall y \in B, x + y \text{ é ímpar};$

iii) $\exists x \in A \ \forall y \in B, x + y \geq 36.$

- (a) Negue cada uma das proposições acima apresentadas.

i) $\forall x \in A \ \exists y \in B, x \text{ divide } y;$

Resolução: $\exists x \in A \ \forall y \in B, x \text{ não divide } y.$

ii) $\forall x \in A \ \forall y \in B, x + y \text{ é ímpar};$

Resolução: $\exists x \in A \ \exists y \in B, x + y \text{ é par.}$

iii) $\exists x \in A \ \forall y \in B, x + y \geq 36.$

Resolução: $\forall x \in A \ \exists y \in B, x + y < 36.$

- (b) Determine o valor lógico de cada uma das proposições obtidas nas alíneas anteriores.

Resolução: A proposição $\exists x \in A \ \forall y \in B, x \text{ não divide } y$ é falsa. De facto, qualquer que seja o x pertencente a A existe pelo menos um elemento y pertencente a B tal que x divide y . Para $x = 2$, tem-se que 2 divide 10; para $x = 4$, tem-se que 4 divide 20 e para $x = 6$, tem-se que 6 divide 30.

A proposição $\exists x \in A \ \exists y \in B, x + y \text{ é par}$ é verdadeira. De facto, existe pelo menos um elemento x pertencente a A e um elemento y pertencente a B cuja soma de ambos seja um número par. Podemos considerar, por exemplo, $x = 2$ e $y = 10$ obtendo-se $x + y = 12$ que é par.

A proposição $\forall x \in A \ \exists y \in B, x + y < 36$ é verdadeira. De facto, qualquer que seja o elemento x pertencente a A que consideremos, existe pelo menos um elemento y pertencente a B , por exemplo $y = 10$, tal que $x + y < 36$.

Exercícios Propostos

1. Supondo que os valores lógicos de p, q e r são, respetivamente, V, F e V , determine o valor lógico de cada uma das seguintes proposições.

(a) $(\sim q \wedge q) \vee r$.

(b) $\sim p \rightarrow r$.

(c) $p \vee (\sim q \rightarrow r)$. [VÍDEO](#)

(d) $p \rightarrow (q \rightarrow r)$.

2. Considere que $p \wedge r$ é uma tautologia e $p \rightarrow q$ é uma contradição.

Indique, justificando, o valor lógico das seguintes proposições:

(a) $p \wedge q \wedge r$. (b) $p \vee (q \wedge r)$. (c) $(q \rightarrow p) \wedge r$.

DICA: Pelo enunciado $p \wedge r$ é uma tautologia o que permite obter o valor lógico de p e o valor lógico de r . Sabendo o valor lógico de p e que $p \rightarrow q$ é uma contradição obtém o valor lógico de q . Daqui em diante o exercício resolve-se de forma análoga ao exercício 1.

3. Simplifique as seguintes proposições, usando as propriedades de proposições.

(a) $p \wedge (p \rightarrow p)$.

(b) $q \wedge \sim (p \wedge q)$.

(c) $\sim [(\sim p \wedge \sim q) \wedge q] \wedge [\sim (p \vee \sim p)]$.

(d) $\sim [(p \rightarrow q) \wedge \sim (\sim p \vee q)] \wedge (p \vee \sim p)$. [VÍDEO](#)

(e) $p \vee (p \wedge q)$. [VÍDEO](#)

(f) $[p \wedge (p \vee q)] \rightarrow \sim p$.

(g) $\sim p \rightarrow ((\sim p \vee q) \rightarrow (p \wedge q))$.

(h) $[[\sim (p \wedge q) \vee q] \wedge \sim r] \rightarrow (r \wedge \sim p)$.

4. Verifique que as seguintes proposições são tautologias.

(a) $\sim (q \rightarrow p) \leftrightarrow (\sim p \wedge q)$.

(b) $(p \rightarrow (q \wedge p)) \leftrightarrow (q \vee \sim p)$. [VÍDEO](#)

(c) $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$.

DICA: Este exercício pode ser resolvido por dois processos distintos:

1. Por simplificação, usando as propriedades de proposições, tem que obter que a proposição dada é logicamente equivalente a verdadeiro;
2. Recorrendo a uma tabela de verdade onde a coluna correspondente à expressão dada apenas tem o valor lógico de verdadeiro.

5. Sejam p, q e r proposições.

(a) Mostre, através de uma tabela de verdade, que $p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$.

(b) Verifique que o argumento $p, p \rightarrow q, \sim q \vee r \vdash r$ é válido. [VÍDEO](#)

6. Sejam p , q e r proposições elementares.

- (a) Usando as propriedades de proposições, simplifique $[(p \rightarrow q) \wedge (\sim q)] \rightarrow (\sim q)$ e mostre que é independente dos valores lógicos de p e de q .

DICA: Note que, a proposição composta ser independente dos valores lógicos de p e de q significa que terá de ser uma tautologia ou uma contradição.

- (b) Analise a validade do argumento: $p \vee (q \wedge r), (p \vee q) \rightarrow r \vdash p \vee \sim r$.

7. Sejam P , Q e R as seguintes proposições compostas.

$$P : p_1 \leftrightarrow p_2; \quad Q : p_4 \rightarrow p_1; \quad R : p_1 \rightarrow p_3.$$

- (a) Verifique se o argumento P, Q e $\sim p_2 \vdash \sim p_4$ é válido.
- (b) Considerando as proposições elementares p_1 e p_3 definidas por:

$$p_1 : A \text{ é ortogonal} \quad \text{e} \quad p_3 : A \text{ é invertível, com } A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$$

escreva em linguagem corrente, na forma mais simplificada a negação da proposição R .

8. Sejam p , q e r proposições elementares e P a proposição composta definida por:

$$P : [(\sim p \vee r) \wedge (p \vee r)] \wedge \sim (p \vee \sim q)$$

- (a) Simplifique a proposição P .
- (b) Considerando que a proposição P é verdadeira e que as proposições p , q e r são definidas por:

$$\begin{aligned} p &: \text{"O João pratica andebol"}; \\ q &: \text{"O João pratica basquetebol"}; \\ r &: \text{"O João pratica ciclismo"}. \end{aligned}$$

Indique as modalidades que o João pratica.

9. Sejam $A = \{-5, 10, -15, 20, -25\}$. Considere as seguintes proposições:

- i) $\forall x \in A, \exists y \in \mathbb{N}, x + y = 0$;
ii) $\exists x \in A, \forall y \in \mathbb{N}, xy$ é ímpar;
iii) $\exists x, y \in A, 2x = y$;
iv) $\forall x, y \in A, x + y \leq 30$.

- (a) Determine o valor lógico de cada uma das proposições acima apresentadas, justificando convenientemente.
- (b) Escreva, na forma mais simplificada, a negação de cada uma das proposições acima apresentadas.

Exercícios de Escolha Múltipla

Nos exercícios seguintes deve selecionar a única opção correta.

1. Sejam $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$. Das proposições seguintes identifique a proposição com valor lógico verdade.

- (A) $\forall x \in A, x \leq 0$;
- (B) $\exists x \in A, x$ é par;
- (C) $\exists x, y \in A, xy$ é par;
- (D) $\forall x, y \in A, x + y \geq 2$.

2. Sejam $A = \{-5, 10, -15, 20, -25\}$. Das proposições seguintes identifique a proposição com valor lógico falso.

- (A) $\forall x \in A, \exists y \in \mathbb{N}, x + y = 0$;
- (B) $\exists x \in A, \forall y \in \mathbb{N}, xy$ é par;
- (C) $\exists x \in A, \exists y \in \mathbb{N}, xy > 0$;
- (D) $\forall x \in A, \forall y \in \mathbb{N}, xy \in \mathbb{Z}$.

3. Considere a afirmação: “Eu vou de carro se estiver a chover.”

A negação da afirmação é dada por:

- (A) Se não estiver a chover eu vou de carro;
- (B) Não está a chover e eu vou de carro;
- (C) Não está a chover e eu não vou de carro;
- (D) Está a chover e eu não vou de carro.

4. Considere p, q e r , tais que $p \wedge q$ e $r \rightarrow p$ são ambas proposições falsas. Qual das seguintes proposições é uma contradição:

- (A) $(p \wedge r) \rightarrow q$;
- (B) $p \rightarrow (q \wedge r)$;
- (C) $(p \wedge r) \leftrightarrow (q \vee r)$;
- (D) $(p \vee r) \leftrightarrow (q \vee r)$.

5. Sejam p e q proposições. Então, $\sim (p \rightarrow q) \vee (\sim p \vee q)$ é:

- (A) logicamente equivalente a p ;

- (B) logicamente equivalente a q ;
- (C) uma tautologia;
- (D) uma contradição.

6. Considere as seguintes proposições p , q e r definidas por:

p : "O Clube X ganha o campeonato";
 q : "O Clube Y ganha o campeonato";
 r : "O Clube Z ganha o campeonato".

Admitindo como verdadeira a proposição

$$\sim [\sim p \vee (\sim q \rightarrow r)],$$

indique qual dos clubes ganha o campeonato:

- (A) nenhum;
- (B) o clube X ;
- (C) o clube Y ;
- (D) o clube Z .

7. Sejam p , q e r proposições elementares. Sabendo que $(p \wedge \sim q) \leftrightarrow r$ é uma tautologia e que $r \vee p$ é uma contradição, conclui-se que:

- (A) $(p \vee q) \equiv F$;
- (B) $q \equiv V$;
- (C) $(\sim p \vee q) \equiv V$;
- (D) $(p \wedge \sim q) \leftrightarrow r \vdash \sim q$ é um argumento válido.

8. Considere as proposições:

p : Está a chover; q : O sol está a brilhar; r : Está calor.

Qual das seguintes afirmações representa, em linguagem corrente, a negação da proposição:

$$(\sim p \wedge q) \rightarrow r.$$

- (A) Se está a chover e o sol não está a brilhar então não está calor;
- (B) O sol está a brilhar e não está a chover nem está calor;
- (C) Se está a chover ou o sol não está a brilhar então não está calor;
- (D) Se está a chover e o sol não está a brilhar então não está calor.

9. Sejam p e q proposições elementares. A proposição:

$$\sim [q \wedge (p \vee \sim q)] \wedge q$$

é equivalente a:

- (A) $p \wedge \sim q$;
- (B) $q \wedge p$;
- (C) $q \wedge \sim p$;
- (D) $\sim p \wedge \sim q$.

10. Considere as seguintes proposições p , q e r definidas por:

- p : "O José já fez uma viagem à China";
- q : "O José já fez uma viagem aos Estados Unidos";
- r : "O José fez uma viagem à Tailândia".

Sabendo que a proposição $(\sim p \wedge q) \rightarrow \sim (p \vee r)$ é falsa, o José esteve em qual, ou quais, destes países:

- (A) O José esteve na China e esteve na Tailândia;
- (B) O José esteve apenas na China;
- (C) O José esteve apenas na Tailândia;
- (D) O José esteve nos Estados Unidos e esteve na Tailândia.

11. Sabendo que $P \equiv (\sim p \rightarrow q) \wedge (\sim q)$ é uma tautologia pode concluir-se que a proposição composta

$$\sim [(\sim p) \wedge r] \leftrightarrow q$$

é logicamente equivalente a:

- (A) r ;
- (B) $\sim r$;
- (C) V ;
- (D) F .

12. Considere p , q e r proposições elementares tais que $p \vee q$ é uma tautologia . Considere ainda a proposição P definida por:

$$P : [(\sim p \wedge \sim q) \vee r] \vee [(p \wedge r) \wedge (\sim p \vee \sim r)] .$$

A simplificação de $\sim (P \rightarrow \sim P)$ é:

- (A) $\sim P$;
- (B) P ;
- (C) V ;
- (D) F .

13. Considere as seguintes premissas de um argumento lógico:

$$\sim q; \qquad \sim p \vee q; \qquad r \rightarrow p.$$

- (A) o argumento é válido se a conclusão for r ;
- (B) o argumento é válido se a conclusão for $p \wedge r$;
- (C) o argumento é válido se a conclusão for $\sim q \rightarrow r$;
- (D) o argumento não é válido se a conclusão for r .

14. Considere p , q e r as seguintes proposições compostas:

$$p : p_1 \leftrightarrow p_2; \qquad q : p_1 \rightarrow p_3; \qquad r : p_4 \rightarrow p_1.$$

O argumento

- (A) $p, r, \sim p_2 \vdash \sim p_4$ não é válido;
- (B) $p, r, \sim p_2 \vdash (p_4 \leftrightarrow q)$ é válido;
- (C) $p, r, \sim p_2 \vdash (p_4 \wedge q)$ é válido;
- (D) $p, r, \sim p_2 \vdash \sim p_4$ é válido.

15. Considere o seguinte argumento lógico: $\sim q, p \vee q, r \rightarrow p \vdash r$. Podemos afirmar que:

- (A) O argumento é válido pois na tabela de verdade associada ao argumento temos uma linha em que premissas são verdadeiras e a conclusão também é verdadeira.
- (B) O argumento não é válido porque podemos ter a conclusão verdadeira mas as premissas falsas.
- (C) O argumento é válido pois sempre que as premissas são verdadeiras a conclusão também o é.
- (D) O argumento não é válido pois na tabela de verdade associada ao argumento temos uma linha em que premissas são verdadeiras e a conclusão é falsa.

Soluções dos Exercícios Propostos

1. (a) V .
(b) V .
(c) V .
(d) V .
2. (a) $-$
(b) $-$
(c) $-$
3. (a) F . (b) V . (c) V .
4.
(a) p . (b) $q \wedge \sim p$.
(c) F . (d) V .
(e) p . (f) $\sim p$.
(g) p . (h) r .
5. (a) Sejam p e q as proposições dadas. Considere a seguinte tabela de verdade:

p	q	$\sim p$	$p \rightarrow q$	$\sim p \vee q$
V	V	V	F	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

Pode verificar-se pela quarta e quinta colunas da tabela de verdade acima que as proposições $p \rightarrow q$ e $\sim p \vee q$ assumem sempre o mesmo valor lógico. Consequentemente, $p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$.

- (b) $r \equiv V$.
6. (a) V .
(b) O raciocínio não é válido.
7. (a) O raciocínio é válido.
(b) A é ortogonal e A não é invertível.
8. (a) $r \wedge \sim p \wedge q$.

- (b) O João pratica basquetebol e ciclismo mas não pratica andebol.
9. (a) **i)** F , considerando $x = 10$, a condição $x + y = 0$ só é verdadeira para $y = -10$, que não representa um número natural;
- ii)** F ; considerando $x = 20$, a condição $xy = 20y = 2(10y)$ representa um número par;
- iii)** V ; como o quantificador utilizado é o *existe*, basta considerar $x = 10$ e $y = 20$ e obtém-se $2x = y$;
- iv)** F ; como o quantificador utilizado é o *para todo*, a proposição tem de ser válida para quaisquer dois elementos de A . Note-se que a proposição é falsa pois considerando $x = y = 20$ obtém-se $x + y = 40 > 30$.
- (b) **i)** $\exists x \in A, \forall y \in \mathbb{N}, x + y \neq 0$;
- ii)** $\forall x \in A, \exists y \in \mathbb{N}, xy$ é par;
- iii)** $\forall x, y \in A, 2x \neq y$;
- iv)** $\exists x, y \in A, x + y > 30$.

Soluções dos Exercícios de Escolha Múltipla

1. D.
2. A.
3. D.
4. C.
5. B.
6. C.
7. B.
8. B.
9. C.
10. D.
11. D.
12. B.
13. B.
14. D.
15. D.

Aplicações

Álgebra Booleana, portas lógicas e circuitos...

A álgebra booleana é uma área da matemática que estuda as operações lógicas entre valores binários (0 e 1). Esta área é bastante utilizada na eletrônica digital para a construção e análise de circuitos elétricos. Tudo começou no século XIX com o matemático britânico George Boole (1815-1864). Boole, em 1856 apresentou um sistema matemático de análise lógica conhecido como álgebra de Boole. Este sistema matemático foi apresentado na sua obra *An Investigation of the Laws of Thought* (Uma Investigação Sobre as Leis do Pensamento).

Em 1937, Claude E. Shannon, que estudou matemática e engenharia elétrica na Universidade de Michigan, nos Estados Unidos, provou na sua tese de mestrado, que a álgebra booleana podia ser usada para solucionar problemas de circuitos de telefonia com relés (um dispositivo eletromecânico). A publicação do seu trabalho *Symbolic Analysis of Relay and Switching*, praticamente introduziu na área tecnológica o campo da eletrônica digital.

Esse ramo da eletrônica utiliza nos seus sistemas um pequeno grupo de circuitos elétricos compostos por componentes eletrônicos como resistores, capacitores, diodos, transistores e outros elementos que podem ser usados para controlar o fluxo de corrente elétrica. Esses componentes podem ser conectados em várias configurações para criar circuitos que realizam tarefas específicas. A álgebra booleana é usada para simplificar a análise e o projeto desses circuitos, reduzindo funções booleanas complexas a funções booleanas mais simples. Uma função booleana pode ser representada por uma equação ou caracterizada pela sua tabela verdade. Mas uma função booleana também pode ser representada de forma gráfica, onde cada operador está associado a um símbolo específico, permitindo o seu imediato reconhecimento visual. Estes símbolos são conhecidos por **portas lógicas**.

Cada variável booleana pode assumir um de dois valores possíveis, os quais podem ser denotados por $[F, V]$ (falso ou verdadeiro), $[H, L]$ (high and low) ou ainda $[0, 1]$. Usaremos aqui a notação $[0, 1]$, a qual é utilizada na área da eletrônica digital.

As portas lógicas básicas incluem a operação **E**, designada por multiplicação lógica e denotada por $\cdot$, a operação **OU**, designada por adição lógica e denotada por $+$ e a **complementação**, designada por negação ou inversão e denotada por $\sim A$ ou $\overline{A}$ e estas podem ser combinadas para criar funções lógicas mais complexas.

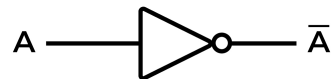
O símbolo da **porta E** é apresentado na figura seguinte:



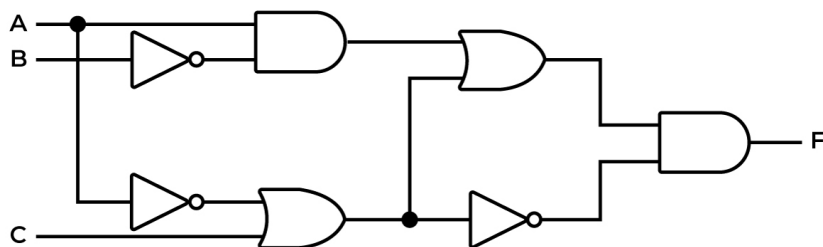
O símbolo da **porta OU** é apresentado na figura seguinte:



A porta que simboliza a operação complementação é conhecida como **inversor**. Como a operação complementação só pode ser realizada sobre uma variável (ou sobre o resultado de uma sub expressão), o inversor só possui uma entrada e, obviamente, uma saída. Caso se queira complementar uma expressão, é necessário obter-se primeiramente o seu resultado, para só depois aplicar a complementação. O símbolo do inversor é mostrado na figura seguinte:



Considere agora o seguinte circuito:



Note que a função lógica correspondente a F é dada por

$$F(A, B, C) = ((A \cdot \overline{B}) + (\overline{A}) + C) \cdot \overline{(\overline{A}) + C}.$$

Desafio

Simplifique a expressão anterior recorrendo às propriedades da Álgebra de Boole. Represente o circuito correspondente à simplificação e compare com o circuito anterior.

Demonstração: uma questão polémica

Existe alguma controvérsia em relação à definição de demonstração e esta controvérsia já não é recente:

"Não deveria existir nenhum desacordo acerca da demonstração matemática. Todo a gente olha com inveja a suposta unanimidade dos matemáticos; mas de facto existe uma controvérsia consideravelmente grande na matemática. Os matemáticos puros negam as demonstrações dos matemáticos aplicados, enquanto que os lógicos, por sua vez, repudiam as dos matemáticos puros. Os logicistas desprezam as demonstrações dos formalistas e alguns intuicionistas rejeitam com desdém as demonstrações de logicistas e formalistas."(p. 21) Imre Lakatos (1987), *¿Que es que lo que prueba una prueba matematica?*

A Lógica está presente em diversas técnicas de demonstração. Refiram-se alguns dos métodos de demonstração que envolvem o uso da lógica: demonstração por contrarrecíproco, demonstração por redução ao absurdo, demonstração por dupla-implicação, entre outras.

Demonstração

- Por contra-recíproco: $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$;
- Por redução ao absurdo: $\sim (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q)$;
- Por dupla implicação: $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$.

Desafio

1. Demonstre, por contrarrecíproco, que:

Se um número natural n não é divisível por 3, então não é divisível por 15.

2. Demonstre, por redução ao absurdo, que:

$\forall n \in \mathbb{N}, n^2 \text{ é par} \Rightarrow n \text{ é par}.$

3. Demonstre, usando a dupla implicação, que:

Dados A e B conjuntos, $A \subseteq B$ se e só se $A \cap \overline{B} = \emptyset$.



3)

Exercícios Resolvidos

1. Sejam $\vec{u} = (1, 0, 2)$, $\vec{v} = (0, 1, -2)$ e $\vec{w} = (2, -1, 2)$ vetores de $\mathbb{R}^3$.

(a) Calcule, se possível:

i. $\vec{u} \bullet \vec{v} \bullet \vec{w}$;

Resolução: O produto interno entre os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ não está definido pois $\vec{u} \bullet \vec{v} \in \mathbb{R}$, $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$ e não está definido o produto interno entre um escalar e um vetor. Portanto, não é possível calcular a expressão $\vec{u} \bullet \vec{v} \bullet \vec{w}$.

ii. $\vec{u} \wedge \vec{v}$;

Resolução:

$$\begin{aligned}\vec{u} \wedge \vec{v} &= (1, 0, 2) \wedge (0, 1, -2) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} \\ &= \left(\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) \\ &= (0 \times (-2) - 1 \times 2, -(1 \times (-2) - 0 \times 2), 1 \times 1 - 0 \times 0) \\ &= (-2, 2, 1).\end{aligned}$$

Observação: Note-se que $\vec{u} \wedge \vec{v} \perp \vec{u}$ e $\vec{u} \wedge \vec{v} \perp \vec{v}$.

iii. $\text{proj}_{\vec{v}} \vec{w} \wedge \|\vec{u} - 2\vec{v}\|$.

Resolução: O produto externo entre a projeção vetorial de $\vec{w}$ sobre $\vec{v}$ e a norma de $(\vec{u} - 2\vec{v})$ não está definido porque $\text{proj}_{\vec{v}} \vec{w} \in \mathbb{R}^3$, $\|\vec{u} - 2\vec{v}\| \in \mathbb{R}$ e não está definido o produto externo entre um vetor e um escalar. Portanto, não é possível calcular a expressão $\text{proj}_{\vec{v}} \vec{w} \wedge \|\vec{u} - 2\vec{v}\|$.

(b) Calcule:

i. os cossenos diretores do vetor $\vec{w}$;

Resolução: Os cossenos diretores do vetor $\vec{w}$ são os escalares $\cos(\angle(\vec{w}, \hat{e}_i))$, $i = 1; 2; 3$ dados por:

$$\cos(\angle(\vec{w}, \hat{e}_i)) = \frac{w_i}{\|\vec{w}\|} \quad i = 1; 2; 3.$$

Assim,

$$\cos(\angle(\vec{w}, \hat{e}_1)) = \frac{2}{9};$$

$$\cos(\angle(\vec{w}, \hat{e}_2)) = -\frac{1}{9};$$

$$\cos(\angle(\vec{w}, \hat{e}_3)) = \frac{2}{9}.$$

Observação: Os cossenos diretos de um vetor são as coordenadas do seu versor.

- ii. o comprimento da projeção vetorial do vetor $\vec{v}$ sobre o vetor $\vec{w}$;

Resolução: O comprimento da projeção vetorial do vetor $\vec{v}$ sobre o vetor $\vec{w}$, denotado $\|proj_{\vec{w}} \vec{v}\|$, é dado por:

$$\|proj_{\vec{w}} \vec{v}\| = \frac{|\vec{v} \bullet \vec{w}|}{\|\vec{w}\|}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \|proj_{\vec{w}} \vec{v}\| &= \frac{|(0, 1, -2) \bullet (2, -1, 2)|}{\|(2, -1, 2)\|} \\ &= \frac{|0 \times 2 + 1 \times (-1) + (-2) \times 2|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} \\ &= \frac{|0 - 1 - 4|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = \frac{|-5|}{\sqrt{9}} \\ &= \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

- iii. o cosseno do ângulo formado pelos vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$;

Resolução: O cosseno do ângulo formado pelos vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$ é dado por:

$$\cos(\angle(\vec{v}, \vec{w})) = \frac{\vec{v} \bullet \vec{w}}{\|\vec{v}\| \|\vec{w}\|}.$$

Da alínea anterior temos

$$\vec{v} \bullet \vec{w} = -5 \quad \text{e} \quad \|\vec{w}\| = 3.$$

Donde resulta que,

$$\begin{aligned} \cos(\angle(\vec{v}, \vec{w})) &= \frac{\vec{v} \bullet \vec{w}}{\|\vec{v}\| \|\vec{w}\|} = \frac{-5}{\|(0, 1, -2)\| \times 3} \\ &= \frac{-5}{3 \times \sqrt{0^2 + 1^2 + (-2)^2}} \\ &= \frac{-5}{3\sqrt{0 + 1 + 4}} = \frac{-5}{3\sqrt{5}} \\ &= -\frac{\sqrt{5}}{3}. \end{aligned}$$

- iv. o volume do paralelepípedo formado pelos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

Resolução: O volume do paralelepípedo formado pelos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ é dado por:

$$Vol(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = |\vec{u} \wedge \vec{v} \bullet \vec{w}|.$$

Da alínea (a) ii., temos

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (-2, 2, 1)$$

e portanto,

$$\begin{aligned} \text{Vol}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) &= |(-2, 2, 1) \bullet (2, -1, 2)| \\ &= |(-2) \times 2 + 2 \times (-1) + 1 \times 2| \\ &= |-4 - 2 + 2| = |-4| \\ &= 4. \end{aligned}$$

2. Considere os vetores $\vec{u} = (\alpha, 1, 1)$, $\vec{v} = (1, \beta, 1)$ e os pontos $P = (1, 2, 1)$ e $Q = (1, -2, 4)$ de $\mathbb{R}^3$.

- (a) Determine os vetores unitários paralelos ao vetor $\overrightarrow{PQ}$.

Para este exercício apresentamos duas resoluções alternativas.

Resolução 1: Os vetores unitários paralelos a $\overrightarrow{PQ}$ são o versor de $\overrightarrow{PQ}$ e o seu simétrico. Para simplificação da notação denotemos $\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$. Assim, pretendemos calcular $\hat{a}$ e $-\hat{a}$.

Note-se que,

$$\vec{a} = \overrightarrow{PQ} = Q - P = (1, -2, 4) - (1, 2, 1) = (1 - 1, -2 - 2, 4 - 1) = (0, -4, 3).$$

$$\text{Como } \|\vec{a}\| = \sqrt{16 + 9} = 5, \text{ então } \hat{a} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = \frac{1}{5} (0, -4, 3) = \left(0, -\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right).$$

$$\text{Portanto os vetores pretendidos são: } \vec{a} = \left(0, -\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right) \text{ e } -\vec{a} = \left(0, \frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right).$$

Resolução 2: Pretende-se determinar os vetores unitários, isto é, com norma igual a 1 que são paralelos a $\overrightarrow{PQ}$. Por definição, como são paralelos a $\overrightarrow{PQ}$ são da forma:

$$k\overrightarrow{PQ} = (0, -4k, 3k),$$

para algum $k \in \mathbb{R}$.

Agora, como são vetores unitários tem-se:

$$\begin{aligned} \|(0, -4k, 3k)\| = 1 &\Leftrightarrow \sqrt{16k^2 + 9k^2} = 1 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{25k^2} = 1 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{25}\sqrt{k^2} = 1 \\ &\Leftrightarrow 5|k| = 1 \Leftrightarrow k = \pm \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

$$\text{Portanto os vetores pretendidos são: } \left(0, -\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right) \text{ e } \left(0, \frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right).$$

(b) Determine os valores de α e β tais que:

i. os vetores $2\vec{u}$ e $-\vec{v}$ sejam colineares;

Resolução: $2\vec{u} \parallel -\vec{v} \Leftrightarrow 2\vec{u} \wedge -\vec{v} = \vec{0}$.

$$\begin{aligned}\text{Ora, } 2\vec{u} \wedge -\vec{v} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2\alpha & 2 & 2 \\ -1 & -\beta & -1 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -\beta & -1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 2\alpha & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2\alpha & 2 \\ -1 & -\beta \end{vmatrix} \right) \\ &= (-2 + 2\beta, -(-2\alpha + 2), -2\alpha\beta + 2) \\ &= (-2 + 2\beta, 2\alpha - 2, -2\alpha\beta + 2).\end{aligned}$$

Portanto, $2\vec{u} \wedge -\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow (-2 + 2\beta, 2\alpha - 2, -2\alpha\beta + 2) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} -2 + 2\beta = 0 \\ 2\alpha - 2 = 0 \\ -2\alpha\beta + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 1 \\ \alpha = 1 \\ -2 + 2 = 0 \end{cases}.$$

Conclusão: os vetores $2\vec{u}$ e $-\vec{v}$ são colineares quando $\alpha = \beta = 1$.

Observação: Alternativamente, note-se que:

$$2\vec{u} \parallel -\vec{v} \Leftrightarrow 2\vec{u} \wedge -\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow -2(\vec{u} \wedge \vec{v}) = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}.$$

Ou seja, verificar se $2\vec{u}$ e $-\vec{v}$ são colineares é equivalente a verificar se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares.

ii. o vetor $\vec{v}$ seja perpendicular ao eixo dos yy e a projeção vetorial de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$ seja um vetor unitário.

Resolução: Do facto de $\vec{v}$ ser perpendicular ao eixo dos yy resulta:

$$\vec{v} \perp \hat{j} \Leftrightarrow \vec{v} \bullet \hat{j} = 0.$$

Como $\hat{j} = (0, 1, 0)$, tem-se:

$$\vec{v} \bullet \hat{j} = 0 \Leftrightarrow (1, \beta, 1) \bullet (0, 1, 0) = 0 \Leftrightarrow 0 + \beta + 0 = 0 \Leftrightarrow \beta = 0.$$

Por outro lado, pretende-se que a projeção vetorial de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$ seja um vetor unitário. Portanto:

$$\|proj_{\vec{v}} \vec{u}\| = 1 \Leftrightarrow \frac{|\vec{u} \bullet \vec{v}|}{\|\vec{v}\|} = 1.$$

Como $\beta = 0$, tem-se: $\vec{u} \bullet \vec{v} = (\alpha, 1, 1) \bullet (1, 0, 1) = \alpha + 0 + 1 = \alpha + 1$.

Também, $\|\vec{v}\| = \|(1, 0, 1)\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

$$\begin{aligned}
\text{Portanto, } \|proj_{\vec{v}} \vec{u}\| = 1 &\Leftrightarrow \frac{|\alpha+1|}{\sqrt{2}} = 1 \Leftrightarrow |\alpha+1| = \sqrt{2} \\
&\Leftrightarrow \alpha+1 = \sqrt{2} \vee \alpha+1 = -\sqrt{2} \\
&\Leftrightarrow \alpha = -1 + \sqrt{2} \vee \alpha = -1 - \sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Concluimos assim que o vetor $\vec{v}$ é perpendicular ao eixo dos yy e simultaneamente a projeção vetorial de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$ é um vetor unitário quando $\alpha \in \{-1 - \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2}\}$ e $\beta = 0$.

- (c) Considerando $\alpha = 2$, determine o valor de β de modo que os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\overrightarrow{PQ}$ sejam coplanares.

Resolução:

$$\begin{aligned}
\vec{u}, \vec{v} \text{ e } \overrightarrow{PQ} \text{ coplanares} &\Leftrightarrow \vec{u} \wedge \vec{v} \bullet \overrightarrow{PQ} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & \beta & 1 \end{vmatrix} \bullet (0, -4, 3) = 0 \\
&\Leftrightarrow \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \beta & 1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & \beta \end{vmatrix} \right) \bullet (0, -4, 3) = 0 \\
&\Leftrightarrow (1 - \beta, -(2 - 1), 2\beta - 1) \bullet (0, -4, 3) = 0 \\
&\Leftrightarrow 4 + 6\beta - 3 = 0 \Leftrightarrow \beta = -\frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

Conclusão: $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\overrightarrow{PQ}$ são coplanares quando $\beta = -\frac{1}{6}$.

3. Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores de $\mathbb{R}^3$ tais que $\vec{u}$ é perpendicular com $\vec{v}$, $\vec{v}$ é paralelo com $\vec{w}$ e $\|\vec{u}\| = 2\|\vec{v}\| = 3$. Simplifique a expressão:

$$\vec{u} \bullet 2\vec{v} + \|\vec{v} \wedge (2\vec{u} - 3\vec{w})\|.$$

Resolução:

$$\begin{aligned}
\vec{u} \bullet 2\vec{v} + \|\vec{v} \wedge (2\vec{u} - 3\vec{w})\| &= 2(\vec{u} \bullet \vec{v}) + \|\vec{v} \wedge (2\vec{u}) + \vec{v} \wedge (-3\vec{w})\| \\
&= 0 + \|2(\vec{v} \wedge \vec{u}) - 3(\vec{v} \wedge \vec{w})\|, \text{ pois } \vec{u} \perp \vec{v} \\
&= \|2(\vec{v} \wedge \vec{u}) - 3 \cdot \vec{0}\|, \text{ pois } \vec{v} \parallel \vec{w} \Leftrightarrow \vec{v} \wedge \vec{w} = \vec{0} \\
&= |2| \|\vec{v} \wedge \vec{u}\| \\
&= 2\|\vec{v}\| \|\vec{u}\| \sin(\angle(\vec{v}, \vec{u})) \\
&= 2\|\vec{v}\| \|\vec{u}\| \sin\left(\frac{\pi}{2}\right), \text{ porque } \vec{u} \perp \vec{v} \\
&= 2 \times \frac{3}{2} \times 3 \times 1, \text{ pois } \|\vec{u}\| = 2\|\vec{v}\| = 3 \\
&= 9.
\end{aligned}$$

4. Dados $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores de $\mathbb{R}^3$, demonstre a igualdade de Lagrange:

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - (\vec{u} \bullet \vec{v})^2.$$

Resolução: Denotemos $\theta = \angle(\vec{u}, \vec{v})$.

Observemos que

$$(\vec{u} \bullet \vec{v})^2 = (\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta)^2 = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 \cos^2 \theta.$$

Assim, tem-se:

$$\begin{aligned} \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - (\vec{u} \bullet \vec{v})^2 &= \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - (\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta)^2 \\ &= \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 \cos^2 \theta \\ &= \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 (1 - \cos^2 \theta) \\ &= \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 \sin^2 \theta, \quad \text{pois } \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1. \end{aligned}$$

Agora reparemos que:

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 = (\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \theta)^2 = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 \sin^2 \theta.$$

Concluimos assim que: $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - (\vec{u} \bullet \vec{v})^2$.

Exercícios Propostos

- Sejam $\vec{u} = (3, -2)$, $\vec{v} = (5, -1)$ e $\vec{w} = (-1, 7)$ vetores de $\mathbb{R}^2$.
 - Determine os vetores unitários paralelos a $\vec{v}$.
 - Calcule o valor das seguintes expressões:
 - $\vec{u} \bullet (8\vec{v} + \vec{w})$;
 - $\|(\vec{u} \bullet \vec{w}) \vec{w}\|$;
 - $(\|\vec{u}\| \vec{v}) \bullet \vec{w}$.
- Considere os vetores $\vec{u} = (-1, 0, 2)$, $\vec{v} = (2, 1, -1)$ e os pontos $P = (0, -1, -1)$ e $Q = (2, -2, -1)$ de $\mathbb{R}^3$.
 - Calcule os cossenos diretores do vetor $\overrightarrow{PQ}$.
 - Calcule o versor do vetor $\overrightarrow{PQ}$ e compare os resultados obtidos com os da alínea anterior. O que pode concluir?
 - Verifique se os vetores $\vec{u}$ e $\overrightarrow{PQ}$ são colineares. VÍDEO
 - Determine os vetores unitários $\vec{w}$ tais que $\vec{w}$ é ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$. VÍDEO
 - Decomponha o vetor $\vec{u}$ como a soma de dois vetores, $\vec{w}_1$ e $\vec{w}_2$ tais que $\vec{w}_1$ é paralelo a $\vec{v}$ e $\vec{w}_2$ é ortogonal a $\vec{v}$. VÍDEO
 - Calcule o volume do paralelepípedo definido pelos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\overrightarrow{PQ}$.
- Sejam $\vec{u} = (0, 3, 1)$, $\vec{v} = (1, -1, 1)$ e $\vec{w} = (k - 1, 0, 2k)$ vetores de $\mathbb{R}^3$.
 - Calcule, se possível:
 - $\vec{u} \wedge \vec{v}$;
 - $(\vec{u} + 2\vec{v}) \bullet \|\vec{u} - \vec{v}\|$.
 - Determine a área do triângulo definido pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$. VÍDEO
 - Determine o(s) valor(es) de k de modo que:
 - a projeção vetorial de $\vec{w}$ sobre $(\vec{u} + \vec{v})$ seja um vetor unitário;
 - os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sejam coplanares.
- Sejam $\vec{u} = (-2, 1, 2)$, $\vec{v} = (0, -3, 1)$ e $\vec{w} = (0, k, 1 - k)$ vetores de $\mathbb{R}^3$.
 - Calcule os cossenos diretores de $\vec{u}$.
 - Calcule a projeção escalar do vetor $\vec{v}$ sobre o vetor $\vec{u}$.

(c) Determine o(s) valor(es) de k de modo que:

- i. os vetores $(\vec{u} - 2\vec{v})$ e $\vec{w}$ sejam perpendiculares; VÍDEO
- ii. o volume do paralelepípedo definido pelos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ seja igual a 6 unidades. VÍDEO

5. Sejam $\vec{u} = (1, -1, 0)$, $\vec{v} = (2, \alpha, 0)$ e $\vec{w} = (4, 5, \beta)$ vetores de $\mathbb{R}^3$.

- (a) Determine o(s) vetor(es) paralelo(s) ao vetor $\vec{u}$ com comprimento 7.
- (b) Determine o valor de α de modo que $\|\vec{u} \wedge \vec{w}\| = 9$.
- (c) Determine os valores de α e β de modo que os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sejam coplanares e $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sejam perpendiculares.

6. Sejam $\vec{u} = (2, -3, 3)$, $\vec{v} = (0, \alpha, -1)$ e $\vec{w} = (-1, 0, \beta)$ vetores de $\mathbb{R}^3$.

- (a) Calcule, se possível:
 - i. $3\vec{u} \wedge \|2\vec{u} - 3\vec{v}\|$;
 - ii. $\vec{v} \wedge (2\vec{w})$.
- (b) Mostre que, para $\alpha = -1$, $\|proj_{3\vec{v}} 2\vec{u}\| = 0$.
- (c) Determine o(s) valor(es) de α e de β , de modo que $\|\vec{w}\| = \sqrt{5}$ e a área do paralelogramo definido pelos vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$ seja igual a uma unidade.
- (d) Comente a afirmação: “Para $\alpha = \beta = 2$, o volume do paralelepípedo definido pelos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ é igual a oito unidades”.

7. Sejam $\vec{u} = (1, 2, -2)$, $\vec{v} = (1, 1, 0)$ e $\vec{w} = (k, 2k + 2, 0)$ vetores de $\mathbb{R}^3$.

- (a) Determine os vetores unitários paralelos a $\vec{u}$.
- (b) Calcule o ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.
- (c) Mostre que os vetores $(\vec{u} \wedge \vec{v})$ e $proj_{\vec{v}} 2\vec{u}$ são perpendiculares.
- (d) Determine o(s) valor(es) de k de modo que a área do triângulo definido pelos vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$ seja igual a 1 unidade.

8. Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ e $\vec{z}$ vetores de $\mathbb{R}^3$ tais que $\vec{v}$ é perpendicular a $\vec{w}$, $\vec{z}$ é paralelo a $\vec{u}$, $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{2\pi}{3}$ e $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 2$. Determine, se possível, o valor das seguintes expressões:

- (a) $(\vec{u} + \vec{v}) \bullet (\vec{u} \wedge \vec{v} \bullet \vec{v})$; VÍDEO
- (b) $\|proj_{\vec{v}} (\vec{u} + \vec{w})\|$; VÍDEO
- (c) $3\vec{u} \wedge \|proj_{\vec{v}} \vec{u}\|$; VÍDEO

(d) $\|\vec{u} \wedge (\vec{z} + 2\vec{v})\|$. VÍDEO

9. Sejam $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$, tais que $\|\vec{a}\| = 2$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{6}$ e $\vec{b}$ é um vetor unitário. As seguintes afirmações são todas verdadeiras. Justifique.

(a) $\|\vec{a} \wedge (\vec{a} - 2\vec{b})\| = 2$;

(b) $\vec{b} \wedge \vec{a} \bullet (\vec{c} - 2\vec{b}) = -\vec{a} \wedge \vec{b} \bullet \vec{c}$.

10. Sejam $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores não nulos de $\mathbb{R}^3$. Mostre que:

(a) se os vetores $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ são coplanares então $\vec{u} \wedge \vec{v}$ é perpendicular a $(\vec{w} + \text{proj}_{\vec{v}} \vec{u})$.

(b) se os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são perpendiculares então $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u} - \vec{v}\|$.

11. Sejam $\vec{a}$ e $\vec{b}$ vetores de $\mathbb{R}^3$ tais que $\|\vec{a}\| = 2$, $\|\vec{b}\| = 6$ e $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{2}$. Calcule:

$$\|\vec{a} \wedge \vec{b}\| + \vec{b} \bullet (3\vec{a} - \vec{b}).$$

12. Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores de $\mathbb{R}^3$ tais que $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{4}$, $\|\vec{v}\| = 2$ e $\vec{u}$ é unitário.

Mostre que: $\|\text{proj}_{\vec{v}} \vec{u}\| + \|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

13. Sejam $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores de $\mathbb{R}^3$ tais que $\vec{u} = 2\vec{v}$, $\angle(\vec{u}, \vec{w}) = \frac{\pi}{3}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são unitários.

Mostre que: $\text{proj}_{\vec{u}} \vec{w} + (\vec{u} \wedge \vec{v}) = \frac{1}{4}\vec{u}$.

14. Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores não nulos de $\mathbb{R}^3$ tais que $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$, com $\vec{u}_1 = \text{proj}_{\vec{v}} \vec{u}$. Mostre que $\vec{u}_2$ é um vetor perpendicular a $\vec{v}$.

15. Considerando um triângulo com os lados definidos pelos vetores $\vec{a}, \vec{b}$ e $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$, com $\vec{a}$ e $\vec{b}$ vetores de $\mathbb{R}^3$ não nulos e não paralelos. Mostre que:

$$\|\vec{c}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - 2\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos(\angle(\vec{a}, \vec{b})).$$

16. Indique o valor lógico das afirmações seguintes, justificando convenientemente.

- (a) Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores não nulos de $\mathbb{R}^3$, então: $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| + \|\vec{v}\|^2$.
- (b) Consideremos $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores de $\mathbb{R}^3$ com $\vec{u} \neq \vec{0}$. Se $\vec{u} \bullet \vec{v} = \vec{u} \bullet \vec{w}$, então $\vec{v} = \vec{w}$. VÍDEO
- (c) Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores de $\mathbb{R}^3$. Se $\vec{u}$ é ortogonal a ambos $\vec{v}$ e $\vec{w}$, então $\vec{u}$ é ortogonal a $\alpha\vec{v} + \beta\vec{w}$ para quaisquer escalares α e β .

Exercícios de Escolha Múltipla

Nos exercícios seguintes deve selecionar a única opção correta.

1. Considere em $\mathbb{R}^3$ os vetores e os pontos definidos por:

$$\vec{u} = (0, 1, -1); \vec{v} = (-2, 0, 2); P = (1, -1, 3) \text{ e } Q = (1, 1, 1).$$

- (A) os vetores $\vec{u}$ e $\overrightarrow{PQ}$ são perpendiculares;
(B) os vetores $\vec{u}$ e $\overrightarrow{PQ}$ são paralelos;
(C) os vetores $\vec{v}$ e $\overrightarrow{PQ}$ são perpendiculares;
(D) os vetores $\vec{v}$ e $\overrightarrow{PQ}$ são paralelos.

2. Considere em $\mathbb{R}^3$ os vetores $\vec{u} = (0, 1, -2)$, $\vec{v} = (0, 2, -2)$ e $\vec{w} = (2, 0, 2)$.

(a) Das seguintes expressões, indique aquela que não está definida:

- (A) $\|\vec{u}\| \vec{v}$;
(B) $\vec{u} \bullet \vec{v} + \vec{w}$;
(C) $\vec{u} + \vec{v} \wedge \vec{w}$;
(D) $\text{proj}_{\vec{v}} \vec{u} + \vec{v} \wedge \vec{w}$.

(b) O ângulo entre os vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$, $\angle(\vec{v}, \vec{w})$, é igual a:

- (A) $\frac{2\pi}{3}$; (B) $\frac{\pi}{3}$; (C) $-\frac{\pi}{3}$; (D) $-\frac{\pi}{2}$.

(c) A área do triângulo definido pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{w}$ é igual a:

- (A) $2\sqrt{6}$; (B) 2; (C) 4; (D) $\sqrt{6}$.

3. Sejam $\vec{a}$ e $\vec{b}$ vetores de $\mathbb{R}^3$ tais que $\vec{a} \bullet \vec{b} = -3$; $\|-2\vec{a}\| = \sqrt{8}$ e $\|\vec{b}\| = \sqrt{6}$.

Então o ângulo $\angle(\vec{a}, \vec{b})$ é igual a:

- (A) $\frac{\pi}{6}$; (B) $\frac{\pi}{3}$; (C) $\frac{2\pi}{3}$; (D) $\frac{5\pi}{6}$.

4. Considere em $\mathbb{R}^3$ os vetores não nulos $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ tais que $\vec{a} = -3\vec{b}$; $\vec{b} \perp \vec{c}$; $\vec{b}$ e $\vec{c}$ são vetores unitários.

A expressão $\|(\vec{c} \wedge \vec{a}) \wedge \vec{c}\|$ tem valor igual a:

- (A) 3; (B) 1; (C) 0; (D) -3.

5. Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores de $\mathbb{R}^3$ tais que $\vec{u}$ é perpendicular a $\vec{v}$. Então:

- (A) $3\vec{u} \bullet \text{proj}_{\vec{v}} \vec{w} = 0$;
 (B) $3\vec{u} \bullet \text{proj}_{\vec{v}} \vec{w} = \vec{0}$;
 (C) $3\vec{u} \bullet \text{proj}_{\vec{v}} \vec{w} = 3$;
 (D) $3\vec{u} \bullet \text{proj}_{\vec{v}} \vec{w}$ não está definido.

6. Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores de $\mathbb{R}^3$ tais que $\vec{u}$ é paralelo a $\vec{v}$. Então:

- (A) $\|\vec{u} \wedge 2\vec{v}\| \wedge \text{proj}_{\vec{v}} \vec{u} = \vec{v}$;
 (B) $\|\vec{u} \wedge 2\vec{v}\| \wedge \text{proj}_{\vec{v}} \vec{u} = 2\vec{v}$;
 (C) $\|\vec{u} \wedge 2\vec{v}\| \wedge \text{proj}_{\vec{v}} \vec{u} = \vec{0}$;
 (D) $\|\vec{u} \wedge 2\vec{v}\| \wedge \text{proj}_{\vec{v}} \vec{u}$ não está definido.

7. Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores de $\mathbb{R}^3$ tais que $\vec{u} \wedge \vec{v} \bullet \vec{w} = 7$.

A expressão $(\vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}) \bullet \vec{v}$ é igual a:

- (A) 14; (B) 7; (C) -7; (D) 0.

8. Considere em $\mathbb{R}^3$ os vetores $\vec{u} = (0, 1, -1)$, $\vec{v} = (2, 0, 2)$ e $\vec{w} = (\alpha, -2, \beta)$.

- (a) Qual dos seguintes vetores tem norma igual a 3 e é perpendicular ao vetor $\vec{v}$?

- (A) $\vec{a} = (-1, 1, 1)$;
 (B) $\vec{b} = (1, 2, -2)$;
 (C) $\vec{c} = (1, 2, -1)$;
 (D) $\vec{d} = (2, 1, -2)$.

- (b) Considere $\alpha = 2$. Qual(uais) o(s) valor(es) de β de modo que o volume do paralelepípedo definido por $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ seja igual a 8?

- (A) $\beta = 0 \vee \beta = -8$;
 (B) $\beta = -8$;
 (C) $\beta = 0$;
 (D) $\beta = 0 \vee \beta = 8$.

9. Considere em $\mathbb{R}^3$ os vetores $\vec{u} = (2, 1, -1)$, $\vec{v} = (1, -2, 2)$ e $\vec{w} = (\alpha, 1, \beta)$.

(a) A projeção escalar do vetor $\vec{u}$ sobre o vetor $\vec{v}$ é igual a:

(A) $-\frac{2}{3}$; (B) $\frac{2}{3}$; (C) $-\frac{2}{9}$; (D) $\frac{2}{9}$.

(b) Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{w}$ são perpendiculares se:

(A) $\alpha = 0 \wedge \beta = 0$; (B) $\alpha = 2 \wedge \beta = 1$;
(C) $\alpha = -2 \wedge \beta = -1$; (D) $\alpha = 0 \wedge \beta = 1$.

(c) Os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são coplanares se:

(A) $\alpha \in \mathbb{R} \wedge \beta = 0$; (B) $\alpha = -1 \wedge \beta = 0$;
(C) $\alpha = 0 \wedge \beta = -1$; (D) $\alpha \in \mathbb{R} \wedge \beta = -1$.

10. Sejam $\vec{u} = (2, 0, 0)$ e $\vec{v} = (3, 2k, 1)$ vetores de $\mathbb{R}^3$. O(s) valor(es) de k de modo que a área do triângulo formado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ seja igual a 3 é (são):

(A) $k = -2 \vee k = 2$;
(B) $k = -\sqrt{2} \vee k = \sqrt{2}$;
(C) apenas $k = 2$;
(D) apenas $k = \sqrt{2}$.

11. Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores de $\mathbb{R}^3$ tais que $\vec{v}$ é unitário, $\|\vec{u}\| = 4$ e $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{2\pi}{3}$.

A expressão $\|\text{proj}_{\vec{v}} \vec{u}\|$ é igual a:

(A) $\frac{-1}{2}$; (B) $\frac{1}{2}$; (C) 2; (D) -2.

12. Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores de $\mathbb{R}^3$ tais que: $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = 4$ e $\frac{\pi}{2} \leq \angle(\vec{u}, \vec{v}) \leq \pi$.

A expressão $\vec{u} \bullet (3\vec{u} - \vec{v})$

(A) é igual a $12 - 4\sqrt{3}$;
(B) é igual a $6 - 4\sqrt{3}$;
(C) é igual a $6 + 4\sqrt{3}$;
(D) não está definida.

Soluções dos Exercícios Propostos

1. (a) $\hat{v} = \left(\frac{5\sqrt{26}}{26}, -\frac{\sqrt{26}}{26}\right)$ ou $-\hat{v} = \left(-\frac{5\sqrt{26}}{26}, +\frac{\sqrt{26}}{26}\right)$.
(b) i. 119;
ii. $85\sqrt{2}$;
iii. $-12\sqrt{13}$.
2. (a) $\cos\left(\angle\left(\overrightarrow{PQ}, \hat{e}_1\right)\right) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cos\left(\angle\left(\overrightarrow{PQ}, \hat{e}_2\right)\right) = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ e $\cos\left(\angle\left(\overrightarrow{PQ}, \hat{e}_3\right)\right) = 0$.
(b) $\hat{PQ} = \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{5}}{5}, 0\right)$. Os cosenos diretores de um vetor são as coordenadas do seu versor.
(c) $\vec{u}$ e $\overrightarrow{PQ}$ não são colineares.
(d) $\hat{w} = \left(-\frac{\sqrt{14}}{7}, \frac{3\sqrt{14}}{14}, -\frac{\sqrt{14}}{14}\right)$ ou $-\hat{w} = \left(\frac{\sqrt{14}}{7}, -\frac{3\sqrt{14}}{14}, \frac{\sqrt{14}}{14}\right)$.
(e) $\vec{u} = \vec{w}_1 + \vec{w}_2$ onde $\vec{w}_1 = \left(-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ e $\vec{w}_2 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$.
(f) $Vol\left(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{PQ}\right) = 7$.
3. (a) i. $\vec{u} \wedge \vec{v} = (4, 1, -3)$;
ii. Não é possível determinar o valor da expressão dada uma vez que o produto interno só se encontra definido entre vetores. Na expressão dada o produto interno apresenta-se entre um vetor, resultante da soma de $\vec{u}$ com $2\vec{v}$ e um escalar, resultante da norma da subtração de $\vec{u}$ com $\vec{v}$.
(b) $A_{\text{triângulo}}(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\sqrt{26}}{2}$.
(c) $k = -2$;
(d) i. $k = \frac{2\sqrt{2}+1}{5} \vee k = \frac{-2\sqrt{2}+1}{5}$.
4. (a) $\cos\left(\angle(\vec{u}, \hat{e}_1)\right) = -\frac{2}{3}$, $\cos\left(\angle(\vec{u}, \hat{e}_2)\right) = \frac{1}{3}$ e $\cos\left(\angle(\vec{u}, \hat{e}_3)\right) = \frac{2}{3}$.
(b) $\|proj_{\vec{u}} \vec{v}\| = \frac{1}{3}$.
(c) i. $k = 0$;
ii. $k = 0 \vee k = 3$.
5. (a) $7\hat{u} = \left(\frac{7\sqrt{2}}{2}, -\frac{7\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ ou $-7\hat{u} = \left(-\frac{7\sqrt{2}}{2}, \frac{7\sqrt{2}}{2}, 0\right)$.
(b) $\beta = 0$.
(c) $\beta = 0 \wedge \alpha = 2$.

6. (a) i. Não é possível determinar o valor da expressão dada uma vez que o produto vetorial só se encontra definido entre vetores. Na expressão dada o produto vetorial apresenta-se entre um vetor, resultante da multiplicação do escalar 3 pelo vetor $\vec{u}$ e um escalar, resultante da norma da subtração de $2\vec{u}$ por $3\vec{v}$;
- ii. $(2\alpha\beta, 2, 2\alpha)$.
- (b) —
- (c) $\alpha = 0 \vee \beta \pm 2$.
- (d) A afirmação é falsa. O volume do paralelepípedo definido pelos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ é igual a onze unidades”.
7. (a) $\hat{u} = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$ ou $-\hat{u} = (-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$.
- (b) $\angle(\vec{u}, \hat{v}) = \frac{\pi}{4}$.
- (c) —
- (d) $k = -4 \vee k = 0$.
8. (a) A expressão dada não se encontra definida pois o produto interno só se encontra definido entre vetores. Na expressão dada o produto interno apresenta-se entre um vetor, resultante da soma de $\vec{u}$ com $\vec{v}$ e um escalar, resultante do produto escalar entre o vetor resultante do produto vetorial entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ que tem prioridade, e o vetor $\vec{v}$;
- (b) $\|proj_{\vec{v}}(\vec{u} + \vec{w})\| = 1$;
- (c) A expressão dada não se encontra definida pois o produto vetorial só se encontra definido entre vetores. Na expressão dada o produto vetorial apresenta-se entre um vetor, resultante da multiplicação do escalar 3 pelo vetor $\vec{u}$ e um escalar, representado por $\|proj_{\vec{v}} \vec{u}\|$;
- (d) $\|\vec{u} \wedge (\vec{z} + 2\vec{v})\| = 4\sqrt{3}$.
9. $\vec{v} = (\frac{1}{2}, 0, \pm\frac{\sqrt{3}}{2})$.
10. (a) —
- (b) —
11. —
12. -24
13. —
14. —

15. —

16. —

17. (a) A afirmação é falsa. $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \bullet \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$.
- (b) A afirmação é falsa. Apresentemos um contra-exemplo: seja $\vec{u} = (1, 1, 1)$, $\vec{v} = (2, -2, 2)$ e $\vec{w} = (-2, 2, 2)$. Neste caso, resulta que $\vec{u} \bullet \vec{v} = \vec{u} \bullet \vec{w} = 2$ e $\vec{v} \neq \vec{w}$.
- (c) A afirmação é verdadeira. Seja $\vec{u} \bullet (\alpha \vec{v} + \beta \vec{w}) = \alpha (\vec{u} \bullet \vec{v}) + \beta (\vec{u} \bullet \vec{w})$. Uma vez que $\vec{u}$ é ortogonal a $\vec{v}$ e que $\vec{u}$ é ortogonal a $\vec{w}$, $\vec{u} \bullet \vec{v} = 0$ e $\vec{u} \bullet \vec{w} = 0$ pelo que $\vec{u} \bullet (\alpha \vec{v} + \beta \vec{w}) = 0$, donde resulta que $\vec{u}$ é ortogonal a $\alpha \vec{v} + \beta \vec{w}$ para quaisquer escalares reais α e β .

Soluções dos Exercícios de Escolha Múltipla

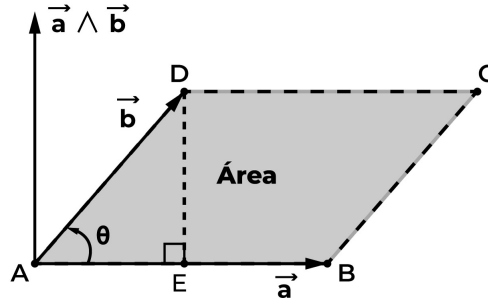
1. B.
2. (a) B.
(b) A.
(c) D.
3. D.
4. A.
5. D.
6. C.
7. A.
8. (a) D.
(b) D.
9. (a) B.
(b) D.
(c) D.
10. B.
11. C.
12. A.

Aplicações

Programação em Python para o cálculo de áreas e volumes

Cálculo da área do paralelogramo formado por dois vetores não paralelos de $\mathbb{R}^3$

A utilização de vetores no cálculo da área de um paralelogramo oferece uma abordagem geométrica eficiente para resolver este problema. Recordemos que a área do paralelogramo pode ser calculada multiplicando o comprimento da base pela altura. Consideremos o paralelogramo $[ABCD]$ formado pelos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ representado na figura seguinte:



A área do paralelogramo é então dada por:

$$A_{[ABCD]} = base \times altura = \|\vec{AB}\| \cdot \|\vec{DE}\|$$

Note que no triângulo retângulo $[ADE]$ temos a seguinte relação:

$$\sin \theta = \frac{\|\vec{DE}\|}{\|\vec{AD}\|} \Leftrightarrow \|\vec{DE}\| = \sin \theta \cdot \|\vec{AD}\|$$

Logo a área do paralelogramo é dada por:

$$A_{[ABCD]} = \|\vec{AB}\| \cdot \|\vec{DE}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \sin(\vec{a}, \vec{b}) = \|\vec{a} \wedge \vec{b}\|$$

Resumindo, se $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são vetores que representam os lados adjacentes de um paralelogramo, então a área do paralelogramo pode ser dada pelo comprimento do vetor resultante do produto vetorial $\vec{a} \wedge \vec{b}$:

$$A_{[ABCD]} = \|\vec{a} \wedge \vec{b}\|$$

Esta abordagem oferece uma alternativa para o cálculo da área de um paralelogramo, proporcionando uma compreensão visual e intuitiva da geometria envolvida.

Note ainda que as áreas dos triângulos $[ABD]$ e $[BCD]$ são iguais a metade da área do paralelogramo $[ABCD]$:

$$A_{[ABD]} = A_{[BCD]} = \frac{\|\vec{a} \wedge \vec{b}\|}{2}$$

O recurso a vetores é vantajoso dado que pode ser aplicado a uma variedade de problemas geométricos, facilitando a expansão para contextos tridimensionais mais complexos.

Implementação do cálculo da área do paralelogramo em Python

Vamos agora implementar o cálculo da área de um paralelogramo em Python. Para tal vamos recorrer à biblioteca NumPy que permite trabalhar com vetores, proporcionando as ferramentas necessárias para calcular o produto externo "*np.cross*" e o seu comprimento "*np.linalg.norm*".

Para calcular a área de um paralelogramo usando vetores em Python, usaremos a seguinte abordagem:

1. Definir dois vetores que representem dois lados adjacentes do paralelogramo.
2. Calcular o produto externo entre esses dois vetores, obtendo-se um vetor perpendicular ao plano do paralelogramo.
3. Calcular a norma do vetor obtido no ponto 2. obtendo-se a área do paralelogramo.

Apresenta-se agora um exemplo da implementação do cálculo da área do paralelogramo em Python. Neste exemplo concretizamos o cálculo para o paralelogramo definido pelos vetores

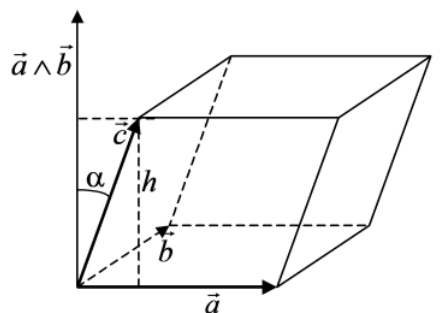
$\vec{u} = (1, 0, 2)$ e $\vec{v} = (0, 1, -2)$ de $\mathbb{R}^3$.

```
1 # Online Python compiler (interpreter) to run Python online.
2 print("Try programiz.pro")
3 import numpy as np
4 def area_paralelogramo(vetor1, vetor2):
5     produto_externo = np.cross(vetor1, vetor2) # Calcula o produto externo
6     area = np.linalg.norm(produto_externo) # Calcula o comprimento do vetor
7     return area
8 vetor1 = np.array([1, 0, 2]) # Vetor representando um lado do paralelogramo
9 vetor2 = np.array([0, 1, -2]) # Vetor representando o outro lado do
10                                paralelogramo
11 area = area_paralelogramo(vetor1, vetor2)
12 print("A área do paralelogramo é:", area)
```

Try programiz.pro
A área do paralelogramo é: 3.0
> |

Cálculo do volume do paralelepípedo formado por três vetores não coplanares de $\mathbb{R}^3$

Recordemos que o volume do paralelepípedo pode ser calculado multiplicando a área da base pela sua altura. Consideremos o paralelepípedo formado pelos vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ representado de seguida:



O volume do paralelepípedo pode ser calculado pela fórmula:

$$Volume = |\vec{a} \wedge \vec{b} \bullet \vec{c}|$$

ou seja, o módulo do produto misto entre os vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$.

Desafio

Faça a dedução desta fórmula para o cálculo do volume do paralelepípedo formado por três vetores não coplanares de $\mathbb{R}^3$.

Implemente o cálculo do volume do paralelepípedo em Python.



Matrizes, Sistemas de Equações Lineares e Determinantes

Matrizes e Sistemas de Equações Lineares

Exercícios Resolvidos

1. Sejam A , B e C as matrizes reais definidas por:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

- (a) Calcule, se possível, $(A - 2I_3)C^T$.

Resolução: Dado que as matrizes A e I_3 são matrizes de ordem 3 podemos realizar a operação $A - 2I_3$, cujo resultado é uma matriz de ordem 3. Por outro lado, C^T é a transposta da matriz C e portanto é uma matriz de dimensão 3×2 . Como o número de colunas de $A - 2I_3$ é igual ao número de linhas de C^T podemos efetuar a multiplicação $(A - 2I_3)C^T$. Assim,

$$\begin{aligned} (A - 2I_3)C^T &= \left(\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T \\ &= \left(\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

- (b) Usando eliminação gaussiana, reduza a matriz $A_1 = [A \mid B]$ à sua forma escalonada por linhas e indique a característica de A_1 .

Resolução: A matriz $A_1 = [A \mid B]$ é a matriz:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Um processo de eliminação gaussiana que permite reduzir a matriz A_1 à sua forma escalonada por linhas é o seguinte:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} L_2 \rightarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 - L_1 \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = A'.$$

Como A' está na forma escalonada por linhas tem-se: $\text{car}(A_1) = \text{car}(A') = \text{n.º}$ de pivots de $A' = 3$.

- (c) Analise a dependência linear das linhas e colunas da matriz A_1 definida na alínea anterior.

Resolução: A matriz A_1 da alínea anterior tem 3 linhas e 4 colunas. Uma vez que, pela alínea anterior, a característica da matriz A_1 é 3, podemos concluir que:

- as linhas da matriz A_1 são linearmente independentes pois $\text{car}(A_1) = 3 = \text{n.º}$ de linhas de A_1 ;
- as colunas da matriz A_1 são linearmente dependentes pois $\text{car}(A_1) = 3 < 4 = \text{n.º}$ de colunas de A_1 .

2. Considere as seguintes matrizes reais

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- (a) Calcule a característica da matriz A e justifique se A é invertível.

Resolução:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 - 2L_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} = A'.$$

Tem-se: $\text{car}(A) = \text{car}(A') = \text{n.º pivots}(A') = 3$.

Conclusão: Como $\text{car}(A) = 3 = \text{ordem}(A)$, então a matriz A é invertível.

- (b) Verifique se a inversa de A é a matriz B .

Resolução: Para verificar se a inversa de A é a matriz B basta realizar o produto AB . Se $AB = I_3$ concluímos que a inversa de A é a matriz B , caso contrário concluímos que B não é a inversa de A .

$$\begin{aligned}
AB &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0+1+0 & 2-2+0 & -4+4+0 \\ 0+0+0 & 1+0+0 & -2+0+2 \\ 0+0+0 & 0+0+0 & 0+0-3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3.
\end{aligned}$$

Logo B não é a inversa de A .

Observação: Note-se que realizamos o produto AB mas alternativamente podia realizar-se o produto BA .

3. Considere o sistema de equações lineares $AX = B$, cuja matriz ampliada é dada por:

$$[A \mid B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & \alpha & 1 \\ 0 & \alpha & 2 & 2\alpha \\ 0 & 0 & \alpha^2 - \alpha & \alpha \end{array} \right],$$

onde α é um parâmetro real. Classifique o sistema em função do parâmetro α .

Resolução: *Cálculos auxiliares:*

$$\alpha^2 - \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha(\alpha - 1) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \vee \alpha = 1.$$

Classificação do sistema em função do parâmetro α :

- $\alpha \neq 0 \wedge \alpha^2 - \alpha \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0 \wedge (\alpha \neq 0 \wedge \alpha \neq 1) \Leftrightarrow \alpha \neq 0 \wedge \alpha \neq 1$:
 $\text{car}(A) = \text{car}([A \mid B]) = 3 = n.^{\circ} \text{ variáveis}$
 $\therefore$ o sistema é possível e determinado.
- $\alpha = 1$:
 $\text{car}(A) = 2 \neq 3 = \text{car}([A \mid B])$
 $\therefore$ o sistema é impossível.
- $\alpha = 0$:
 $\text{car}(A) = \text{car}([A \mid B]) = 2 \neq 3 = n.^{\circ} \text{ variáveis}$
 $\therefore$ o sistema é possível e indeterminado com grau de indeterminação $3 - 2 = 1$.

4. Sejam A , B e X matrizes reais invertíveis de ordem n tais que B é inversa de A^T .
Determine a matriz X que é solução da equação matricial:

$$(A^{-1}X^T - B^T)^{-1} = A.$$

Resolução: Como a matriz B é a matriz inversa de A^T então:

$$B = (A^T)^{-1} \Leftrightarrow B = (A^{-1})^T \Leftrightarrow B^T = A^{-1}$$

Assim,

$$\begin{aligned}(A^{-1}X^T - B^T)^{-1} = A &\Leftrightarrow [(A^{-1}X^T - A^{-1})^{-1}]^{-1} = A^{-1} \\&\Leftrightarrow A^{-1}X^T - A^{-1} = A^{-1} \\&\Leftrightarrow A^{-1}X^T = A^{-1} + A^{-1} \\&\Leftrightarrow AA^{-1}X^T = A(2A^{-1}) \\&\Leftrightarrow I_n X^T = 2AA^{-1} \\&\Leftrightarrow X^T = 2I_n \\&\Leftrightarrow (X^T)^T = 2I_n^T \\&\Leftrightarrow X = 2I_n\end{aligned}$$

Exercícios Propostos

1. Considere as matrizes reais A, B, C, D e E de ordens respetivamente iguais a 4×3 , 3×2 , 3×4 , 4×2 e 3×3 . Determine quais das seguintes expressões matriciais estão definidas. Para as que estão definidas, indique a dimensão da matriz resultante.

- (a) ABD .
- (b) $(A^T C^T + E)B$.
- (c) $(C^T E - 2A)^T$.
- (d) $(AC)^T + 3A$.
- (e) $CDB^T - E^T$.

2. Seja A uma matriz real do tipo $m \times (m+7)$ e B uma matriz real do tipo $n \times (13-n)$. Determine os possíveis valores para m e n sabendo que estão definidos os produtos AB e BA . [VÍDEO](#)

3. Considere as seguintes matrizes reais:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

- (a) Determine:
 - i. a primeira linha da matriz $A + B$;
 - ii. a segunda coluna da matriz BA ;
 - iii. a terceira linha da matriz A^2 .
- (b) Verifique se a inversa da matriz A é a matriz B .

RECORDE: Uma matriz A de ordem n diz-se **invertível** se existir uma matriz B de ordem n tal que

$$AB = I_n \quad \text{e} \quad BA = I_n.$$

A matriz B designa-se por inversa da matriz A e representa-se por A^{-1} .

4. Considere uma matriz antissimétrica $A \in M_{4 \times 4}(\mathbb{R})$, uma matriz ortogonal $B \in M_{4 \times 4}(\mathbb{R})$ e as matrizes reais

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ -3 & 3 & 6 & 0 \end{bmatrix}.$$

- (a) Determine a matriz $(DC)^T - C^T$.
- (b) Calcule a característica da matriz D .
- (c) Determine a solução da equação matricial $Y^T + 3D = B(A^T B)^T + A^T$.

5. Considere as matrizes reais

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & \alpha & \beta \end{bmatrix}.$$

- (a) Calcule se possível:
 - i. AA^T ; VÍDEO
 - ii. $2B^T A + A^T$. VÍDEO
- (b) Indique, justificando, se a matriz A verifica alguma(s) das seguintes propriedades: simetria, antissimetria e ortogonalidade. VÍDEO
- (c) Analise a dependência linear das linhas e colunas da matriz C em função dos parâmetros reais α e β . VÍDEO

6. Seja $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ com linhas $L_1, L_2, \dots, L_m$. Mostre que as linhas $L_1, L_2, \dots, L_m$ da matriz A são linearmente dependentes se e só se pelo menos uma das linhas de A é combinação linear das restantes.

7. Sejam $A, B, C, O_n \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ tais que A é ortogonal, C é antissimétrica e O_n é a matriz nula de ordem n .

Mostre que $A(CBA + C)^T + B^T C + AC = O_n$.

8. Seja A uma matriz invertível de ordem n .

Mostre que a inversa de A é única.

9. Sejam $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$. Mostre que:

Se A é invertível e B é ortogonal então $\text{car}(AB) = n$. VÍDEO

10. Admita que I_n designa a matriz identidade de ordem n e O_n a matriz nula de ordem n e A designa uma matriz de ordem n tal que:

$$A^2 - 3A + 2I_n = O_n.$$

Mostre que A é invertível e obtenha a sua matriz inversa.

11. Sejam A e B duas matrizes invertíveis de ordem n e X uma matriz de ordem n . Resolva, se possível, a equação matricial:

$$(X - A)^2 = (X - A) X + B.$$

12. Sejam $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ matrizes invertíveis tais que B é a matriz inversa de A^T . Determine a matriz X que é solução da equação matricial: [VÍDEO](#)

$$(A^{-1}X^T - B^T)^{-1} = A.$$

13. Sejam A, B e X matrizes invertíveis de ordem n tais que A é uma matriz anti-simétrica e B é uma matriz ortogonal. Resolva a seguinte equação matricial:

$$(X^{-1}B)^{-1} + (A^TB + A(B^T)^{-1})^T = I_n.$$

14. Utilizando o método de eliminação Gaussiana classifique e, se possível, resolva os seguintes sistemas de equações lineares.

$$(S_1) : \begin{cases} x + y + w - 2 = z \\ 2x + y + w = 1 + z \\ x + 2w = 5 - 2y + 2z \\ x - y + z = 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad (S_2) : \begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x + 6y + 3z = 4 \\ 3x + 8y + 2z = 10 \end{cases}.$$

RECORDE: Seja $AX = B$ um sistema de equações lineares.

O método de eliminação de Gauss consiste em efetuar operações elementares sobre as linhas da matriz ampliada $[A|B]$ de forma a obter a sua forma escalonada por linhas $[A'|B']$.

O sistema representado pela matriz $[A'|B']$, obtida pela condensação é equivalente ao sistema representado por $[A|B]$.

15. Determine os valores dos parâmetros reais α e β para os quais o seguinte sistema tem solução.

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = 1 \\ y + 2z = 0 \\ -x + y = -1 \\ \alpha z = \beta + 1 \end{cases}.$$

16. Discuta a natureza dos seguintes sistemas de equações lineares em função dos parâmetros reais a e b .

$$(S_1) : \begin{cases} x + ay = b \\ x + (a + 2)y - 2az = 0 \\ -2y + (a - 1)z = 2b + 2 \end{cases} \quad \text{e} \quad (S_2) : \begin{cases} x - ay - z = b \\ 2y + az = 0 \\ 2x - 2ay + az = 2b \\ 4y + 2az = b \end{cases}.$$

17. Classifique, em função do parâmetro real α , o sistema de equações lineares $AX = B$, cuja matriz ampliada é dada por:

$$[A \mid B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & \alpha & 1 \\ 0 & \alpha & 2 & 2\alpha \\ 0 & 0 & \alpha^2 - \alpha & \alpha \end{array} \right].$$

18. Considere as matrizes reais A , B , C e X definidas por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 2 & \alpha \\ 2 & 2\alpha & \alpha \\ 1 & \alpha & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \beta \\ \beta \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}.$$

- (a) Para que valores de α as colunas da matriz A são linearmente independentes?
- (b) Classifique o sistema de equações lineares $AX = B$ em função dos parâmetros α e β ;
- (c) Resolva o sistema de equações lineares $AX = B$ para $\alpha = \beta = 1$;
- (d) Determine a última linha da matriz inversa de C .

19. Considere as matrizes reais A , B , C e X definidas por:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & \alpha - 1 \\ 4 & 3 & 2\alpha \\ -2 & -1 & \alpha^2 - \alpha \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \alpha - 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

- (a) De que tipo deve ser a matriz Y , de modo que a expressão matricial

$$YA^2B - CB$$

esteja bem definida?

- (b) Classifique o sistema de equações lineares $AX = B$ em função do parâmetro α ;
- (c) Indique para que valores de α as colunas da matriz A são linearmente independentes;
- (d) Resolva o sistema de equações lineares $AX = B$ para $\alpha = -2$;
- (e) Considere $\alpha = 0$. Determine o elemento da 2ª linha e 3ª coluna da matriz inversa de A .

20. Considere as seguintes matrizes reais:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2\beta + 4 & 1 \\ -1 & -2 & \beta \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -\beta \\ 2\beta \\ \beta - \alpha \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

- (a) Analise a dependência linear das linhas e colunas das matrizes A e C ;
- (b) Analise as matrizes A e C quanto à invertibilidade;
- (c) Classifique o sistema de equações lineares $AX = B$ para todos os valores de α e de β ; VÍDEO

Nas alíneas seguintes considere $\alpha = \beta = -1$.

- (d) Determine a solução do sistema $AX = B$;
- (e) Resolva a equação matricial $AY = (C^T C A^T)^T$.

21. Indique o valor lógico das afirmações seguintes, justificando convenientemente.

- (a) Se A e B são matrizes ortogonais de ordem n então AB é uma matriz ortogonal;
- (b) Para quaisquer matrizes $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ tem-se que $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$;
- (c) Para quaisquer matrizes $A, P \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ tais que A é simétrica, a matriz $P^T A P$ é simétrica;
- (d) Sejam A, B e C matrizes reais não nulas de ordem n . Se $AB = AC$ então $B = C$;
- (e) Se A e B são duas matrizes invertíveis de ordem n então $A + B$ é uma matriz invertível; VÍDEO
- (f) Se um sistema de n equações lineares com n incógnitas tiver duas equações que são múltiplas uma da outra, então o sistema será impossível;
- (g) Todo o sistema de equações lineares homogêneo com mais incógnitas que equações tem infinitas soluções.

Exercícios de Escolha Múltipla

Nos exercícios seguintes deve selecionar a única opção correta.

1. Considere as matrizes reais

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & -4 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Podemos afirmar que:

- (A) $AB = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 9 \end{bmatrix}$;
- (B) $AB = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 6 \\ -2 & -3 & 3 \\ -3 & 3 & 9 \end{bmatrix}$;
- (C) $AB = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 0 \\ -2 & 1 & 9 \end{bmatrix}$;
- (D) $AB = \begin{bmatrix} -4 & -6 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$.

2. Sejam A e B matrizes reais do tipo $m \times n$. A expressão $AA^T - B$:

- (A) é uma matriz $m \times n$;
- (B) é uma matriz $n \times m$;
- (C) é uma matriz $m \times n$ se e só se $m = n$;
- (D) não está definida.

3. Seja A uma matriz do tipo $(m + 4) \times m$ e B uma matriz real do tipo $n \times (8 - n)$. Sabendo que estão definidos os produtos $A^T B$ e BA^T , os possíveis valores para m e n são:

- (A) $m = 2 \wedge n = 6$;
- (B) $m = 6 \wedge n = 10$;
- (C) $m = -2 \wedge n = 2$;
- (D) $m = -6 \wedge n = -2$.

4. Considere a matriz real

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 & 3 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Podemos afirmar que:

- (A) se $\alpha = -\beta$, então A é uma matriz antissimétrica;
- (B) se $\alpha = \beta = 0$, então A é uma matriz escalar;
- (C) se $\alpha = \beta$, então A é uma matriz simétrica;
- (D) se $\alpha = 0$, então A é uma matriz triangular superior.

5. Considere as matrizes reais $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$. As matrizes A e B são comutáveis para:

- (A) $k = -1$;
- (B) $k = 1$;
- (C) $k = 0$;
- (D) $k \in \mathbb{R}$.

6. Considere a matriz real

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & \alpha & \alpha - 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta \end{bmatrix}.$$

- (A) Se $\alpha = 1$ e $\beta \neq 0$, então as linhas de A são linearmente dependentes;
- (B) Se $\alpha = 0$ e $\beta \neq 0$, então $\text{car}(A) = 3$;
- (C) Se $\alpha \neq 0$ e $\beta \neq 0$, então as colunas de A são linearmente independentes;
- (D) Se $\alpha = 0$ e $\beta = 0$, então $\text{car}(A) = 3$.

7. Considere a matriz real $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha + 4 \end{bmatrix}$.

Podemos afirmar que:

- (A) se $\alpha = 0$, então $\text{car}(A) = 3$ e A é uma matriz invertível;
- (B) se $\alpha = 0$, então $\text{car}(A) = 2$ e A não é invertível;
- (C) se $\alpha = -4$, então $\text{car}(A) = 2$ e A é uma matriz invertível;

(D) se $\alpha \neq -4$, então $\text{car}(A) = 3$ e A não é invertível.

8. Considere as matrizes reais

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & |k-4| \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

O(s) valor(es) de k de modo que a matriz A seja a inversa de B é (são):

(A) apenas $k = -1$;

(B) apenas $k = 5$;

(C) $k = 3 \vee k = 5$;

(D) $k = -1 \vee k = 5$.

9. Sejam A e B matrizes de ordem n tais que A é simétrica e B é ortogonal. Seja X a matriz invertível que satisfaz a equação matricial

$$B^T A + (X^{-1} B)^T = -B^{-1} A^T.$$

Então a solução da equação é dada por:

(A) $X = 2(A^{-1})^T$;

(B) $X = -\frac{1}{2}(A^{-1})^T$;

(C) $X = -2(A^T)^{-1}$;

(D) $X = \frac{1}{2}(A^T)^{-1}$.

10. Considere o sistema de equações lineares S de parâmetros a e b :

$$S = \begin{cases} x + 4y + z & = 1 \\ x + 2ay + (1 + 2a)z & = 6 \\ x + 4y + 9z & = b \end{cases}.$$

O sistema é possível e indeterminado para:

(A) $a = 3$ e $b = 9$;

(B) $a = 3$ e $b = 11$;

(C) $a = 2$ e $b = 9$;

(D) $a = 2$ e $b = 11$.

11. Considere o sistema de equações lineares $AX = B$, cuja matriz ampliada é dada por:

$$[A \mid B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & \alpha & 4 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2 - \alpha & 2 \end{array} \right],$$

onde α é um parâmetro real. Podemos afirmar que:

- (A) se $\alpha = 0$, então $\text{car}(A) = \text{car}([A \mid B])$ e o sistema é possível;
- (B) se $\alpha = 1$, então $\text{car}(A) = \text{car}([A \mid B]) = 3$ e o sistema é possível e determinado;
- (C) se $\alpha = 2$, então $\text{car}(A) = 2$ e o sistema é possível e indeterminado;
- (D) se $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq 1$, então $\text{car}(A) = \text{car}([A \mid B]) = 3$ e o sistema é possível e determinado.

Soluções dos Exercícios Propostos

1. (a) A expressão matricial não está definida;
(b) A expressão matricial não está definida. A matriz resultante é do tipo 3×2 ;
(c) A expressão matricial não está definida. A matriz resultante é do tipo 3×4 ;
(d) A expressão matricial não está definida;
(e) A expressão matricial não está definida. A matriz resultante é do tipo 3×3 .
2. $m = 3$ e $n = 10$.
3. (a) i. $L_1 = \begin{bmatrix} 0 & 5 & -1 \end{bmatrix}$;
ii. $C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$;
iii. $L_3 = \begin{bmatrix} 6 & -19 & 17 \end{bmatrix}$;
(b) A inversa da matriz A é a matriz B pois $BA = I_3$.
4. (a) $(DC)^T - C^T = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 5 & 9 \\ 10 & 2 & 3 & 24 \end{bmatrix}$;
(b) A característica da matriz D é igual a 3;
(c) $Y = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 0 & 9 \\ -3 & -6 & -12 & -9 \\ -6 & -6 & -6 & -18 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \end{bmatrix}$;
5. (a) i. $AA^T = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -8 \\ -2 & 8 & 14 \end{bmatrix}$;
ii. A expressão $2B^T A + A^T$;
(b) A matriz A é simétrica;
(c) As linhas da matriz C são linearmente dependentes quando $\alpha = -4 \wedge \beta = 0$.
As linhas da matriz C são linearmente independentes quando $\alpha \neq -4 \vee \beta \neq 0$.
6. —
7. —

8. —

9. —

10. $A^{-1} = -\frac{1}{2}A(A - 3I_n).$

11. $X = A - BA^{-1}.$

12. $X = BA^T + I_n.$

13. $X = B.$

14. $S_1: \text{car}(A) = \text{car}([A \mid B]) = 3 \neq 4 = n.^o \text{ variáveis}.$
 $\therefore$ o sistema é possível e indeterminado com grau de indeterminação $4 - 3 = 1$;

$S_2: \text{car}(A) = 2 \neq \text{car}([A \mid B]) = 3.$
 $\therefore$ o sistema é impossível.

15. O sistema tem solução quando:

- $\alpha = 0 \wedge \beta = -1 :$
 $\text{car}(A) = \text{car}([A \mid B]) = 2 \neq 3 = n.^o \text{ variáveis}.$
 $\therefore$ o sistema é possível e indeterminado com grau de indeterminação $3 - 2 = 1$;
- $\alpha \neq 0 \wedge \beta \in \mathbb{R} :$
 $\text{car}(A) = \text{car}([A \mid B]) = 3 = n.^o \text{ variáveis}.$
 $\therefore$ o sistema é possível e determinado.

16. Classificação do sistema em função dos parâmetros reais a e b :

$S_1:$

- $a = -1 \wedge b = -2 :$
 $\text{car}(A) = \text{car}([A \mid B]) = 2 \neq 3 = n.^o \text{ variáveis}.$
 $\therefore$ o sistema é possível e indeterminado com grau de indeterminação $3 - 2 = 1$;
- $a = -1 \wedge b \neq -2 :$
 $\text{car}(A) = 2 \neq \text{car}([A \mid B]) = 3.$
 $\therefore$ o sistema é impossível;
- $a \neq -1 \wedge b \in \mathbb{R} :$
 $\text{car}(A) = \text{car}([A \mid B]) = 3 = n.^o \text{ variáveis}.$
 $\therefore$ o sistema é possível e determinado.

$S_2:$

- $a = -2 \wedge b = 0 :$
 $\text{car}(A) = \text{car}([A \mid B]) = 2 \neq 3 = n.^o \text{ variáveis}.$
 $\therefore$ o sistema é possível e indeterminado com grau de indeterminação $3 - 2 = 1$;

- $a = -2 \wedge b \neq 0$:
 $\text{car}(A) = 2 \neq \text{car}([A \mid B]) = 3$.
 $\therefore$ o sistema é impossível;
- $a \neq -2 \wedge b = 0$:
 $\text{car}(A) = \text{car}([A \mid B]) = 3 = n.^o \text{ variáveis}$.
 $\therefore$ o sistema é possível e determinado;
- $a \neq -2 \wedge b \neq 0$:
 $\text{car}(A) = 3 \neq \text{car}([A \mid B]) = 4$.
 $\therefore$ o sistema é impossível.

17. Classificação do sistema em função do parâmetro real α :

- $\alpha = 0$:
 $\text{car}(A) = \text{car}([A \mid B]) = 2 \neq 3 = n.^o \text{ variáveis}$.
 $\therefore$ o sistema é possível e indeterminado com grau de indeterminação $3 - 2 = 1$;
- $\alpha = 1$:
 $\text{car}(A) = 2 \neq \text{car}([A \mid B]) = 3$.
 $\therefore$ o sistema é impossível;
- $\alpha \neq 0 \wedge \alpha \neq 1$:
 $\text{car}(A) = \text{car}([A \mid B]) = 3 = n.^o \text{ variáveis}$.
 $\therefore$ o sistema é possível e determinado.

18. (a) $\alpha \neq 0$;

(b) Classificação do sistema em função dos parâmetros reais α e β :

- $\alpha = 0 \wedge (\beta = 2 \vee \beta = 1)$:
 $\text{car}(A) = 2 \neq \text{car}([A \mid B]) = 3$.
 $\therefore$ o sistema é impossível;
- $\alpha = 0 \wedge (\beta \neq 2 \wedge \beta \neq 1)$:
 $\text{car}(A) = 2 \neq \text{car}([A \mid B]) = 3$.
 $\therefore$ o sistema é impossível;
- $\alpha \neq 0 \wedge \beta = 1$:
 $\text{car}(A) = \text{car}([A \mid B]) = 3 = n.^o \text{ variáveis}$.
 $\therefore$ o sistema é possível e determinado;
- $\alpha \neq 0 \wedge \beta \neq 1$:
 $\text{car}(A) = 3 \neq \text{car}([A \mid B]) = 4$.
 $\therefore$ o sistema é impossível.

(c) C.S. = $\{(0, 1, -1)\}$;

(d) $C^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$;

19. (a) A matriz Y é do tipo 2×3 ;
- (b) Classificação do sistema em função do parâmetro real α :
- $\alpha = 1$:
 $\text{car}(A) = \text{car}([A \mid B]) = 2 \neq 3 = n.^o \text{ variáveis.}$
 $\therefore$ o sistema é possível e indeterminado com grau de indeterminação $3 - 2 = 1$;
 - $\alpha = -1$:
 $\text{car}(A) = 2 \neq \text{car}([A \mid B]) = 3.$
 $\therefore$ o sistema é impossível;
 - $\alpha \neq -1 \wedge \alpha \neq 1$:
 $\text{car}(A) = \text{car}([A \mid B]) = 3 = n.^o \text{ variáveis.}$
 $\therefore$ o sistema é possível e determinado.
- (c) As colunas da matriz A são linearmente independentes quando $\alpha \neq -1 \wedge \alpha \neq 1$;
- (d) C.S. = $\{(-3, 3, -1)\}$;
- (e) $a_{23} = 2$.
20. (a) As linhas/colunas da matriz A são linearmente dependentes quando $\beta = -2 \vee \beta = 0$. As linhas/colunas da matriz A são linearmente independentes quando $\beta \neq -2 \wedge \beta \neq 0$. As linhas da matriz C são linearmente independentes. As colunas da matriz C são linearmente dependentes;
- (b) A matriz A é invertível quando $\beta \neq -2 \wedge \beta \neq 0$. A matriz C não é invertível;
- (c) Classificação do sistema em função dos parâmetros reais α e β :
- $\beta = -2 \wedge \alpha = -4$:
 $\text{car}(A) = \text{car}([A \mid B]) = 2 \neq 3 = n.^o \text{ variáveis.}$
 $\therefore$ o sistema é possível e indeterminado com grau de indeterminação $3 - 2 = 1$;
 - $\beta = -2 \wedge \alpha \neq -4$:
 $\text{car}(A) = 2 \neq \text{car}([A \mid B]) = 3.$
 $\therefore$ o sistema é impossível;
 - $\beta = 0 \wedge \alpha = 0$:
 $\text{car}(A) = \text{car}([A \mid B]) = 2 \neq 3 = n.^o \text{ variáveis.}$
 $\therefore$ o sistema é possível e indeterminado com grau de indeterminação $3 - 2 = 1$;
 - $\beta = 0 \wedge \alpha \neq 0$:
 $\text{car}(A) = 2 \neq \text{car}([A \mid B]) = 3.$
 $\therefore$ o sistema é impossível;
 - $\beta \neq -2 \wedge \beta \neq 0 \wedge \alpha \in \mathbb{R}$:
 $\text{car}(A) = \text{car}([A \mid B]) = 3 = n.^o \text{ variáveis.}$
 $\therefore$ o sistema é possível e determinado.
- (d) C.S. = $\{(2, -\frac{1}{2}, -1)\}$;

(e) $Y = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix};$

21. (a) Verdadeiro;

(b) Falso. Considere, por exemplo, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix};$

(c) Verdadeiro;

(d) Falso. Considere, por exemplo, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$

(e) Falso. Considere, por exemplo, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix};$

(f) Falso. O sistema pode ser possível e indeterminado;

(g) Verdadeiro.

Soluções dos Exercícios de Escolha Múltipla

1. B;
2. C;
3. A;
4. D;
5. A;
6. D;
7. D;
8. C;
9. B;
10. D;
11. D.

Determinantes

Exercícios Resolvidos

1. Sejam A e B as matrizes reais definidas por:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

- (a) Usando o teorema de Laplace, calcule o determinante de A .

Resolução: Aplicando o teorema de Laplace, por exemplo, à 1 linha da matriz A , temos:

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 2 \times \left((-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \right) + 0 \times \left((-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \right) + 0 \times \left((-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right) \\ &= 2 \times (1 \times 0 - 1 \times 1) + 0 + 0 \\ &= -2. \end{aligned}$$

Observação: Alternativamente, podia-se aplicar o teorema de Laplace a qualquer outra linha ou coluna da matriz A . Note-se, no entanto, que a aplicação à 1 linha e a aplicação à 3 coluna são as menos trabalhosas pois são as que envolvem mais zeros.

- (b) Calcule, se possível, a matriz dos complementos algébricos de A e a matriz inversa de A .

Resolução: Pela alínea anterior, $|A| = -2 \neq 0$ logo a matriz A é invertível. Assim, podemos calcular a matriz inversa de A .

A matriz dos complementos algébricos de A é dada por:

$$A^C = \begin{bmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

A matriz inversa de A é dada por:

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{|A|} \text{Adj}(A) = \frac{1}{|A|} (A^C)^T \\ &= \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}^T = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

- (c) Usando a regra de Cramer, calcule a última componente da solução do sistema de equações lineares $AX = B$.

Resolução: Pela alínea (a), $|A| = -2 \neq 0$ e portanto, o sistema de equações lineares $AX = B$, com $X = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^T$, é possível e determinado. Logo o sistema $AX = B$ tem uma única solução, a qual pode ser obtida aplicando a regra de Cramer.

Visto que nesta alínea é pedido unicamente o cálculo da última componente da solução do sistema, esta é obtida pela regra de Cramer da seguinte forma:

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & \mathbf{0} \\ 1 & 1 & \mathbf{2} \\ 1 & 1 & \mathbf{2} \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{0}{-2} = 0$$

Nota: O determinante que se encontra no numerador é zero porque as linhas são L.D., reparemos que $L_2 = L_3$.

2. Sejam A e B as matrizes reais definidas por:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} a & 2c & b & c \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ g & 2i & h & i \\ d & 2f & e & f \end{bmatrix}.$$

Sabendo que $|A| = k$, mostre que $|B| = k$.

Resolução:

$$|B| = 0 + (-1)(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{vmatrix} + (-1)(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} a & 2c & c \\ g & 2i & i \\ d & 2f & f \end{vmatrix} + 0, \text{ teorema de Laplace} \\ \text{aplicado à 2ª linha}$$

$$= (-1)(+1) \begin{vmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{vmatrix} + (-1)(-1) \begin{vmatrix} a & 2c & c \\ g & 2i & i \\ d & 2f & f \end{vmatrix}, \text{ este segundo determinante é zero} \\ \text{porque } C_2 = 2C_3 \text{ (colunas L.D.)}$$

$$= (-1) \left(- \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \right) \begin{array}{l} \text{trocando as linhas } L_2 \text{ com } L_3 \\ \text{(o que faz com que se troque o sinal no determinante)} \end{array}$$

$$= + \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = |A| = k.$$

Exercícios Propostos

1. Considere as seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 4 \\ -1 & -3 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{e}$$
$$D = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

- (a) Calcule o determinante das matrizes A, B, C e D ;
 - (b) Calcule o determinante da matriz BC e compare-o com $|B| \cdot |C|$;
 - (c) Compare $|B|$ com $|B^T|$;
 - (d) Verifique se $|B + C| = |B| + |C|$;
 - (e) Mostre que D é a inversa da matriz B . Compare $|B|$ com $|B^{-1}|$.
2. Use o teorema de Laplace para calcular o determinante das seguintes matrizes reais:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ -a & b & c & d \\ -a & -b & c & d \\ -a & -b & -c & d \end{bmatrix}.$$

VÍDEO

3. Considere a matriz real de ordem três dada por $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$.
- (a) Identifique os termos da matriz A , as permutações a eles associadas e os respectivos sinais;
 - (b) Calcule, usando a definição de determinante, o valor do determinante de A ;
 - (c) Considere $a_{11} = a_{12} = a_{13} = 1$, $a_{21} = a_{32} = a_{23} = 3$, $a_{31} = a_{33} = 2$ e $a_{22} = -2$. Verifique se a matriz A é invertível.

4. Sabendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3$, determine:

(a) $\begin{vmatrix} -2a & -2b & -2c \\ -2 & 0 & -2 \\ -8 & -6 & -4 \end{vmatrix};$

(b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ a & b & c \\ 3a+4 & 3b+3 & 3c+2 \end{vmatrix};$

(c) $\begin{vmatrix} 2a & 2 & 8 \\ 3c & 3 & 6 \\ b & 0 & 3 \end{vmatrix}.$

5. Considere uma matriz $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ e as seguintes matrizes reais:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Determine as matrizes:

- i. $Adj(B)$ e $Adj(C)$;
- ii. B^{-1} e C^{-1} ;

(b) Mostre que:

Se A é invertível, então $Adj(A)$ é invertível e $(Adj(A))^{-1} = \frac{A}{|A|}$;

(c) Calcule $(Adj(B))^{-1}$.

6. Considere o seguinte sistema de equações lineares.

$$S = \begin{cases} x - y + 2z & = & 1 \\ -x + 3y - 2z & = & -2 \\ 2x - y + 3z & = & 2 \end{cases}.$$

(a) Usando determinantes, mostre que o sistema é possível e determinado;

DICA: Recorde que um sistema $AX = B$, de n equações com n incógnitas, tem uma única solução se e só se $\det(A) \neq 0$.

(b) Determine, usando a regra de Cramer, a solução do sistema. VÍDEO

7. Considere as matrizes reais A , B e X definidas por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}.$$

Usando a regra de Cramer, determine a solução y do sistema de equações lineares $AX = B$.

8. Considere a matriz real $A = \begin{bmatrix} k+1 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ k & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

(a) Mostre que o determinante de A é igual a $16k - 16$;

(b) Indique, justificando, para que valores de k :

- i. as linhas de A são linearmente independentes;
- ii. a matriz A não é invertível;

(c) Considerando $k = 0$, calcule a primeira linha da inversa da matriz A . VÍDEO

9. Sejam $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ e $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ vetores de $\mathbb{R}^3$.

Mostre que: $\vec{u} \wedge \vec{v} \bullet \vec{w} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$.

10. Sejam $A, B, C \in M_{5 \times 5}(\mathbb{R})$ tais que $|A| = 3$, B é a matriz que se obtém de A trocando a primeira e a quarta linhas e C é ortogonal. Mostre que $|-AC(AC)^T B^{-1}| = 3$.

VÍDEO

11. Sejam A e B matrizes de ordem n tais que A é antissimétrica e B é ortogonal. Seja X a matriz invertível que verifica a equação matricial:

$$(X^{-1}B)^{-1} + (A^T B + A(B^T)^{-1})^T = I_n.$$

Mostre que $|X| = \pm 1$.

12. Indique o valor lógico das afirmações seguintes, justificando convenientemente.

(a) Existe uma matriz real triangular superior com determinante igual a -3 ;

(b) Se A e B são matrizes reais de ordem 3 tais que $|A| = -2$ e $|B| = 3$, então $|2A^T B^{-1}| = -\frac{4}{3}$;

(c) Se A e B são matrizes reais de ordem 5 tais que $|A| = 2$ e $|B| = 4$, então $|-A^T B^{-1} A| = 1$.

Exercícios de Escolha Múltipla

1. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$. O determinante da matriz A é igual a:

- (A) 10;
- (B) 11;
- (C) 12;
- (D) 13.

2. Considere a matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$. O determinante da matriz B é igual a:

- (A) -15 ;
- (B) -5 ;
- (C) 0;
- (D) 15.

3. Sejam A e B as matrizes reais definidas por:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 2g & 2h & 2i \\ d & e & f \\ 2a & 2b & 2c \end{bmatrix}.$$

Sabendo que $\det(A) = k$, o $\det(B)$ é:

- (A) $-4k$;
- (B) $4k$;
- (C) $-2k$;
- (D) $2k$.

4. Considere a matriz real A definida por:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

O valor do elemento da linha 2 e da coluna 3 da matriz adjunta de A é igual a:

- (A) 0;
- (B) 4;
- (C) 2;
- (D) -4.

5. Seja A a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Os complementos algébricos a_{21} e a_{31} da matriz A são respectivamente:

- (A) -6 e 11;
- (B) -6 e -11;
- (C) 6 e 11;
- (D) 6 e -11.

6. O determinante de uma matriz real D , de ordem 4, de modo que:

$$\det \left[(-2D^2D^{-1})^T \right]$$

seja igual a 10 é:

- (A) -5;
- (B) 5;
- (C) $-\frac{5}{8}$;
- (D) $\frac{5}{8}$.

7. Considere a matriz real A definida por

$$A = \begin{bmatrix} 0 & k & k \\ 1 & 0 & 1 \\ k & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Para $k = 1$ a terceira linha da matriz inversa de A é dada por:

- (A) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$;
- (B) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$;

(C) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix};$

(D) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$

8. Considere as seguintes matrizes invertíveis:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = A \left((BA)^{-1} A \right)^{-1}.$$

(a) As entradas da matriz inversa de A , A^{-1} , são:

(A) $a_{11}^{-1} = -7$ e $a_{33}^{-1} = -3$;

(B) $a_{11}^{-1} = -7$ e $a_{33}^{-1} = -1$;

(C) $a_{11}^{-1} = -5$ e $a_{33}^{-1} = -3$;

(D) $a_{11}^{-1} = -5$ e $a_{33}^{-1} = -1$.

(b) A entrada da matriz C é igual a:

(A) $c_{31} = 5$;

(B) $c_{31} = 6$;

(C) $c_{31} = 7$;

(D) $c_{31} = 8$.

(c) Considere o sistema de equações lineares $AX = B$, cuja matriz ampliada é dada por:

$$[A \mid B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & 8 \\ 1 & 1 & 2 & 6 \end{array} \right].$$

Sabendo que o determinante da matriz A é igual a -1 , podemos afirmar que a componente z da solução do sistema $AX = B$ é igual a:

(A) -14 .

(B) -2 .

(C) 2 .

(D) 14 .

(d) Considere o sistema $AX = B$ onde a matriz A é dada por $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$.

Com base no determinante da matriz A podemos afirmar que:

- (A) o sistema $AX = B$ é possível e determinado.
- (B) o sistema $AX = B$ é possível e indeterminado.
- (C) o sistema $AX = B$ é impossível.
- (D) nenhuma das afirmações anteriores é verdadeira.

Soluções dos Exercícios Propostos

1. (a) $|A| = 14$, $|B| = -1$, $|C| = 2$ e $|D| = -1$;
(b) $|BC| = -2$ e $|B| \times |C| = -1 \times 2 = -2$;
(c) $|B| = -1$ e $|B^T| = -1$;
(d) $|B + C| = -9$ e $|B| + |C| = -1 + 2 = 1$;
(e) $|B| = -1$ e $|B^{-1}| = -1$.
2. $|A| = 7$, $|B| = -48$ e $|C| = 2abcd$.
3. (a) Termo positivo 1: $a_{11}a_{22}a_{33}$, permutação (123), sinal positivo;
Termo positivo 2: $a_{12}a_{23}a_{31}$, permutação (231), sinal positivo;
Termo positivo 3: $a_{13}a_{21}a_{32}$, permutação (312), sinal positivo;

Termo negativo 1: $a_{13}a_{22}a_{31}$, permutação (321), sinal negativo;
Termo negativo 2: $a_{11}a_{23}a_{32}$, permutação (132), sinal negativo;
Termo negativo 3: $a_{12}a_{21}a_{33}$, permutação (213), sinal negativo.
(b) $\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$;
(c) Como $|A| = 0$, a matriz A não é invertível;
4. (a) -24 ;
(b) -3 ;
(c) -18 .
5. (a) i. $Adj(B) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -4 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ e $Adj(C) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

ii. $B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -0.5 & -1.5 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ e $C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;
(b) -
(c) $(Adj(B))^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -0.5 & 0.5 \\ -2 & -1.5 & 0 \\ 1 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}$.
6. (a) -
(b) C.S. = $\{(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})\}$.

7. $y = 2$.

8. (a) -

(b) i. $k \neq 1$;

ii. $k = 1$;

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$.

9. -

10. -

11. -

12. (a) Verdadeiro. Por exemplo: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$;

(b) Falso. $|2A^T B^{-1}| = -\frac{16}{3}$;

(c) Falso. $|-A^T B^{-1} A| = -1$.

Soluções dos Exercícios de Escolha Múltipla

1. A;
2. (a) B;
(b) D;
(c) D;
3. C;
4. D;
5. C;
6. (a) B;
(b) B.

Exercícios Complementares

Matrizes e Sistemas de Equações Lineares/Determinantes

Exercícios Resolvidos

1. Sejam A , B , C e X as matrizes reais de parâmetros a e b definidas por:

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ -1 & a & 1 \\ -1 & -1 & a \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -b \\ b \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & a \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

(a) Mostre que $|A| = a(a^2 + 3)$.

Resolução: Pela regra de Sarrus,

$$|A| = (a^3 + 1 - 1) - (-a - a - a) = a^3 + 3a = a(a^2 + 3).$$

(b) Justifique para que valores reais de a a matriz A é:

i. antissimétrica;

Resolução: Recordemos a definição de matriz antissimétrica:

A é antissimétrica se e só se $A^T = -A$.

$$\begin{aligned} A^T = -A &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ -1 & a & 1 \\ -1 & -1 & a \end{bmatrix}^T = - \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ -1 & a & 1 \\ -1 & -1 & a \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a & -1 & -1 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & -1 & -1 \\ 1 & -a & -1 \\ 1 & 1 & -a \end{bmatrix} \Leftrightarrow a = -a \Leftrightarrow a = 0. \end{aligned}$$

Conclusão: A é antissimétrica quando $a = 0$.

Observação: Da definição de matriz antissimétrica resulta que A é antissimétrica quando $a_{ij} = -a_{ji}$ para todos os $i, j = 1, 2, 3$ se $i \neq j$ e $a_{ij} = 0$ se $i = j$.

ii. invertível.

Resolução: A é invertível $\Leftrightarrow |A| \neq 0$.

Cálculos auxiliares:

$$\begin{aligned} |A| = 0 &\Leftrightarrow a(a^2 + 3) = 0, \text{ pela alínea (a)} \\ &\Leftrightarrow a = 0 \vee a^2 = -3. \end{aligned}$$

Como a matriz A é real, $a \in \mathbb{R}$ e portanto a condição $a^2 = -3$ é impossível. Assim, $|A| = 0$ quando $a = 0$. Logo A é invertível quando $a \neq 0$.

- (c) Usando o método de eliminação de Gauss, classifique o sistema de equações lineares $CX = B$ em função dos parâmetros a e b .

Resolução: Começemos por aplicar o método de eliminação de Gauss à matriz ampliada $[C \mid B]$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -b \\ 1 & 0 & a & b \end{array} \right] \xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 - L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -b \\ 0 & 1 & a & b \end{array} \right] \xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 - L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -b \\ 0 & 0 & a+1 & 2b \end{array} \right].$$

Classificação do sistema $CX = B$ em função dos parâmetros a e b :

$$\left. \begin{array}{l} \text{Se } a \neq -1 \wedge b \in \mathbb{R}: \quad \begin{array}{l} \text{car}(C) = 3 \\ \text{car}(C \mid B) = 3 \\ \text{n.º var.} = 3 \end{array} \end{array} \right\} \text{ Sistema possível determinado (S.P.D.).}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Se } a = -1 \wedge b \neq 0: \quad \begin{array}{l} \text{car}(C) = 2 \\ \text{car}(C \mid B) = 3 \end{array} \end{array} \right\} \text{ Sistema impossível (S.I.).}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Se } a = -1 \wedge b = 0: \quad \begin{array}{l} \text{car}(C) = 2 \\ \text{car}(C \mid B) = 2 \\ \text{n.º var.} = 3 \end{array} \end{array} \right\} \text{ Sistema possível indeterminado (S.P.I.) e grau de indeterminação G.I. = 3 - 2 = 1.}$$

Nas alíneas seguintes considere $a = 1$.

- (d) Mostre que $AC - 2I_3 = O_3$.

Resolução:

$$\begin{aligned} AC - 2I_3 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1+0+1 & -1+1+0 & 0-1+1 \\ -1+0+1 & 1+1+0 & 0-1+1 \\ -1+0+1 & 1-1+0 & 0+1+1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = O_3. \end{aligned}$$

- (e) Determine a matriz inversa de A .

Para esta alínea apresentamos três resoluções alternativas.

Resolução 1: Cálculo da inversa de A tendo por base a alínea anterior:

$$AC - 2I_3 = O_3 \Leftrightarrow AC = 2I_3 \Leftrightarrow A\left(\frac{1}{2}C\right) = I_3.$$

$$\text{Logo, } A^{-1} = \frac{1}{2}C = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Resolução 2: Cálculo da inversa de A usando determinantes.

Pela alínea (a): $|A| = a(a^2 + 3) = 1 \times 4 = 4$, porque $a = 1$.

$$\begin{aligned} A^C &= \begin{bmatrix} (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} +(1 - (-1)) & -(-1 - (-1)) & +(1 - (-1)) \\ -(1 - (-1)) & +(1 - (-1)) & -(-1 - (-1)) \\ +(1 - 1) & -(1 - (-1)) & +(1 - (-1)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$$\text{Adj}(A) = (A^C)^T = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Logo, } A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times \text{Adj}(A) = \frac{1}{4} \times \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Resolução 3: Cálculo da inversa de A usando o processo de condensação.

$$\begin{aligned} [A \mid I_3] &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[L_3 \rightarrow L_3 + L_1]{L_2 \rightarrow L_2 + L_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & \underline{1} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \underline{2} & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[L_1 \rightarrow L_1 - \frac{1}{2}L_3]{L_2 \rightarrow L_2 - L_3} \\ &\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \underline{1} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \boxed{2} & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{L_1 \rightarrow L_1 - \frac{1}{2}L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[L_3 \rightarrow \frac{1}{2}L_3]{L_2 \rightarrow \frac{1}{2}L_2} \\ &\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right] = [I_3 \mid A^{-1}]. \end{aligned}$$

- (f) Considere $b = 2$. Usando a regra de Cramer, determine o valor da segunda componente da solução do sistema de equações lineares $CX = B$.

Resolução:

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1 + 0 + 1) - (0 + 0 + 0) = 2 \neq 0.$$

$$\text{Pela regra de Cramer, } y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \mathbf{0} & 0 \\ 0 & \mathbf{-2} & -1 \\ 1 & \mathbf{2} & 1 \end{vmatrix}}{|C|} = \frac{0}{2} = 0.$$

Nota: O determinante que se encontra no numerador é zero porque as colunas são L.D., reparemos que $C_3 = 2C_2$.

Exercícios Propostos

1. Considere as seguintes matrizes reais:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -5 & 4\alpha \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -\beta \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

- (a) Indique, justificando, se o produto ABB^T está definido;
- (b) Usando o teorema de Laplace, verifique que $|A| = -4\alpha + 3$;
- (c) Para que valores de α as linhas da matriz A são linearmente independentes? Justifique convenientemente a resposta;
- (d) Classifique o sistema de equações lineares $AX = B$ para todos os valores de α e de β ;

Nas alíneas seguintes considere $\alpha = \beta = 1$.

- (e) Mostre que a inversa de A é a matriz C ;
- (f) Usando a alínea anterior, determine a matriz dos complementos algébricos de A ;
- (g) Usando o método da matriz inversa, calcule a solução do sistema $AX = B$.

2. Sejam α e β parâmetros reais e A , B , C e X as matrizes reais definidas por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \alpha \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} \beta \\ \beta \\ \beta \end{bmatrix}.$$

- (a) De que tipo deve ser a matriz D de modo que a operação matricial

$$DA^TBD + B^T$$

esteja bem definida?

- (b) Calcule a matriz $A^TB - B$;
- (c) Analise a dependência linear das linhas e colunas da matriz B ;
- (d) Para que valores de α a matriz A é invertível?
- (e) Classifique o sistema de equações lineares $AX = C$ em função dos parâmetros α e β ;
- (f) Considere $\alpha = 2 \wedge \beta = 1$;

- i. Determine a inversa da matriz inversa de A ;
- ii. Recorra ao método da matriz inversa para resolver o sistema $AX = C$.

3. Considere $A \in M_{3 \times 4}(\mathbb{R})$, $B \in M_{3 \times 1}(\mathbb{R})$ e as seguintes matrizes reais

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}.$$

- (a) Indique, justificando, se o produto $A(CD)^T$ está definido;
- (b) Determine a característica da matriz C ;
- (c) Verifique se as matrizes A e C são invertíveis, justificando convenientemente a resposta;
- (d) Calcule, se possível, a segunda linha da inversa da matriz C ;
- (e) Usando a regra de Cramer, determine a componente y da solução do sistema $CX = D$;
- (f) Complete, justificando convenientemente, as seguintes frases:
 - i. Se $\text{car}(A) = \text{car}([A|B]) = 3$ então o sistema $AX = B$ é
 - ii. Se $\text{car}(A) = 2$ e $\text{car}([A|B]) = 3$ então o sistema $AX = B$ é

4. Considere as seguintes matrizes reais:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2a & 0 \\ -2 & 2 & a-3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ b \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

- (a) Usando o teorema de Laplace, verifique que $|A| = 4a(a-3)$;
- (b) Para que valores de a as linhas da matriz A são linearmente independentes? Justifique convenientemente a resposta;
- (c) Classifique o sistema de equações lineares $AX = B$ para todos os valores de a e b ;
- (d) Considere $a = b = 2$.
 - i. Usando, se possível, a regra de Cramer calcule o valor da componente z da solução do sistema $AX = B$;
 - ii. Calcule a segunda linha da inversa da matriz A ;
 - iii. Considerando C uma matriz invertível de ordem 3, determine a matriz Y que satisfaz a equação matricial $CY^T A^{-1} = C + CA^{-1}$;
 - iv. Considere duas matrizes reais D e E de ordem 3 tais que $|D| = 2$ e onde E é a matriz que se obtém de D trocando a segunda e a terceira linhas. Mostre que $|2ED^T A^{-1}| = 4$.

Soluções dos Exercícios Propostos

1. (a) O produto ABB^T está definido e a matriz resultante é uma matriz do tipo 3×3 .

(b) -

(c) $\alpha = \frac{3}{4}$.

(d) Classificação do sistema em função dos parâmetros reais α e β :

- $\alpha = \frac{3}{4} \wedge \beta = -1$:
 $\text{car}(A) = \text{car}([A \mid B]) = 2 \neq 3 = n.^o \text{ variáveis.}$
 $\therefore$ o sistema é possível e indeterminado com grau de indeterminação $3 - 2 = 1$.
- $\alpha = \frac{3}{4} \wedge \beta \neq -1$:
 $\text{car}(A) = 2 \neq \text{car}([A \mid B]) = 3$.
 $\therefore$ o sistema é impossível.
- $\alpha \neq \frac{3}{4} \wedge b \in \mathbb{R}$:
 $\text{car}(A) = \text{car}([A \mid B]) = 3 = n.^o \text{ variáveis.}$
 $\therefore$ o sistema é possível e determinado.

(e) -

(f) $A^C = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \\ -6 & -6 & -6 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$.

(g) C.S. = $\{(1, -1, -2)\}$.

2. (a) A matriz D é do tipo 2×3 .

(b) $A^T B - B = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \\ -2 & 2\alpha - 1 \end{bmatrix}$.

(c) As linhas da matriz B são linearmente dependentes e as colunas da matriz B são linearmente independentes.

(d) $\alpha \neq 1$.

(e) Classificação do sistema em função dos parâmetros reais α e β :

- $\alpha = 1 \wedge \beta = 0$:
 $\text{car}(A) = \text{car}([A \mid B]) = 2 \neq 3 = n.^o \text{ variáveis.}$
 $\therefore$ o sistema é possível e indeterminado com grau de indeterminação $3 - 2 = 1$.

- $\alpha = 1 \wedge \beta \neq 0$:
 $\text{car}(A) = 2 \neq \text{car}([A \mid B]) = 3$.
 $\therefore$ o sistema é impossível.
- $\alpha \neq 1 \wedge \beta \in \mathbb{R}$:
 $\text{car}(A) = \text{car}([A \mid B]) = 3 = n.^o \text{ variáveis}$.
 $\therefore$ o sistema é possível e determinado.

(f) i. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

ii. $X = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

3. (a) $A(CD)^T$ não está definido.
- (b) $\text{car}(C) = 4$.
- (c) A matriz A não é invertível pois não é uma matriz quadrada. A matriz C é invertível pois $\text{car}(C) = 4 = \text{número de linhas da matriz quadrada}$.
- (d) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.5 & 0 \end{bmatrix}$.
- (e) $y = 0$.
- (f) i. $\text{car}(A) = \text{car}([A \mid B]) = 3 \neq 4 = n.^o \text{ variáveis}$.
 $\therefore$ o sistema $AX = B$ é possível e indeterminado com grau de indeterminação $4 - 3 = 1$.
- ii. $\text{car}(A) = 2 \neq \text{car}([A \mid B]) = 3$.
 $\therefore$ o sistema $AX = B$ é impossível.

4. (a) -
- (b) As linhas da matriz A são linearmente independentes quando $|A| \neq 0$, ou seja, quando $a \neq 0 \wedge a \neq 3$.
- (c) Classificação do sistema em função dos parâmetros reais a e b :
- $a = 0 \wedge b \in \mathbb{R}$:
 $\text{car}(A) = 2 \neq \text{car}([A \mid B]) = 3$.
 $\therefore$ o sistema é impossível.
 - $a = 3 \wedge b = -1$:
 $\text{car}(A) = \text{car}([A \mid B]) = 2 \neq 3 = n.^o \text{ variáveis}$.
 $\therefore$ o sistema é possível e indeterminado com grau de indeterminação $3 - 2 = 1$.
 - $a = 3 \wedge b \neq -1$:
 $\text{car}(A) = 2 \neq \text{car}([A \mid B]) = 3$.
 $\therefore$ o sistema é impossível.
 - $a \neq 0 \wedge a \neq 3 \wedge b \in \mathbb{R}$:
 $\text{car}(A) = \text{car}([A \mid B]) = 3 = n.^o \text{ variáveis}$.
 $\therefore$ o sistema é possível e determinado.

(d) i. $z - 3$.

ii. $\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}$.

iii. $Y = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

iv. -

Aplicações

Criptografia com Matrizes

Na criptografia, um dos principais objetivos é proteger mensagens de forma que apenas o destinatário correto consiga decifrá-las. Matrizes e operações associadas, como sistemas de equações lineares e determinantes, desempenham um papel importante na codificação e decodificação de mensagens.

Uma matriz pode ser usada para transformar uma mensagem num formato codificado. Por exemplo, cada letra de uma dada mensagem pode ser representada numericamente, por exemplo, do seguinte modo:

$$A = 1, B = 2, \dots, Z = 26.$$

Assim, a mensagem é então convertida num vetor de números, que será multiplicado por uma matriz chave, o que permitirá obter uma versão codificada da mensagem original.

Exemplo 1:

Suponhamos que pretendemos codificar a palavra "RI". Começamos por atribuir valores numéricos a cada letra. Assim,

$$I = 9, R = 18.$$

Podemos agora transformar esta mensagem num vetor coluna:

$$\text{mensagem original} = \begin{bmatrix} 18 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

Escolhemos agora uma **matriz chave** 2×2 . Esta matriz tem de ser invertível para que a mensagem possa ser decifrada,

$$\text{matriz chave} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Multiplicamos agora a **matriz chave** pelo vetor da mensagem:

$$\text{codificação} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 18 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \times 18 + 1 \times 9 \\ 2 \times 18 + 5 \times 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 63 \\ 81 \end{bmatrix}.$$

A mensagem codificada é assim, apresentada pelo vetor:

$$\text{mensagem codificada} = \begin{bmatrix} 63 \\ 81 \end{bmatrix}.$$

Descodificação usando Matrizes Inversas e Determinantes

Para descodificar uma mensagem é necessário inverter a **matriz chave**. A **matriz chave** só é invertível se o seu determinante for diferente de zero. Assim, comecemos por calcular o determinante da **matriz chave**. Para facilitar designemos esta matriz por A . O seu determinante é dado por:

$$\det(A) = 3 \times 5 - 1 \times 2 = 15 - 2 = 13 \neq 0.$$

Como o $\det(A) \neq 0$, A admite inversa.

Calculemos agora a inversa da matriz A :

$$A^{-1} = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{13} & -\frac{1}{13} \\ -\frac{2}{13} & \frac{3}{13} \end{bmatrix}.$$

Para obtermos a mensagem original, temos agora de multiplicar a matriz codificada pela matriz inversa de A , A^{-1} . Obtemos assim o vetor coluna com a mensagem original (verifique!):

$$\text{mensagem original} = \begin{bmatrix} 18 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

O que corresponde à palavra "RI".

Exemplo 2:

Pretende-se descodificar a mensagem composta por várias letras. Consideremos, por exemplo, a palavra "ADEUS". Neste exemplo, é necessário construir uma matriz maior para codificar a mensagem original e depois descodificar essa mesma mensagem, resolvendo um sistema de equações lineares. Consideramos uma matriz 3×3 para codificar grupos de três letras. Assim, comecemos por converter cada letra num valor numérico:

$$A = 1, D = 4, E = 5, U = 21, S = 19.$$

Dividimos a mensagem em grupos de três letras e obtemos os vetores colunas correspondentes:

$$\text{Vetor 1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \text{Vetor 2} = \begin{bmatrix} 21 \\ 19 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Note que o segundo vetor contém um 0 no final para completar o vetor 3×1 .

Escolhemos agora uma **matriz chave** 3×3 no processo de codificação. Designemos esta matriz por A . Recordemos que esta matriz tem de ser invertível para que a mensagem possa ser decifrada,

$$\text{matriz chave : } A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Multiplicamos agora cada vetor pela **matriz chave**, A , para obtermos a codificação:

- Para o **Vetor 1**:

$$\text{codificação 1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 1 + 3 \times 4 + 1 \times 5 \\ 2 \times 1 + 5 \times 4 + 1 \times 5 \\ 1 \times 1 - 1 \times 4 + 2 \times 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 27 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

- Para o **Vetor 2**:

$$\text{codificação 2} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 21 \\ 19 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 21 + 3 \times 19 + 1 \times 0 \\ 2 \times 21 + 5 \times 19 + 1 \times 0 \\ 1 \times 21 - 1 \times 19 + 2 \times 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 99 \\ 137 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

A mensagem codificada final é composta pelos vetores:

$$\text{Vetor 1} = \begin{bmatrix} 19 \\ 27 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad \text{Vetor 2} = \begin{bmatrix} 99 \\ 137 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Para decodificar a mensagem original, precisamos de calcular a inversa da matriz A .
Recorrendo à teoria dos determinantes, A^{-1} obtém-se:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{11}{6} & -\frac{7}{6} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{7}{6} & \frac{5}{6} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

De seguida, multiplicamos a inversa da matriz chave, A^{-1} , pelos vetores codificados, **Vetor 1** e **Vetor 2**, para obtermos os valores numéricos da matriz original, respetivamente:

- Mensagem decodificada 1:

$$\text{Mensagem decodificada 1} = A^{-1} \times \begin{bmatrix} 19 \\ 27 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

- Mensagem decodificada 2:

$$\text{Mensagem decodificada 2} = A^{-1} \times \begin{bmatrix} 99 \\ 137 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ 19 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Convertendo de volta as letras: $1 \rightarrow A$, $4 \rightarrow D$, $5 \rightarrow E$, $21 \rightarrow U$ e $19 \rightarrow S$.

Obtemos assim a mensagem original "**ADEUS**".

Desafio

Uma empresa de segurança precisa de codificar mensagens confidenciais que serão enviadas entre diferentes departamentos. Para garantir que apenas as pessoas autorizadas conseguem decifrar as mensagens foi decidido usar uma matriz 4×4 como chave de codificação. Essa matriz permitirá codificar mensagens com quatro letras.

Construa um exemplo com duas palavras utilizando uma matriz 4×4 . Descodifique a mensagem para garantir que o método utilizado permite obter a mensagem original.



Espaços Vetoriais, Valores e Vetores Próprios

Exercícios Resolvidos

1. Considere, em $\mathbb{R}^3$, os vetores $a = (1, -1, 1)$, $b = (1, 1, 3)$ e $c = (0, k, 1)$ e o subespaço vetorial $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z - y - 2x = 0\}$.

- (a) Calcule uma base para S e mostre que S tem dimensão igual a 2.

Resolução:

$$\begin{aligned} S &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = y + 2x\} \\ &= \{(x, y, y + 2x) : x, y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x, 0, 2x) + (0, y, y) : x, y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1, 0, 2) + y(0, 1, 1) : x, y \in \mathbb{R}\} \\ &= [(1, 0, 2), (0, 1, 1)]. \end{aligned}$$

Logo os vetores $(1, 0, 2)$ e $(0, 1, 1)$ geram o subespaço vetorial S .

Vamos agora ver se os vetores $(1, 0, 2)$ e $(0, 1, 1)$ são linearmente independentes:

$$\alpha(1, 0, 2) + \beta(0, 1, 1) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ 2\alpha + \beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

obtêm-se a solução trivial, logo os vetores são linearmente independentes.

Conclusão: $B_S = \{(1, 0, 2), (0, 1, 1)\}$ é uma base para S e $\dim S = \#B_s = 2$.

- (b) Mostre que $B = \{a, b\}$ é uma base para S .

Resolução:

1. $B \subset S$

$$a = (1, -1, 1) \in S, \text{ pois } 1 - (-1) - 2 \times 1 = 0.$$

$$b = (1, 1, 3) \in S, \text{ pois } 3 - 1 - 2 \times 1 = 0.$$

2. $\#B = 2 = \dim S$.

3. a e b são linearmente independentes.

$$\begin{aligned} \alpha(1, -1, 1) + \beta(1, 1, 3) = (0, 0, 0) &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ -\alpha + \beta = 0 \\ \alpha + 3\beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -\beta \\ - - - \\ - - - \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} - - - \\ -(-\beta) + \beta = 0 \\ -\beta + 3\beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - - - \\ 2\beta = 0 \\ 2\beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

obtêm-se a solução trivial, logo a e b são linearmente independentes.

Por 1., 2. e 3. podemos concluir que $B = \{a, b\}$ é uma base para S .

- (c) Obtenha as componentes do vetor $u = (1, -3, -1)$ na base $B = \{a, b\}$.

Resolução:

$$u = \alpha a + \beta b \Leftrightarrow (1, -3, -1) = \alpha(1, -1, 1) + \beta(1, 1, 3)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ -\alpha + \beta = -3 \\ \alpha + 3\beta = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 - \beta \\ - - - \\ - - - \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - - - \\ -1 + \beta + \beta = -3 \\ 1 - \beta + 3\beta = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} - - - \\ \beta = -1 \\ \beta = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 - (-1) \\ - - - \\ - - - \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = -1 \\ 0 = 0 \end{cases}.$$

Portanto $u = 2a - b = (2, -1)_B$.

- (d) Determine o valor de k de modo que c pertença ao subespaço vetorial gerado por a e b .

Para este exercício apresentamos duas resoluções alternativas.

Resolução 1: Pela alínea (b), $B = \{a, b\}$ é uma base para S . Logo B gera S , isto é, $[a, b] = S$.

Então $c \in [a, b] \Leftrightarrow c = (0, k, 1) \in S \Leftrightarrow 1 - k - 2 \times 0 = 0 \Leftrightarrow k = 1$.

Resolução 2:

$$c \in [a, b] \Leftrightarrow c = \alpha a + \beta b$$

$$\Leftrightarrow (0, k, 1) = \alpha(1, -1, 1) + \beta(1, 1, 3)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ -\alpha + \beta = k \\ \alpha + 3\beta = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -\beta \\ - - - \\ - - - \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - - - \\ \beta + \beta = k \\ -\beta + 3\beta = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - - - \\ 2\beta = k \\ 2\beta = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} - - - \\ - - - \\ \beta = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -\frac{1}{2} \\ k = 1 \\ - - - \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -\frac{1}{2} \\ k = 1 \\ \beta = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Conclusão: Para $k = 1$ tem-se $c = -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$, portanto $c \in [a, b]$ quando $k = 1$.

2. Considere, em $M_{1 \times 3}(\mathbb{R})$, o subespaço vetorial $S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \in M_{1 \times 3}(\mathbb{R}) : a - b = 0 \right\}$ e os vetores:

$$u = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}, w = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

- (a) Calcule uma base para S e mostre que S tem dimensão igual a 2.

Resolução:

$$\begin{aligned} S &= \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \in M_{1 \times 3}(\mathbb{R}) : a - b = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \in M_{1 \times 3}(\mathbb{R}) : a = b \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} b & b & c \end{bmatrix} : b, c \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ b \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} : b, c \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left[\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right]. \end{aligned}$$

Logo os vetores $u_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $u_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ geram S .

Vamos verificar se u_1 e u_2 são linearmente independentes.

$$\begin{aligned} \alpha u_1 + \beta u_2 = O_{1 \times 3} &\Leftrightarrow \alpha \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha = 0 \text{ é S.P.D. (sistema possível e determinado)} \\ \beta = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Logo u_1 e u_2 são L.I..

Deste modo $B_S = \{u_1, u_2\}$ é uma base para S e $\dim S = \#B_S = 2$.

(b) A partir do conjunto $B = \{u, v, w\}$, determine uma base para S .

Resolução: Como $v = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \notin S$, porque $2 \neq 3$ ($a \neq b$), então devemos retirar de B o vetor v .

Obtemos assim o conjunto $B' = \{u, w\}$.

1. $B' \subset S$ porque $\begin{cases} u \in S \\ w \in S \end{cases}$.

De facto, $u = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \in S$ porque $2 = 2$ ($a = b$) e

$w = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in S$ porque $0 = 0$ ($a = b$).

2. $\#B' = 2 = \dim S$.

3. Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tem-se que:

$$\begin{aligned} \alpha u + \beta w = O_{1 \times 3} &\Leftrightarrow \alpha \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha = 0 \\ 2\alpha = 0 \\ 2\beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha = 0 \text{ é S.P.D.} \\ \beta = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Portanto B' é L.I..

Por 1., 2. e 3. concluímos que $B' = \{u, w\}$ é uma base para S .

(c) Calcule o subespaço vetorial $U = [u, v, w]$.

Resolução: Seja, $U = [u, v, w] = \{t \in M_{1 \times 3}(\mathbb{R}) : t = \alpha u + \beta v + \gamma w\}$.

Tem-se,

$$t = \alpha u + \beta v + \gamma w \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = a \\ \alpha + 2\beta = b \\ \gamma = c \end{cases} \hookrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 1 & 2 & 0 & b \\ 0 & 0 & 2 & c \end{array} \right] \xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 - L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b - a \\ 0 & 0 & 2 & c \end{array} \right].$$

Reparemos agora que a matriz e a matriz ampliada possuem a mesma característica. Logo o sistema é sempre possível, quaisquer que sejam os valores de a , b e $c \in \mathbb{R}$, portanto $U = [u, v, w] = M_{1 \times 3}(\mathbb{R})$.

3. Considere, em $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, o subespaço vetorial S e os vetores u_1 , u_2 e u_3 definidos por:

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : b - c = 0 \right\},$$

$$u_1 = \begin{bmatrix} k+1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad u_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

- (a) Mostre que a dimensão de S é igual a 3.

Resolução:

$$\begin{aligned} S &= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : b - c = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : b = c \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} a & c \\ c & d \end{bmatrix} : a, c, d \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & c \\ c & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} : a, c, d \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ a \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{v_1} + c \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{v_2} + d \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{v_3} : a, c, d \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

Logo v_1 , v_2 e v_3 geram S .

Vamos agora verificar se v_1 , v_2 e v_3 são linearmente independentes.

$$\alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

Obtém-se a solução trivial, logo v_1 , v_2 e v_3 são linearmente independentes.

Conclusão: $B_S = \{v_1, v_2, v_3\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ é uma base de S e $\dim S = \#B_S = 3$.

(b) Para que valor(es) de k , u_1 é combinação linear de u_2 e u_3 ?

Resolução: u_1 é combinação linear de u_2 e u_3 se e só se $u_1 = \alpha u_2 + \beta u_3$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$u_1 = \alpha u_2 + \beta u_3 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} k+1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = k+1 \\ \beta = 1 \\ \beta = 1 \\ 2\alpha = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - & - & - \\ \beta = 1 \\ - & - & - \\ \alpha = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ \beta = 1 \\ - & - & - \\ \alpha = 2 \end{cases}$$

Para $k = 1$ tem-se $u_1 = 2u_2 + u_3$, portanto u_1 é combinação linear de u_2 e u_3 quando $k = 1$.

(c) Considerando $k = -1$, justifique se algum dos seguintes conjuntos é base de S :

$$A_1 = \{u_2, u_3\} \text{ e } A_2 = \{u_1, u_2, u_3\}.$$

Resolução: Como $\dim S = 3$, qualquer base de S é constituída por 3 vetores. Assim, $A_1 = \{u_2, u_3\}$ não pode ser base de S pois $\#A_1 = 2 \neq 3 = \dim S$.

$A_2 = \{u_1, u_2, u_3\}$. Dado que $\dim S = 3 = \#A_2$, tem-se que A_2 é uma base para S se verificar as seguintes condições: $u_1, u_2, u_3 \in S$ e u_1, u_2, u_3 são linearmente independentes.

- $u_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \in S$ pois verifica a condição $b - c = 0$, de facto $1 - 1 = 0$;

$$u_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \in S \text{ pois } 0 - 0 = 0;$$

$$u_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in S \text{ pois } 1 - 1 = 0.$$

$$\bullet \quad \alpha \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha + \gamma = 0 \\ \alpha + \gamma = 0 \\ 4\alpha + 2\beta = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} - & - & - \\ - & - & - \\ - & - & - \\ \alpha = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 0 \\ \gamma = 0 \\ - & - & - \\ \alpha = 0 \end{cases}$$

Obtém-se a solução trivial, logo u_1, u_2 e u_3 são linearmente independentes.

Conclusão: A_2 é uma base de S .

(d) Indique, justificando, o valor lógico da seguinte afirmação:

“Se $A \in S$ então a matriz A é simétrica”.

Resolução: Seja $A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ e suponhamos que $A \in S$. Então,

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \text{ com } b - c = 0, \text{ ou seja, } b = c.$$

Assim, $A = \begin{bmatrix} a & c \\ c & d \end{bmatrix}$ e nestas condições $A^T = \begin{bmatrix} a & c \\ c & d \end{bmatrix} = A$, ou seja, A é simétrica.

Conclusão: A afirmação é verdadeira.

4. Considere o subconjunto $S = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x = |y| \wedge z = 0\}$ de $\mathbb{R}^4$.

Mostre que S não é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$.

Para este exercício apresentamos duas resoluções alternativas.

Resolução 1: Apresentamos um Contra-Exemplo:

Consideremos, $u = (1, 1, 0, 0)$ e $v = (1, -1, 0, 0)$. Note-se que u e v pertencem a S . No entanto, $u + v = (2, 0, 0, 0) \notin S$. Portanto S não verifica a condição $\forall u, v \in S, u + v \in S$ e consequentemente não é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$.

Resolução 2: Apresentamos um Contra-Exemplo:

Consideremos, $u = (1, 1, 0, 0) \in S$ e $\lambda = -1 \in \mathbb{R}$. Reparemos que $\lambda u = (-1, -1, 0, 0) \notin S$. Portanto S não verifica a condição $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u \in S, \lambda u \in S$ e consequentemente não é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$.

5. Considere a seguinte matriz real:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Admita que $|A - \lambda I_4| = \lambda(\lambda + 2)(\lambda - 1)^2$, com $\lambda \in \mathbb{R}$.

- (a) Determine os valores próprios de A e a sua multiplicidade algébrica.

Resolução: Cálculo dos valores próprios de A :

λ é valor próprio de A se e só se λ é solução de $|A - \lambda I_4| = 0$.

$$\begin{aligned} |A - \lambda I_4| = 0 &\Leftrightarrow \lambda(\lambda + 2)(\lambda - 1)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda = 0 \vee \lambda + 2 = 0 \vee (\lambda - 1)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda = 0 \vee \lambda = -2 \vee \lambda = 1 \vee \lambda = 1. \end{aligned}$$

Logo os valores próprios de A são $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -2$ e $\lambda_3 = 1$.

As suas multiplicidades algébricas são $m_a(0) = m_a(-2) = 1$ e $m_a(1) = 2$.

- (b) Determine o subespaço próprio associado ao maior valor próprio de A .

Resolução: O maior valor próprio de A é $\lambda_3 = 1$.

Cálculo dos vetores próprios de A associados ao valor próprio $\lambda_3 = 1$:

v é vetor próprio de A associado a λ se e só se v é solução não nula de $(A - \lambda I_4)v = O_{4 \times 1}$.

$$\begin{aligned} (A - 1I_4)v = O_{4 \times 1} &\Leftrightarrow \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -x + y + z = 0 \\ -y + 2z = 0 \\ y - 2z = 0 \\ 2x - 2y - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + z \\ y = 2z \\ - - - - - \\ - - - - - \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3z \\ y = 2z \\ z \in \mathbb{R} \\ w \in \mathbb{R} \end{cases} \end{aligned}$$

Logo os vetores próprios de A associados ao valor próprio $\lambda_3 = 1$ são da forma:

$$(3z, 2z, z, w) \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0_{\mathbb{R}^4}\}.$$

Portanto, o subespaço próprio associado ao valor próprio $\lambda_3 = 1$ é:

$$S(1) = \{(3z, 2z, z, w) : z, w \in \mathbb{R}\}.$$

- (c) Indique, justificando, a multiplicidade geométrica de todos os valores próprios de A .

Resolução: Sabemos que:

$$1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda),$$

para qualquer valor próprio λ .

Como $m_a(\lambda_1) = m_a(\lambda_2) = 1$, pela alínea (a), podemos concluir que $m_g(\lambda_1) = m_g(\lambda_2) = 1$.

Relativamente a $\lambda_3 = 1$ tem-se $1 \leq m_g(1) \leq 2$. Daqui nada se pode concluir. Sabemos ainda que $m_g(1) = \dim S(1)$. É então necessário calcular $\dim S(1)$.

Cálculo da dimensão do subespaço vetorial $S(1)$:

$$\begin{aligned} S(1) &= \{(3z, 2z, z, w) : z, w \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(3z, 2z, z, 0) + (0, 0, 0, w) : z, w \in \mathbb{R}\} \\ &= \{z(3, 2, 1, 0) + w(0, 0, 0, 1) : z, w \in \mathbb{R}\} \\ &= [(3, 2, 1, 0), (0, 0, 0, 1)]. \end{aligned}$$

Logo os vetores $(3, 2, 1, 0)$ e $(0, 0, 0, 1)$ geram o subespaço vetorial $S(1)$.

Vejamos agora se os vetores $(3, 2, 1, 0)$ e $(0, 0, 0, 1)$ são linearmente independentes:

$$\alpha(3, 2, 1, 0) + \beta(0, 0, 0, 1) = (0, 0, 0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} 3\alpha = 0 \\ 2\alpha = 0 \\ \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

obtém-se a solução trivial, logo os vetores são linearmente independentes.

Conclusão: $B_{S(1)} = \{(3, 2, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ é uma base para $S(1)$ e portanto $\dim S(1) = \#B_{S(1)} = 2$. Logo, $m_g(1) = \dim S(1) = 2$.

Exercícios Propostos

1. Considere, em $\mathbb{R}^3$, e os vetores $u_1 = (-1, -2, 0)$, $u_2 = (-1, 2, -4)$, $u_3 = (2, 4, 0)$ e o subespaço vetorial $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y + z = 0\}$.

- (a) Verifique se u_3 é combinação linear de u_1 e de u_2 . VÍDEO
- (b) Os vetores u_1 , u_2 e u_3 são linearmente independentes? Justifique. VÍDEO
- (c) Determine uma base para S .
- (d) Justifique que $A = \{u_1, u_2\}$ é também uma base de S .

2. Considere, em $\mathbb{R}^4$, o subespaço vetorial $S = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : y = 2x \wedge w = 0\}$ e os vetores u_1, u_2, u_3 definidos por:

$$u_1 = (-1, -2, 2, 0), \quad u_2 = (0, 0, 1, 0) \quad \text{e} \quad u_3 = (1, 2, 0, 0).$$

- (a) Mostre que:
- i. $\dim S = 2$; VÍDEO
- ii. $B = \{u_1, u_2\}$ é uma base de S . VÍDEO
- (b) Determine as componentes do vetor u_3 na base B da alínea anterior. VÍDEO

3. Considere os vetores $u_1 = (2, a, 0)$, $u_2 = (a, 6, -2)$ e $u_3 = (1, a, 0)$ de $\mathbb{R}^3$.

- (a) Determine os valores de a para os quais $A = \{u_1, u_2, u_3\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$. VÍDEO
- (b) Considerando $a = 0$, calcule na forma mais simplificada, o subespaço vetorial gerado por u_1, u_2 e u_3 . VÍDEO

4. Sejam t , u , v e w vetores de $\mathbb{R}^3$ e S o subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$ dados por:

$$t = (2, 0, 0), \quad u = (4, 1, -2), \quad v = (8, 2, k + 2), \quad w = (8, 7, 6) \quad \text{e}$$
$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 4y = 0 \wedge 4y + 2z = 0\}.$$

- (a) Mostre que os vetores t , u e v são linearmente independentes.
- (b) Calcule uma base para S e mostre que a dimensão de S é igual a 1.
- (c) Determine o valor de k de modo que $[u, v] = S$.
- (d) Para $k = -2$, determine as coordenadas do vetor w na base $\{t, u, v\}$ de $\mathbb{R}^3$.

5. Seja S o subespaço vetorial de $M_{1 \times 3}(\mathbb{R})$ definido por:

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \in M_{1 \times 3}(\mathbb{R}) : 5a - b + 2c = 0 \right\}.$$

- (a) Calcule uma base para S e mostre que a dimensão de S é igual a 2.
- (b) Mostre que o conjunto $B = \left\{ \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} \right\}$ é uma base para S .
- (c) Determine as coordenadas do vetor $v = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ na base de S apresentada na alínea anterior.

6. Considere os vetores u_1, u_2, u_3 e o subespaço vetorial S de $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ definidos por:

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}, \quad u_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : b = 3a \wedge d = -c \right\}.$$

- (a) Mostre que:
 - i. os vetores u_1, u_2 e u_3 são linearmente independentes;
 - ii. $\dim S = 2$.
- (b) A partir do conjunto $A = \{u_1, u_2, u_3\}$ indique, justificando, uma base para S .
- (c) Calcule, na forma mais simplificada possível, o subespaço vetorial gerado por u_1 e u_3 .

7. Verifique se $S = \{A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : A^T = -A\}$ é um subespaço vetorial real de $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.

8. Mostre que o conjunto

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : b = a - d \wedge c = a + d \right\}$$

é um subespaço vetorial real de $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.

9. Considere a matriz real $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$.

- (a) Mostre que $\lambda = -2$ é um valor próprio de A . VÍDEO
- (b) Determine o conjunto dos vetores próprios associados ao valor próprio $\lambda = -2$.
VÍDEO
- (c) Determine o subespaço próprio associado ao valor próprio $\lambda = -2$ e calcule a dimensão deste subespaço. VÍDEO

10. Considere a matriz real $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 2 & -4 & -2 \end{bmatrix}$.

- (a) Mostre que o polinómio característico de A é $p(\lambda) = (-2 - \lambda)(\lambda + 1)^2$.
- (b) Determine os valores próprios de A e indique as suas multiplicidades algébricas.
- (c) Determine a multiplicidade geométrica do menor valor próprio da matriz A .
- (d) Determine k de modo que $(0, k, -6)$ seja vetor próprio de A .

11. Considere a matriz real A definida por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

- (a) Determine os valores próprios da matriz A e indique as suas multiplicidades algébricas.
- (b) Mostre que o menor valor próprio tem multiplicidade geométrica igual a 1.
- (c) Indique as multiplicidades geométricas dos restantes valores próprios de A .

12. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, cujos valores próprios são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 4$.

- (a) Mostre que $u = (1, 1, 2)$ é um vetor próprio de A associado ao valor próprio $\lambda_2 = 4$.
- (b) Sabendo que a multiplicidade algébrica do valor próprio $\lambda_1 = 1$ é igual a 2 indique, justificando, a multiplicidade geométrica do valor próprio $\lambda_2 = 4$.
- (c) Indique, justificando, três vetores próprios de A associados ao valor próprio $\lambda_1 = 1$. É possível escolher os três vetores linearmente independentes?

13. Seja $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$. Mostre que $\lambda = 0$ é um valor próprio de A se e só se A não é invertível.

14. Seja $A \in M_{4 \times 4}(\mathbb{R})$ tal que:

$$\text{car}(A) = 3; \quad Au = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -3 & 0 \end{bmatrix}^T \quad \text{onde} \quad u = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T;$$

$$S = \{v \in \mathbb{R}^4 : (A + 2I_4)v = O_{4 \times 1}\} \quad \text{tem dimensão igual a 2.}$$

- (a) A matriz A é invertível? Justifique convenientemente a resposta.

- (b) Indique, justificando, os valores próprios de A e as respectivas multiplicidades algébrica e geométrica.

VÍDEO

15. Seja $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ uma matriz invertível.

Mostre que se v é um vetor próprio de A associado ao valor próprio λ , então v é um vetor próprio de A^{-1} associado ao valor próprio $\frac{1}{\lambda}$.

16. Seja $A \in M_{4 \times 4}(\mathbb{R})$ uma matriz com valores próprios $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = 2$ para a qual o subespaço próprio associado ao valor próprio $\lambda_3 = 2$ é dado por:

$$S(2) = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + z = 2y \wedge w = 0\}.$$

- (a) Calcule uma base para $S(2)$ e mostre que a dimensão de $S(2)$ é igual a 2.
- (b) Indique, justificando, a multiplicidade algébrica dos valores próprios de A e o polinómio característico de A .
- (c) Considere os vetores $u_1 = (1, 0, -1, 0)$, $u_2 = (0, 1, 2, 0)$ e $u_3 = (2, 3, 4, 0)$ de $\mathbb{R}^4$.
- Mostre que $B = \{u_1, u_2\}$ é uma base de $S(2)$.
 - Obtenha as componentes do vetor u_3 na base B da alínea anterior.
 - Usando as alíneas anteriores, verifique que o vetor u_3 é um vetor próprio de A associado ao valor próprio $\lambda_3 = 2$.
17. Considere o subespaço vetorial S de $\mathbb{R}^4$ e a matriz $A \in M_{4 \times 4}(\mathbb{R})$ definidos por:

$$S = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : y - 2w = 0 \wedge z + 2w = 0\} \quad \text{e} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- (a) Mostre que a dimensão de S é igual a 2.
- (b) Verifique se o vetor $(7, 6, -6, 3)$ pertence ao subespaço gerado pelos vetores $u = (1, 2, -2, 1)$ e $v = (0, -4, 4, -2)$.
- (c) Indique os valores próprios de A e as respectivas multiplicidades algébricas.
- (d) Mostre que o subespaço próprio associado ao valor próprio $\lambda = 1$ é igual a S .

18. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$.

- (a) Verifique que $\lambda = 0$ é um valor próprio de A .
- (b) Mostre que o subespaço próprio associado ao valor próprio $\lambda = 0$ da matriz A é:

$$S(0) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}.$$

- (c) Determine uma base e a dimensão de $S(0)$.
- (d) Comente a seguinte afirmação: “A multiplicidade algébrica do valor próprio $\lambda = 0$ é igual a 1”.
- (e) Verifique se algum dos seguintes conjuntos A_1 e A_2 é uma base para $S(0)$.

$$A_1 = \{(1, -1, 0); (1, 0, -1); (0, -1, 1)\} \quad \text{e} \quad A_2 = \{(3, 0, -3); (2, -1, -1)\}.$$

19. Considere o subespaço vetorial S de $\mathbb{R}^4$ e a matriz $M \in M_{4 \times 4}(\mathbb{R})$ definidos por:

$$S = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x - y + w = 0 \wedge z - 4w = 0\} \quad \text{e} \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \end{bmatrix}.$$

- (a) Mostre que a dimensão de S é igual a 2.
- (b) Verifique que $A = \{(2, 3, 4, 1); (-1, -1, 0, 0)\}$ é uma base para S .
- (c) Determine as componentes do vetor $w = (2, 0, -8, -2)$ na base A da alínea anterior.
- (d) Calcule os valores próprios de M .
- (e) Mostre que o subespaço próprio associado ao valor próprio $\lambda = 2$ é igual a S .

20. Indique o valor lógico das afirmações seguintes, justificando convenientemente.

- (a) Se V é um espaço vetorial de dimensão n , então quaisquer $(n - 1)$ vetores de V são linearmente independentes.
- (b) Se $B = \{a, b, c, d\}$ é uma base de um espaço vetorial $\mathbb{R}^4$, então o conjunto $C = \{b - a, 2a + b, 2c - a, d\}$ é uma base de $\mathbb{R}^4$.
- (c) Existe uma matriz real de ordem 4 que possui $\lambda = 3$ como único valor próprio.
- (d) Se λ é um valor próprio de uma matriz A de ordem n , então λ^2 é um valor próprio de A^2 .
- (e) $S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \in M_{1 \times 3}(\mathbb{R}) : a = 0 \wedge c = b + 1 \right\}$ é um subespaço vetorial real de $M_{1 \times 3}(\mathbb{R})$.

Exercícios de Escolha Múltipla

1. Qual dos seguintes conjuntos é formado por vetores de $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ linearmente independentes?

- (A) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \right\}.$
- (B) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} \right\}.$
- (C) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \right\}.$
- (D) $\left\{ \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$

2. O vetor $\begin{bmatrix} -k & 2k \\ -1 & 7 \end{bmatrix}$ é combinação linear dos vetores $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ quando k for igual a:

- (A) -3 .
- (B) 3 .
- (C) -2 .
- (D) 2 .

3. Considere o subespaço vetorial S de $\mathbb{R}^4$ definido por:

$$S = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x - y + w = 0 \wedge z - 4w = 0\}.$$

Podemos afirmar que:

- (A) $A = \{(4, 6, 8, 2); (-2, -2, 0, 0); (2, 4, 8, 2)\}$ é uma base para S .
- (B) $A = \{(2, 2, 0, 0)\}$ é uma base para S .
- (C) $A = \{(2, 3, 2, 1); (1, 1, 0, 0)\}$ é uma base para S .
- (D) $A = \{(2, 3, 4, 1); (-1, -1, 0, 0)\}$ é uma base para S .

4. Considere o subespaço vetorial gerado pelo vetores $u = (3, 0, -3)$ e $v = (2, -1, -1)$.

Podemos afirmar que:

- (A) $(-2, 0, 4)$ pertence ao subespaço vetorial gerado por u e v .
- (B) $(1, -2, 1)$ pertence ao subespaço vetorial gerado por u e v .
- (C) $(1, 0, -2)$ pertence ao subespaço vetorial gerado por u e v .

(D) $(2, -2, 2)$ pertence ao subespaço vetorial gerado por u e v .

5. Sejam u, v e w vetores de $M_{1 \times 3}(\mathbb{R})$ e S o subespaço vetorial de $M_{1 \times 3}(\mathbb{R})$ definidos por:

$$u = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad w = \begin{bmatrix} 2 & k^2 & 0 \end{bmatrix};$$

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \in M_{1 \times 3}(\mathbb{R}) : b - 2a = 0 \right\}.$$

Então:

- (A) para $k = 2$, o conjunto $\{3v, w\}$ é uma base para S .
(B) para $k = 2$, o conjunto $\{u, 3v, w\}$ é uma base para S .
(C) para $k = 1$, o conjunto $\{3v, w\}$ é uma base para S .
(D) para $k = 1$, o conjunto $\{u, 3v, w\}$ é uma base para S .
6. Considere, em $\mathbb{R}^4$, o conjunto $\{a, b, c, d\}$ de vetores linearmente dependentes. Então:
- (A) $\{a, b, c\}$ é um conjunto de vetores linearmente dependentes.
(B) pelo menos um dos quatro vetores escreve-se à custa dos restantes.
(B) a, b, c e d geram $\mathbb{R}^4$.
(D) $\{a, b, d\}$ é um conjunto de vetores linearmente independentes.
7. Sejam S um subespaço vetorial de $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ com $\dim S = 3$ e $\{a, b, c, d\}$ um conjunto de vetores de S . Então:
- (A) $\{a, c\}$ é uma base de S .
(B) $\{a, b, c, d\}$ é uma base de S .
(C) $\{a, b, c\}$ é um conjunto de vetores geradores de S .
(D) $\{a, b, c, d\}$ é um conjunto de vetores linearmente dependentes.
8. Considere S um subespaço vetorial de $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ dado por:

$$S = \left\{ A = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : 2x - y + w = 0 \wedge z = 0 \right\}$$

e os vetores $u = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ e $w = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Podemos concluir que:

- (A) $\{u, 3v\}$ é uma base de S .
(B) $\{u, v, w\}$ é uma base de S .
(C) $\{u, w\}$ é uma base de S .
(D) $\{u, 2v, w\}$ é um conjunto de vetores linearmente dependentes.

9. Sejam v_1, v_2 e v_3 vetores não nulos de um espaço vetorial E tais que:

$$E = [v_1, v_2, v_3], \quad v_1 + 2v_2 = 0_E \quad \text{e} \quad v_3 \notin [v_1, v_2].$$

Então:

(A) os vetores v_2 e v_3 são linearmente independentes.

(B) os vetores v_2 e v_3 são linearmente dependentes.

(C) $\dim(E) = 3$.

(D) $\dim(E) = 1$.

10. Seja V um espaço vetorial real de dimensão n . Então:

(A) Quaisquer $(n - 1)$ vetores de V são linearmente independentes.

(B) Quaisquer $(n + 1)$ vetores de V geram V .

(C) Quaisquer $(n + 1)$ vetores de V são linearmente dependentes.

(D) Qualquer conjunto com n vetores de V forma uma base para V .

11. Considere o subconjunto S de $\mathbb{R}^4$ definido por:

$$S = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x = 0 \vee w = 0\}.$$

Podemos afirmar que:

(A) S é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$.

(B) S não é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$ porque $0_{\mathbb{R}^4} \notin S$.

(C) S não é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$ porque $\exists u, v \in S, u + v \notin S$.

(D) S não é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$ porque $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \exists u \in S, \lambda u \notin S$.

12. Considere o subconjunto S de $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ definido por:

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : b = a \wedge c = d \right\}.$$

Podemos afirmar que:

(A) S é um subespaço vetorial de $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.

(B) S não é subespaço vetorial de $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ porque $0_{2 \times 2} \notin S$.

(C) S não é subespaço vetorial de $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ porque $\exists u, v \in S, u + v \notin S$.

(D) S não é subespaço vetorial de $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ porque $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \exists u \in S, \lambda u \notin S$.

13. Considere a matriz $A \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ definida por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Podemos afirmar que:

- (A) 4 é valor próprio de A .
- (B) 0 é valor próprio de A .
- (C) -1 é valor próprio de A .
- (D) -4 é valor próprio de A .

14. Considere a matriz $A \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ definida por:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Podemos afirmar que:

- (A) $(2, 1, -3)$ é um vetor próprio de A associado ao valor próprio 3.
- (B) $(-2, -3, 1)$ é um vetor próprio de A associado ao valor próprio 3.
- (C) $(0, 3, -3)$ é um vetor próprio de A associado ao valor próprio 3.
- (D) $(-3, 3, 0)$ é um vetor próprio de A associado ao valor próprio 3.

15. Considere a matriz real $A = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$.

(a) Podemos concluir que:

- (A) 5 é valor próprio de A com multiplicidade geométrica 2.
- (B) 1, 2, 5 e -6 são os valores próprios de A .
- (C) 5 é valor próprio de A com multiplicidade algébrica 1.
- (D) 2 e 5 são os valores próprios de A .

(b) O conjunto dos vetores próprios de A associados ao valor próprio 1 é:

- (A) $\{(0, -3z, 0) : z \in \mathbb{R}\}$.
- (B) $\{(0, -3z, z) : z \in \mathbb{R}\}$.
- (C) $\{(0, -3z, 0) : z \in \mathbb{R}\} \setminus \{(0, 0)\}$.
- (D) $\{(0, -3z, z) : z \in \mathbb{R}\} \setminus \{(0, 0)\}$.

16. Seja $A \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ tal que $|A| = 16$. Considerando que o subespaço próprio associado ao valor próprio $\lambda = 4$ tem dimensão 2, conclui-se que:

- (A) $m_a(4) = 3$.
- (B) 2 e 4 são os valores próprios de A .
- (C) $\text{tr}(A) = 8$.
- (D) 1 e 4 são os valores próprios de A .

17. Seja $A \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ tal que $|A| = 25$. Considerando que o subespaço próprio associado ao valor próprio $\lambda = 5$ tem dimensão 2, conclui-se que:

- (A) $m_a(5) = 3$.
- (B) $m_g(1) = 1$.
- (C) $\text{tr}(A) = 10$.
- (D) A não é invertível.

Soluções dos Exercícios Propostos

1. (a) $u_3 = -2u_1$, logo u_3 é combinação linear de u_1 e de u_2 .
(b) Os vetores u_1 , u_2 e u_3 não são linearmente independentes pois a equação:

$$\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = (0, 0, 0)$$

admite outras soluções para além da solução trivial, por exemplo, $\alpha = 2$, $\beta = 0$ e $\gamma = 1$.

- (c) $B_S = \{(1, 0, -2), (0, 1, 1)\}$.
(d) $\#A = \dim S = 2$, u_1 e u_2 pertencem a S pois verificam a condição que define S e, por último, u_1 e u_2 são linearmente independentes. Logo A é uma base de S .
2. (a) i. —
ii. —
(b) $u_3 = (-1, 2)_B$.
3. (a) A é uma base de S quando $a \neq 0$.
(b) $S = [u_1, u_2, u_3] = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = -\frac{y}{3} \right\}$.
4. (a) —
(b) $B_S = \{(4, 1, -2)\}$, pelo que $\dim S = 1$.
(c) $k = -6$.
(d) $\alpha = -10 \wedge \beta = -3 \wedge \gamma = 5$.
5. (a) $B_S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \right\}$, pelo que $\dim S = 2$.
(b) —
(c) $v = (1, 0)_{B_S}$.
6. (a) i. —
ii. —
(b) $B_S = \{u_1, u_2\}$, pois $\#B_S = \dim S = 2$, u_1 e u_2 pertencem a S pois verificam a condição que define S e, por último, u_1 e u_2 são linearmente independentes.
(c) $S = [u_1, u_3] = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : z = -2x + y \wedge w = 2x - y \right\}$.

7. S é um subespaço vetorial real de $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.
8. —
9. (a) —
 (b) Os vetores próprios de A associados ao valor próprio $\lambda = -2$ são da forma:
- $$(y - z, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0_{\mathbb{R}^4}\}.$$
- (c) $S(-2) = \{(y - z, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\}$. $\dim S(-2) = 2$.
10. (a) —
 (b) $\lambda_1 = -2 \vee \lambda_2 = -1 \vee \lambda_3 = -1$, como tal $m_a(-2) = 1$ e $m_a(-1) = 2$.
 (c) $m_g(-2) = 1$.
 (d) $K = 0$.
11. (a) $\lambda_1 = -1 \vee \lambda_2 = -1 \vee \lambda_3 = 1 \vee \lambda_4 = 2$, como tal $m_a(-1) = 2$, $m_a(1) = 1$ e $m_a(2) = 1$.
 (b) —
 (c) $m_g(1) = 1$ e $m_g(2) = 1$.
12. (a) —
 (b) $m_g(4) = 1$ pois $m_g(4) \leq m_a(4) = 1$.
 (c) Por exemplo, $(1, 0, 0)$, $(2, 0, 0)$ e $(0, -1, 1)$. Não é possível escolher os três vetores linearmente independentes pois $\dim S(1) = 2$.
 (d)
13. —
14. (a) A matriz A não é invertível pois $\text{car}(A) = 3 < \text{ordem de } A = 4$.
 (b) Os valores próprios de A são: $\lambda_1 = -3 \vee \lambda_2 = -2 \vee \lambda_3 = 0$, como tal $m_a(-3) = 1$, $m_a(-2) = 2$ e $m_a(0) = 1$. Deste modo, $m_g(-3) = 1$, $m_g(-2) = 2$ e $m_g(0) = 1$.
15. —
16. (a) $B_S = \{(2, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 0)\}$, pelo que $\dim S = 2$.
 (b) $m_a(0) = 1$, $m_a(1) = 1$ e $m_a(2) = 2$. Deste modo, $p(\lambda) = |\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)|$.
 i. —
 ii. $u_3 = (2, 3)_B$.
 iii. —

17. (a) —
 (b) O vetor $(7, 6, -6, 3)$ pertence ao subespaço gerado pelos vetores u e v .
 (c) $\lambda_1 = 1 \vee \lambda_2 = 2 \vee \lambda_3 = 3$, como tal $m_a(1) = 2$, $m_a(2) = 1$ e $m_a(3) = 1$.
 (d) —
18. (a) —
 (b) —
 (c) $B_{S(0)} = \{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$, pelo que $\dim S(0) = 2$.
 (d) A afirmação é falsa uma vez que $\dim S(0) = 2 = m_g(0) \leq m_a(0)$.
 (e) A_1 não é uma base de $S(0)$ pois $\dim S(0) = 2 \neq \#A_1 = 3$. A_2 é uma base de $S(0)$ pois $(3, 0, -3)$ e $(2, -1, -1)$ pertencem a $S(0)$ pois verificam a condição que define $S(0)$ e, por último, $(3, 0, -3)$ e $(2, -1, -1)$ são linearmente independentes. Logo A_2 é uma base de $S(0)$.
19. (a) —
 (b) —
 (c) $w = (-2, -6)_A$.
 (d) $\lambda_1 = -6 \vee \lambda_2 = 1 \vee \lambda_3 = 2 \vee \lambda_4 = 2$.
 (e) —
20. (a) A afirmação é falsa. Num espaço vetorial de dimensão n , quaisquer $n+1$ vetores são sempre linearmente dependentes. Mas quaisquer $n+1$ vetores não têm de ser linearmente independentes. Por exemplo, se um deles for o vetor nulo, o conjunto é dependente.
 (b) A afirmação é verdadeira. Pela definição de vetores linearmente independentes, verifica-se que C é uma base de $\mathbb{R}^4$.
 (c) A afirmação é verdadeira. Considere-se, por exemplo, a matriz $A = 3I_4$. O único valor próprio de A é $\lambda = 3$, com multiplicidade algébrica 4.
 (d) A afirmação é verdadeira. Se λ é valor próprio de A , então existe $v \neq 0$ tal que $Av = \lambda v$. Então, $A^2v = A(Av) = A(\lambda v) = \lambda Av = \lambda(\lambda v) = \lambda^2 v$. Logo, λ^2 é valor próprio de A^2 .
 (e) A afirmação é falsa. Para S ser um subespaço vetorial tem de conter o vetor nulo. O vetor nulo $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ verifica a primeira condição que define S mas não verifica a segunda, pois $0 \neq 0 + 1$. Deste modo, o vetor nulo não pertence a S , o que permite concluir que S não é subespaço vetorial de $M_{1 \times 3}(\mathbb{R})$.

Soluções dos Exercícios de Escolha Múltipla

1. D.
2. B.
3. D.
4. B.
5. A.
6. B.
7. D.
8. D.
9. A.
10. C.
11. C.
12. A.
13. A.
14. B.
15. (a) C.
(b) D.
16. D.
17. B.

Decomposição em Valores Singulares - SVD

A decomposição SVD é importante na Engenharia Informática porque permite simplificar e analisar dados de forma eficiente. É utilizada, por exemplo, na:

- **compressão de dados:** guardar menos informação sem perder muita qualidade (ex.: imagens e vídeo);
- **redução de dimensionalidade:** eliminar variáveis redundantes e manter apenas a informação essencial;
- **machine learning:** melhorar modelos, reduzir ruído e acelerar cálculos;
- **sistemas de recomendação:** encontrar padrões escondidos entre utilizadores e itens;
- **remoção de ruído:** separar informação relevante de erros nos dados.

A decomposição em valores/vetores próprios é usada na compressão de dados (SVD)

Os valores próprios e vetores próprios permitem identificar as direções mais importantes de uma transformação matricial. Para uma matriz A , um vetor próprio $\mathbf{v}$ satisfaz:

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

onde:

- λ é o valor próprio;
- $\mathbf{v}$ é o vetor próprio.

O vetor mantém a direção e apenas muda de escala.

A decomposição SVD (*Singular Value Decomposition*) é uma generalização desta ideia. A decomposição SVD fatoriza qualquer matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ($m \geq n$) na forma

$$A = USV^T$$

onde:

- $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$ e $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ são matrizes ortogonais com colunas ortonormais;
- $S \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é uma matriz diagonal que contém os valores singulares

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_m \geq 0$$

com

$$S = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_m \end{pmatrix}.$$

As colunas de U e V são, respetivamente, os vetores singulares à esquerda e à direita, enquanto os valores singulares indicam quanta informação ou energia cada componente transporta.

Os valores singulares estão relacionados com os valores próprios de $A^T A$:

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$$

Na compressão de dados, muitos valores singulares são muito pequenos e podem ser ignorados sem alterar muito a informação original. Assim, a matriz pode ser aproximada por:

$$A \approx U_k S_k V_k^T$$

usando apenas os k maiores valores singulares. A SVD ajuda assim a comprimir os dados e remover ruído.

Exemplo de Decomposição SVD

Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Pretende-se escrever A na forma

$$A = U S V^T$$

1. Calcular $A^T A$

Como A é simétrica:

$$A^T = A$$

Logo,

$$A^T A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 6 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}$$

2. Calcular os valores próprios de $A^T A$

Resolvemos:

$$\det(A^T A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 10 - \lambda & 6 \\ 6 & 10 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (10 - \lambda)^2 - 36 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 20\lambda + 64 = 0.$$

Da resolução da equação sai que os valores próprios são:

$$\lambda_1 = 16, \quad \lambda_2 = 4.$$

3. Calcular os valores singulares

Os valores singulares são:

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$$

Logo,

$$\sigma_1 = \sqrt{16} = 4; \quad \sigma_2 = \sqrt{4} = 2.$$

Assim,

$$S = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Calcular a matriz V

Os vetores próprios de $A^T A$ formam as colunas de V .

Para $\lambda_1 = 16$ tem-se:

$$(A^T A - 16I)\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}_{2 \times 1}$$

Note que:

$$A^T A - 16I = \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}$$

Resolvendo o sistema obtem-se:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Normalizando tem-se:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Para $\lambda_2 = 4$ tem-se:

$$(A^T A - 4I)\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}_{2 \times 1}$$

Note que:

$$A^T A - 4I = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$$

Resolvendo o sistema obtem-se:

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Normalizando tem-se:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Logo,

$$V = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

5. Calcular a matriz U

Resolvendo a equação matricial $A = USV^T$ (note que V é uma matriz ortogonal portanto $V^{-1} = V^T$) tem-se:

$$U = AVS^{-1}$$

Neste exemplo obtém-se:

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

6. Resultado final

A decomposição SVD é:

$$A = USV^T$$

ou seja,

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Como $4 > 2$, a primeira direção contém mais informação.

Na compressão de dados, poderíamos aproximar a matriz usando apenas o maior valor singular:

$$A \approx U_1 S_1 V_1^T$$

reduzindo a quantidade de informação armazenada.

Desafio

Considere a matriz real:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

1. Para analisar a decomposição SVD e interpretar a compressão de dados, responda às alíneas seguintes:
 - (a) calcule $A^T A$ e determine os seus valores próprios;
 - (b) a partir dos valores próprios determinados na alínea anterior, determine os valores singulares de A ;
 - (c) construa a matriz diagonal S ;
 - (d) determine as matrizes V e U ;
 - (e) escreva a decomposição SVD:

$$A = U S V^T$$

2. Se quiser comprimir a matriz mantendo apenas σ_1 e σ_2 , qual a perda de informação esperada?
 3. O que aconteceria à compressão se o terceiro valor singular fosse exatamente zero?
-



Transformações Lineares

Exercícios Resolvidos

1. Considere a transformação linear $T : M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por:

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a + b, b + c, c + d).$$

- (a) Determine o núcleo de T , $N(T)$.

Resolução:

$$N(T) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = 0_{\mathbb{R}^3} \right\}$$

Uma vez que

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow (a + b, b + c, c + d) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ b + c = 0 \\ c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -b \\ c = -b \\ d = -c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -b \\ c = -b \\ d = b \end{cases}$$

$$\therefore N(T) = \left\{ \begin{bmatrix} -b & b \\ -b & b \end{bmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : b \in \mathbb{R} \right\}.$$

- (b) Sabendo que $\dim N(T) = 1$, indique, justificando, se T é sobrejetiva.

Resolução: Aplicando o teorema das dimensões à transformação linear T tem-se

$$\begin{aligned} \dim M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) &= \dim N(T) + \dim \operatorname{Im}(T) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 4 &= 1 + \dim \operatorname{Im}(T) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \dim \operatorname{Im}(T) &= 3. \end{aligned}$$

Conclusão: $\dim \operatorname{Im}(T) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$. Portanto, T é sobrejetiva.

- (c) Verifique se $w = (-1, 1, 0)$ pertence à imagem de T .

Resolução: Pela alínea anterior T é sobrejetiva, ou seja, $\operatorname{Im}(T) = \mathbb{R}^3$.

Como o vetor $w = (-1, 1, 0)$ pertence a $\mathbb{R}^3$ e $\operatorname{Im}(T) = \mathbb{R}^3$, conclui-se que $(-1, 1, 0)$ pertence a $\operatorname{Im}(T)$.

2. Considere as transformações lineares planas:

- cisalhamento (fator $\alpha = 2$) na direção do eixo dos xx , C_x ;
- rotação por um ângulo de 90° em torno da origem, R_{90° .

(a) Determine as expressões gerais e as matrizes canônicas das transformações lineares C_x e R_{90° .

Resolução: Matriz canônica de C_x : $M_{C_x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Cálculos auxiliares:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + 2y \\ y \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \nearrow (x, y) \\ \searrow (x + 2y, y) \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Expressão geral de } C_x : \quad C_x : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (x + 2y, y). \end{aligned}$$

$$\text{Matriz canônica de } R_{90^\circ} : \quad M_{R_{90^\circ}} = \begin{bmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Cálculos auxiliares:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \nearrow (x, y) \\ \searrow (-y, x) \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Expressão geral de } R_{90^\circ} : \quad R_{90^\circ} : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (-y, x). \end{aligned}$$

(b) Determine a expressão geral e a matriz canônica da transformação linear T definida pela composição da rotação R_{90° após o cisalhamento C_x .

Resolução: $T = R_{90^\circ} \circ C_x$.

$$\text{Então } M_T = M_{R_{90^\circ}} \times M_{C_x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Cálculos auxiliares:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ x + 2y \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \nearrow (x, y) \\ \searrow (-y, x + 2y) \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Expressão geral de } T : \quad T : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (-y, x + 2y). \end{aligned}$$

Exercícios Propostos

1. Considere a aplicação $T : M_{1 \times 4}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^4$ definida por:

$$T \left(\begin{bmatrix} x & y & z & w \end{bmatrix} \right) = (0, x + y, 0, z - x).$$

- (a) Prove que T é uma transformação linear.
- (b) Verifique se $u_1 = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ e $u_2 = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -3 & 3 \end{bmatrix}$ pertencem ao núcleo de T . VÍDEO
- (c) Determine o núcleo de T . VÍDEO
- (d) Verifique se $v_1 = (0, 2, 0, 2)$ e $v_2 = (1, 1, 0, 1)$ pertencem à imagem de T . VÍDEO
- (e) Determine a imagem de T . VÍDEO
- (f) Estude a transformação T quanto à injetividade e à sobrejetividade. VÍDEO

2. Seja $T : M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por:

$$T \left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \right) = (2x, x, 3z).$$

- (a) Mostre que o núcleo de T é dado por $N(T) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & y \\ 0 & w \end{bmatrix} : y, w \in \mathbb{R} \right\}$.
 - (b) Determine uma base de $N(T)$ e indique a dimensão de $N(T)$.
 - (c) O que pode concluir sobre a injetividade de T .
 - (d) Determine a matriz canônica de T .
 - (e) Verifique se o vetor $v = (5, 0, 0)$ pertence à imagem de T .
 - (f) Justifique se T é ou não sobrejetiva.
3. Considere as transformações lineares $T_1 : M_{1 \times 3}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ e $T_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow M_{3 \times 1}(\mathbb{R})$ tais que T_1 e M_{T_2} , matriz canônica de T_2 são, respetivamente, definidas por:

$$T_1 \left(\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \right) = (b, a - 2c) \text{ e } M_{T_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- (a) Calcule o núcleo de T_1 , $N(T_1)$, e verifique que $\dim N(T_1) = 1$.
- (b) T_1 é injetiva? Justifique.

(c) Verifique que a expressão geral de T_2 é dada por:

$$T_2(x, y) = \begin{bmatrix} x \\ x + y \\ y \end{bmatrix}.$$

(d) Sejam $u_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $u_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Quais dos vetores u_1 e u_2 pertencem à imagem de T_2 ?

(e) Verifique se T_2 é sobrejetiva.

4. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, definida por:

$$T(x, y, z) = \begin{bmatrix} x + y & y - z \\ y - z & -y - x \end{bmatrix}.$$

(a) Determine uma base para o núcleo de T , $N(T)$, e indique a dimensão de $N(T)$.

(b) Verifique se $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \in Im(T)$.

(c) Analise a injetividade e a sobrejetividade de T .

5. Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow M_{1 \times 3}(\mathbb{R})$ uma transformação linear tal que:

$$T(0, 0, 1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad T(0, 1, 1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad T(1, 1, 1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

(a) Determine:

i. $T(x, y, z)$;

ii. o núcleo e a imagem de T .

(b) Estude a transformação T quanto à injetividade e à sobrejetividade.

(c) Determine a matriz canônica de T .

(d) A transformação linear T é invertível?

(e) Defina a transformação inversa de T .

6. Sejam $T : E \longrightarrow F$ uma transformação linear, $A = \{u, v, w\}$ uma base de E e $B = \{a, b, c\}$ uma base de F .

(a) Enuncie o teorema das dimensões. VÍDEO

(b) Mostre que T é injetiva se e só se T é sobrejetiva. VÍDEO

(c) Admitindo que T é injetiva, verifique se $\{T(u - v), T(v + w), T(w)\}$ é uma base de F . VÍDEO

7. Considere as transformações lineares planas $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ e $V : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definidas por:

$$T(x, y) = (x, 5y) \quad \text{e} \quad V(x, y) = (-y, x),$$

respetivamente.

- (a) Classifique as transformações lineares planas T e V . VÍDEO
- (b) Defina a transformação linear $H = T \circ V$ e indique a matriz canónica associada a H . VÍDEO
8. Considere as transformações lineares planas: simetria em relação à reta $y = x$, $S_{y=x}$ e uma rotação em torno da origem de 90° , R_{90° .
- (a) Obtenha a matriz canónica e a expressão geral de $S_{y=x}$ e R_{90° .
- (b) Identifique a transformação linear plana que resulta da composição $R_{90^\circ} \circ S_{y=x}$.
9. Considere o triângulo cujos vértices são os pontos $O = (0, 0)$, $A = (2, 0)$ e $B = (2, 2)$ e sejam T_1 , T_2 e T_3 as transformações lineares planas definidas, respetivamente, por:

$$T_1(x, y) = (y, x)$$

e pelas matrizes canónicas:

$$M_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

- (a) Classifique T_1 , T_2 e T_3 .
- (b) Represente geometricamente as três figuras (F_1 , F_2 e F_3) por aplicação sucessiva das transformações T_1 , T_2 e T_3 ao triângulo de vértices O , A e B .
- (c) Caracterize a transformação linear que permite transformar diretamente o triângulo de vértices O , A e B na figura F_3 .
10. Considere no plano o retângulo de vértices $O = (0, 0)$, $P = (2, 0)$, $Q = (0, 3)$ e $R = (2, 3)$.
- (a) Obtenha as matrizes canónicas e defina as transformações lineares planas:
- $R_{90^\circ} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$; rotação no plano do ângulo 90° em torno da origem;
 - $H_y : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$; homotetia ou mudança de escala em relação ao eixo dos yy com $\alpha = 2$ (ampliação).
- (b) Represente geometricamente a imagem por $H_y \circ R_{90^\circ}$ do retângulo enunciado.
- (c) Comente a afirmação: “A transformação linear $H_y \circ R_{90^\circ}$ não é invertível”.

11. Sejam f , g e h as transformações lineares planas definidas por:

$$f(x, y) = (y, x), \quad g(x, y) = \left(x, \frac{y}{2}\right) \quad \text{e} \quad h(x, y) = (-x, -y).$$

- (a) Classifique f , g e h e determine a matriz canônica associada a cada uma delas.
- (b) Determine a transformação linear plana $T = f \circ g \circ h$. Represente geometricamente o resultado da aplicação de T ao retângulo definido pelos pontos $O = (0, 0)$, $P = (4, 0)$, $Q = (0, 2)$ e $R = (4, 2)$.
- (c) Comente a afirmação: “A transformação linear T não é invertível”.

12. Sejam $T : M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ as transformações lineares definidas por:

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a + 2b - c, a - d) \quad \text{e} \quad S(x, y) = \left(\frac{x}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}y, \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{y}{2}\right).$$

- (a) Determine o núcleo de T .
- (b) Sabendo que a dimensão do núcleo de T é igual a 2, analise T quanto à injetividade e à sobrejetividade.
- (c) Identifique a transformação linear plana S .
- (d) Considere no plano o triângulo de vértices $O = (0, 0)$, $P = (2, 0)$ e $Q = (0, 2)$. Represente geometricamente a imagem por S do triângulo enunciado.
- (e) Determine as matrizes canônicas de T e de S .
- (f) Defina, se possível, as transformações lineares T^{-1} e $T \circ S$. No caso de não ser possível, justifique convenientemente a sua resposta.

13. Sejam $T : M_{1 \times 3}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ as transformações lineares definidas por:

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}\right) = (a + 2b - c, a - b) \quad \text{e} \quad S(x, y) = (3y, x).$$

- (a) Verifique que o vetor $u = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 6 \end{bmatrix}$ pertence ao núcleo de T .
- (b) Determine a imagem de T .
- (c) Analise T quanto à injetividade e à sobrejetividade.
- (d) Represente geometricamente o resultado da aplicação de S ao retângulo definido pelos pontos $O = (0, 0)$, $P = (2, 0)$, $Q = (0, 1)$ e $R = (2, 1)$.
- (e) Determine a matriz canônica de $T \circ S$.

14. Indique o valor lógico das afirmações seguintes, justificando convenientemente.

- (a) A aplicação $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y) = (2x, y^2)$ é uma transformação linear.

- (b) Sejam E e F espaços vetoriais e 0_E e 0_F os seus elementos neutros, respectivamente. Se $T : E \longrightarrow F$ é uma aplicação tal que $T(0_E) = 0_F$ então T é uma transformação linear.
 - (c) Seja $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow M_{1 \times 3}(\mathbb{R})$ uma transformação linear. Se T é sobrejetiva então T é injetiva.
 - (d) Para qualquer transformação linear $T : M_{2 \times 3}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^2$, a dimensão do núcleo de T é inferior ou igual a 4.
 - (e) Seja $T : E \longrightarrow F$ uma transformação linear. Se a matriz M_T não é invertível então T não é bijetiva.
15. Sejam E e F espaços vetoriais de dimensão finita e $T : E \longrightarrow F$ uma transformação linear. Mostre que se $\dim(E) > \dim(F)$ então T não é injetiva.

Exercícios de Escolha Múltipla

1. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow M_{1 \times 3}(\mathbb{R})$ definida por:

$$T(x, y, z) = [x + y \quad 2x + 2y \quad 2z + y - x].$$

Podemos afirmar que:

- (A) $(2, -2, 1) \in N(T)$.
- (B) $(1, -1, 0) \in N(T)$.
- (C) $(-1, 1, -1) \in N(T)$.
- (D) $(1, -1, 2) \in N(T)$.

2. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por:

$$T(x, y, z, w) = (x - z, 2x + y, w + y + 2x).$$

Podemos afirmar que:

- (A) T é injetiva.
- (B) $\dim(N(T)) = 1$.
- (C) $\dim(N(T)) = 2$.
- (D) $\dim(N(T)) = 3$.

3. Seja $T : M_{4 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^{10}$ uma transformação linear. Admitindo que $B = \{u, v\}$ é uma base de $\text{Im}(T)$, podemos concluir que:

- (A) T é injetiva.
- (B) T é sobrejetiva.
- (C) $\dim N(T) = 6$.
- (D) $\dim N(T) = 8$.

4. Qual das transformações lineares planas não representa uma reflexão?

- (A) $T(x, y) = (-x, -y)$.
- (B) $U(x, y) = (-x, 0)$.
- (C) $V(x, y) = (y, x)$.
- (D) $R(x, y) = (x, -y)$.

5. Considere a transformação linear plana $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (-y, x)$. Podemos afirmar que:

- (A) T é uma reflexão em relação à reta $y = x$.
- (B) T é uma reflexão em relação à origem $\mathcal{O}$.
- (C) T é uma rotação no plano de π em torno da origem.
- (D) T é uma rotação no plano de $\frac{\pi}{2}$ em torno da origem.

6. Qual das seguintes transformações lineares planas representa uma rotação em torno da origem?

- (A) $F(x, y) = \left(\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y, \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y\right)$.
- (B) $G(x, y) = \left(\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y, \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y\right)$.
- (C) $H(x, y) = \left(-\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y, \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y\right)$.
- (D) $I(x, y) = \left(\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y, \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{1}{2}y\right)$.

7. Sejam T_1 e T_2 as transformações lineares planas cujas matrizes canônicas associadas são M_1 e M_2 , respetivamente, dadas por: $M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $M_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. A transformação linear plana $T_2 \circ T_1$ é uma:

- (A) Reflexão em relação à origem.
- (B) Reflexão em relação ao eixo dos xx .
- (C) Reflexão em relação à reta $y = x$.
- (D) Rotação no plano de $\frac{\pi}{2}$ em torno da origem.

8. Considere as transformações lineares planas $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (x, 3y)$ e $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $V(x, y) = (-x, -y)$. A matriz canônica da transformação linear plana $H = T \circ V$ é dada por:

- (A) $M_H = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$.
- (B) $M_H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$.
- (C) $M_H = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.
- (D) $M_H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

Exercícios Complementares

Espaços Vetoriais/Transformações lineares

Exercícios Resolvidos

1. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow M_{1 \times 3}(\mathbb{R})$ cuja matriz canônica é:

$$M_T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- (a) Considere que os valores próprios da matriz M_T são $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 1$.
- i. Calcule os vetores próprios associados ao valor próprio $\lambda_2 = 1$ de M_T .

Resolução: v é vetor próprio de M_T associado a λ se e só se v é solução não nula de $(M_T - \lambda I_3)v = O_{3 \times 1}$.

$$\begin{aligned} (M_T - 1I_3)v = O_{3 \times 1} &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1-1 & 1 & 0 \\ 0 & 0-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ -y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x, z \in \mathbb{R} \text{ S.P.I..} \\ - - - \end{cases} \end{aligned}$$

Logo os vetores próprios de M_T associados ao valor próprio $\lambda_2 = 1$ são:

$$(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}.$$

- ii. Sabendo que a multiplicidade geométrica do valor próprio $\lambda_2 = 1$ de M_T é igual a 2, verifique se a matriz M_T é diagonalizável.

Resolução: M_T é diagonalizável se e só se $m_a(\lambda) = m_g(\lambda)$, para qualquer valor próprio λ de M_T .

Se os valores próprios da matriz M_T são $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 1$ então $m_a(0) \geq 1$ e $m_a(1) \geq 1$.

Mas como $m_g(1) = 2$ então $m_a(1) \geq 2$, porque $1 \leq m_g(1) \leq m_a(1)$.

Como $\sum_{\lambda_i} m_a(\lambda_i) = 3 = \text{ordem}(A)$, então $m_a(0) = 1$, $m_a(1) = 2$.

Deste modo: $m_a(0) = 1 = m_g(0)$ e

$$m_a(1) = 2 = m_g(1).$$

Logo M_T é diagonalizável.

- (b) Mostre que a expressão geral da transformação linear T é definida por:

$$T(x, y, z) = \begin{bmatrix} x + y & 0 & z \end{bmatrix}.$$

Resolução: Cálculos auxiliares:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + y \\ 0 \\ z \end{bmatrix} \xrightarrow{(x, y, z)} \begin{bmatrix} x + y & 0 & z \end{bmatrix}$$

Logo a expressão geral de T é:
$$\begin{array}{ccc} T : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & M_{1 \times 3}(\mathbb{R}) \\ (x, y, z) & \longmapsto & \begin{bmatrix} x + y & 0 & z \end{bmatrix}. \end{array}$$

- (c) Verifique se o vetor $w = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ pertence à imagem de T .

Resolução: $w \in Im(T) \Leftrightarrow \exists v \in \mathbb{R}^3 : T(v) = w$.

$$T(x, y, z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x + y & 0 & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ 0 = 0 \\ z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ - - - \\ z = 1 \end{cases}.$$

Como o sistema é possível (indeterminado) então $w \in Im(T)$. Reparemos que $T(v) = w$, para todo o $v \in \mathbb{R}^3$ da forma $v = (-y, y, 1)$.

- (d) Calcule o núcleo de T , $N(T)$, e mostre que $N(T)$ tem dimensão igual a 1.

Resolução: $N(T) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : T(x, y, z) = O_{1 \times 3}\}$.

$$T(x, y, z) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x + y & 0 & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ 0 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ - - - \\ z = 0 \end{cases}.$$

Portanto, $N(T) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = -y \wedge z = 0\}$.

Vamos agora calcular uma base para $N(T)$:

$$\begin{aligned} N(T) &= \{(-y, y, 0) : y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{y(-1, 1, 0) : y \in \mathbb{R}\} \\ &= [(-1, 1, 0)]. \end{aligned}$$

Logo o vetor $(-1, 1, 0)$ gera o subespaço vetorial $N(T)$.

Como $(-1, 1, 0) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ então $(-1, 1, 0)$ é linearmente independente.

Conclusão: $B_{N(T)} = \{(-1, 1, 0)\}$ é uma base para $N(T)$. Portanto, tem-se $\dim N(T) = \#B_{N(T)} = 1$.

(e) Verifique se T é invertível.

Para esta questão apresentamos duas resoluções alternativas.

Resolução 1: T é invertível $\Leftrightarrow M_T$ é invertível.

Como M_T tem uma linha nula $|M_T| = 0$ e portanto M_T não é invertível. Consequentemente T não é invertível.

Resolução 2: T é invertível $\Leftrightarrow T$ é bijetiva.

Como $\dim N(T) = 1 \neq 0$ então T não é injetiva e consequentemente não é bijetiva. Logo T não é invertível.

Exercícios Propostos

1. Considere o subespaço vetorial S de $\mathbb{R}^4$ e a transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow M_{1 \times 2}(\mathbb{R})$ definidos por:

$$S = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x - w = 0\} \text{ e } T(x, y, z, w) = \begin{bmatrix} x - w & -x + w \end{bmatrix}.$$

- (a) Calcule uma base para S e mostre que a sua dimensão é igual a 3.
 - (b) Mostre que o núcleo de T , $N(T)$, é o subespaço vetorial S .
 - (c) Verifique se os vetores $w_1 = (2, 0, 1, 2)$ e $w_2 = (3, -1, 0, 3)$ geram o subespaço $N(T)$.
 - (d) Mostre que o vetor $u = \begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix}$ não pertence à imagem de T .
 - (e) A transformação T é sobrejetiva? Justifique convenientemente a resposta.
2. Sejam S o subespaço vetorial de $M_{1 \times 4}(\mathbb{R})$ definido por:

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x & y & z & w \end{bmatrix} \in M_{1 \times 4}(\mathbb{R}) : x + y = 0 \wedge z - x = 0 \right\}$$

e $T : M_{1 \times 4}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^4$ a aplicação definida por

$$T \left(\begin{bmatrix} x & y & z & w \end{bmatrix} \right) = (0, x + y, 0, z - x).$$

- (a) Calcule uma base para S e indique a sua dimensão.
 - (b) Determine o núcleo de T , $N(T)$, e mostre que $N(T) = S$.
 - (c) Indique, justificando, para que valor(es) de a o conjunto
- $$A = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 2 & a & 3 \end{bmatrix} \right\}$$
- é uma base de $N(T)$.
- (d) Analise a transformação T quanto à injetividade e à sobrejetividade.
3. Considere o subespaço vetorial S de $M_{1 \times 3}(\mathbb{R})$ e a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow M_{1 \times 3}(\mathbb{R})$ definidos por:

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \in M_{1 \times 3}(\mathbb{R}) : a + c = 0 \right\} \text{ e } T(x, y, z) = \begin{bmatrix} x + z & y - z & -x - z \end{bmatrix}.$$

- (a) Calcule uma base para S e mostre que a sua dimensão é igual a 2.
- (b) Mostre que a imagem de T , $Im(T)$, é o subespaço vetorial S .
- (c) Verifique se o vetor $v = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ gera o subespaço $Im(T)$.

- (d) Determine para que valor(es) de k o vetor $w = (-2, k, 2)$ pertence ao núcleo de T .
- (e) A transformação T é injetiva? Justifique convenientemente a resposta.
4. Sejam u, v e w vetores de $\mathbb{R}^3$ e $T : M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a transformação linear definidos por:

$$u = (1, 0, 0), \quad v = (3, -1, 2) \text{ e } w = (2, 2, k)$$

e

$$T \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = (a + d, c - b, -2c + 2b).$$

- (a) Determine o valor do parâmetro real k de modo que u, v e w sejam linearmente independentes.
- (b) Considerando $k = -4$, determine o subespaço vetorial real S gerado por u, v e w e justifique que a sua dimensão é igual a 2.
- (c) Considere o subespaço vetorial real S da alínea anterior.
- i. A partir do conjunto $\{u, v, w\}$ indique uma base B para S .
 - ii. A partir da base B da alínea anterior, indique uma base para $\mathbb{R}^3$.
- (d) Determine uma base para o núcleo de T , $N(T)$.
- (e) Verifique se o vetor $r = (1, 2, -4) \in \text{Im}(T)$.
- (f) Indique, justificando, se T é injetiva e se é sobrejetiva.
- (g) Determine a matriz canônica de T .
5. Sejam T_1, T_2 e T_3 as transformações lineares planas cujas matrizes canônicas associadas são M_1, M_2 e M_3 , respetivamente, definidas por:

$$M_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad M_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

- (a) Mostre que $u = (1, 1)$ e $v = (-1, 2)$ são vetores próprios da matriz M_1 associados ao valor próprio $\lambda = -1$.
- (b) Determine a multiplicidade geométrica do valor próprio $\lambda = -1$.
- (c) Defina e classifique as transformações lineares planas T_1, T_2 e T_3 .
- (d) Defina a transformação linear plana $T_4 = T_3 \circ T_2 \circ T_1$.
- (e) Considere no plano o quadrado de vértices $O = (0, 0)$, $P = (2, 0)$, $Q = (0, -2)$ e $R = (2, -2)$. Represente geometricamente a imagem por T_4 do quadrado enunciado.

6. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow M_{1 \times 3}(\mathbb{R})$ cuja matriz canônica é:

$$M_T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

- (a) Calcule os valores próprios da matriz M_T .
 - (b) Determine as multiplicidades algébricas e geométricas dos valores próprios de M_T .
 - (c) Verifique que $T(x, y, z) = [x + 2y \quad 2y \quad 2y + 3z]$.
 - (d) Determine a imagem de T , $Im(T)$.
 - (e) A transformação T é invertível? Justifique convenientemente a sua resposta.
7. Prove que se $T : E \longrightarrow F$ é uma transformação linear então $N(T)$ é um subespaço vetorial de E .
8. Sejam E e F espaços vetoriais e $T : E \longrightarrow F$ uma transformação linear. Mostre que a imagem de T , $Im(T)$, é um subespaço vetorial de F .

Soluções dos Exercícios Propostos

1. (a) —

(b) $u_1 \in N(T) \wedge u_2 \notin N(T)$.

(c)

$$N(T) = \left\{ \begin{bmatrix} x & -x & x & w \end{bmatrix} : x, w \in \mathbb{R} \right\}.$$

(d) $u_1 \in Im(T) \wedge u_2 \notin Im(T)$.

(e) $Im(T) = \{(0, a, 0, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$.

(f) T não é injectiva nem sobrejetiva.

2. (a) —

(b)

$$B_{N(T)} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}, \text{ logo } \dim N(T) = 2.$$

(c) T não é injectiva pois $\dim N(T) = 2 \neq 0$.

(d)

$$M_T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

(e) $v \notin Im(T)$.

(f) T não é sobrejetiva.

3. (a)

$$N(T) = \left\{ \begin{bmatrix} 2c & 0 & c \end{bmatrix} : c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Como $B_{N(T)} = \left\{ \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$, $\dim N(T) = 1$.

(b) T não é injectiva pois $\dim N(T) = 1 \neq 0$.

(c) —

(d) $u_1 \in Im(T) \wedge u_2 \in Im(T)$.

(e) T não é sobrejetiva.

4. (a) $B_{N(T)} = \{(-1, 1, 1)\}$, logo $\dim N(T) = 1$.

(b) O vetor dado não pertence à imagem de T .

(c) T não é injectiva nem sobrejetiva.

5. (a) i. $T(x, y, z) = \begin{bmatrix} z - y & x & y - 2x \end{bmatrix}$

ii. $N(T) = \{(0, 0, 0)\}$. $Im(T) = M_{1 \times 3}(\mathbb{R})$.

(b) T é injectiva e sobrejetiva.

(c)

$$M_T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(d) Como T é injectiva e sobrejetiva logo T é invertível.

(e) $T^{-1}(\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}) = (b, c + 2b, a + c + 2b)$.

6. (a) —

(b) —

(c) —

7. (a) T é uma ampliação de fator 5 em relação ao eixo yy . V é uma rotação no plano do ângulo 90° em torno da origem.

(b) $H : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, onde $H(x, y) = (-y, 5x)$. A matriz canónica associada a H é definida por:

$$M_H = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}.$$

8. (a) A matriz canónica associada a $S_{y=x}$, M_S , é definida por:

$$M_S = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$S_{y=x} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, onde $S_{y=x}(x, y) = (y, x)$.

A matriz canónica associada a R_{90° , M_R , é definida por:

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$R_{90^\circ} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, onde $R_{90^\circ}(x, y) = (-y, x)$.

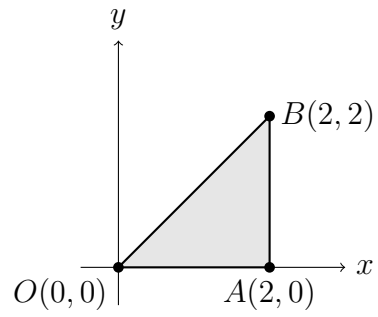
(b) A transformação linear plana que resulta da composição $R_{90^\circ} \circ S_{y=x}$ é uma simetria em relação ao eixo dos yy .

9. (a) $T_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, onde $T_1(x, y) = (y, x)$. T_1 representa uma simetria em relação à reta $y = x$.

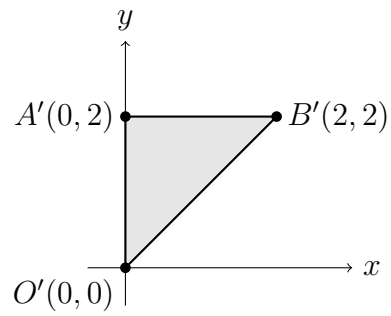
$T_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, onde $T_2(x, y) = (2x, 2y)$. T_2 representa uma ampliação de fator 2 em relação à origem.

$T_3 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, onde $T_3(x, y) = (y, -x)$. T_3 representa uma rotação de ângulo 270° em torno da origem.

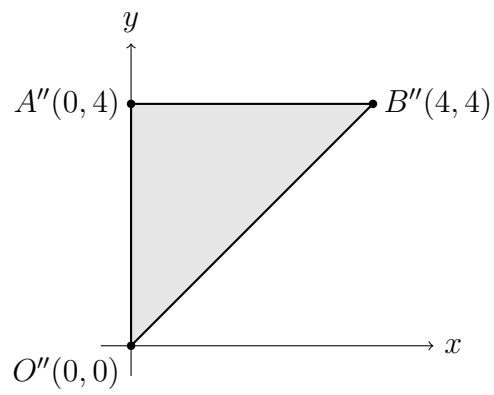
(b) O triângulo de vértices O , A e B é definido por:



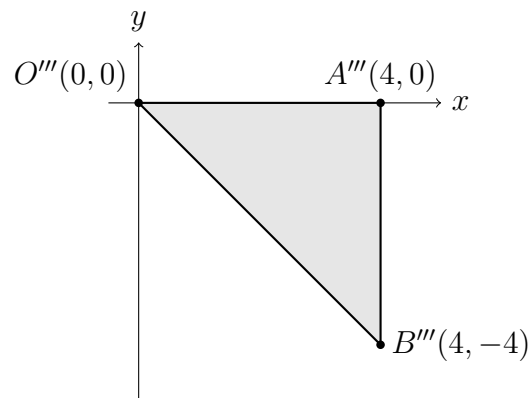
Aplicamos agora a transformação T_1 ao triângulo anterior:



A aplicação da transformação T_2 à figura anterior resulta na figura:



A aplicação da transformação T_3 à figura anterior resulta na figura:



- (c) $T = T_3 \circ T_2 \circ T_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, onde $T(x, y) = (2x, -2y)$. T é a composição de uma simetria em relação ao eixo dos xx seguida de uma ampliação em relação à origem de razão 2.

10. (a) i. A matriz canônica associada a R_{90° , M_R , é definida por:

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

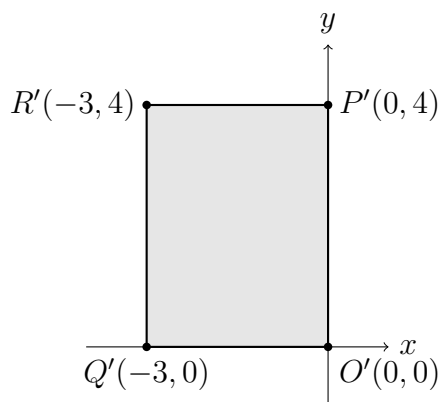
$R_{90^\circ} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, onde $R_{90^\circ}(x, y) = (-y, x)$.

- ii. A matriz canônica associada a H_y , M_{H_y} , é definida por:

$$M_{H_y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$H_y : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, onde $H_y(x, y) = (x, 2y)$.

- (b) A imagem geométrica do retângulo dado pela transformação $H_y \circ R_{90^\circ}$ é:



- (c) A matriz canônica associada a $H_y \circ R_{90^\circ}$, M , é definida por:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como o $\det(M) = 2 \neq 0$, a transformação é invertível.

11. (a) f representa uma simetria em relação à reta $y = x$. A matriz canônica associada a f é definida por:

$$M_f = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

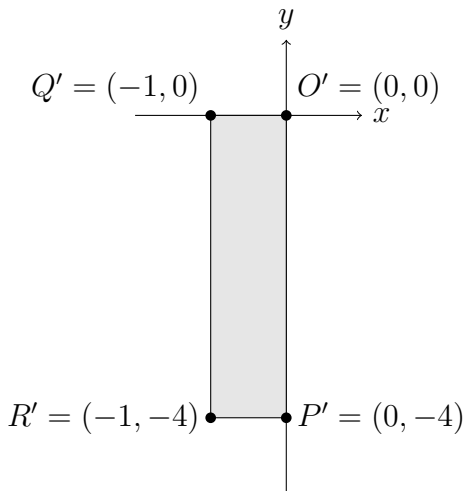
g representa uma redução em relação ao eixo dos yy de razão $\frac{1}{2}$. A matriz canônica associada a g é definida por:

$$M_g = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

h representa uma rotação no plano de ângulo 180° em torno da origem. A matriz canônica associada a h é definida por:

$$M_h = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

(b) $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, onde $T(x, y) = \left(-\frac{y}{2}, -x\right)$.



(c) A matriz canônica associada a $T = f \circ g \circ h$ é definida por:

$$M_T = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como o $\det(M_T) = -\frac{1}{2} \neq 0$, a transformação é invertível.

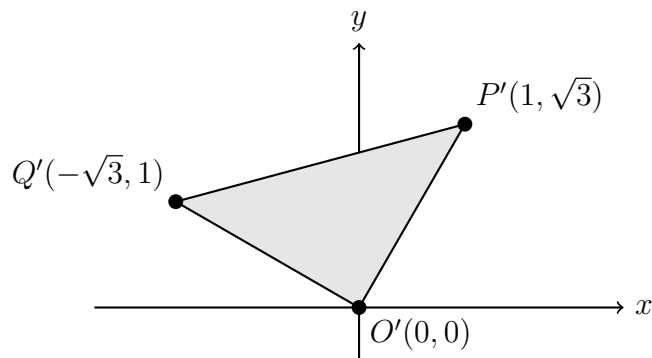
12. (a)

$$N(T) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ a + 2b & a \end{bmatrix} : c \in \mathbb{R} \right\}.$$

(b) T não é injetiva mas T é sobrejetiva.

(c) S é uma rotação no plano de ângulo 60° em torno da origem.

(d) A imagem por S do triângulo enunciado é:



(e) A matriz canônica associada a T é definida por:

$$M_T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

(f) A matriz canônica associada a S é definida por:

$$M_S = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

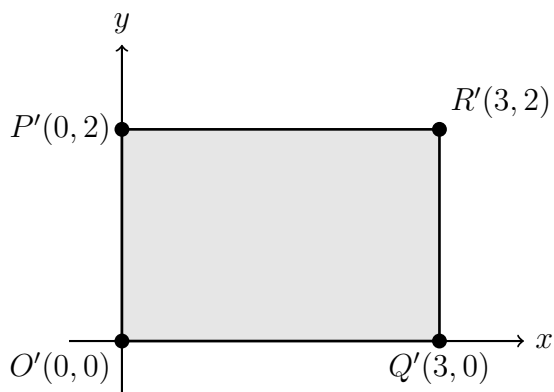
(g) A transformação T^{-1} não está definida pois T não é injetiva. A composição $T \circ S$ também não está definida pois $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $T : M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^2$, ou seja, S transforma um elemento de $\mathbb{R}^2$ noutro elemento de $\mathbb{R}^2$, no entanto, T transforma apenas elementos de $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ em elementos de $\mathbb{R}^2$. Logo, $T \circ S$ não se encontra definida.

13. (a) $u \notin N(T)$.

(b) $Im(T) = \mathbb{R}^2$.

(c) T não é injetiva mas T é sobrejetiva.

(d) O resultado da aplicação de S ao retângulo definido pelos pontos O , P , Q e R é:



(e) A composição $T \circ S$ não está definida pois $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $T : M_{1 \times 3}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^2$, ou seja, S transforma um elemento de $\mathbb{R}^2$ noutro elemento de $\mathbb{R}^2$, no entanto, T transforma apenas elementos de $M_{1 \times 3}(\mathbb{R})$ em elementos de $\mathbb{R}^2$. Logo, $T \circ S$ não se encontra definida.

14. (a) A afirmação é falsa pois a propriedade da aditividade não se verifica, considere, por exemplo, $u = (0, 1)$ e $v = (0, 2)$.

(b) A afirmação é falsa. Considere, por exemplo, a transformação linear definida do seguinte modo:

$$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \text{ com } T(x, y) = (x^2, y).$$

Neste caso verifica-se que $T(0_E) = 0_F$, no entanto, T não é linear pois não se verifica a propriedade da aditividade.

- (c) A afirmação é verdadeira. Se T é sobrejetiva, $\dim \operatorname{Im}(T) = \dim M_{1 \times 3}(\mathbb{R}) = 3$. Pelo Teorema das Dimensões, verifica-se que $\dim N(T) = 0$, logo T é injetiva.
- (d) A afirmação é falsa. Pelo Teorema das Dimensões, verifica-se que

$$\dim N(T) \geq 4.$$

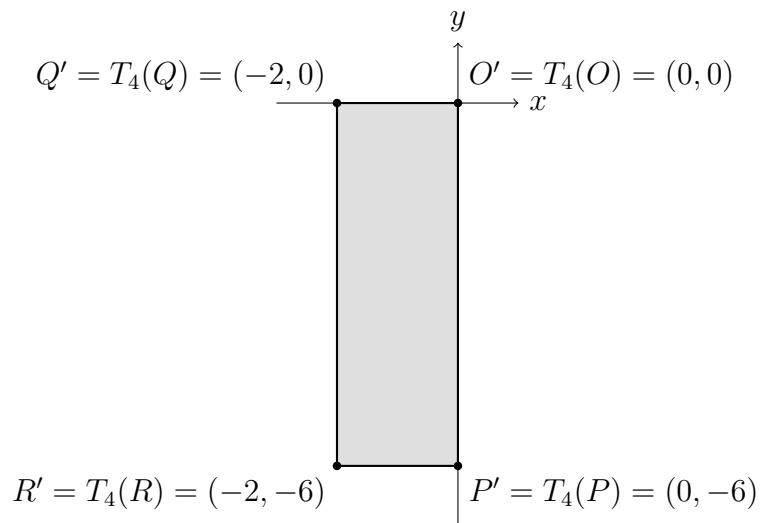
- (e) A afirmação é verdadeira pois T é bijetiva se e só se M_T é invertível. Neste caso, como M_T não é invertível logo T não é bijetiva.

Soluções dos Exercícios de Escolha Múltipla

1. C.
2. B.
3. C.
4. A.
5. D.
6. C.
7. A.
8. A.

Soluções dos Exercícios Complementares

- (a) i. $B_S = \{(1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0)\}$.
 ii. —
 iii. Uma vez que $\dim S = 3$ logo os vetores w_1 e w_2 não geram $N(T) = S$.
 iv. —
 v. T não é sobrejetiva pois $Im(T) \neq M_{1 \times 2}(\mathbb{R})$.
- (b) i. $B_S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$, pelo que $\dim S = 2$.
 ii. —
 iii. $a = -2$.
 iv. T não é injetiva, nem é sobrejetiva.
- (c) i. $B_S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$, pelo que $\dim S = 2$.
 ii. v não gera $Im(T)$ pois $\dim Im(T) = \dim S = 2$.
 iii. $k = 2$.
 iv. T não é injetiva.
- (d) i. $k \neq -4$.
 ii. $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z + 2y = 0\}$ pelo que $\dim S = 2$.
 iii. A. $\{(1, 0, 0), (3, -1, 2)\}$
 B. $\{(1, 0, 0), (3, -1, 2), (0, 0, 1)\}$
 iv. $N(T) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$, pelo que $\dim S = 2$.
 v. $r \in Im(T)$.
 vi. T não é injetiva, nem é sobrejetiva.
 vii.
- $$M_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$
- (e) i. —
 ii. $mg(\lambda = -1) = 2$.
 iii. $T_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, onde $T_1(x, y) = (-x, -y)$. T_1 é uma rotação no plano de ângulo 180° em torno da origem.
 $T_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, onde $T_2(x, y) = (3x, y)$. T_2 é uma ampliação em relação ao eixo xx de razão 3.
 $T_3 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, onde $T_3(x, y) = (-y, x)$. T_3 é uma rotação no plano de ângulo 90° em torno da origem.
 iv. $T_4 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, onde $T_4(x, y) = (y, -3x)$.
 v. A imagem por T_4 do quadrado enunciado é:



- (f)
- i. $\lambda_1 = 1 \vee \lambda_2 = 2 \vee \lambda_3 = 3$.
 - ii. As multiplicidades algébricas são: $ma(\lambda = 1) = 1 \vee ma(\lambda = 2) = 1 \vee ma(\lambda = 3) = 1$. As multiplicidades geométricas são: $mg(\lambda = 1) = 1 \vee mg(\lambda = 2) = 1 \vee mg(\lambda = 3) = 1$.
 - iii. —
 - iv. $Im(T) = M_{1 \times 3}(\mathbb{R})$.
 - v. T é invertível pois $\det(M_T) = 6 \neq 0$.
- (g) —
- (h) —

Processamento de Imagens Digitais

As transformações lineares planas constituem uma das aplicações mais importantes da Álgebra Linear no domínio do processamento de imagens digitais. Sempre que uma imagem é rodada, ampliada, reduzida ou refletida, estão a ser utilizadas transformações matemáticas que atuam sobre as coordenadas dos píxeis da imagem. Estas operações são fundamentais em diversas áreas da Engenharia Informática, incluindo visão computacional, realidade aumentada, reconhecimento de padrões, robótica e edição de imagem.

Matematicamente, uma imagem digital pode ser representada por um conjunto de pontos no plano cartesiano. Cada ponto corresponde à posição de um píxel e pode ser descrito por um vetor de coordenadas (x, y) . As transformações lineares permitem modificar a posição destes pontos através da multiplicação por matrizes. Desta forma, uma única matriz pode descrever operações geométricas como rotações, ampliações, reduções ou simetrias.

Por exemplo, quando uma fotografia é rodada para corrigir a sua orientação, os programas de edição de imagem aplicam uma matriz de rotação a todos os píxeis da imagem. De forma semelhante, quando uma imagem é ampliada ou reduzida, são utilizadas matrizes de escala que alteram proporcionalmente as coordenadas dos pontos. As simetrias são frequentemente utilizadas em aplicações de visão computacional para aumentar conjuntos de dados de treino de algoritmos de inteligência artificial, criando novas imagens a partir das originais.

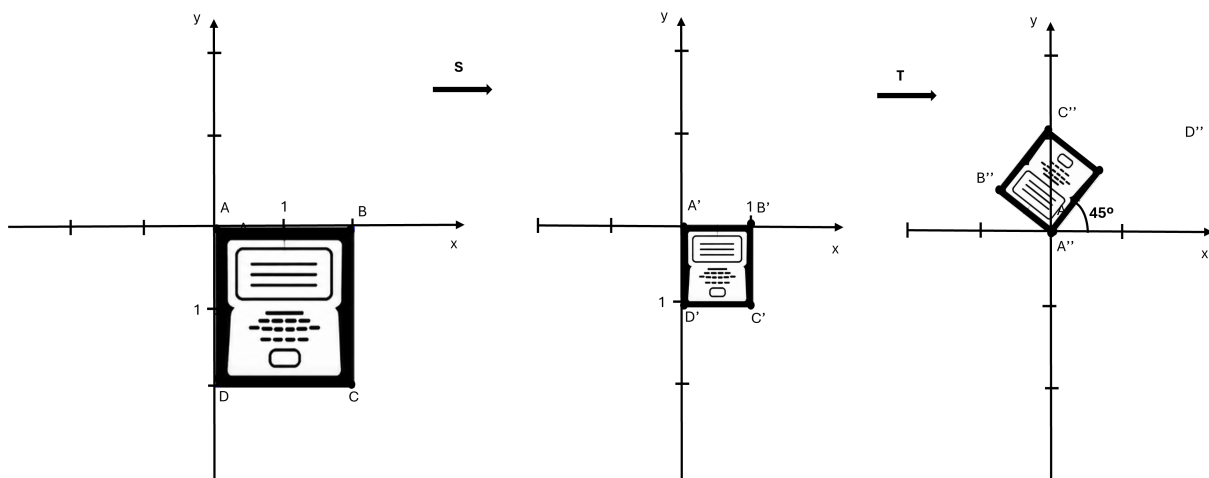
O estudo das transformações lineares planas permite compreender como estas operações são implementadas computacionalmente e como diferentes transformações podem ser combinadas através da multiplicação de matrizes. Esta propriedade é particularmente importante em aplicações de processamento de imagem, pois permite realizar sequências complexas de operações geométricas de forma eficiente.

Neste contexto, a Álgebra Linear fornece as ferramentas matemáticas necessárias para modelar, analisar e implementar transformações geométricas em imagens digitais, constituindo um dos pilares fundamentais de muitas tecnologias modernas utilizadas em dispositivos móveis, sistemas de navegação, videojogos e aplicações de inteligência artificial.

Aplicações das Transformações Lineares Planas a uma Imagem do plano

Observe a figura seguinte onde está representada a imagem de um computador $[ABCD]$ que foi submetida a duas transformações planas lineares consecutivas. A primeira transformação, S , transformou a imagem original na imagem $[A'B'C'D']$. A segunda transformação, T , rodou no plano a imagem $[A'B'C'D']$ por um ângulo de 135° em torno da origem, originando a imagem $[A''B''C''D'']$.

1. Determine as matrizes canónicas associadas às transformações S , T e $T \circ S$.
2. Caracterize cada uma das transformações S , T e $T \circ S$.
3. Utilizando a linguagem Python, implemente as transformações lineares S , T e a composição $T \circ S$, representando graficamente todas as imagens obtidas.



1. Determine as matrizes canônicas associadas às transformações S , T e $T \circ S$.

As matrizes canônicas associadas às transformações S , T e $T \circ S$ são, respetivamente, M_S , M_T e $M_{T \circ S}$ e são definidas por:

$$M_S = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad M_T = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad M_{T \circ S} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} \end{bmatrix}.$$

2. Caraterize cada uma das transformações S , T e $T \circ S$.

- $S : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, onde $S(x, y) = (\frac{x}{2}, \frac{y}{2})$. S é uma redução em relação à origem de razão 2.
- $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, onde $T(x, y) = (\frac{\sqrt{2}x}{2} + \frac{\sqrt{2}y}{2}, -\frac{\sqrt{2}x}{2} + \frac{\sqrt{2}y}{2})$. T é uma rotação no plano de ângulo 135° em torno da origem.
- $T \circ S : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, onde $(T \circ S)(x, y) = (\frac{\sqrt{2}x}{4} + \frac{\sqrt{2}y}{4}, -\frac{\sqrt{2}x}{4} + \frac{\sqrt{2}y}{4})$.

3. Utilizando a linguagem Python, implemente as transformações lineares S , T e a composição $T \circ S$, representando graficamente as imagens obtidas.

Considere a imagem inicial definida por **FiguraInicial.png** seguinte:



```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib.image as mpimg
from matplotlib.transforms import Affine2D

# Carregar a imagem
img = mpimg.imread("FiguraInicial.png")

# Transformação S: redução para metade
S = np.array([[0.5, 0],
              [0, 0.5]])

# Transformação T: rotação de 135 graus
theta = -np.3pi/4

T = np.array([[np.cos(theta), -np.sin(theta)],
              [np.sin(theta),  np.cos(theta)]])

# Composição T o S
TS = T @ S

def representar(ax, A, titulo):

    trans = Affine2D(
        [[A[0,0], A[0,1], 0],
         [A[1,0], A[1,1], 0],
         [0,      0,      1]]
    )

    ax.imshow(
        img,
        extent=[0,2,0,2],
        origin='upper',
        transform=trans + ax.transData
    )

    ax.axhline(0,color='black',linewidth=0.5)
    ax.axvline(0,color='black',linewidth=0.5)

    ax.grid(True)
    ax.set_aspect('equal')
    ax.set_title(titulo)

    ax.set_xlim(-2,3)
    ax.set_ylim(-2,3)

```

```

fig, axs = plt.subplots(1,4,figsize=(16,4))

representar(axs[0], np.eye(2), "Figura inicial")
representar(axs[1], S, "S")
representar(axs[2], T, "T")
representar(axs[3], TS, r"$T\circ S$")

plt.tight_layout()
plt.show()

```

A execução deste código permite visualizar a figura original, a sua imagem pela transformação S , a sua imagem pela transformação T e a imagem obtida pela composição $T \circ S$, confirmando geometricamente os resultados obtidos através das matrizes canónicas.

Desafio

Considere a seguinte imagem designada por **FotografiaInicial.png**.



Determine as transformações lineares planas S , T e R que são aplicadas por esta ordem à imagem **FotografiaInicial.png**. A primeira transformação, S , transforma a imagem inicial através de uma ampliação em relação ao eixo dos yy de razão 2. A segunda transformação, T , reflete a imagem em relação ao eixo dos xx e a terceira, roda a imagem no plano por um ângulo de 30° em torno da origem, originando a imagem final.

1. Determine as matrizes canónicas associadas às transformações S , T , R e $R \circ T \circ S$.
 2. Caracterize cada uma das transformações S , T , R e $R \circ T \circ S$.
 3. Utilizando a linguagem Python, implemente as transformações lineares S , T , R e a composição $R \circ T \circ S$, representando graficamente todas as imagens obtidas.
-

Bibliografia

Bibliografia

- Anton, H., Rorres, C., & Kaul, A. (2019). *Elementary Linear Algebra: Applications Version* (12th ed.). Wiley.
- Axler, S. (2023). *Linear Algebra Done Right* (4th ed.). Springer.
- Azevedo, A. (2021). *Álgebra Linear I* (2.^a ed.). Universidade do Minho.
- Boldrini, J. L., Costa, S. I. R., Figueiredo, V. L., & Wetzler, H. G. (1986). *Álgebra Linear*. Harper & Row.
- Boulos, P., & Camargo, I. (2005). *Geometria Analítica: Um Tratamento Vetorial*. Pearson.
- Boyd, S., & Vandenberghe, L. (2018). *Introduction to Applied Linear Algebra: Vectors, Matrices, and Least Squares*. Cambridge University Press.
- Cabral, I., Perdigão, C., & Saiago, C. (2024). *Álgebra Linear: Teoria, Exercícios Resolvidos e Propostos* (7.^a ed.). Dinternal.
- Cohen, M. X. (2021). *Linear Algebra: Theory, Intuition, Code*. Sincxpress.
- Deisenroth, M. P., Faisal, A. A., & Ong, C. S. (2020). *Mathematics for Machine Learning*. Cambridge University Press.
- Dym, H. (2023). *Linear Algebra in Action* (3rd ed.). American Mathematical Society.
- Friedberg, S. H., Insel, A. J., & Spence, L. E. (2019). *Linear Algebra* (5th ed.). Pearson.
- Gonçalves, R. J. C., & Abreu, T. (2023). *Álgebra Linear e Geometria Analítica: Teoria e Prática*. Edições Sílabo.
- Lay, D. C., Lay, S. R., & McDonald, J. J. (2021). *Linear Algebra and Its Applications* (6th ed.). Pearson.
- Macedo, M. (2023). *Álgebra Linear: Matrizes, Determinantes e Sistemas*. UCE Editora.
- Margalit, D., & Rabinoff, J. (2019). *Interactive Linear Algebra*. Georgia Institute of Technology. Disponível em: <https://textbooks.math.gatech.edu/ila/>
- Poole, D. (2025). *Linear Algebra: A Modern Introduction* (5th ed.). Cengage Learning.
- Silva e Castro, A. C. M., Viamonte, A. J., & Teixeira de Sousa, A. A. V. (2017). *Álgebra Matricial: Conceitos, Exercícios e Aplicações* (2.^a ed.). Engebook.

- Strang, G. (2019). *Linear Algebra and Learning from Data*. Wellesley-Cambridge Press.
- Strang, G. (2020). *Linear Algebra for Everyone*. Wellesley-Cambridge Press.
- Strang, G. (2023). *Introduction to Linear Algebra* (6th ed.). Wellesley-Cambridge Press.
- Vieira, L. A., & Gonçalves, R. J. (2023). *Álgebra Linear: Aplicações Lineares, Determinantes e Espaços Euclidianos* (2.^a ed.). Universidade do Porto.

Sobre os Autores

Biografia dos Autores



Conceição Veloso Nogueira é professora adjunta no Departamento de Matemática da Escola Superior de Tecnologia e Gestão (ESTG) do Instituto Politécnico de Leiria (IPLeiria). É licenciada em Matemática (Ensino de) e mestre em Matemática, área de especialização em Ensino, pela Universidade do Minho (UM). Doutorada em Matemática (Álgebra Universal), pela Universidade do Minho, tem como principais áreas de investigação a Teoria dos Semigrupos Finitos, a Teoria dos Autómatos e das Linguagens Formais. Tem ainda como áreas de interesse a Modelação Matemática nos setores da Saúde e da Indústria e a inclusão e inovação pedagógica. Acompanhou vários estudantes com necessidades específicas, nomeadamente cegueira, perturbação do espetro do autismo, dislexia, défice de atenção, entre outras. Está envolvida em projetos que visam implementar novas metodologias de ensino-aprendizagem capazes de promover o sucesso académico e combater o abandono escolar, em particular, com destaque para o projeto - Aprendizagem Ativa em Álgebra Linear - que conta com a colaboração do Departamento de Análise Matemática da Universidade de La Laguna, Tenerife. É membro integrada do CMAT (Centro de Matemática da UM), no grupo ALC (Álgebra, Lógica e Computação), sendo também investigadora convidada no Laboratório de Bioinformática (LABI) da UNIOESTE, Brasil. Atualmente é membro do Conselho Pedagógico da ESTG do IPLeia e da sua comissão permanente.

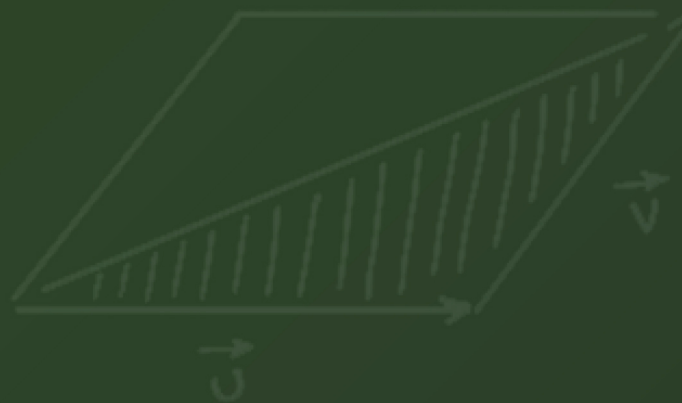


Paula Pascoal-Faria é professora adjunta no Departamento de Matemática (DMAT) da ESTG do IPLeia. É licenciada em Matemática (Ensino de), mestre em Matemática, na área de especialização em Análise Numérica e Matemática Computacional, e doutorada em Engenharia Biomédica e Biofísica pela Universidade de Lisboa. A sua atividade de investigação centra-se na modelação numérica e computacional aplicada aos setores da saúde e da indústria, participando como investigadora principal e membro de diversos projetos financiados pela Fundação para a Ciência e a Tecnologia (FCT) e pela Comissão Europeia. Tem orientado estudantes de licenciatura, mestrado, doutoramento e pós-doutoramento, em colaboração com instituições de ensino superior e centros de investigação nacionais e internacionais. Desenvolve igualmente atividade na área da inovação pedagógica, estando envolvida em projetos que promovem metodologias de ensino-aprendizagem orientadas para o sucesso académico e a redução do abandono escolar. Destaca-se, neste contexto, o projeto - Aprendizagem Ativa em Álgebra Linear - desenvolvido em parceria com o Departamento de Análise Matemática da Universidade de La Laguna, em Tenerife. É membro integrado do CDRSP, o Centro para o Desenvolvimento Rápido e Sustentado do Produto, uma unidade de investigação classificada com Excelente pela FCT. Foi membro da Direção da Sociedade Portuguesa de Matemática e exerce atualmente as funções de Coordenadora do DMAT da ESTG e de membro do Conselho Geral do IPLeia.

$$\vec{u} = (-1, 0, 2) \quad \vec{v} = (2, 1, -1) \quad \text{proj}_{\vec{v}} \vec{u} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} \times \vec{v}$$

$$\vec{u} = \vec{w}_1 + \vec{w}_2 \quad \vec{w}_1 \parallel \vec{v} \quad \vec{w}_2 \perp \vec{v}$$

$$\vec{w}_1 = \text{proj}_{\vec{v}} \vec{u} \quad \vec{w}_2 = \vec{u} - \text{proj}_{\vec{v}} \vec{u}$$



$$\begin{aligned} \text{C A } \vec{u} \cdot \vec{v} &= (-1, 0, 2) \cdot (2, 1, -1) \\ &= -2 + 0 - 2 = -4 \end{aligned}$$

$$\vec{u} = (-$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$$

$$\vec{w} \perp \vec{u}$$

$$\vec{w} \perp \vec{v}$$

$$\begin{aligned} \vec{w}_2 &= \vec{u} - \vec{w}_1 = (-1, 0, 2) - \left(-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \\ &= \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} (x, y) \\ (x, y) \end{cases}$$

$$A_{\square}(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$$

$$A_{\Delta}(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}{2} = \frac{\sqrt{4^2 + 1^2 + (-3)^2}}{2} = \frac{\sqrt{26}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x : \\ 2x \end{cases}$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (3 \times 1 - (-1) \times 1, -(0 \times 1 - 1 \times 1), 0 \times (-1) -$$

$$= (4, 1, -3)$$