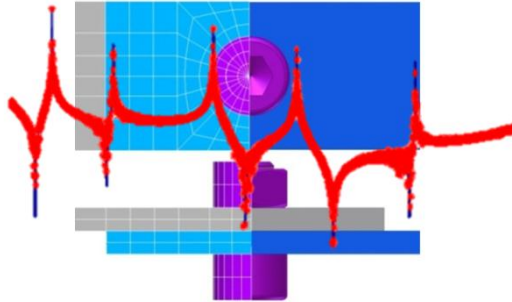




INSTITUTO  
SUPERIOR  
TÉCNICO

# UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA

## INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO



### Caracterização Dinâmica de Juntas Aparafusadas

Fernando da Conceição Batista

**Orientador:** Doutor Nuno Manuel Mendes Maia

**Tese aprovada em provas públicas para obtenção do Grau de Doutor em**  
Engenharia Mecânica

**Qualificação atribuída pelo Júri: Aprovado com Muito Bom**

#### Júri

**Presidente:** Presidente do Conselho Científico do IST

**Vogais:** Doutor Carlos Alberto Ferreira De Sousa Oliveira

Doutor Nuno Manuel Mendes Maia

Doutor José Fernando Dias Rodrigues

Doutor António Paulo Vale Urgueira

Doutor João Manuel Melo De Sousa

Doutor Eduardo Joaquim Anjos De Matos Almas

Doutor António Manuel Relógio Ribeiro





INSTITUTO  
SUPERIOR  
TÉCNICO

# UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA

## INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO

### Caracterização Dinâmica de Juntas Aparafusadas

Fernando da Conceição Batista

**Orientador:** Doutor Nuno Manuel Mendes Maia

**Tese aprovada em provas públicas para obtenção do Grau de Doutor em**  
Engenharia Mecânica

**Qualificação atribuída pelo Júri: Aprovado com Muito Bom**

#### Júri

**Presidente:** Presidente do Conselho Científico do IST

**Vogais:** Doutor Carlos Alberto Ferreira De Sousa Oliveira, Professor Catedrático do Instituto Superior Técnico, da Universidade Técnica de Lisboa;

Doutor Nuno Manuel Mendes Maia, Professor Associado (com Agregação) do Instituto Superior Técnico, da Universidade Técnica de Lisboa;

Doutor José Fernando Dias Rodrigues, Professor Associado da Faculdade de Engenharia, da Universidade do Porto;

Doutor António Paulo Vale Urgueira, Professor Associado da Faculdade de Ciências e Tecnologia, da Universidade Nova de Lisboa;

Doutor João Manuel Melo De Sousa, Professor Associado do Instituto Superior Técnico, da Universidade Técnica de Lisboa;

Doutor Eduardo Joaquim Anjos De Matos Almas, Professor Auxiliar do Instituto Superior Técnico, da Universidade Técnica de Lisboa;

Doutor António Manuel Relógio Ribeiro, Professor Auxiliar do Instituto Superior Técnico, da Universidade Técnica de Lisboa.

*À minha esposa Carla  
e à minha filha Rita*

# Agradecimentos

Gostava de expressar aqui os meus agradecimentos a todas as pessoas que contribuíram com a sua ajuda e estímulo para que me fosse possível a realização deste trabalho, em especial:

- Ao Professor Nuno Manuel Mendes Maia, na qualidade de orientador científico, a sua disponibilidade, assim como a colaboração na revisão do texto.

- Aos docentes do Departamento de Engenharia Mecânica da Escola Superior de Tecnologia e Gestão de Leiria, em especial ao Doutor Fernando Romeiro e ao Eng.º Carlos Costa e Sousa que sempre se mostraram disponíveis e me apoiaram.

- Aos meus primos e aos meus amigos, que de alguma forma contribuíram com o seu apoio durante a realização deste trabalho.

- À Fundação para a Ciência e a Tecnologia pela bolsa de estudo SFRH/BD/29896/2006.

- Aos meus pais e à minha irmã, pelo incentivo que me deram, cujo esforço e dedicação permitiram que eu pudesse chegar até aqui.

- Por último, o meu agradecimento muito especial à minha esposa Carla e à minha filha Rita pelo apoio diário, encorajamento e convicção na minha capacidade para terminar este trabalho.

# Resumo

A determinação das características dinâmicas de juntas de ligação entre componentes estruturais é um problema bastante actual e da maior importância quando se pretende estabelecer um modelo teórico do comportamento dinâmico de uma estrutura complexa. Muitos dos problemas encontrados num tal processo são precisamente devidos às dificuldades em modelar teoricamente de uma forma adequada as juntas, sejam estas ligações do tipo "clássico" - aparafusadas, rebitadas, soldadas, etc. - ou ainda mais complicadas, como apoios elásticos, cintas, etc. Os chamados métodos directos, em que a modelação analítica ou numérica é realizada para se obterem os resultados, podem não ser os mais adequados para os objectivos apontados. Nesse caso usam-se métodos ditos inversos. Consistem estes métodos em identificar as propriedades dum determinado componente a partir de resultados obtidos experimentalmente. No presente estudo dar-se-á particular ênfase a este último tipo de métodos, aplicados a um tipo de junta muito utilizado, a aparafusada.

**Palavras-chave:** juntas, parafuso, identificação, desacoplamento, subestruturas, FRF, correlação, modelação, vigas, MEF

# Abstract

The determination of the dynamic characteristics of joints connecting structural components is a problem of most importance when trying to establish a theoretical model of the dynamic behaviour of a complex structure. Many of the problems encountered in this process is precisely due to the difficulties in modeling the joints in an appropriate way, either as "classic joints" - bolted, riveted, welded, etc. - or even more complicated, such as elastic supports, metallic bands, etc. The so-called direct methods, where the theoretical modeling is performed to obtain the results may not be the most appropriate to the identified objectives. In such cases, the so-called inverse methods are used. These methods identify the properties of a particular component from results obtained experimentally. In this thesis, special focus is given to inverse methods, applied to a particular type of joint, the bolted one.

**Keywords:** joints, bolt, identification, uncoupling, substructures, FRF, correlation, modelling, beam, *FEM*

# Índice

|  |             |
|--|-------------|
| <b>Agradecimentos</b> .....  | <b>i</b>    |
| <b>Resumo</b> .....  | <b>ii</b>   |
| <b>Abstract</b> .....  | <b>iii</b>  |
| <b>Índice</b> .....  | <b>iv</b>   |
| <b>Lista de figuras</b> .....  | <b>vii</b>  |
| <b>Lista de tabelas</b> .....  | <b>xiii</b> |
| <b>Abreviaturas</b> .....  | <b>xiii</b> |
| <b>Lista de símbolos</b> .....   | <b>xiv</b>  |
| <b>1. Introdução</b> .....   | <b>1</b>    |
| 1.1 Generalidades .....  | 1           |
| 1.2 Objectivos .....   | 3           |
| 1.3 Estrutura da tese.....   | 5           |
| <b>2. Estado da arte</b> .....   | <b>6</b>    |
| 2.1 Introdução .....   | 6           |
| 2.2 Elementos Finitos.....   | 9           |
| 2.3 Ligações aparafusadas.....   | 10          |
| 2.4 Análise de vibrações mecânicas.....                                  | 11          |
| 2.5 Acoplamento / desacoplamento.....                                    | 15          |
| 2.6 Estimativa de funções de resposta em frequência não medidas.....     | 17          |
| 2.7 Critérios de correlação .....  | 18          |
| <b>3. Identificação de juntas por métodos numéricos directos</b> .....   | <b>23</b>   |
| 3.1 Introdução .....   | 23          |
| 3.2 Fundamentos teóricos.....  | 24          |
| 3.3 Modelação da ligação aparafusada .....                               | 28          |
| 3.3.1 Escolha do elemento finito.....                                    | 29          |
| 3.3.2 Interferência geométrica na zona de contacto.....                  | 31          |
| 3.3.3 Modelos numéricos da ligação aparafusada.....                      | 32          |
| 3.3.4 Determinação das características estruturais. ....                 | 34          |
| 3.3.5 Análise de correlação .....  | 37          |
| <b>4. Identificação de juntas com base em técnicas de desacoplamento</b> | <b>40</b>   |

---

|           |  |            |
|-----------|--|------------|
| 4.1       | Introdução.....  | 40         |
| 4.2       | Técnica clássica de acoplamento.....                               | 42         |
| 4.3       | Técnica alternativa de acoplamento.....                            | 46         |
| 4.4       | Técnicas de desacoplamento .....                                   | 50         |
| 4.4.1     | Sem a utilização das coordenadas da junta.....                     | 50         |
| 4.4.2     | Utilização apenas das coordenadas da junta.....                    | 52         |
| 4.4.3     | Utilização das coordenadas $i$ e $j$ .....                         | 54         |
| 4.4.4     | Sumário .....  | 55         |
| 4.4.5     | Exemplo numérico 1.....  | 55         |
| 4.4.6     | Exemplo numérico 2.....  | 61         |
| 4.4.7     | Outras técnicas de desacoplamento.....                             | 68         |
| 4.5       | Análise do problema mal condicionado.....                          | 72         |
| 4.5.1     | Algoritmo de cálculo da gama de frequências.....                   | 74         |
| 4.5.2     | Exemplo numérico 3.....  | 74         |
| 4.6       | Técnica de desacoplamento de Ren .....                             | 85         |
| 4.6.1     | Algoritmo de identificação da junta .....                          | 87         |
| 4.6.2     | Exemplo numérico 4.....  | 90         |
| 4.7       | Técnica de desacoplamento iterativa .....                          | 94         |
| 4.7.1     | Exemplo numérico 5.....  | 98         |
| <b>5.</b> | <b>Aplicação prática.....</b>                                      | <b>103</b> |
| 5.1       | Introdução.....  | 103        |
| 5.2       | Determinação de funções de resposta em frequência não medidas..... | 104        |
| 5.2.1     | Introdução.....  | 104        |
| 5.2.2     | Formulação teórica .....   | 105        |
| 5.2.3     | Sumário .....  | 106        |
| 5.2.4     | Determinação das respostas nas coordenadas não medidas.....        | 107        |
| 5.2.5     | Exemplo numérico 6.....  | 109        |
| 5.3       | Cancelamento de massas.....  | 113        |
| 5.3.1     | Exemplo experimental.....  | 115        |
| 5.4       | Técnicas para a redução dos efeitos do ruído .....                 | 117        |
| 5.4.1     | Exemplo aplicado a uma FRF .....                                   | 121        |
| 5.5       | Avaliação do efeito do momento de aperto.....                      | 123        |
| 5.6       | Identificação de uma junta aparafusada.....                        | 125        |
| 5.6.1     | Desacoplamento das estruturas 1008 e 1012.....                     | 127        |
| 5.6.2     | Desacoplamento das estruturas reduzidas .....                      | 131        |

---

|  |            |
|--|------------|
| <b>6. Conclusões e trabalhos futuros .....</b>                                   | <b>137</b> |
| 6.1 Novas contribuições .....  | 137        |
| 6.2 Conclusões.....  | 138        |
| 6.3 Trabalhos futuros .....  | 140        |
| <b>Anexos .....</b>  | <b>142</b> |
| Anexo A - Decomposição em valores singulares e pseudo-inversa.....               | 142        |
| Anexo A.1 - Decomposição em valores singulares .....                             | 142        |
| Anexo A.2 - Mínimos quadrados .....  | 143        |
| Anexo A.3 - Pseudo-inversa.....  | 144        |
| Anexo B – Determinação das características espaciais.....                        | 145        |
| Anexo C - Acelerância de vigas livre-livre a partir da Teoria de Timoshenko..... | 146        |
| Anexo D - Equipamento experimental utilizado.....                                | 149        |
| <b>Referências .....</b>   | <b>150</b> |

# Lista de figuras

|  |    |
|--|----|
| Figura 2.1: Relação entre os três modelos dinâmicos (sem amortecimento).....   | 14 |
| Figura 2.2: Exemplo de uma correlação FDAC.....  | 19 |
| Figura 2.3: Exemplo de uma correlação FRAC.....  | 19 |
| Figura 2.4: Exemplo da correlação GSC.....   | 21 |
| Figura 2.5: Exemplo da média da correlação GSC.....  | 21 |
| Figura 2.6: Exemplo de uma média da correlação LAC.....  | 22 |
| Figura 2.7: Comparação de $H_{X77}(\omega)$ e $H_{A77}(\omega)$ .....  | 22 |
| Figura 3.1: Acoplamento de vigas V10 com V8.....   | 28 |
| Figura 3.2: Tipo de viga.....  | 28 |
| Figura 3.3: Geometria dos elementos finitos seleccionados.....   | 29 |
| Figura 3.4: Divisões da malha em 16 divisões.....  | 30 |
| Figura 3.5: Divisões da malha em 24 divisões.....  | 30 |
| Figura 3.6: Penetração no modo de flexão.....  | 31 |
| Figura 3.7: Fotografia da junta aparafusada.....   | 31 |
| Figura 3.8: Ligação sem parafuso.....  | 32 |
| Figura 3.9: Ligação com parafuso.....  | 32 |
| Figura 3.10: Zonas das ligações C1-C6.....   | 33 |
| Figura 3.11: Ligação C7.....   | 33 |
| Figura 3.12: Cone de pressão do parafuso.....  | 34 |
| Figura 3.13: Ligação do modelo 7.....  | 34 |
| Figura 3.14: Acelerância $H_{11}$ da viga V10 com e sem as massas adicionadas.....                                     | 35 |
| Figura 3.15: Correlação LAC média da viga V10 com e sem as massas adicionadas.....                                     | 35 |
| Figura 3.16: Viga V10 com o acelerómetro e a Viga V10 com o acelerómetro e as massas nas coordenadas de interesse..... | 35 |
| Figura 3.17: Modelo de elementos finitos da Viga V10 com o acelerómetro e as massas nas coordenadas de interesse.....  | 35 |
| Figura 3.18: Acelerância $H_{11}$ da viga V10 experimental e numérico com as massas adicionadas.....                   | 36 |
| Figura 3.19: Correlação LAC média da viga V10 experimental e numérico com as massas adicionadas.....                   | 36 |
| Figura 3.20: Correlação GSC média dos modelos 1, 2, 3, 4, 5 e 6.....   | 37 |

|  |    |
|--|----|
| Figura 3.21: Correlação GSC média dos modelos 7, 8, 9, 10, 11, 12 e 13 .....   | 37 |
| Figura 3.22: Correlação GSC do modelo 4.....   | 38 |
| Figura 3.23: Correlação GSC do modelo 11 .....   | 38 |
| Figura 3.24: Correlação LAC média do modelo 4.....   | 38 |
| Figura 3.25: Correlação LAC média do modelo 11 .....   | 38 |
| Figura 4.1: Fluxograma do acoplamento de modelos: via teórica e experimental .....   | 41 |
| Figura 4.2: Acoplamento clássico das subestruturas A e B numa estrutura C .....  | 42 |
| Figura 4.3: Acoplamento das subestruturas A e B numa estrutura C .....   | 46 |
| Figura 4.4: Acoplamento das subestruturas A e B, formando a estrutura C .....  | 56 |
| Figura 4.5: Comparação das acelerações $H_{11}^C$ e $H_{12}^C$ obtido com as três soluções .....   | 57 |
| Figura 4.6: Acelerações $H_{11}^B$ e $H_{12}^B$ – Vigas Bernoulli-Euler .....  | 58 |
| Figura 4.7: Acelerações $H_{11}^B$ e $H_{12}^B$ – Vigas Timoshenko.....  | 58 |
| Figura 4.8: Acelerações $H_{11}^B$ e $H_{12}^B$ – Vigas MEF.....   | 59 |
| Figura 4.9: Acelerações $H_{11}^B$ e $H_{12}^B$ com ruído de 1%.....   | 60 |
| Figura 4.10: Acelerações $H_{13}^B$ e $H_{14}^B$ com ruído de 1%.....  | 60 |
| Figura 4.11: Acoplamento das subestruturas A e B, formando a estrutura C.....  | 61 |
| Figura 4.12: FRF $H_{11}^B$ e $H_{12}^B$ das três formulações .....  | 62 |
| Figura 4.13: Erro das FRF $H_{11}^B$ e $H_{12}^B$ das três formulações.....  | 63 |
| Figura 4.14: FRF $H_{11}^B$ e $H_{12}^B$ da Formulação 2 .....   | 63 |
| Figura 4.15: FRF $H_{11}^B$ e $H_{12}^B$ com a adição das seis massas na subestrutura A.....   | 64 |
| Figura 4.16: FRF $H_{11}^B$ e $H_{12}^B$ com a adição das duas massas de 35 gramas na estrutura B65  |    |
| Figura 4.17: FRF $H_{11}^B$ e $H_{12}^B$ com a adição das duas massas de 70 gramas na estrutura B65  |    |
| Figura 4.18: FRF $H_{11}^B$ e $H_{12}^B$ com e sem as duas massas de 70 gramas na estrutura B .....  | 66 |
| Figura 4.19: FRF $H_{11}^C$ e $H_{12}^C$ do acoplamento de A <sub>1</sub> e A <sub>2</sub> com a subestrutura B .....                        | 67 |
| Figura 4.20: $H_{11}^C$ e $H_{12}^C$ do acoplamento de A <sub>1</sub> e A <sub>2</sub> com a subestrutura B com a adição de massa em A ..... | 67 |
| Figura 4.21: Acoplamento das subestruturas A e B, formando a estrutura C.....  | 74 |
| Figura 4.22: FRF $H_{11}^B$ da Formulação 1.....   | 76 |
| Figura 4.23: $r_1(\omega)$ com $R_1(\omega)$ da Formulação 1 .....   | 76 |

|  |    |
|--|----|
| Figura 4.24: FRF $H_{11}^B$ da Formulação 2.....   | 76 |
| Figura 4.25: $r_2(\omega)$ com $R_2(\omega)$ da Formulação 2.....  | 76 |
| Figura 4.26: FRF $H_{11}^B$ da Formulação 3.....   | 76 |
| Figura 4.27: $r_3(\omega)$ com $R_3(\omega)$ da Formulação 3.....  | 76 |
| Figura 4.28: FRF $H_{11}^B$ da Formulação 4.....   | 77 |
| Figura 4.29: $r_4(\omega)$ com $R_4(\omega)$ da Formulação 4.....  | 77 |
| Figura 4.30: FRF $H_{11}^B$ da Formulação 5.....   | 77 |
| Figura 4.31: $r_5(\omega)$ com $R_5(\omega)$ da Formulação 5.....  | 77 |
| Figura 4.32: FRF $H_{11}^B$ da Formulação 6.....   | 77 |
| Figura 4.33: $r_6(\omega)$ com $R_6(\omega)$ da Formulação 6.....  | 77 |
| Figura 4.34: Média da correlação GSC.....  | 78 |
| Figura 4.35: $Z_{11}^B$ da Formulação 2 obtida com todas as frequências.....   | 79 |
| Figura 4.36: $Z_{11}^B$ da Formulação 2 obtida apenas com as frequências escolhidas.....   | 79 |
| Figura 4.37: $Z_{11}^B$ da Formulação 4 obtida com todas as frequências.....   | 80 |
| Figura 4.38: $Z_{11}^B$ da Formulação 4 obtida apenas com as frequências escolhidas.....   | 80 |
| Figura 4.39: $Z_{11}^B$ da Formulação 5 obtida com todas as frequências.....   | 80 |
| Figura 4.40: $Z_{11}^B$ da Formulação 5 obtida apenas com as frequências escolhidas.....   | 80 |
| Figura 4.41: FRF $H_{11}^B$ da Formulação 2; linha a azul: com todos as frequências; linha a vermelho com as frequências escolhidas..... | 81 |
| Figura 4.42: Correlação LAC média da Formulação 2.....   | 81 |
| Figura 4.43: FRF $H_{11}^B$ da Formulação 4; linha a azul: com todos as frequências; linha a vermelho com as frequências escolhidas..... | 81 |
| Figura 4.44: Correlação LAC média da Formulação 4.....   | 81 |
| Figura 4.45: FRF $H_{11}^B$ da Formulação 5; linha a azul: com todos as frequências; linha a vermelho com as frequências escolhidas..... | 82 |
| Figura 4.46: Correlação LAC média da Formulação 5.....   | 82 |
| Figura 4.47: Estrutura com mais coordenadas fora da junta.....   | 83 |
| Figura 4.48: Média da correlação GSC.....  | 83 |
| Figura 4.49: FRF $H_{11}^B$ da Formulação 1.....   | 84 |

|  |     |
|--|-----|
| Figura 4.50: $r_1(\omega)$ com $R_1(\omega)$ da Formulação 1 .....   | 84  |
| Figura 4.51: $Z_{11}^B$ obtida com todas as frequências para a Formulação R1 .....   | 91  |
| Figura 4.52: $Z_{11}^B$ obtida com todas as frequências para a Formulação R2 .....   | 91  |
| Figura 4.53: $Z_{11}^B$ obtida com todas as frequências para a Formulação R3 .....   | 91  |
| Figura 4.54: $Z_{11}^B$ obtida com todas as frequências para a Formulação R4 .....   | 91  |
| Figura 4.55: $r_4(\omega)$ com $R_4(\omega)$ da Formulação R4.....   | 92  |
| Figura 4.56: $Z_{11}^B$ obtida com todas as frequências para a Formulação R4 .....   | 92  |
| Figura 4.57: $Z_{11}^B$ obtida apenas com as frequências escolhidas para a Formulação R4 ...   | 92  |
| Figura 4.58: $Z_{12}^B$ obtida apenas com as frequências escolhidas para a Formulação R4 ....  | 92  |
| Figura 4.59: FRF $H_{11}^B$ da Formulação R4; a linha a azul: com todos as frequências; a linha a vermelho com as frequências escolhidas ..... | 93  |
| Figura 4.60: Correlação LAC média da Formulação R4 .....   | 93  |
| Figura 4.61: $Z_{11}^B$ da Formulação G1 .....   | 99  |
| Figura 4.62: $Z_{11}^B$ da Formulação G2 .....   | 99  |
| Figura 4.63: $Z_{11}^B$ da Formulação G3 .....   | 100 |
| Figura 4.64: $Z_{11}^B$ da Formulação G4 .....   | 100 |
| Figura 4.65: $r_4(\omega)$ com $R_4(\omega)$ da Formulação G4.....   | 100 |
| Figura 4.66: $Z_{11}^B$ obtida com todas as frequências da Formulação G4 .....   | 100 |
| Figura 4.67: $Z_{11}^B$ obtida apenas com as frequências escolhidas para a Formulação G4 ..  | 101 |
| Figura 4.68: $Z_{12}^B$ obtida apenas com as frequências escolhidas para a Formulação G4 ..  | 101 |
| Figura 4.69: FRF $H_{11}^B$ da Formulação G4; a linha a azul: com todos as frequências; a linha a vermelho com as frequências escolhidas ..... | 101 |
| Figura 4.70: Correlação LAC média da Formulação G4 .....   | 101 |
| Figura 5.1: Acoplamento das subestruturas A e B formando a estrutura C .....   | 104 |
| Figura 5.2: Caso 1 .....   | 109 |
| Figura 5.3: Caso 2 .....   | 109 |
| Figura 5.4: Caso 3 .....   | 109 |
| Figura 5.5: Caso 4 .....   | 109 |
| Figura 5.6: LAC médio - Caso 1.....  | 110 |

|  |     |
|--|-----|
| Figura 5.7: LAC médio - Caso 2.....  | 110 |
| Figura 5.8: LAC médio - Caso 3.....  | 111 |
| Figura 5.9: LAC médio - Caso 4.....  | 111 |
| Figura 5.10: FRF $H_{24}^C$ - Caso 1.....  | 111 |
| Figura 5.11: FRF $H_{36}^C$ - Caso 1.....  | 111 |
| Figura 5.12: FRF $H_{88}^C$ - Caso 1.....  | 112 |
| Figura 5.13: FRF $H_{99}^C$ - Caso 1.....  | 112 |
| Figura 5.14: Sistema com a massa B adicionada.....                                       | 113 |
| Figura 5.15: Viga V10 com a representação das FRF realizadas.....                        | 115 |
| Figura 5.16: FRF $H_{X11}$ com o acelerómetro e FRF $H_{X11}$ com a massa cancelada..... | 116 |
| Figura 5.17: FRF $H_{X13}$ com o acelerómetro e FRF $H_{X13}$ com a massa cancelada..... | 116 |
| Figura 5.18: FRF $H_{X15}$ com o acelerómetro e FRF $H_{X15}$ com a massa cancelada..... | 116 |
| Figura 5.19: FRF $H_{X17}$ com o acelerómetro e FRF $H_{X17}$ com a massa cancelada..... | 116 |
| Figura 5.20: Acelerância medida vs. FRF filtradas.....                                   | 121 |
| Figura 5.21: Primeiro pormenor da acelerância.....                                       | 121 |
| Figura 5.22: Segundo pormenor da acelerância.....  | 122 |
| Figura 5.23: Distribuição normalizada dos valores singulares.....                        | 122 |
| Figura 5.24: Estruturas utilizadas.....  | 123 |
| Figura 5.25: FRF dos vários apertos do conjunto 0104.....                                | 124 |
| Figura 5.26: FRF dos vários apertos do conjunto 0205.....                                | 124 |
| Figura 5.27: FRF dos vários apertos do conjunto 0306.....                                | 124 |
| Figura 5.28: Características geométricas do acoplamento ensaiado.....                    | 125 |
| Figura 5.29: Tipo de viga ensaiada.....  | 126 |
| Figura 5.30: FRF $H_{11}^B$ da estrutura B1008.....                                      | 127 |
| Figura 5.31: FRF $H_{12}^B$ da estrutura B1008.....                                      | 127 |
| Figura 5.32: FRF $H_{1,1}^C$ medida vs. FRF $H_{1,1}^C$ do acoplamento 1008.....         | 128 |
| Figura 5.33: FRF $H_{1,3}^C$ medida vs. FRF $H_{1,3}^C$ do acoplamento 1008.....         | 128 |
| Figura 5.34: FRF $H_{1,11}^C$ medida vs. FRF $H_{1,11}^C$ do acoplamento 1008.....       | 128 |
| Figura 5.35: LAC médio do acoplamento 1008 - B1008.....                                  | 128 |

|   |     |
|---|-----|
| Figura 5.36: FRF $H_{1,1}^C$ da estrutura 1012 vs. FRF $H_{1,1}^C$ estrutura 1012 - B1008 .....         | 129 |
| Figura 5.37: FRF $H_{1,3}^C$ da estrutura 1012 vs. FRF $H_{1,3}^C$ estrutura 1012 - B1008.....          | 129 |
| Figura 5.38: FRF $H_{1,11}^C$ da estrutura 1012 vs. FRF $H_{1,11}^C$ estrutura 1012 - B1008.....        | 129 |
| Figura 5.39: LAC médio do acoplamento 1012 - B1008.....   | 129 |
| Figura 5.40: FRF $H_{1,1}^C$ da estrutura 1008 vs. FRF $H_{1,1}^C$ estrutura 1008 - B1012 .....         | 130 |
| Figura 5.41: LAC médio do acoplamento 1008 - B1012.....   | 130 |
| Figura 5.42: FRF $H_{1,1}^B$ de B1008 vs. FRF $H_{1,1}^C$ de B1012 .....                                | 130 |
| Figura 5.43: LAC médio entre B1008 e B1012.....   | 130 |
| Figura 5.44: Características geométricas do acoplamento ensaiado com as coordenadas internas em B ..... | 131 |
| Figura 5.45: FRF $H_{18}^C$ das duas estruturas.....  | 132 |
| Figura 5.46: FRF $H_{77}^C$ das duas estruturas.....  | 132 |
| Figura 5.47: FRF $H_{78}^C$ das duas estruturas.....  | 132 |
| Figura 5.48: FRF $H_{88}^C$ das duas estruturas.....  | 132 |
| Figura 5.49: FRF $H_{11}^B$ da estrutura B1008r .....   | 133 |
| Figura 5.50: FRF $H_{12}^B$ da estrutura B1008r .....   | 133 |
| Figura 5.51: FRF $H_{1,1}^C$ medida vs. FRF $H_{1,1}^C$ do acoplamento 1008r.....                       | 133 |
| Figura 5.52: LAC médio do acoplamento 1008r – B1008r.....   | 133 |
| Figura 5.53: FRF $H_{1,1}^C$ da estrutura 1012 vs. FRF $H_{1,1}^C$ estrutura 1012 - B1008r .....        | 134 |
| Figura 5.54: LAC médio do acoplamento 1012 - B1008r.....  | 134 |
| Figura 5.55: FRF $H_{1,1}^C$ da estrutura 1008 vs. FRF $H_{1,1}^C$ estrutura 1008 - B1012r .....        | 135 |
| Figura 5.56: LAC médio do acoplamento 1008 - B1012r.....  | 135 |
| Figura 5.57: FRF $H_{1,1}^B$ de B1008r vs. FRF $H_{1,1}^B$ de B1012r .....                              | 135 |
| Figura 5.58: LAC médio entre B1008r e B1012r.....   | 135 |

# Lista de tabelas

|  |     |
|--|-----|
| Tabela 3.1: Dados geométricos do acoplamento em milímetros.....  | 28  |
| Tabela 3.2: Elementos finitos seleccionados .....                | 29  |
| Tabela 3.3: Ligações dos 13 modelos.....                         | 33  |
| Tabela 4.1: Características das vigas do exemplo numérico 1..... | 56  |
| Tabela 4.2: Características das vigas do exemplo numérico 2..... | 62  |
| Tabela 4.3: Características das vigas do exemplo numérico 3..... | 75  |
| Tabela 5.1: Dados geométricos dos acoplamentos.....              | 123 |
| Tabela 5.2: Sobreposição.....                                    | 123 |
| Tabela 5.3: Dados geométricos das três vigas em milímetros.....  | 126 |

# Abreviaturas

|         |   |
|---------|---|
| ANSYS®  | Código comercial de MEF desenvolvido pela empresa ANSYS, Inc.                       |
| COMAC   | <i>Co-ordinate Modal Assurance Criterion</i>  |
| dB      | Decibel   |
| FDAC    | <i>Frequency Domain Assurance Criterion</i>   |
| FRAC    | <i>Frequency Response Assurance Criterion</i>                                       |
| FRF     | Função de Resposta em Frequência  |
| GAC     | <i>Global Amplitude Criterion</i>   |
| GL      | Grau de Liberdade   |
| GSC     | <i>Global Shape Criterion</i>   |
| LAC     | <i>Local Amplitude Criterion</i>  |
| MAC     | <i>Modal Assurance Criterion</i>  |
| MATLAB® | Código comercial de cálculo matricial desenvolvido pela empresa The MathWorks, Inc. |
| MEF     | Método dos Elementos Finitos  |
| RFM     | <i>Response Function Methods</i>  |
| SVD     | <i>Singular Value Decomposition</i>   |

# Lista de símbolos

|   |   |
|---|---|
| $A(\omega)$                               | Matriz de aceleração  |
| $A(\omega)_{p \times 4q}$                 | Matriz do sistema de equações do algoritmo de Ren   |
| $\bar{A}_R(\omega)_{f \cdot p \times 2q}$ | Parte real do sistema de equações do algoritmo não particionado   |
| ${}_r A_{pq}$                             | Constante complexa associada ao modo $r$ e às coordenadas $p$ e $q$ .   |
| $\bar{b}_R(\omega)_{f \cdot p}$           | Vector $b$ do sistema de equações do algoritmo não particionado   |
| $B$                                       | Matriz de derivadas da matriz da função de forma do elemento  |
| $C$                                       | Matriz de amortecimento viscoso   |
| $D$                                       | Matriz de amortecimento hysterético   |
| $E$                                       | Módulo de elasticidade  |
| $E$                                       | Matriz de elasticidade  |
| $E_{pq}$                                  | Sistema de equações lineares  |
| $f(t)$                                    | Vector de forças  |
| $\bar{F}$                                 | Amplitude complexas da força  |
| $F^e$                                     | Vector de forças nodal  |
| $\bar{F}^e$                               | Vector de forças nodal em coordenadas globais   |
| $f^e$                                     | Vector de forças aplicadas ao elemento  |
| $F_j^A$                                   | Vector de forças nas coordenadas $j$ da subestrutura A  |
| $G$                                       | Matriz de iteração  |
| $H(\omega)$                               | Matriz de receptância   |
| $H_{pq}(\omega)$                          | FRF da estrutura que relaciona a resposta na coordenada $p$ com a excitação na coordenada $q$ .                                       |
| $\tilde{H}_{pq}(\omega_k)$                | FRF perturbada da estrutura que relaciona a resposta na coordenada $p$ com a excitação na coordenada $q$ para a frequência $\omega_k$ |
| $H_A(\omega)$                             | FRF calculada por um modelo numérico  |
| $H_X(\omega)$                             | FRF determinada por técnicas experimentais  |

|                       |   |
|-----------------------|---|
| $\{H_X(\omega_X)\}_j$ | Coluna $j$ da matriz $H_X(\omega)$ à frequência $\omega_X$              |
| $\{H_X(\omega)\}_j$   | Coluna $j$ da matriz $H_X(\omega)$ à frequência $\omega$                |
| $\{H_{Xij}(\omega)\}$ | FRF na coordenada $i$ com a excitação na coordenada $j$                 |
| $H_{Xij}(\omega)$     | Termo $i$ e $j$ da matriz $H_X(\omega)$ à frequência $\omega$           |
| $H^A$                 | Matriz de receptância da subestrutura A                                 |
| $H_{ii}^A$            | Submatriz de receptância da subestrutura A entre a coordenada $i$ e $i$ |
| $H_{ij}^A$            | Submatriz de receptância da subestrutura A entre a coordenada $i$ e $j$ |
| $H_{jj}^A$            | Submatriz de receptância da subestrutura A entre a coordenada $j$ e $j$ |
| $H^B$                 | Matriz de receptância da subestrutura B                                 |
| $H^C$                 | Matriz de receptância da estrutura C                                    |
| $K$                   | Matriz de rigidez   |
| $K^e$                 | Matriz de rigidez do elemento   |
| $\bar{K}^e$           | Matriz de rigidez do elemento em coordenadas globais                    |
| $L$                   | Matriz de transformação de coordenadas                                  |
| $M$                   | Matriz de massa   |
| $M^e$                 | Matriz de massa do elemento   |
| $\bar{M}^e$           | Matriz de massa do elemento em coordenadas globais                      |
| $N$                   | Matriz da função de forma do elemento                                   |
| $p$                   | Coordenadas principais  |
| $Q_i$                 | Matriz sujeita a inversão da formulação $i$                             |
| $R_{pq}(\omega)$      | Residual complexo   |
| $r_i(\omega)$         | Função logarítmica da condição de cada matriz $Q_i$                     |
| $R_i(\omega)$         | Função de regressão da função $r_i(\omega)$                             |
| $T^e$                 | Energia cinética do elemento  |
| $\bar{T}^e$           | Energia cinética do elemento em coordenadas globais                     |

|                                    |  |
|------------------------------------|--|
| $T$                                | Energia cinética do sistema  |
| $\mathbf{T}(\omega)_{q \times 4q}$ | Matriz de transformação para tornar o vector de incógnitas independentes da frequência |
| $t_1$ e $t_2$                      | Instantes de integração  |
| $\mathbf{u}(x, y, z, t)$           | Vector de deslocamento no interior do elemento   |
| $\mathbf{u}^e$                     | Vector de deslocamento nodal do elemento   |
| $\bar{\mathbf{u}}^e$               | Vector de deslocamento nodal do elemento no sistema global                             |
| $V$                                | Energia potencial do sistema   |
| $V^e$                              | Energia potencial do elemento  |
| $\bar{V}^e$                        | Energia potencial do elemento em coordenadas globais                                   |
| $W_{nc}$                           | Trabalho virtual das forças não conservativas do sistema                               |
| $W_{nc}^e$                         | Trabalho virtual das forças não conservativas do elemento                              |
| $\bar{W}_{nc}^e$                   | Trabalho virtual das forças não conservativas do elemento em coordenadas globais       |
| $\mathbf{x}(t)$                    | Vector de deslocamento   |
| $\omega_r$                         | Frequência natural do modo $r$   |
| $\mathbf{x}_j^A$                   | Vector de deslocamentos nas coordenadas $j$ da subestrutura A                          |
| $\bar{\mathbf{X}}$                 | Amplitude complexa da resposta   |
| $\mathbf{X}^{(k)}$                 | Matriz de incógnitas da iteração $k$   |
| $\mathbf{y}$                       | Vector do sinal acústico   |
| $\mathbf{Y}(\omega)$               | Matriz de mobilidade   |
| $\mathbf{z}_q$                     | Vector de incógnitas   |
| $\mathbf{Z}(\omega)$               | Matriz de rigidez dinâmica   |
| $\mathbf{Z}_{jj}^B(\omega)^{(k)}$  | Matriz de rigidez dinâmica da subestrutura B da iteração $k$                           |
| $\mathbf{Z}^A$                     | Matriz de rigidez dinâmica da subestrutura A   |
| $\mathbf{Z}^B$                     | Matriz de rigidez dinâmica da subestrutura B   |
| $\mathbf{Z}^C$                     | Matriz de rigidez dinâmica da estrutura C  |

|                                 |  |
|---------------------------------|--|
| $\alpha, \beta, \mu$ e $\theta$ | Constantes de proporcionalidade  |
| $\gamma$                        | Nível de ruído em percentagem  |
| $\delta'$                       | Erro de controlo do processo iterativo                                 |
| $\varepsilon$                   | Vector de deformação   |
| $\zeta$                         | Parâmetro de controlo da derivada da função de regressão $R_i(\omega)$ |
| $\eta_r$                        | Factor de amortecimento histórico associado a frequência natural $r$   |
| $\lambda_r$                     | Quadrado da frequência natural $r$                                     |
| $\Lambda$                       | Matriz diagonal dos quadrados das frequências naturais                 |
| $\nu$                           | Parâmetro de peso que caracteriza a função de regressão                |
| $\xi_r$                         | Factor de amortecimento viscoso associado a frequência natural $r$     |
| $\rho$                          | Massa específica   |
| $\sum_e$                        | Somatório que entra em conta com a conectividade dos elementos         |
| $\sigma$                        | Vector de tensão   |
| $\tau$                          | Factor de ampliação do logaritmo da condição                           |
| $\nu$                           | Coefficiente de Poisson  |
| $\Phi$                          | Matriz modal normalizada pela matriz de massa                          |
| $\Phi_r^q$                      | Termo $q$ do vector modal $r$  |
| $\{\Psi_A\}_i$                  | Vector modal do modo $i$ do modelo numérico                            |
| $\{\Psi_X\}_j$                  | Vector modal do modo $j$ medido experimentalmente                      |

## Operadores

|                 |                                      |
|-----------------|--------------------------------------|
| $\delta$        | Operador varacional                  |
| $\partial$      | Operador diferencial                 |
| $  $            | Modulo                               |
| $   \cdot   _F$ | Norma matricial de <i>Frobenius</i>  |
| $( )^+$         | Matriz pseudo-inversa                |
| $( )^{-1}$      | Matriz inversa                       |
| $( )^T$         | Matriz transporta                    |
| $( )^H$         | Matriz complexa conjugada transposta |
| $( )^*$         | Complexo conjugado                   |
| $\max( )$       | Máximo do vector                     |

# **1** Introdução

## **1.1 Generalidades**

A concepção de sistemas estruturais envolve elementos que são ligados, na maior parte das vezes, através de parafusos ou rebites. As juntas aparafusadas oferecem uma vantagem significativa sobre as juntas rebitadas, já que os componentes unidos podem ser montados e desmontados facilmente. A magnitude da força de aperto também pode ser mais cuidadosamente regulada no conjunto aparafusado. As juntas são utilizadas para transferir esforços de um elemento estrutural para o outro.

Em estruturas compostas, existem dois tipos de articulações normalmente usadas, juntas mecânicas e os adesivos colados. A concepção dos adesivos depende do tamanho das peças a serem juntados e da quantidade de sobreposição necessária para transportar a carga. Os adesivos são frequentemente aceitáveis para estruturas secundárias, mas são geralmente evitados em estruturas primárias tendo em conta os esforços envolvidos. As juntas aparafusadas ainda são o principal mecanismo utilizado, quando existam esforços estruturais primários entre peças compostas complexas. O comportamento dos elementos ligados influencia de forma importante a dinâmica global de uma estrutura, afectando as frequências naturais e os modos de vibração, podendo provocar uma resposta não linear a solicitações exteriores. A junta representa uma descontinuidade na estrutura e uma concentração de tensões que muitas vezes provoca o início da ruína da estrutura. Os esforços gerados nas zonas de contacto podem ser devidos a forças estáticas, atrito, amortecimento, níveis de vibrações, etc. Há então a necessidade de desenvolver metodologias para a construção de modelos preditivos estruturais com articulações e interfaces.

Com o advento da informática nos anos 1960 surgiram trabalhos na indústria aeroespacial que ao mesmo tempo que os modelos dinâmicos se tornavam mais complexos também o modelo de utilização das Funções de Resposta em Frequência (FRF) era mais utilizado. Com a revolução informática e electrónica este método tem

sido importante para auxiliar todos os modelos dinâmicos que são simulados em suportes informáticos.

No projecto mecânico actual estas análises são baseadas no método dos elementos finitos (*MEF*) e análises dinâmicas de multicorpos com códigos informáticos. Os principais objectivos destes códigos são os de estimar as frequências naturais e os modos de vibração do sistema e as próprias respostas. No entanto, estes códigos não abordam a dispersão ou incerteza estrutural das ligações aparafusadas; para além disso, a geometria do sistema e as características não lineares do material irão resultar em dificuldades na previsão da resposta face a uma solicitação externa conhecida. A escolha de um número limitado de pontos de avaliação da resposta pode resultar numa avaliação excessivamente conservadora do sistema sem abordar o aspecto crucial dos parâmetros de incerteza. Existem numerosos tipos de problemas mecânicos que influenciam a dispersão dos parâmetros estruturais; as condições iniciais e de fronteira ditam o tipo de abordagem. Recentemente, a teoria de conjuntos fuzzy tem sido combinada com algoritmos de elementos finitos para analisar os sistemas estruturais com parâmetros incertos. Além disso, nalguns sistemas, os parâmetros são muito sensíveis a pequenas variações, provocando uma mudança significativa no comportamento dinâmica da estrutura.

Todo este esforço, na tentativa de conseguir modelar o mais correctamente possível uma determinada estrutura complexa, justifica o estudo mais aprofundado de identificação do comportamento de elementos estruturais de ligação simples para posterior inserção em conjuntos estruturais mais complexos. Isto levou ao surgimento de um conjunto de métodos de identificação dinâmica.

Os engenheiros são constantemente desafiados a resolver os tipos de problemas apresentados. Se não forem bem resolvidos levam por vezes os mecanismos a terem elevados níveis de vibração e ruído, o que reduz a expectativa de vida dos componentes e a eficiência das máquinas. Essa exigência de resolução surge normalmente a partir de aspectos económicos e ambientais relevantes mas pode também ser imposto pelos órgãos de governo para garantir padrões de segurança.

As empresas de engenharia actuais devem ser suficientemente flexíveis para adoptar e incorporar novas tecnologias e assim serem inovadoras para se manterem

competitivas no mercado cada vez mais agressivo. O tempo do ciclo de projecto neste sentido é cada vez mais reduzido.

## 1.2 Objectivos

Reconhecidos os problemas inerentes a juntas aparafusadas são assim traçadas algumas metas. Os objectivos gerais são os de estudar, desenvolver, aplicar e discutir técnicas específicas de identificação das propriedades das juntas aparafusadas entre componentes estruturais. Existem grandes problemas de modelação teórica, que se pretende fiável para reproduzir correctamente o comportamento de estruturas ligadas através de componentes normalmente bastante complexos, quer geometricamente quer no que diz respeito ao seu comportamento dinâmico. A via experimental é uma alternativa, que no entanto precisa de todo um desenvolvimento, adaptação, implementação prática e compatibilização com os modelos teóricos, que está ainda muito por fazer. Os problemas que aí surgem prendem-se com vários factores, como sejam:

- Dificuldades de acessibilidade nos ensaios;
- Problemas numéricos associados com a identificação das propriedades dinâmicas e com a compatibilização entre os modelos experimental e teórico, de grandeza completamente diferente – levando à resolução de problemas envolvendo matrizes mal condicionadas;
- Desenvolvimento de programas de cálculo numérico matematicamente robusto e suficientemente abrangentes das várias situações possíveis na prática;
- Validação dos resultados previstos numericamente com os efectivamente encontrados por via experimental;
- Realização prática de ensaios em laboratório e em estruturas reais; etc.

A temática do presente estudo constitui uma das áreas prioritárias de investigação a nível internacional, sem dúvida da maior importância a nível industrial. Pode apresentar-se o seguinte exemplo: Numa dada actividade industrial existem determinadas estruturas sujeitas a solicitações dinâmicas, às quais é normal acoplarem-se subestruturas através de alguns tipos de juntas. Desconhecendo-se de forma adequada as características e o comportamento dinâmico destas, muito difícil (se não

impossível) será prever-se o comportamento da estrutura global. A solução poderá então ser a de se utilizarem técnicas de acoplamento e desacoplamento a fim de, a partir de resultados experimentais, se determinarem as propriedades das juntas. A partir daí, e para os tipos de juntas estudados, poderá de futuro prever-se o comportamento da estrutura ligada, através de acoplamento puramente teórico. As questões serão: em quantos e em quais pontos realizar os ensaios? Que gamas de frequência se deverão escolher? Como conseguir resultados experimentais representativos em pontos onde se não tem acesso? Como superar os problemas numéricos subsequentes, compatibilizar os resultados teóricos e experimentais e validar estes? A questão essencial não é a escolha da filosofia de como atacar o problema, pois em termos genéricos ela é conhecida. O fundamental é como ultrapassar as muitas dificuldades que na prática surgem e que exigem processos próprios. São estes processos e procedimentos, aliados à concretização prática em estruturas reais que se pretendem desenvolver e implementar.

Neste trabalho estarão envolvidas várias áreas de investigação:

- (i) Técnicas de Análise Experimental, devido às medições experimentais;
- (ii) Análise Modal para o respectivo tratamento em termos de identificação das propriedades dinâmicas;
- (iii) Métodos Numéricos, implementação de programas de cálculo;
- (iv) Técnicas de Acoplamento e Desacoplamento.

Todas estas matérias são de extrema importância e actualidade no contexto do projecto em Engenharia Mecânica. As duas abordagens que serão utilizadas na identificação das propriedades dinâmicas do elemento em estudo são:

- Métodos directos utilizando um modelo numérico que se ajuste melhor aos resultados experimentais.
- Técnicas de desacoplamento de estruturas.

## 1.3 Estrutura da tese

A presente dissertação está organizada em seis capítulos. No presente capítulo apresenta-se o problema em estudo, dando importância à questão para a engenharia em geral e em particular para o estudo dinâmico de estruturas.

No segundo capítulo é feita uma avaliação do estado do conhecimento sobre o problema em questão, dando relevância às áreas mais importantes que contribuem para a realização deste trabalho, onde são citados e descritos vários trabalhos importantes realizados por outros autores nas respectivas áreas.

No terceiro capítulo apresentam-se vários modelos numéricos para representar um caso específico de uma junta aparafusada. É feita a avaliação do melhor modelo fazendo uma comparação directa com as respostas dinâmicas obtidas experimentalmente. Esta comparação é quantificada por uma técnica de correlação de funções de resposta em frequência entre os dados experimentais e os dados obtidos numericamente por um programa comercial.

No quarto capítulo procura-se generalizar a identificação de juntas. Após apresentar a técnica clássica de acoplamento de subestruturas é desenvolvido uma técnica alternativa mais simples. A partir desta são também desenvolvidas várias técnicas novas de desacoplamento que são comparadas com as existentes através de vários exemplos numéricos simples.

No quinto capítulo as técnicas desenvolvidas são aplicadas a um caso experimental. Para contornar alguns problemas inerentes ao processo de aquisição das respostas dinâmicas em estruturas são apresentadas algumas metodologias para tentar superar esses problemas e discutidos os resultados obtidos.

No sexto capítulo apresentam-se as novas contribuições, resumem-se as conclusões e apresentam-se recomendações para trabalhos futuros.

Nos anexos A e B são apresentadas algumas ferramentas matemáticas, no anexo C são desenvolvidas as expressões analíticas das acelerações de vigas livre-livre e no anexo D é feita uma apresentação breve do equipamento experimental utilizado.

Todo o tratamento numérico foi realizado no programa MatLab® [1].

## **2** Estado da arte

### **2.1 Introdução**

A necessidade de projectar e calcular de uma forma cada vez mais precisa e fiável tornou o tão popular método dos elementos finitos numa ferramenta indispensável a qualquer projectista (secção 2.2). No entanto, esta técnica depara-se ainda com grandes dificuldades, nomeadamente no campo da dinâmica estrutural e, em particular, na modelação de juntas. Por estes motivos se justifica o esforço que tem sido feito neste domínio nos últimos anos. A percepção de que a modelação correcta das juntas não pode ser ignorada é hoje em dia um facto assumido e exemplos simples podem demonstrar as enormes diferenças que se podem obter nos resultados quando as juntas não são consideradas ou mal caracterizadas.

Para atingir estas metas referidas é necessário não só a implementação de várias técnicas que têm vindo a ser desenvolvidas nos últimos anos, como também o desenvolvimento de novos algoritmos e técnicas analíticas, numéricas e experimentais.

As técnicas de identificação de parâmetros da junta podem ser entendidas como uma forma de minimizar as diferenças entre as respostas dinâmicas de um modelo numérico com as obtidas através de ensaios experimentais, Ibrahim and Pettit [2].

Os processos de caracterização dinâmica de juntas podem ser, de uma forma genérica, englobados em duas grandes categorias: os que usam informação das propriedades modais e os que usam informação em termos de funções de resposta em frequência (FRF).

Na primeira categoria destacam-se os trabalhos de Yuan e Wu [3], que abordam a problemática da identificação das propriedades dinâmicas de juntas, conjugando resultados experimentais com técnicas de elementos finitos; levantam problemas decorrentes do conhecimento incompleto dos parâmetros modais e da necessidade de condensar as matrizes obtidas a partir dos elementos finitos.

Wang e Sas [4] usam as frequências naturais e os modos naturais experimentais para identificarem as propriedades de juntas, mas o método é baseado numa distribuição conhecida da massa e amortecimento proporcional das juntas, o que lhe reduz a generalidade, para além do facto de apenas se aplicar a uma única junta.

Huckelbridge e Lawrence [5] usam um método baseado no inverso da sensibilidade dos valores próprios para a identificação das características da interface. A restrição está na não consideração dos efeitos dos modos de frequência mais elevada que são desprezados, para além de não entrarem em linha de conta com a massa da junta.

A tendência, tem sido a de utilizar directamente a informação experimental em termos de FRF. Esta técnica revela-se bastante versátil, embora possa ser computacionalmente pesada, pois exige o cálculo da resposta para cada frequência, no entanto, actualmente este problema já não se põe para estruturas com um número de graus de liberdade relativamente grande.

A aquisição de dados experimentais é na maioria das situações um processo delicado e rigoroso. Os esforços que são utilizados para realizar essas aquisições nas mais perfeitas condições nunca são suficientes para eliminar qualquer contaminação nos dados adquiridos.

Para além de uma avaliação numérica existem outras abordagens a este problema. Podemos encará-la como um problema de desacoplamento, existindo alguns trabalhos neste campo (secção 2.5).

O contacto entre os dois corpos da ligação resulta num comportamento não linear de difícil tratamento. Esta abordagem e a respectiva validação de modelos teóricos do problema de contacto entre os dois corpos que estão unidos pela ligação aparafusada não é objecto de estudo deste trabalho, pois carece de equipamento experimental muito específico como é abordado por alguns autores: Gaul *et al.* [6] [7] [8], Song *et al.* [9], Hurlbaeus e Gaul [10], Mayer e Gaul [11], Hanss *et al.* [12] e Khodadadberomy *et al.* [13].

A identificação de juntas, também pode ser abordada utilizando técnicas de *updating*. Estas técnicas pressupõem parametrizar algumas características físicas do modelo numérico e resolver um problema de mínimos quadrados inseridos num

algoritmo de otimização com a finalidade de determinar os parâmetros definidos no modelo numérico.

Mottershead e Friswell [14] sugerem um método que envolve as matrizes de rigidez e de massa da estrutura. Este procedimento nem sempre reproduz resultados visto que os algoritmos criados pelo método têm dificuldade em convergir. No sentido de resolver esta questão é aplicado ao algoritmo matrizes de peso criadas de tal forma que o método convirja. Existem algumas formas de gerar matrizes de peso coerentes, entre outros, Mottershead *et al.* [15] e Link [16] realizaram trabalho nesse sentido.

Estes métodos também podem ser baseados em FRF e designados por *Response Function Method* (RFM) como foi sugerido por Kwon and Rongming [17]. Este método tem sido bastante utilizado ultimamente pois utiliza FRF, com que é mais fácil trabalhar. Arora *et al.* [18] [19] utilizam o método para determinar o amortecimento da estrutura.

Neste estudo houve algum trabalho exploratório de utilização do RFM, no entanto não se aprofundou alguns resultados obtidos numericamente.

## 2.2 Elementos Finitos

Nas últimas décadas, o método de elementos finitos sofreu um grande desenvolvimento e ampla utilização como uma poderosa ferramenta numérica associada ao elevado desenvolvimento dos computadores. Dos simples problemas tensão - extensão do método de elementos finitos podemos actualmente estudar problemas de contacto com análises complexas não lineares utilizando algoritmos de cálculo especialmente concebidos, incluídos em *software* comercial de elementos finitos. Actualmente tem-se verificado um aumento do volume de trabalho no desenvolvimento de elementos finitos de contacto para as mais variadas situações.

Os fundamentos da modelação por elementos finitos para a concepção dinâmica estrutural têm sido descritos e abordados nos aspectos práticos da modelação e de particular relevância para uma classe de estruturas encontrada em turbinas e outras máquinas. À primeira vista, o número e a complexidade das tarefas envolvidas na obtenção precisa e robusta do modelo de elementos finitos podem parecer esmagadores. No entanto, a maioria das tarefas revela-se ao utilizador com um elevado estado de automação. Infelizmente, com a excepção da malha disponível comercialmente – geradores de malha - a automatização permanece protegida pois é uma vantagem competitiva no contexto da sociedade actual.

A ampla apresentação de métodos aproximados de modelação não é de forma alguma destinada a contrariar o surgimento do conceito de um super-modelo, prevê-se que em breve este substituirá algum componente específico no projecto mecânico. Na rápida evolução e na falta de detalhes do desenho disponíveis durante a fase preliminar do projecto, somos forçados a utilizar modelos aproximados. Deste modo, as técnicas de modelação são desenvolvidas para ajudar na obtenção de uma melhor concepção dos modelos.

A utilização desta ferramenta para a modelação de juntas tem estado actualmente mais dedicada ao estudo e desenvolvimento de modelos numéricos que descrevam a interacção entre os corpos que constituem as juntas. Estas zonas são caracterizadas por vários tipos de contacto.

A escolha do tipo de elemento a utilizar leva, naturalmente, à comparação sistemática dos diferentes tipos de modelo sólido, híbrido, casca e viga.

## 2.3 Ligações aparafusadas

Este tipo de juntas constitui uma das formas mais comuns de ligar estruturas mecânicas. Estas ligações são formadas por dois tipos de elementos, parafuso e porca. Ambos são estruturas roscadas e por isso as superfícies destes elementos estão sujeitas a esforços complexos, não lineares, para além de esforços simples de tracção.

O tipo de rosca, o passo, o comprimento da zona roscada, a pré-tensão existente no parafuso e o atrito entre as superfícies, afectam a distribuição de tensões entre as duas zonas roscadas. Estes esforços conduzem a uma concentração de tensões nas raízes dos filetes da rosca, gerando – juntamente com o problema de contacto – problemas não lineares de difícil resolução analítica. A complexidade deste problema tem sido investigada através de modelos numéricos, usando principalmente o método dos elementos finitos.

Mackerle [20] faz uma análise extensiva do trabalho realizado sobre as várias formas de ligações rígidas. Sobre as ligações aparafusadas identifica, para além do que já foi referido, um conjunto vasto de problemas estruturais associados à ligação, tais como múltiplas ligações, fadiga, relaxação da pretensão, ligações compostas e efeitos térmicos. Também refere a existência de modelos de elementos finitos 2D e 3D desenvolvidos por vários autores para tentar resolver esses problemas.

Kim *et al.* [21] exploram várias formas de modelação de uma junta aparafusada utilizando vários modelos de ligação por elementos finitos entrando em conta com o aperto da ligação aparafusada. Avaliam o efeito da densidade da malha, embora a investigação realizada seja essencialmente estrutural.

Inserido no projecto OSCAR, Jarvis [22] propõe um modelo de junta com amortecimento. Avalia o efeito do amortecimento dessa junta com um modelo energético, retirando alguns resultados em situações muito particulares.

Ma *et al.* [23] compara a resposta dinâmica de estruturas com e sem juntas com o auxílio de um laser na medição da distribuição da velocidade de resposta da estrutura, evitando assim a adição de massas na estrutura.

## 2.4 Análise de vibrações mecânicas

Um sistema dinâmico pode ser uma estrutura, um mecanismo, um componente de máquina, um sistema mecânico, um vibrador, um misturador, uma máquina rotativa, etc. Estes sistemas são vulgarmente caracterizados por um conjunto de elementos estruturais simples, aos quais está associado uma inércia, uma rigidez e por vezes o elemento dissipador de energia, um amortecimento. Estes elementos são definidos no espaço, em relação a um sistema de eixos, pelos designados graus de liberdade do sistema. Este sistema, que pode ser contínuo ou não, está sujeito geralmente a cargas variáveis no tempo,  $f(t)$ , aplicadas nesses graus de liberdade. Por outro lado, podemos caracterizar estes sistemas dinâmicos em três modelos diferentes, Modelo Espacial, Modelo Modal e Modelo de Resposta em Frequência. Como vamos ver mais à frente existem várias relações conhecidas entre estes três modelos (Maia *et al.* [24]):

- Modelo Espacial: Esta caracterização dinâmica é a mais utilizada para problemas simples. Este modelo é construído com o conhecimento da distribuição espacial das matrizes de massa  $M$ , de rigidez  $K$  e de amortecimento viscoso  $C$  (ou de amortecimento histerético  $D$ ). Estas matrizes vão ter a dimensão igual ao número de graus de liberdade  $N$ , que vamos considerar para caracterizar o nosso sistema que em cada instante  $t$  é posicionado pelo vector de deslocamento  $x(t)$ . Do equilíbrio de forças dinâmicas identificadas no sistema podemos escrever a equação (2.1) caso tenhamos amortecimento viscoso.

$$M\ddot{x}(t) + C\dot{x}(t) + Kx(t) = f(t) \quad (2.1)$$

Caso o amortecimento seja histerético temos,

$$M\ddot{x}(t) + iD\dot{x}(t) + Kx(t) = f(t) \quad (2.2)$$

Na maioria das situações estes dois tipos de amortecimento são assumidos como proporcionais, isto é, assume-se que são uma combinação linear da matriz de rigidez  $K$  e da matriz de massa  $M$ ,

$$C = \beta K + \alpha M \quad D = \mu K + \theta M \quad (2.3)$$

Estas constantes vão permitir identificar o factor de amortecimento associado a cada frequência natural para cada um dos casos,

$$\xi_r = \frac{\alpha}{2\omega_r} + \frac{\beta\omega_r}{2} \quad \eta_r = \mu + \frac{\theta}{\omega_r^2} \quad (2.4)$$

- Modelo Modal: O modelo anterior sem amortecimento pode ser descrito por um problema generalizado de valores e vectores próprios,

$$(\mathbf{K} - \lambda^2 \mathbf{M}) \mathbf{X} = \mathbf{0} \quad (2.5)$$

A solução do problema representado pela equação (2.5) conduz a  $N$  valores próprios, são as frequências naturais do sistema e a  $N$  vectores próprios, que representam os modos de vibração. As frequências naturais ao quadrado podem ser agrupadas numa matriz diagonal  $\mathbf{\Lambda} = [\dots \lambda_r^2 \dots]$  e os modos normalizados relativamente à matriz de massa colocados nas colunas de uma matriz  $\mathbf{\Phi}$ . Para sistemas com amortecimento viscoso temos  $\lambda_r^2 = \omega_r^2$  e para sistemas com amortecimento hysterético temos  $\lambda_r^2 = \omega_r^2 (1 + i\eta_r)$ .

São verificadas as propriedades de ortogonalidade (em relação às matrizes de massa e rigidez) da matriz modal  $\mathbf{\Phi}$  para os dois tipos de amortecimentos:

$$\begin{cases} \mathbf{\Phi}^T \mathbf{M} \mathbf{\Phi} = \mathbf{I} \\ \mathbf{\Phi}^T \mathbf{K} \mathbf{\Phi} = \mathbf{\Lambda} \end{cases} \quad \begin{cases} \mathbf{\Phi}^T \mathbf{M} \mathbf{\Phi} = \mathbf{I} \\ \mathbf{\Phi}^T (\mathbf{K} + i\mathbf{D}) \mathbf{\Phi} = \mathbf{\Lambda} \end{cases} \quad (2.6)$$

Pelo facto da matriz modal ser ortogonal significa que é sempre invertível, pois tem as colunas (ou seja, os modos) linearmente independentes. Assim, da equação (2.6) podemos determinar as características espaciais utilizando o conhecimento das características modais,  $\mathbf{\Phi}$  e  $\mathbf{\Lambda}$ .

- Modelo de Resposta em Frequência: Este modelo tem sido bastante utilizado ultimamente, pois permite caracterizar de forma mais fácil estruturas mais complexas.

Na possibilidade de excitarmos a nossa estrutura por uma força harmónica, podemos reescrever a equação (2.2),

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} + i\mathbf{D}) \bar{\mathbf{X}} = \bar{\mathbf{F}} \quad (2.7)$$

Em que  $\bar{\mathbf{X}}$  e  $\bar{\mathbf{F}}$  são as amplitudes complexas da resposta e da força, respectivamente, em regime estacionário.

As matrizes de receptância e de rigidez dinâmica, designadas por  $\mathbf{H}(\omega)$  e  $\mathbf{Z}(\omega)$ , são definidas da seguinte forma:

$$\mathbf{H}(\omega) = (\mathbf{Z}(\omega))^{-1} = (\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} + i\mathbf{D})^{-1} \quad (2.8)$$

Na eventualidade da grandeza medida do sistema ser a velocidade estamos perante a mobilidade,  $\mathbf{Y}(\omega)$ . Em termos experimentais o que geralmente é medido é a aceleração; nesse caso, estamos perante a acelerância,  $\mathbf{A}(\omega)$ . Com o conhecimento de uma delas é fácil determinar as outras utilizando as relações matemáticas de derivação,

$$\mathbf{A}(\omega) = i\omega \mathbf{Y}(\omega) \quad e \quad \mathbf{A}(\omega) = -\omega^2 \mathbf{H}(\omega) \quad (2.9)$$

Estas três formas de caracterizar dinamicamente a estrutura são vulgarmente designadas por Funções de Resposta em Frequência (FRF) e são representadas genericamente por  $\mathbf{H}(\omega)$ .

Da equação (2.6) para amortecimento hysterético podemos escrever,

$$\begin{cases} \Phi^{-T} \Phi^{-1} = \mathbf{M} \\ \Phi^{-T} \Lambda \Phi^{-1} = \mathbf{K} + i\mathbf{D} \end{cases} \quad (2.10)$$

Em consequência, a equação (2.8) pode alternativamente ser dada por,

$$\mathbf{H}(\omega) = \Phi \left[ \begin{matrix} \lambda_r^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_r^2 - \omega^2 \end{matrix} \right]^{-1} \Phi^T \quad (2.11)$$

A equação (2.11) representa outra forma de obter a matriz de receptância e assim estabelece a relação entre o Modelo Modal e o Modelo de Resposta em Frequência. Cada elemento da matriz é então expressa da seguinte forma,

$$H_{pq}(\omega) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{{}_r A_{pq}}{\lambda_r^2 - \omega^2} \quad (2.12)$$

onde  $H_{pq}(\omega)$  representa a FRF que se obtém quando se excita a estrutura por uma força segundo a coordenada  $q$  e se mede a seu deslocamento na coordenada  $p$ .

O elemento  ${}_r A_{pq}$  da equação (2.12) é uma constante complexa associada ao modo  $r$  e às coordenadas  $p$  e  $q$ , que não é mais que o produto de duas componentes dos vectores modais  ${}_r \Phi$ :

$${}_r A_{pq} = {}_r \Phi_p \cdot {}_r \Phi_q \quad (2.13)$$

em que  ${}_r \Phi_p$  é o termo  $p$  do vector modal  $r$  e  ${}_r \Phi_q$  é o termo  $q$  do vector modal  $r$ .

A equação (2.13) permite-nos concluir que a matriz de receptância é simétrica ou seja,

$$H_{pq}(\omega) = H_{qp}(\omega) \quad (2.14)$$

Este facto, bastante útil, apenas se verifica para sistemas lineares.

Da equação (2.12) podemos facilmente perceber que para modelos físicos contínuos nunca poderemos determinar todas as parcelas do somatório. Assim, podemos identificar uma parcela designada por residual  $R_{pq}(\omega)$ , que será pequeno no caso do modelo matemático se aproximar do sistema físico.

Maia [25], explorou várias técnicas de Identificação Modal, técnicas essas que nos permitem determinar as características modais do sistema utilizando a informação dada pelas funções de resposta em frequência.

As relações entre os três modelos podem resumir-se num fluxograma bastante simples. Para sistemas sem amortecimento, a relação entre os modelos está indicada na Figura 2.1.

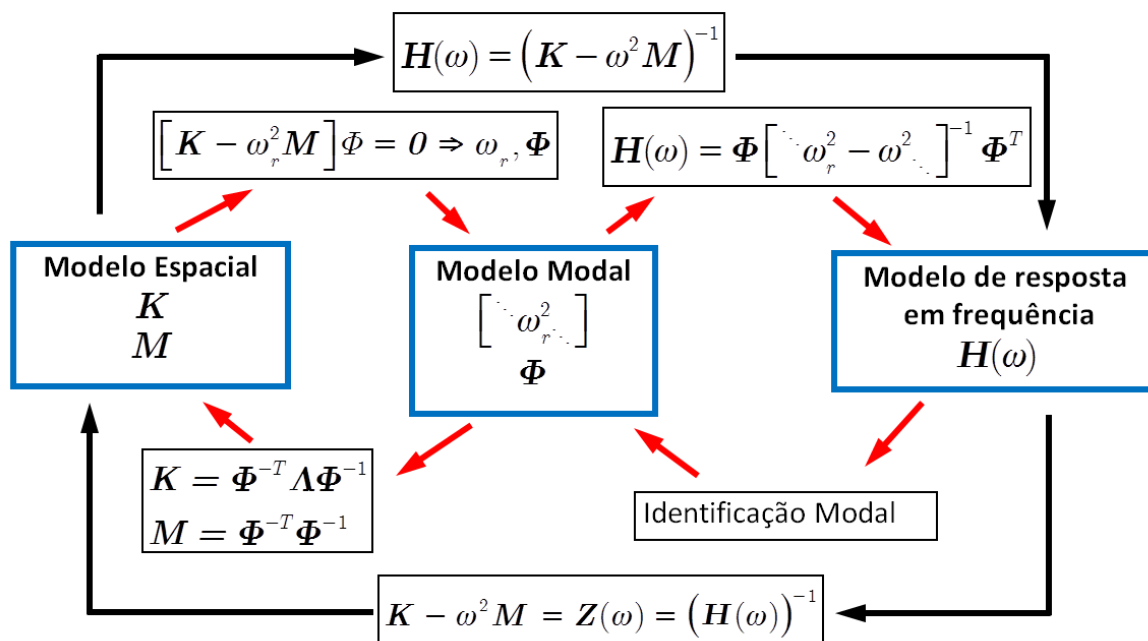


Figura 2.1: Relação entre os três modelos dinâmicos (sem amortecimento)

## 2.5 Acoplamento / desacoplamento

Nas últimas décadas, ao ritmo que a tecnologia de processamento de dados se tornou mais poderosa e acessível, foram surgindo cada vez mais trabalhos na área das vibrações que utilizam FRF. Assim, alguns métodos de tratamento de problemas dinâmicos que foram desenvolvidos em meados do século passado têm sido objecto de estudo. As técnicas de desacoplamento de Bishop [26] e Jetmundsen [27] são um exemplo disso.

Tsai e Chou [28] apresentam um método de identificação para uma ligação aparafusada baseado no método proposto por Bishop [26], com um algoritmo de cálculo diferente. Lee e Hong [29], Wang e Liou [30] e Hong e Lee [31] usam uma combinação de resultados numéricos (elementos finitos) e experimentais (FRF) para a identificação das juntas, mas com os mesmos problemas encontrados por Yuan e Wu [3]. Muitas vezes a necessidade de medição experimental de FRF transferidas pode ser de difícil concretização.

Urgueira [32], nos seus trabalhos, apresenta várias técnicas de acoplamento dinâmico e espacial. O método proposto por Chung [33] baseia-se nas FRF mas é muito sensível ao ruído.

Ren e Beards [34], que desenvolveram um método de identificação da rigidez da junta discutem nesse trabalho os factores que levam às dificuldades na identificação de juntas, nomeadamente quando estas são demasiado flexíveis ou demasiado rígidas.

Ren e Beards [35] e [36] propõem novas técnicas de acoplamento dinâmico, que embora não sejam especificamente aplicáveis a juntas, dão uma contribuição nesse sentido.

Ren e Beards [37] avançam com um novo método iterativo para a identificação de juntas, concluindo que é bastante pesado do ponto de vista computacional e a operacionalidade do processo depende bastante da estimativa inicial.

Ainda Ren e Beards [38] propõem métodos de ponderação dos resultados experimentais em frequência e em localização, por forma a melhorarem os resultados da identificação das propriedades dinâmicas das juntas utilizando o método desenvolvido.

Recentemente o problema do desacoplamento de estruturas voltou a despertar interesse na comunidade científica (D'Ambrogio e Fregolent [39] e Rixen [40]). Na procura da caracterização dinâmica de subestruturas existem vários métodos que combinam os experimentais com os analíticos. Estes podem ser classificados em três grupos diferentes, domínio modal, impedância mecânica e domínio da frequência (Klerk [41]).

No domínio modal, ou seja, métodos que utilizam as características modais temos o método clássico de Craig and Bampton [42] que é vulgarmente conhecido como "Component-Mode Synthesis" ou simplesmente CMS. Entretanto, foi desenvolvido o "Dual Craig-Bampton method", da autoria de Rixen [40] que entra em conta com mais ligações entre as estruturas.

Na impedância mecânica são consideradas as matrizes de massa, de rigidez e de amortecimento do sistema, tal como as forças exteriores e as forças de ligação. Jalali *et al.* [43], Ahmadian e Jalali [44] e [45] desenvolveram um modelo que permite identificar uma junta aparafusada utilizando as matrizes físicas do sistema estudado.

No domínio da frequência existe um vasto número de métodos baseados no método clássico desenvolvido por Jetmundsen [27] que são conhecidos por "FRF-based substructuring method" (FBS) como Klerk [41] também os classificou.

D' Ambrogio e Fregolent [39] desenvolveu dois métodos muito parecidos baseados na impedância e na mobilidade do sistema que utilizam apenas coordenadas da junta. Como vamos ver mais à frente um dos métodos tem o mesmo resultado do método clássico de Jetmundsen [27].

No método de Jetmundsen [27] os problemas numéricos inerentes às matrizes mal condicionadas são bastante conhecidos. As medições de FRF experimentais com os seus ruídos inerentes tornam difícil a obtenção de resultados aceitáveis. Sobre estes problemas foram desenvolvidos varias abordagens para solucionar o problema. Ren e Beard [46] tentam ultrapassar este problema utilizando o método dos mínimos quadrados na resolução de um sistema de equações.

Maia *et al.* [47] propõem uma solução utilizando apenas as ligações da junta, revelando grandes problemas de instabilidade numérica em casos práticos.

Em grande parte desta tese analisar-se-ão as várias formas de desacoplamento possível do método clássico de Jetmundsen [27] num problema numérico de vigas. Uma das formas será com a adição de elementos de inércia locais o que será uma forma possível de resolvermos o problema do mal condicionamento de algumas matrizes.

## 2.6 Estimativa de funções de resposta em frequência não medidas

É muito frequente encontrar num determinado estudo experimental de um caso real pontos físicos inacessíveis onde pretendemos saber a resposta dinâmica. Por outro lado, também surgem situações em que mesmo tendo acesso fácil ao ponto de medição, é difícil obter-se uma dada FRF específica. Em grande parte das vezes essas FRF são as que se relacionam com as rotações. Este problema é para muitas situações crucial para a resolução de problemas, sendo de difícil resolução. Existem, no entanto, alguns autores com alguns trabalhos nesta área.

Yang e Park [48] partindo do produto da matriz de rigidez dinâmica aproximada da estrutura com a respectiva matriz de receptância, deduzem uma expressão para estimar essas FRF de difícil medição. Vários autores, como Celic e Boltezar [49] e Wang e Zheng [50] utilizaram aquela expressão, obtendo resultados não muito aceitáveis quando sujeitos ao efeito do ruído das medições.

Avitabile e O'Callahan [51] utilizaram o método SEREP para realizarem um processo de expansão e assim estimarem as rotações não medidas, embora não tenham avaliado a sensibilidade do procedimento a qualquer perturbação experimental.

Silva *et al.* [52] propõem um método de cancelamento de várias massa adicionais utilizando o método de desacoplamento clássico para estimar a matriz de FRF a partir de uma coluna ou linha da respectiva matriz. O método é muito sensível ao ruído dos dados experimentais.

Wang *et al.* [50] desenvolve uma formulação geral para estimar as FRF não medidas utilizando também o método de desacoplamento clássico. No entanto os resultados da aplicação dessa formulação revelam-se bastante pobres. Na secção 5.2 iremos chegar a expressões finais muito semelhantes.

## 2.7 Critérios de correlação

A simples comparação gráfica das FRF calculadas por modelos numéricos ( $H_A(\omega)$ ) com as obtidas por técnicas experimentais ( $H_X(\omega)$ ) apenas nos dá uma ideia qualitativa entre FRF. Há portanto necessidade de quantificar em valores numéricos essas diferenças. Com a facilidade actual de determinar FRF surgiram vários índices de correlação que quantificam essas diferenças. Cada um quantifica essas diferenças de uma determinada forma, levando à utilização de cada índice de correlação a ser aplicado a cada problema específico.

A comparação entre modos de vibração é também uma das tarefas importantes quando os modelos são baseados em características modais medidas. A correspondência entre os modos pode ser uma tarefa muito difícil especialmente para estruturas com altas densidades modais.

Allemang e Brown [53] apresentaram em 1982 um dos critérios mais utilizados, o *Modal Assurance Criterion* (MAC), definido como

$$MAC(i, j) = \frac{\left| \{\Psi_A\}_i^H \{\Psi_X\}_j \right|^2}{\left( \{\Psi_A\}_i^H \{\Psi_A\}_i \right) \left( \{\Psi_X\}_j^H \{\Psi_X\}_j \right)} \quad (2.15)$$

onde  $\{\Psi_A\}_i$  representa o modo  $i$  do modelo numérico, e  $\{\Psi_X\}_j$  representa o modo  $j$  medido experimentalmente e o expoente “H” significa Hermitiano (complexo conjugado transposto). A correlação obtida terá valores entre 0 e 1.

O modo  $\{\Psi_A\}_i$  estará bem relacionado com o modo  $\{\Psi_X\}_j$  se o respectivo  $MAC(i, j)$  tiver um valor próximo de 1.

À semelhança do MAC, que compara modos, Pascual [54] definiu um índice de correlação global no domínio da frequência, o *Frequency Domain Assurance Criterion* (FDAC), que compara FRF entre si:

$$FDAC(\omega_A, \omega_X, j) = \frac{\left| \{H_A(\omega_A)\}_j^H \{H_X(\omega_X)\}_j \right|^2}{\left( \{H_A(\omega_A)\}_j^H \{H_A(\omega_A)\}_j \right) \left( \{H_X(\omega_X)\}_j^H \{H_X(\omega_X)\}_j \right)} \quad (2.16)$$

onde  $\{H_X(\omega_x)\}_j$  representa a coluna  $j$  de  $\mathbf{H}_X(\omega)$  à frequência  $\omega_x$ . Este índice também apresenta valores entre 0 e 1; pelo facto de ser calculado para cada frequência, é necessário um poder de cálculo considerável. Podemos ver um exemplo na Figura 2.2.

Heylen [55] definiu um critério que correlaciona as FRF de forma local, o *Frequency Response Assurance Criterion* (FRAC), à semelhança do *Co-ordinate Modal Assurance Criterion* (COMAC), definido por Lieven [56],

$$FRAC(i, j) = \frac{\left| \{H_{Aij}(\omega)\}^H \{H_{Xij}(\omega)\} \right|^2}{\left( \{H_{Aij}(\omega)\}^H \{H_{Aij}(\omega)\} \right) \left( \{H_{Xij}(\omega)\}^H \{H_{Xij}(\omega)\} \right)} \quad (2.17)$$

$\{H_{Xij}(\omega)\}$  é a resposta na coordenada  $i$  com a excitação na coordenada  $j$  para todas as frequências  $\omega$ . Escolhendo apenas as coordenadas ímpares de uma estrutura com 16 graus de liberdade aplicou-se este critério aos resultados experimentais e aos dados do modelo numérico. O critério revelou-se muito sensível como se pode ver pelos valores muito distantes da unidade na Figura 2.3.

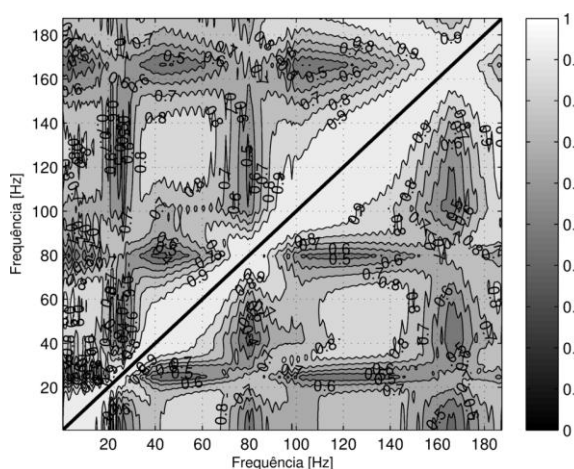


Figura 2.2: Exemplo de uma correlação FDAC

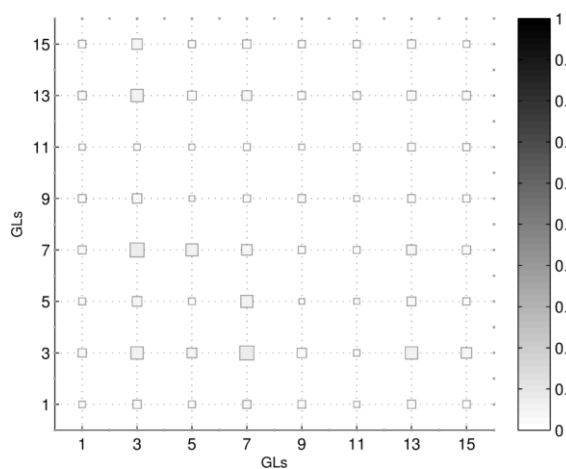


Figura 2.3: Exemplo de uma correlação FRAC

Por outro lado, Grafe [57] nos seus trabalhos de *updating* entrou em conta com a necessidade de correlacionar as FRF de forma global e local. Assim definiu dois critérios globais que utilizou no seu modelo de *updating* e um critério local.

O primeiro critério global, o *Global Shape Criterion* (GSC), é definido como

$$GSC(\omega, j) = \frac{\left| \{H_A(\omega)\}_j^H \{H_X(\omega)\}_j \right|^2}{\left( \{H_A(\omega)\}_j^H \{H_A(\omega)\}_j \right) \left( \{H_X(\omega)\}_j^H \{H_X(\omega)\}_j \right)} \quad (2.18)$$

O segundo critério global, o *Global Amplitude Criterion* (GAC), é dado por

$$GAC(\omega, j) = \frac{2 \left| \{H_A(\omega)\}_j^H \{H_X(\omega)\}_j \right|}{\left( \{H_A(\omega)\}_j^H \{H_A(\omega)\}_j \right) + \left( \{H_X(\omega)\}_j^H \{H_X(\omega)\}_j \right)} \quad (2.19)$$

onde  $\{H_X(\omega)\}_j$  representa a coluna  $j$  de  $\mathbf{H}_X(\omega)$  à frequência  $\omega$ .

Estes critérios, à semelhança do FDAC dão relevância ao processo de aquisição das FRF. Para uma situação experimental em que é utilizado o elemento excitador fixo numa coordenada e em cada coordenada um sensor para medir a resposta dinâmica, a aplicação destes critérios pode de certa forma dar-nos uma ideia da “correcta” colocação do elemento excitador.

Ambos estes critérios mostram um valor entre 0 e 1 para cada frequência. Podemos determinar a média destes valores ao longo da gama de frequência e ter assim quantificado num só valor a correlação entre FRF associadas à coordenada  $j$ . No caso da correlação GSC temos,

$$\overline{GSC}(j) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N GSC(\omega_k, j) \quad (2.20)$$

Na Figura 2.4, recorrendo aos dados da Figura 2.3, podemos ver a correlação GSC e na Figura 2.5 a GSC média entre a  $\mathbf{H}_X(\omega)$  e a  $\mathbf{H}_A(\omega)$ .

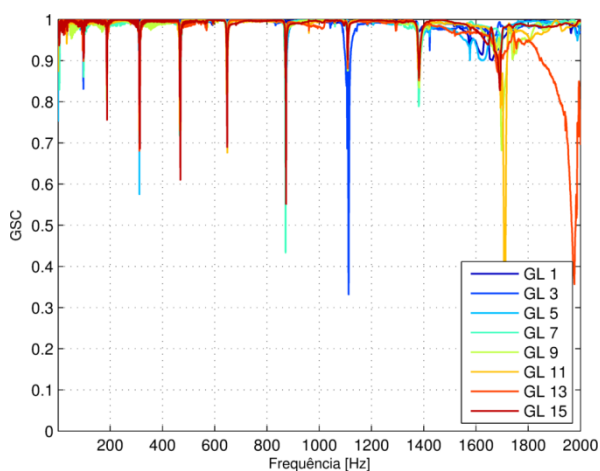


Figura 2.4: Exemplo da correlação GSC

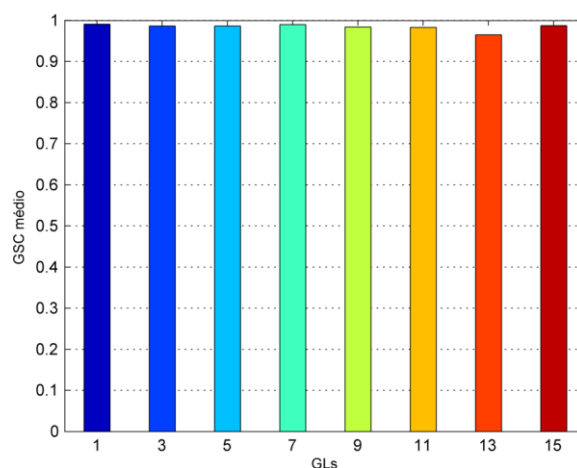


Figura 2.5: Exemplo da média da correlação GSC

O critério local sugerido por Grafe [57] é o *Local Amplitude Criterion* (LAC), assim definido:

$$LAC(\omega, i, j) = \frac{2 |H_{X_{ij}}(\omega)^* \cdot H_{A_{ij}}(\omega)|}{(H_{X_{ij}}(\omega)^* \cdot H_{X_{ij}}(\omega)) + (H_{A_{ij}}(\omega)^* \cdot H_{A_{ij}}(\omega))} \quad (2.21)$$

onde  $i$  e  $j$  são as coordenadas da resposta e a excitação, respectivamente.  $H_{A_{ij}}(\omega)$  é a FRF obtida numericamente e  $H_{X_{ij}}(\omega)$  obtida experimentalmente, o expoente \* significa o complexo conjugado. Esta correlação também terá valores entre 0 e 1 para cada frequência  $\omega$ .  $H_{X_{ij}}(\omega)$  estará bem relacionada com  $H_{A_{ij}}(\omega)$  se o respectivo  $LAC(\omega, i, j)$  tiver todos os valores próximos de 1. Podemos também aqui determinar a média destes valores e ter assim quantificado num só valor a correlação entre FRF:

$$\overline{LAC}(i, j) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N LAC(\omega_k, i, j) \quad (2.22)$$

Com as mesmas FRF utilizadas para o FRAC Figura 2.3 foi gerada a Figura 2.6 com a média da correlação LAC.

A Figura 2.3 e a Figura 2.6 representam correlações locais que dão uma importância distinta as diferenças que existem entre as FRF calculadas numericamente e as medidas como podemos observar na Figura 2.7 que tem como comparação a FRF  $H_{A_{77}}(\omega)$  e a FRF  $H_{X_{77}}(\omega)$ .

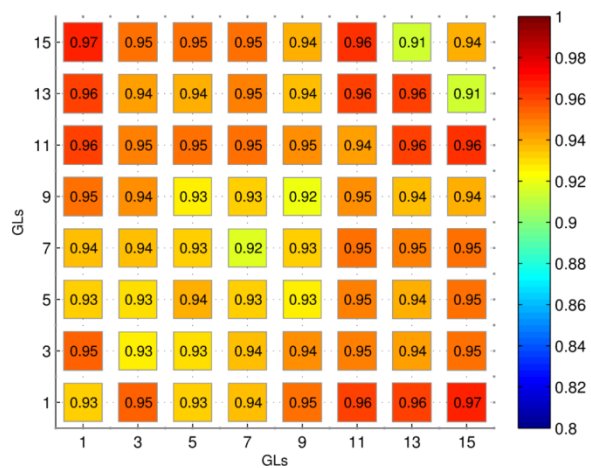


Figura 2.6: Exemplo de uma média da correlação LAC

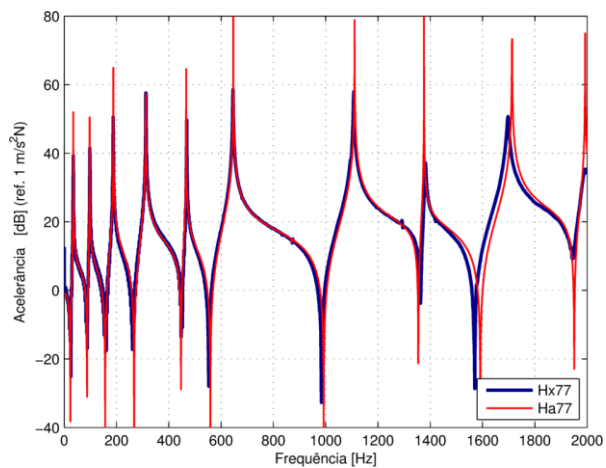


Figura 2.7: Comparação de  $H_{X77}(\omega)$  e  $H_{A77}(\omega)$

# **3** Identificação de juntas por métodos numéricos directos

## **3.1 Introdução**

Pretendemos neste capítulo identificar a junta através de modelação numérica, de forma directa, avaliando a correlação entre dados experimentais e os resultados obtidos por um conjunto de modelos de elementos finitos desenvolvido num programa comercial (Ansys [58]).

Este tipo de programa é bastante útil pois permite-nos criar modelos complexos com uma interface gráfica bastante amigável. Este programa desenvolve o seu trabalho ao longo de três fases: pré-processamento, processamento e pós-processamento. Na primeira fase é criado o modelo de elementos finitos que pode ter uma ajuda de outro software externo para a criação da geometria e da malha. No processamento podem ser efectuados vários tipos de cálculo, dependendo do objectivo do estudo. No pós-processamento, onde são tratados os outputs, o programa está um pouco limitado e por vez é utilizado um software externo para esse tratamento. No nosso caso foi utilizado o Matlab [1] para tratar a informação gerada.

Na nossa situação, o processamento recai no cálculo numérico das frequências naturais, dos modos e das respostas dinâmicas (FRF). Para a obtenção das frequências naturais e dos modos foi utilizado o modo de processamento “*Modal Analysis*” e dentro dos disponíveis foi escolhido o método de cálculo “*Block Lanczos Method*” pois era aquele que convergia sempre e era o mais rápido no cálculo das frequências naturais. Para determinar as FRF nas gamas pretendidas e perante uma estrutura nas condições de livre no espaço, utilizou-se o processamento “*Harmonic Response*” com o método de cálculo “*Harmonic Response Mode Superposition Analysis*”. Este método utiliza as características modais da análise geradas pelo modo de processamento “*Modal Analysis*” utilizado para o cálculo das frequências naturais e dos modos.

Para representar a excitação, foi imposta uma força harmónica com amplitude unitária no nó onde foi aplicada experimentalmente a força excitadora. Assim, as respostas lidas nos nós escolhidos representam as FRF pretendidas.

Na modelação, houve a preocupação de desenvolver vários modelos de elementos finitos que se aproximassem suficientemente bem dos resultados experimentais.

Para identificar um modelo mais adequado para uma junta aparafusada foi escolhida uma ligação simples de um só parafuso/porca M10 que liga duas vigas de geometria simples.

## 3.2 Fundamentos teóricos

A modelação dinâmica é um processo de conversão de um problema de engenharia num modelo matemático, através do qual as principais características de vibração do problema original podem ser previstas com alguma precisão. As características principais desse modelo matemático são a inércia, a rigidez, o amortecimento, as forças aplicadas e as condições de fronteira.

Com o conhecimento dessas características aplicamos o método dos elementos finitos (MEF) [59]. Este método passa por dividir um dado sistema num determinado número de elementos que estão interligados por nós seleccionados. Este procedimento é chamado de discretização. A deformação dentro de cada elemento é expressa por polinómios de interpolação também designados por funções de forma. Os coeficientes destes polinómios são definidos em função do tipo de elemento. Usando o campo de deslocamento assumido, a energia cinética  $T^e$  e a energia de deformação  $V^e$  de cada elemento são expressas em função das suas matrizes de massa e de rigidez.

Aplicando o princípio de Hamilton generalizado [60], que define que para qualquer sistema que evolui de uma configuração 1 no instante 1 para uma configuração 2 no instante 2, em equilíbrio dinâmico, é estacionário (mínimo, neste caso) o seguinte integral nesse intervalo de tempo:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - V + W_{nc}) dt = 0 \quad (3.1)$$

Onde  $T$  e  $V$  são a energia cinética e a energia potencial do sistema, respectivamente, e  $\delta W_{nc}$  representa o trabalho virtual das forças não conservativas. Vamos determinar cada elemento desta equação de equilíbrio.

No caso dos elementos finitos o deslocamento no interior de um elemento é determinado pelo seguinte polinómio,

$$\mathbf{u}(x, y, z, t) = \mathbf{N}\mathbf{u}^e \quad (3.2)$$

Onde  $\mathbf{N}$  é a matriz da função de forma do elemento  $e$  e  $\mathbf{u}^e$  é o vector de deslocamento nodal do elemento. Depois do conhecimento do campo de deslocamentos podemos utilizar a lei constitutiva e determinar a deformação e a tensão no elemento. Derivando a equação (3.2), obtemos a deformação e multiplicando pela matriz de elasticidade  $\mathbf{D}$  obtemos o campo das tensões.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \partial \mathbf{N}\mathbf{u}^e = \mathbf{B}\mathbf{u}^e \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}\mathbf{B}\mathbf{u}^e \quad (3.3)$$

Substituindo na energia potencial do elemento temos,

$$V^e = \frac{1}{2} \int_{Vol} \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dVol = \frac{1}{2} \int_{Vol} (\mathbf{u}^e)^T \mathbf{B}^T \mathbf{D}\mathbf{B}\mathbf{u}^e dVol = \frac{1}{2} (\mathbf{u}^e)^T \mathbf{K}^e \mathbf{u}^e \quad (3.4)$$

onde  $\mathbf{K}^e$  é a matriz de rigidez do elemento. Para determinar a energia cinética vamos determinar o campo de velocidades a partir da equação (3.2),

$$\dot{\mathbf{u}}(x, y, z, t) = \mathbf{N}\dot{\mathbf{u}}^e \quad (3.5)$$

Assim, a energia cinética do elemento fica definida por:

$$T^e = \frac{1}{2} \int_{Vol} \dot{\mathbf{u}}^T \rho \dot{\mathbf{u}} dVol = \frac{1}{2} \int_{Vol} (\dot{\mathbf{u}}^e)^T \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N}\dot{\mathbf{u}}^e dVol = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{u}}^e)^T \mathbf{M}^e \dot{\mathbf{u}}^e \quad (3.6)$$

onde  $\mathbf{M}^e$  é a matriz de massa do elemento.

Por sua vez, o trabalho das forças não conservativas será escrito da seguinte forma:

$$W_{nc}^e = \int_{Vol} \mathbf{u}^T \mathbf{f}^e dVol = (\mathbf{u}^e)^T \int_{Vol} \mathbf{N}^T \mathbf{f}^e dVol = (\mathbf{u}^e)^T \mathbf{F}^e \quad (3.7)$$

onde  $\mathbf{F}^e$  é o vector de forças nodal.

É necessário reescrever estas energias em função das coordenadas globais do sistema fazendo uma transformação de coordenadas.

$$\mathbf{u}^e = \mathbf{L}\bar{\mathbf{u}}^e \quad (3.8)$$

Onde  $L$  é uma matriz de transformação ortogonal e  $\bar{u}^e$  são os deslocamentos nodais do elemento no sistema global. Substituindo a equação (3.8) nas equações (3.4), (3.6) e (3.7), temos as mesmas expressas em coordenadas globais:

$$\begin{aligned}\bar{V}^e &= \frac{1}{2}(\bar{u}^e)^T \bar{K}^e \bar{u}^e & \text{com } \bar{K}^e &= L^T K^e L \\ \bar{T}^e &= \frac{1}{2}(\dot{\bar{u}}^e)^T \bar{M}^e \dot{\bar{u}}^e & \text{com } \bar{M}^e &= L^T M^e L \\ \bar{W}_{nc}^e &= (\bar{u}^e)^T \bar{F}^e & \text{com } \bar{F}^e &= L^T F^e\end{aligned}\quad (3.9)$$

Desta forma podemos obter as energias totais nas coordenadas globais:

$$\begin{aligned}V &= \sum_e \bar{V}^e = \frac{1}{2} \sum_e (\bar{u}^e)^T \bar{K}^e \bar{u}^e = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} \\ T &= \sum_e \bar{T}^e = \frac{1}{2} \sum_e (\dot{\bar{u}}^e)^T \bar{M}^e \dot{\bar{u}}^e = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{u}} \\ W_{nc} &= \sum_e \bar{W}_{nc}^e = \sum_e (\bar{u}^e)^T \bar{F}^e = \mathbf{u}^T \mathbf{F}\end{aligned}\quad (3.10)$$

Em que  $\sum_e$  significa o somatório que entra em conta com a conectividade dos elementos. Substituindo no princípio de Hamilton descrito na equação (3.1), temos

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{u}} - \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} + \mathbf{u}^T \mathbf{F} \right) dt = 0 \quad (3.11)$$

Aplicando o operador variacional  $\delta$  e tendo em conta que  $\delta \mathbf{u}^T = 0$  nos instantes  $t_1$  e  $t_2$ , obtém-se,

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta \mathbf{u}^T (-\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} - \mathbf{K} \mathbf{u} + \mathbf{F}) dt = 0 \quad (3.12)$$

Como  $\delta \mathbf{u}^T$  é independente e arbitrário, nunca será nulo e portanto,

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{F} \quad (3.13)$$

onde  $\mathbf{K}$  é a matriz de rigidez do sistema,  $\mathbf{M}$  é a matriz de massa do sistema e  $\mathbf{F}$  o vector de forças externas não conservativas. Em vibração livre,  $\mathbf{F} = 0$ :

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K} \mathbf{u} = 0 \quad (3.14)$$

Assumindo o amortecimento do sistema como amortecimento viscoso, o princípio de Hamilton conduzir-nos-ia a

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K} \mathbf{u} = 0 \quad (3.15)$$

Ao utilizar a matriz modal da solução não-amortecida, na maioria das situações, não é possível diagonalizar a matriz  $C$ . Rayleigh nos seus trabalhos sugeriu a possibilidade do amortecimento ser proporcionais às matrizes de rigidez  $K$  e de massa  $M$  e assim escrever a semelhança da secção 2.4:

$$C = \alpha M + \beta K \quad (3.16)$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são constantes. Substituindo (3.16) na equação (3.15) temos;

$$M\ddot{u} + (\alpha M + \beta K)\dot{u} + Ku = 0 \quad (3.17)$$

Assim, utilizando a matriz modal do sistema (3.14), é possível obter um sistema de equações desacopladas (independentes), nas coordenadas principais  $p$ ;

$$\{\ddot{p}\} + \begin{bmatrix} \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 2\xi_r\omega_r & 0 \\ 0 & 0 & \ddots \end{bmatrix} \{\dot{p}\} + \begin{bmatrix} \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \omega_r^2 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots \end{bmatrix} \{p\} = \{0\} \quad (3.18)$$

onde  $\omega_r$  é a frequência natural do modo  $r$  e como acontece nos sistemas com um só grau de liberdade,  $\xi_r$  é o factor de amortecimento associado ao modo  $r$ :

$$\xi_r = \frac{\alpha}{2\omega_r} + \frac{\beta\omega_r}{2} \quad (3.19)$$

Uma das finalidades dos programas comerciais de elementos finitos é a resolução deste sistema de equações.

### 3.3 Modelação da ligação aparafusada

Foi escolhido um acoplamento de vigas simples ligadas com um parafuso sextavado interior e uma porca de rosca métrica M10 apertado com um momento de 50 Nm. A estrutura ficou suspensa simulando condições de livre no espaço. As solicitações foram aplicadas com um martelo instrumentado com sensor de força e as respostas foram medidas com acelerómetro (Anexo D).

Foram escolhidas algumas coordenadas de interesse. Na Figura 3.1 podemos ver esta estrutura com as várias coordenadas de translação e de rotação de interesse no plano  $xz$ . Apenas as coordenadas deste plano é que foram consideradas no estudo.

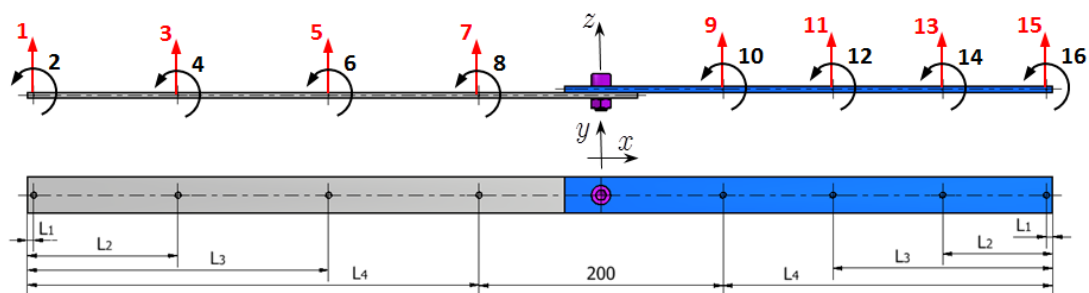


Figura 3.1: Acoplamento de vigas V10 com V8

As várias posições das coordenadas de interesse estão indicadas na Figura 3.1 e na Tabela 3.1. Os quatro pontos de medição das translações em cada viga correspondem às coordenadas 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13 e 15. A junta é representada pela subestrutura compreendida entre a coordenada 7 e 9.

| Viga | L   | b  | t | S  | L <sub>1</sub> | L <sub>2</sub> | L <sub>3</sub> | L <sub>4</sub> |
|------|-----|----|---|----|----------------|----------------|----------------|----------------|
| V10  | 500 | 30 | 5 | 30 | 5              | 123.3          | 246.7          | 370            |
| V8   | 400 | 30 | 5 | 30 | 5              | 90.0           | 180.0          | 270            |

Tabela 3.1: Dados geométricos do acoplamento em milímetros

As características geométricas de cada viga estão indicadas na Figura 3.1 e Figura 3.2 e na Tabela 3.1.

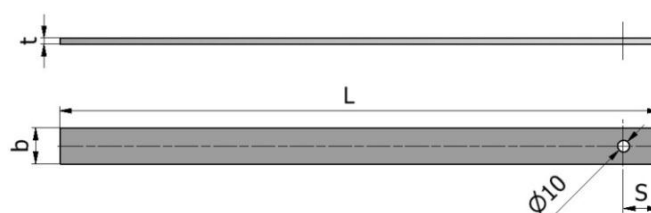


Figura 3.2: Tipo de viga

### 3.3.1 Escolha do elemento finito

Em função do tipo de problema e da geometria cabe ao utilizador escolher o elemento finito mais adequado e a malha mais coerente com a geometria da estrutura.

Dentro da biblioteca de elementos finitos disponível e de entre os elementos finitos mais adequados para a modelação de vigas, foi feita uma selecção de um elemento de viga BEAM3, de um elemento de placa estrutural SHELL63 e elementos sólidos estruturais SOLID45, como indicado na Tabela 3.2 e representados na Figura 3.3.

|                 | BEAM3 | SHELL63 | SOLID45 |
|-----------------|-------|---------|---------|
| Número de Nós   | 2     | 4       | 8       |
| GL por Nó       | 3     | 6       | 3       |
| GL por Elemento | 6     | 24      | 24      |

Tabela 3.2: Elementos finitos seleccionados

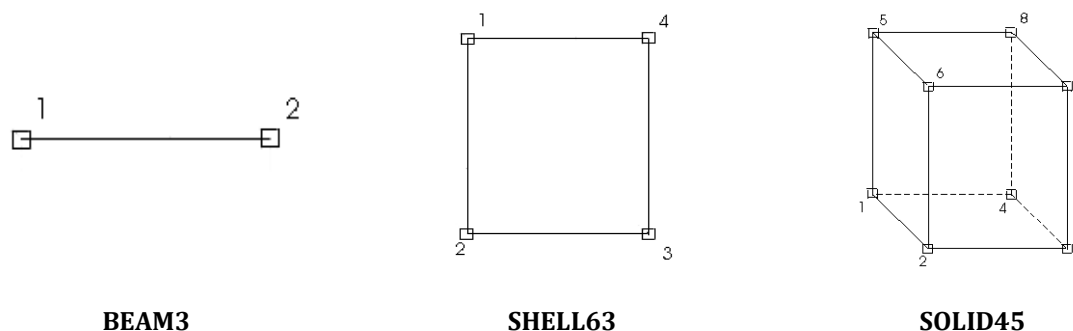


Figura 3.3: Geometria dos elementos finitos seleccionados

O elemento BEAM3 “reduz” o elemento estrutural a um “eixo” o que de certa forma revela-se desajustado para o estudo deste problema pois a junta aparafusada é complexa.

A utilização do SHELL63 também levanta problemas no momento em que se analisa os modos de flexão, pois existe, como veremos mais a frente, interferências geométricas entre as vigas. Além deste problema, a modelação correcta da ligação aparafusada torna-se desadequada.

Assim foi utilizado o elemento SOLID45 para este estudo da correlação entre FRF.

Foi feito uma avaliação do número de elementos utilizando como referência o número de divisões da circunferência que constitui o furo como podemos ver na Figura 3.4 e na Figura 3.5.

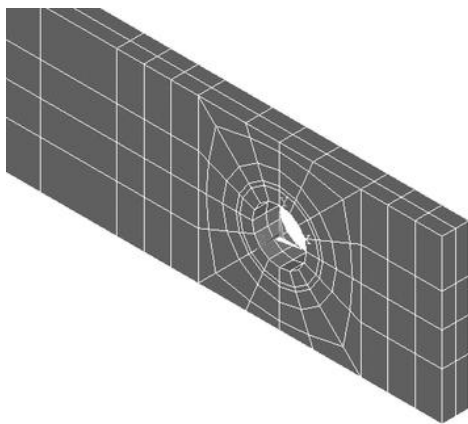


Figura 3.4: Divisões da malha em 16 divisões

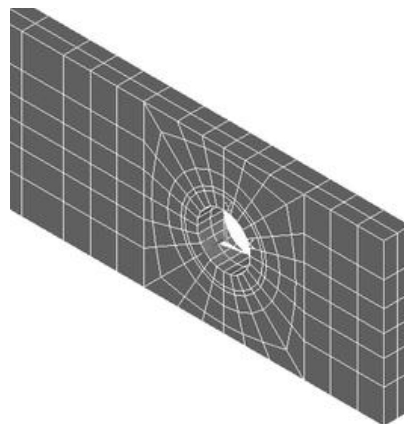


Figura 3.5: Divisões da malha em 24 divisões

Foi escolhido utilizar a malha com 24 divisões pois é aquela que apresenta uma distribuição mais uniforme dos elementos finitos na estrutura.

### 3.3.2 Interferência geométrica na zona de contacto

O modelo solido utilizado, com uma ligação rígida entre nós das duas estruturas, não evita o efeito de “penetração” das vigas nos modos de flexão, Figura 3.6. Este efeito é visível quando ao programa lhe é pedido a animação do modo escolhido. Esta “falha” na modelação da ligação pode não afectar muito os resultados pois este modelo induz uma quebra de rigidez na flexão o que pode não acontecer se as forças induzidas na direcção da flexão forem reduzidas.

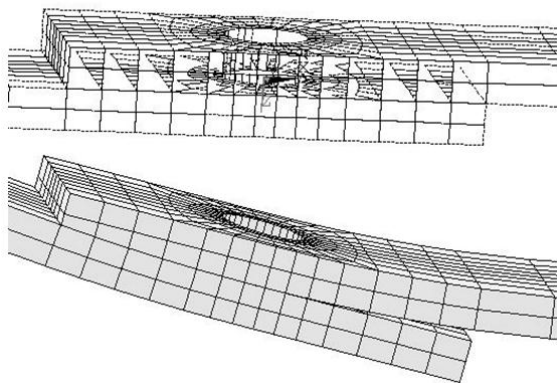


Figura 3.6: Penetração no modo de flexão

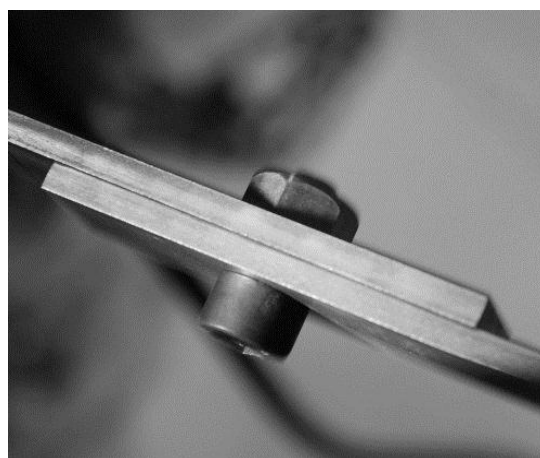


Figura 3.7: Fotografia da junta aparafusada

No entanto, foi feita um ensaio experimental para avaliar este efeito de penetração/separação das vigas. Foi utilizado um estroboscópio para visualizar o acoplamento a ser solicitado a primeira frequência natural. Pelas limitações do estroboscópio não foi possível chegar às frequências correspondentes aos modos de flexão de maior penetração para assim poder visualizar o fenómeno anteriormente referenciado. Após várias tentativas não foi possível ver o efeito de abrir e fechar de forma clara, mesmo utilizando uma máquina fotográfica, Figura 3.7 e uma de filmar não foi possível captar qualquer separação. No entanto verificou-se a existência de um batimento entre as duas vigas que produzia um efeito sonoro audível.

### 3.3.3 Modelos numéricos da ligação aparafusada

O efeito de penetração identificado no ponto anterior será objecto de correcção nalguns modelos que serão propostos. Efectivamente se ligarmos de forma rígida todos os nós comuns às duas vigas, ou seja, na zona de contacto, esta ligação não irá permitir qualquer penetração nem afastamento das vigas.

Foram assim definidos 13 modelos de ligação entre as duas vigas, 6 modelos onde há apenas ligações rígidas entre nós das duas vigas distribuídos em circunferências concêntricas com o furo, Figura 3.8 e mais 7 modelos que entram em conta com as mesmas ligações e adiciona uma ligação rígida do parafuso ao modelo das duas vigas, Figura 3.9.

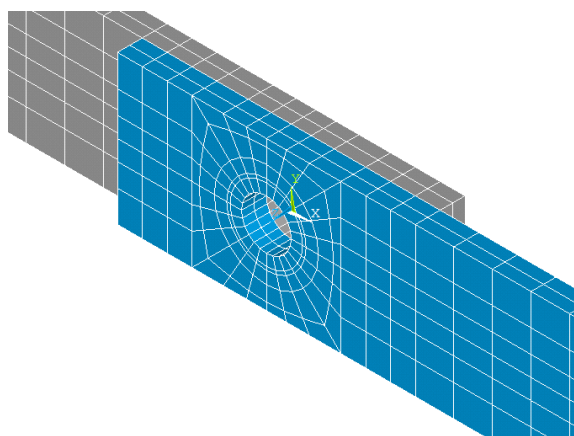


Figura 3.8: Ligação sem parafuso

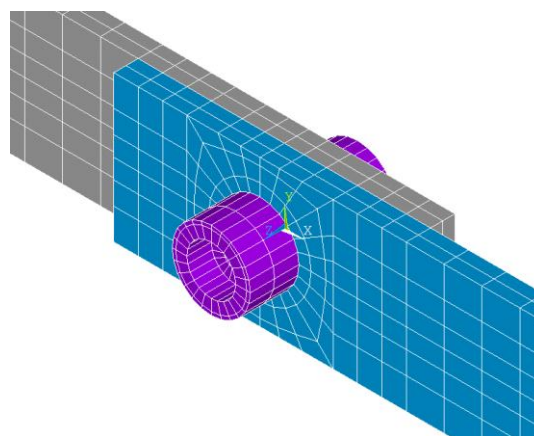


Figura 3.9: Ligação com parafuso

Estas ligações rígidas consistem em atribuir os mesmos graus de liberdade aos nós comuns das duas estruturas. Na Figura 3.10 e Figura 3.11 podemos ver as linhas que unem o conjunto de nós de cada ligação C1-C6 e da ligação C7 respectivamente. Cada modelo de ligação usa uma combinação destas ligações como está indicado na Tabela 3.3.

O efeito de aperto da ligação aparafusada desenvolve um cone de pressão sobre os elementos a unir; este efeito dá origem a uma pressão localizada numa coroa com um determinado diâmetro, Figura 3.12. Esse diâmetro é função do diâmetro da cabeça do parafuso ou do diâmetro de contacto da porca e também de um ângulo que relaciona estes diâmetros com o diâmetro da coroa de pressão. Este ângulo é objecto de vários estudos, embora seja consensual admitir um angulo de  $30^\circ$ .

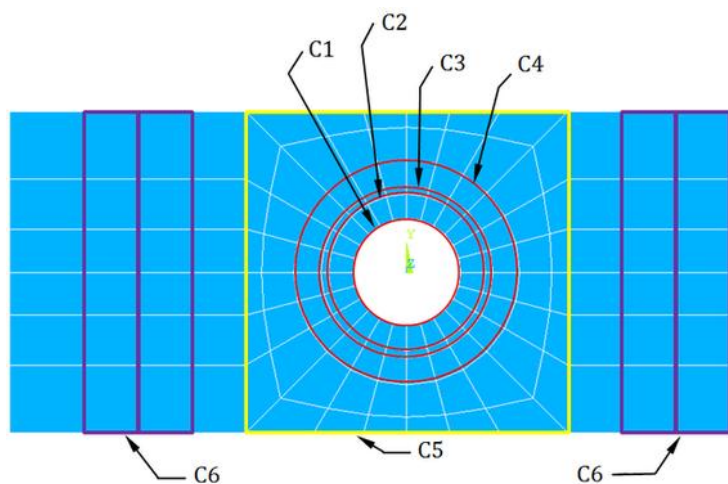


Figura 3.10: Zonas das ligações C1-C6

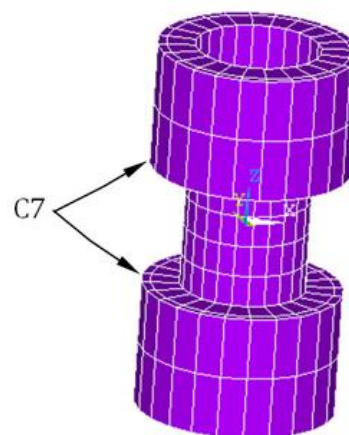


Figura 3.11: Ligação C7

O diâmetro da coroa de pressão representa a ligação C4 da Figura 3.10 e foi tomado um valor médio para esse diâmetro de 21 mm, indicado como diâmetro D4 na Figura 3.12.

| Modelo     | $\varnothing$ [mm] | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
|------------|--------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|
| Ligação C1 | 10                 | x | x | x | x | x | x |   | x | x | x  | x  | x  | x  |
| Ligação C2 | 14,6               |   | x | x | x | x | x |   |   | x | x  | x  | x  | x  |
| Ligação C3 | 16                 |   |   | x | x | x | x |   |   |   | x  | x  | x  | x  |
| Ligação C4 | 21                 |   |   |   | x | x | x |   |   |   |    | x  | x  | x  |
| Ligação C5 | ---                |   |   |   |   | x | x |   |   |   |    |    | x  | x  |
| Ligação C6 | ---                |   |   |   |   |   | x |   |   |   |    |    |    | x  |
| Ligação C7 | 14,6/16            |   |   |   |   |   |   | x | x | x | x  | x  | x  | x  |

Tabela 3.3: Ligações dos 13 modelos

As ligações C2 e C3 representam os diâmetros da porca e da cabeça do parafuso, respectivamente.

Como exemplo, na Figura 3.13 está representado a ligação do modelo 7, onde é visível a ligação C7, constituída por uma ligação rígida nó a nó indicada a verde.

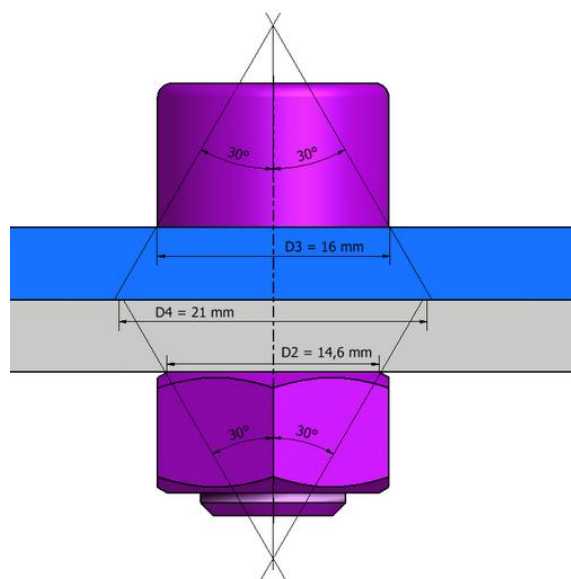


Figura 3.12: Cone de pressão do parafuso

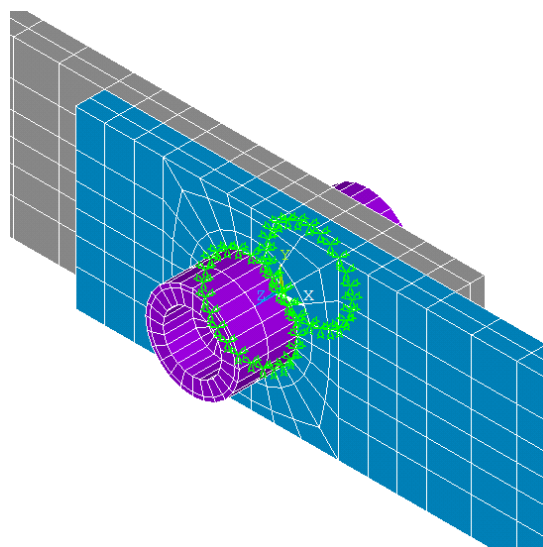


Figura 3.13: Ligação do modelo 7

### 3.3.4 Determinação das características estruturais.

As propriedades que necessitamos conhecer do material que constitui as vigas do nosso acoplamento, são o módulo de elasticidade, a massa específica e o coeficiente de Poisson. Foi assumido um coeficiente de Poisson de 0,30, valor indicativo para os aços. A massa específica foi determinada calculando o volume total de todas as vigas e pesando o conjunto, tendo-se obtido o valor de 7718,2 kg/m<sup>3</sup>.

A fim de determinar o módulo de elasticidade, foram medidas as FRF de translação nos 4 pontos de medição da viga V10. Foi utilizado apenas um acelerómetro e um martelo para obter as FRF pretendidas para o estudo.

Da análise de algumas FRF concluiu-se que a massa do acelerómetro (4,8 gramas) não podia ser desprezada face à massa da viga v10 (576 gramas). Para ultrapassar este problema foram colocadas massas em alumínio com o mesmo peso nos outros locais de medição, sendo essas massas designadas por massas fantasma. Assim, as três massas colocadas nos outros três pontos de medição fazem parte da nossa estrutura.

Na Figura 3.14 podemos ver a aceleração FRF  $H_{11}$  da viga V10 obtida apenas com o acelerómetro (linha azul) e a aceleração FRF  $H_{11}$  da viga V10 obtida com o

acelerómetro e com as três massas (linha vermelha). É bem visível a diferença entre as FRF. Na Figura 3.16 estão apresentadas estas duas situações da viga.

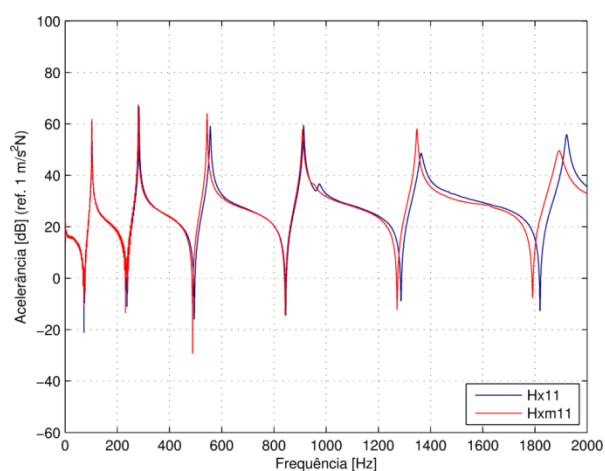


Figura 3.14: Acelerância  $H_{11}$  da viga V10 com e sem as massas adicionadas

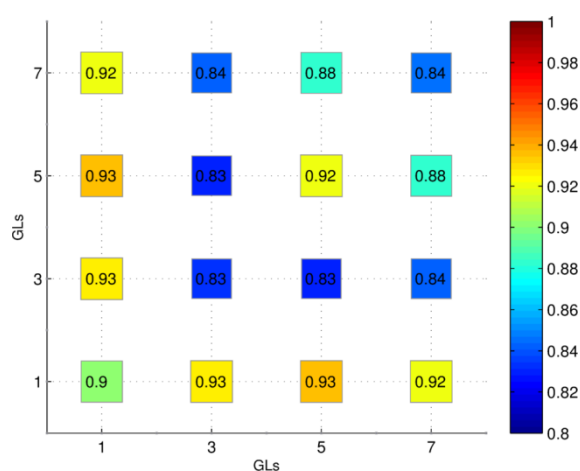


Figura 3.15: Correlação LAC média da viga V10 com e sem as massas adicionadas

Para quantificar as diferenças entre todas as FRF foi determinado a média da correlação LAC (*Local Amplitude Criterion*); como podemos verificar na Figura 3.15 os valores estão bastante afastados da unidade, o que demonstra a necessidade de incluir as massas pontuais nas coordenadas de interesse.

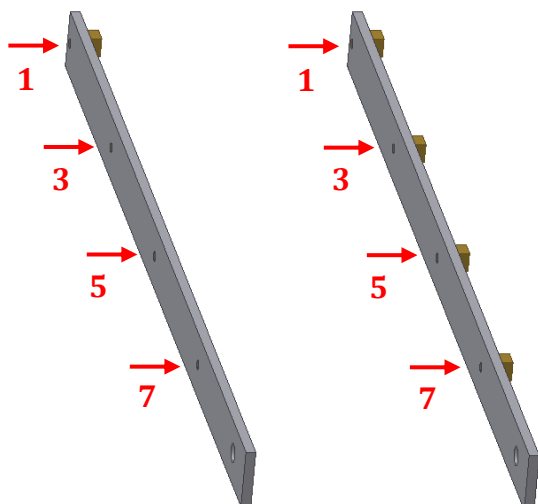


Figura 3.16: Viga V10 com o acelerómetro e a Viga V10 com o acelerómetro e as massas nas coordenadas de interesse

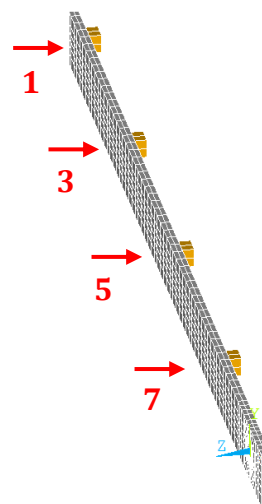


Figura 3.17: Modelo de elementos finitos da Viga V10 com o acelerómetro e as massas nas coordenadas de interesse

Na Figura 3.17 está representado o modelo de elementos finitos com as quatro massas. A escolha da densidade da malha está indicada na Figura 3.5.

No processo de escolha do módulo de elasticidade foi determinada a média da correlação LAC entre as FRF medidas e as FRF do modelo numérico, para um conjunto de valores do módulo de elasticidade próximos dos 200 GPa. O valor que apresentou melhores resultados foi o valor de 196 GPa.

Na Figura 3.18 está representada a aceleração FRF  $H_{11}$  da viga V10 obtida experimentalmente com o acelerómetro e as três massas (linha azul) e a aceleração FRF  $H_{11}$  da viga V10 obtida pelo modelo numérico apresentado na Figura 3.17 com o módulo de elasticidade de 196 GPa.

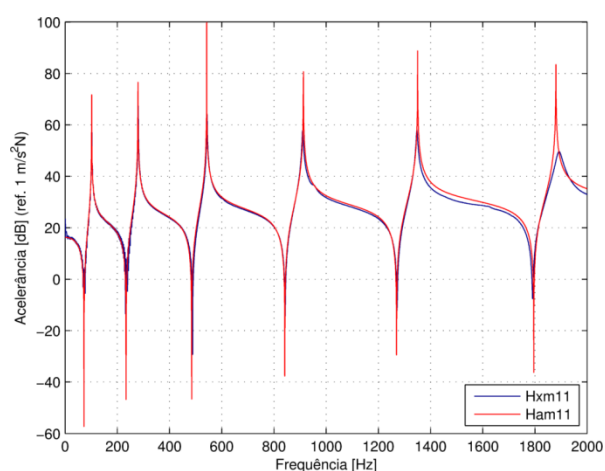


Figura 3.18: Aceleração  $H_{11}$  da viga V10 experimental e numérico com as massas adicionadas

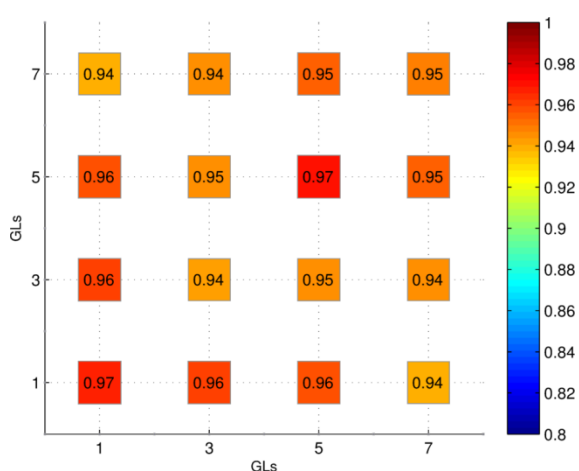


Figura 3.19: Correlação LAC média da viga V10 experimental e numérico com as massas adicionadas

Podemos ver na Figura 3.19 a média da correlação LAC para este módulo de elasticidade, onde são visíveis valores bastante próximos de 1.

### 3.3.5 Análise de correlação

Depois de determinar as características do material das vigas, foi feita uma análise entre as FRF experimentais da estrutura e os 13 modelos numéricos. Esta análise consistiu em comparar um conjunto de correlações de entre os resultados experimentais e os numéricos.

Foi utilizado a correlação *Global Shape Criterion* (GSC) médio para poder facilmente comparar os modelos entre si. Depois de escolher os modelos com melhor resultado, foi realizada uma correlação local utilizando o *Local Amplitude Criterion* (LAC) médio.

Na Figura 3.20 e Figura 3.21 podemos observar o GSC médio dos 13 modelos. Verifica-se que o modelo 4 e o modelo 11 apresentam valores mais próximos de 1 para todos os graus de liberdade. Se analisarmos a Tabela 3.3 podemos ver que estes dois modelos são constituídos pelas ligações C1, C2, C3 e C4. O modelo 11 tem em relação ao modelo 4 apenas o parafuso à ligação 7.

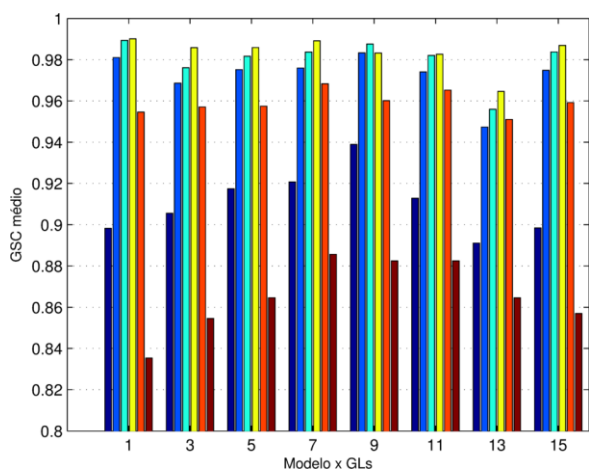


Figura 3.20: Correlação GSC média dos modelos 1, 2, 3, 4, 5 e 6

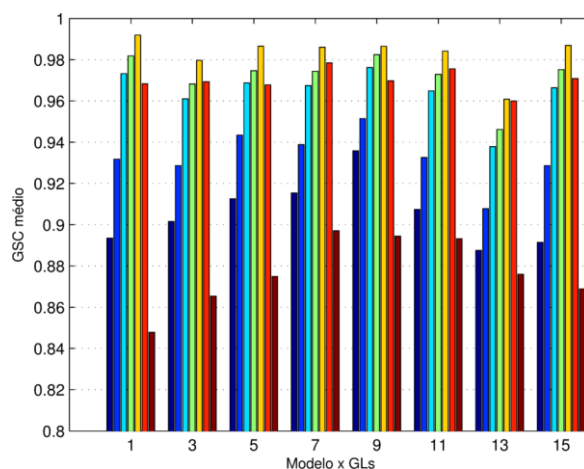


Figura 3.21: Correlação GSC média dos modelos 7, 8, 9, 10, 11, 12 e 13

Na Figura 3.22 e Figura 3.23 podemos ver a evolução da correlação GSC ao longo da gama de frequência. Verifica-se, para os dois modelos, que a correlação degrada-se ao longo do espectro de frequências e a partir dos 1400 Hz há um aumento significativo da degradação, que é mais significativa para o modelo 11.

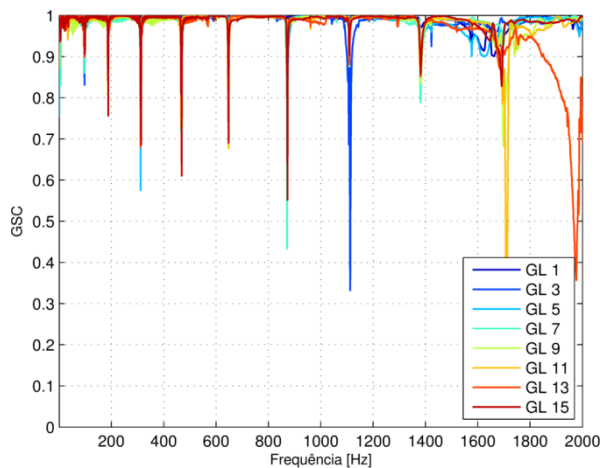


Figura 3.22: Correlação GSC do modelo 4

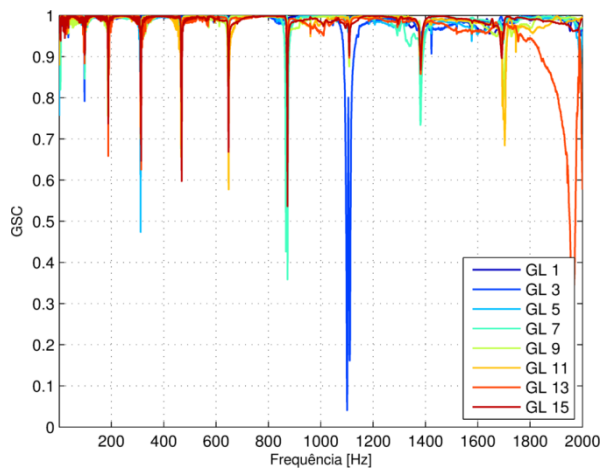


Figura 3.23: Correlação GSC do modelo 11

Na Figura 3.24 e Figura 3.25 estão representadas as correlações LAC média dos modelos 4 e 11, respectivamente. O modelo 4 apresenta melhor correlação para todos os GL do que o modelo 11.

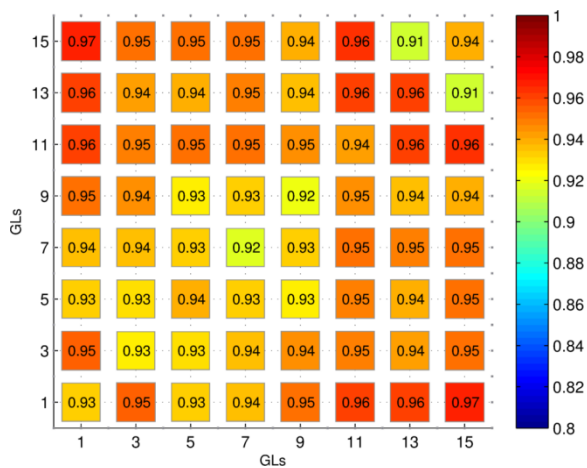


Figura 3.24: Correlação LAC média do modelo 4

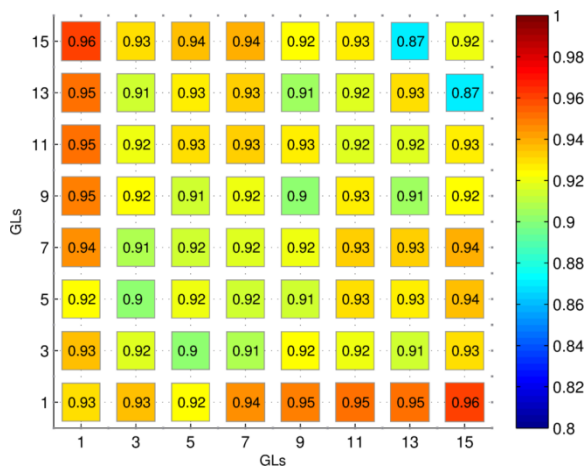


Figura 3.25: Correlação LAC média do modelo 11

### ***Discussão***

Dos 13 modelos numéricos apresentados, o modelo 4 foi o que mostrou a melhor correlação. Tanto o modelo 4 como o modelo 11 são os únicos que têm como ligação entre as vigas as ligações C1, C2, C3 e C4. Este conjunto de ligações representa o efeito do cone de aperto (Figura 3.12).

Podemos concluir que para esta situação em particular, para modelar numericamente a junta basta unir rigidamente os nós da coroa de contacto entre as duas vigas, sendo esta coroa definida pelo cone de aperto.

No entanto, vamos tentar generalizar a solução deste problema no capítulo seguinte.

# **4** Identificação de juntas com base em técnicas de desacoplamento

## **4.1 Introdução**

O aumento da complexidade das estruturas em engenharia levou a que surgisse uma filosofia de identificação simples dos componentes dessas estruturas. Estes componentes, designados por subestruturas, são estudados individualmente de forma teórica ou experimental e depois são acoplados para assim ter o conhecimento dinâmico completo da estrutura complexa [24].

Este processo permite identificar cada subestrutura de forma mais precisa, utilizando o método de suspensão para simular condições de livre no espaço. Esta forma permite criar uma base de dados de subestruturas geradas por autores diferentes e que podem ser alteradas individualmente sem afectar as outras subestruturas.

As subestruturas, para serem representadas dinamicamente de forma correcta, necessitam por vezes de uma redução ou uma condensação de coordenadas. Estas coordenadas, vulgarmente designadas por coordenadas de interesse ou coordenadas principais, são definidas pelas zonas de ligação e/ou pelas coordenadas que definem a geometria global da subestrutura [32].

Podemos dividir em três categorias o acoplamento de subestruturas com a redução de coordenadas:

- Acoplamento Espacial: são utilizadas as matrizes que definem as características espaciais da subestrutura nas coordenadas de interesse.
- Acoplamento de FRF: são utilizadas as matrizes de FRF medidas nas coordenadas de interesse.
- Acoplamento Modal: são utilizadas as características modais da subestrutura, os modos de vibração com as respectivas frequências naturais.

Na Figura 4.1 podemos ver a relação que existe entre as três formas de realizar o acoplamento de subestruturas.

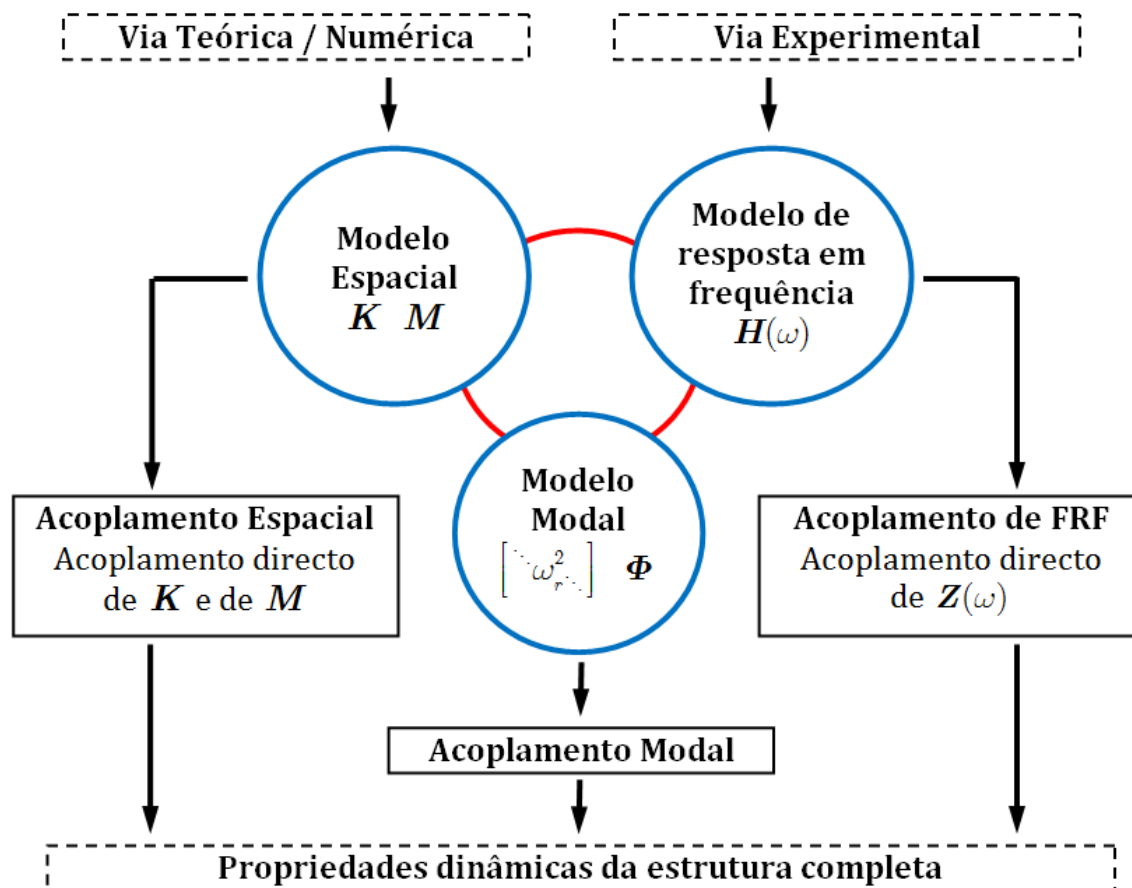


Figura 4.1: Fluxograma do acoplamento de modelos: via teórica e experimental

A ideia de dividir a estrutura em subestruturas simples de forma a identificá-las teoricamente nem sempre é possível, pois há muitas subestruturas que pela sua complexidade não é possível criar um modelo teórico/numérico que as identifique. É nesta altura que surge a necessidade de realizar um desacoplamento de estruturas e assim determinar as características dinâmicas da subestrutura complexa.

A junta aparafusada que queremos identificar pode ser entendida como uma subestrutura a ser desacoplada da estrutura principal.

Como foi referido na secção 2.5 temos o desacoplamento modal que utiliza as características modais da estrutura e também temos o desacoplamento no domínio da frequência utilizando FRF. O desacoplamento utilizando FRF tem sido o mais utilizado nos últimos anos, pois com a evolução do poder computacional e a facilidade de

obtenção das funções de resposta em frequência levou à generalização desta técnica e à sua aplicação a vários problemas. Por estas razões iremos apenas utilizar FRF para realizar o desacoplamento da junta aparafusada.

Vamos de seguida apresentar o método clássico de acoplamento e uma nova técnica alternativa. De seguida serão desenvolvidas técnicas de desacoplamento com os respectivos exemplos numéricos.

## 4.2 Técnica clássica de acoplamento

Este método consiste, genericamente, em assumir o acoplamento de duas subestruturas A e B ligadas rigidamente através de coordenadas de acoplamento  $j$ , segundo as quais se transmitem os esforços  $F$ . As coordenadas  $i$  são apenas da subestrutura A e as coordenadas  $k$  são apenas da subestrutura B [27], [61], [32], [62], [63], como mostra a Figura 4.2.

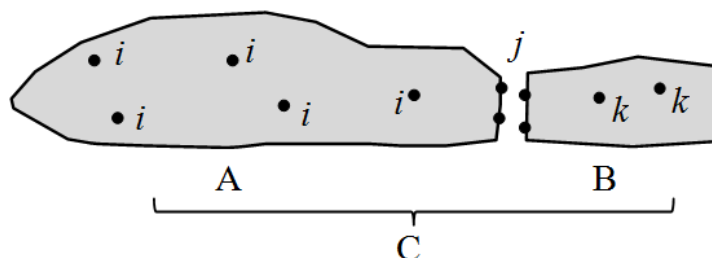


Figura 4.2: Acoplamento clássico das subestruturas A e B numa estrutura C

Assumindo as equações de equilíbrio de forças e as condições de compatibilidade de deslocamentos podemos escrever:

$$\begin{cases} \mathbf{F}_j^A + \mathbf{F}_j^B = \mathbf{F}_j^C \\ \mathbf{x}_j^A = \mathbf{x}_j^B = \mathbf{x}_j^C \end{cases} \quad (4.1)$$

Utilizando as equações (2.7) e (2.8) podemos escrever as matrizes de receptância  $\mathbf{H}$ , que relacionam os deslocamentos da estrutura com as forças dinâmicas aplicadas, da seguinte forma:

$$\bar{\mathbf{X}} = \mathbf{H} \cdot \bar{\mathbf{F}} \quad (4.2)$$

As receptâncias das subestruturas A e B e da estrutura C serão:

$$\mathbf{H}^A = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ii}^A & \mathbf{H}_{ij}^A \\ \mathbf{H}_{ji}^A & \mathbf{H}_{jj}^A \end{bmatrix}; \quad \mathbf{H}^B = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{jj}^B & \mathbf{H}_{jk}^B \\ \mathbf{H}_{kj}^B & \mathbf{H}_{kk}^B \end{bmatrix} \quad e \quad \mathbf{H}^C = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ii}^C & \mathbf{H}_{ij}^C & \mathbf{H}_{ik}^C \\ \mathbf{H}_{ji}^C & \mathbf{H}_{jj}^C & \mathbf{H}_{jk}^C \\ \mathbf{H}_{ki}^C & \mathbf{H}_{kj}^C & \mathbf{H}_{kk}^C \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

As submatrizes representam as receptâncias entre as coordenadas indicadas no respectivo índice da designação:  $i, j$  e  $k$ .

Utilizando as equações (4.1) e a definição de receptância (4.2), obtemos a receptância da matriz C.

$$\mathbf{H}^C = \left[ \begin{bmatrix} \left[ \begin{matrix} \mathbf{H}_{ii}^A & \mathbf{H}_{ij}^A \\ \mathbf{H}_{ji}^A & \mathbf{H}_{jj}^A \end{matrix} \right]^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \left[ \begin{matrix} \mathbf{H}_{jj}^B & \mathbf{H}_{jk}^B \\ \mathbf{H}_{kj}^B & \mathbf{H}_{kk}^B \end{matrix} \right]^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \right]^{-1} \quad (4.4)$$

O processo de inversão das três matrizes exige um esforço computacional elevado e para além disso, a forte possibilidade de encontrar matrizes mal condicionadas junto às ressonâncias pode gerar erros numéricos enormes no cálculo das suas inversas.

Para tentar minimizar este problema é feita a seguinte manipulação matricial:

$$\left(\mathbf{H}^C\right)^{-1} = \left[ \begin{bmatrix} \left[ \begin{matrix} \mathbf{H}_{ii}^A & \mathbf{H}_{ij}^A \\ \mathbf{H}_{ji}^A & \mathbf{H}_{jj}^A \end{matrix} \right]^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \left[ \begin{matrix} \mathbf{H}_{jj}^B & \mathbf{H}_{jk}^B \\ \mathbf{H}_{kj}^B & \mathbf{H}_{kk}^B \end{matrix} \right]^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \right]^{-1} \quad (4.5)$$

Simplificando a notação do segundo membro da equação (4.5), temos

$$\left(\mathbf{H}^C\right)^{-1} = \left(\mathbf{H}_{\#}^A\right)^{-1} + \left(\mathbf{H}_{\#}^B\right)^{-1} - \mathbf{I}_{\#} \quad (4.6)$$

Multiplicando o segundo membro da equação (4.6) à esquerda por  $\left(\mathbf{H}_{\#}^A\right)^{-1} \mathbf{H}_{\#}^A$  e à direita por  $\left(\mathbf{H}_{\#}^B\right)^{-1} \mathbf{H}_{\#}^B$ , obtém-se:

$$\left(\mathbf{H}^C\right)^{-1} = \left(\mathbf{H}_{\#}^A\right)^{-1} \left(\mathbf{H}_{\#}^A + \mathbf{H}_{\#}^B - \mathbf{H}_{\#}^A \cdot \mathbf{I}_{\#} \cdot \mathbf{H}_{\#}^B\right) \left(\mathbf{H}_{\#}^B\right)^{-1} \quad (4.7)$$

Assim, consegue-se obter  $\mathbf{H}^C$  apenas com uma inversão:

$$\mathbf{H}^C = \mathbf{H}_{\#}^B \left(\mathbf{H}_{\#}^A + \mathbf{H}_{\#}^B - \mathbf{H}_{\#}^A \cdot \mathbf{I}_{\#} \cdot \mathbf{H}_{\#}^B\right)^{-1} \mathbf{H}_{\#}^A \quad (4.8)$$

Calculando o conteúdo do parêntesis, temos

$$\mathbf{H}^C = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{jj}^B & \mathbf{H}_{jk}^B \\ \mathbf{H}_{kj}^B & \mathbf{H}_{kk}^B \end{bmatrix} \\ \mathbf{0} & \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ij}^B \\ \mathbf{H}_{ji}^B \end{bmatrix} \\ \mathbf{0} & \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ij}^A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_{jj}^A \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ii}^A & \mathbf{H}_{ij}^A \\ \mathbf{H}_{ji}^A & \mathbf{H}_{jj}^A \end{bmatrix} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

onde

$$\mathbf{H}_{jj} = \mathbf{H}_{jj}^A + \mathbf{H}_{jj}^B \quad (4.10)$$

A inversão da segunda matriz do segundo membro pode ser escrita da seguinte forma [64]:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{H}_{ij}^A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_{jj} & \mathbf{H}_{jk}^B \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{H}_{ij}^A (\mathbf{H}_{jj})^{-1} & \mathbf{H}_{ij}^A (\mathbf{H}_{jj})^{-1} \mathbf{H}_{jk}^B \\ \mathbf{0} & (\mathbf{H}_{jj})^{-1} & -(\mathbf{H}_{jj})^{-1} \mathbf{H}_{jk}^B \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

Substituindo a equação (4.11) na equação (4.9) e realizando a multiplicação destas três matrizes do segundo membro, temos

$$\mathbf{H}^C = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ii}^A - \mathbf{H}_{ij}^A (\mathbf{H}_{jj})^{-1} \mathbf{H}_{ji}^A & \mathbf{H}_{ij}^A - \mathbf{H}_{ij}^A (\mathbf{H}_{jj})^{-1} \mathbf{H}_{jj}^A & \mathbf{H}_{ij}^A (\mathbf{H}_{jj})^{-1} \mathbf{H}_{jk}^B \\ \mathbf{H}_{jj}^B (\mathbf{H}_{jj})^{-1} \mathbf{H}_{ji}^A & \mathbf{H}_{jj}^B (\mathbf{H}_{jj})^{-1} \mathbf{H}_{jj}^A & \mathbf{H}_{jk}^B - \mathbf{H}_{jj}^B (\mathbf{H}_{jj})^{-1} \mathbf{H}_{jk}^B \\ \mathbf{H}_{kj}^B (\mathbf{H}_{jj})^{-1} \mathbf{H}_{ji}^A & \mathbf{H}_{kj}^B (\mathbf{H}_{jj})^{-1} \mathbf{H}_{jj}^A & \mathbf{H}_{kk}^B - \mathbf{H}_{kj}^B (\mathbf{H}_{jj})^{-1} \mathbf{H}_{jk}^B \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

É de notar que a formulação já só exige a inversão da matriz  $\mathbf{H}_{jj}$ , de ordem igual ao número de coordenadas comuns às subestruturas, o que se traduz numa melhoria significativa nos resultados.

Podemos ainda simplificar a equação (4.12). Separando o segundo membro em duas matrizes, obtemos

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ii}^A & \mathbf{H}_{ij}^A & \mathbf{0} \\ \mathbf{H}_{ji}^A & \mathbf{H}_{jj}^A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{H}_{kk}^B \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ij}^A (\mathbf{H}_{jj})^{-1} \mathbf{H}_{ji}^A & \mathbf{H}_{ij}^A (\mathbf{H}_{jj})^{-1} \mathbf{H}_{jj}^A & -\mathbf{H}_{ij}^A (\mathbf{H}_{jj})^{-1} \mathbf{H}_{jk}^B \\ \mathbf{H}_{jj}^B (\mathbf{H}_{jj})^{-1} \mathbf{H}_{ji}^A & \mathbf{H}_{jj}^B (\mathbf{H}_{jj})^{-1} \mathbf{H}_{jj}^A & \mathbf{H}_{jk}^B (\mathbf{H}_{jj})^{-1} \mathbf{H}_{jk}^B - \mathbf{H}_{jk}^B \\ -\mathbf{H}_{kj}^B (\mathbf{H}_{jj})^{-1} \mathbf{H}_{ji}^A & -\mathbf{H}_{kj}^B (\mathbf{H}_{jj})^{-1} \mathbf{H}_{jj}^A & \mathbf{H}_{kk}^B (\mathbf{H}_{jj})^{-1} \mathbf{H}_{jk}^B \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

Os elementos da segunda linha da segunda matriz são constituídos por diferenças de matrizes; simplifiquemos esses três elementos. Do primeiro, vem

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{H}_{ji}^A - \mathbf{H}_{jj}^B \left( \mathbf{H}_{jj}^B + \mathbf{H}_{jj}^A \right)^{-1} \mathbf{H}_{ji}^A \\
 &= \left( \mathbf{I} - \mathbf{H}_{jj}^B \left( \mathbf{H}_{jj}^B + \mathbf{H}_{jj}^A \right)^{-1} \right) \mathbf{H}_{ji}^A \\
 &= \left( \left( \mathbf{H}_{jj}^B + \mathbf{H}_{jj}^A \right) \left( \mathbf{H}_{jj}^B + \mathbf{H}_{jj}^A \right)^{-1} - \mathbf{H}_{jj}^B \left( \mathbf{H}_{jj}^B + \mathbf{H}_{jj}^A \right)^{-1} \right) \mathbf{H}_{ji}^A \\
 &= \left( \left( \mathbf{H}_{jj}^B + \mathbf{H}_{jj}^A - \mathbf{H}_{jj}^B \right) \left( \mathbf{H}_{jj}^B + \mathbf{H}_{jj}^A \right)^{-1} \right) \mathbf{H}_{ji}^A \\
 &= \mathbf{H}_{jj}^A \left( \mathbf{H}_{jj}^B + \mathbf{H}_{jj}^A \right)^{-1} \mathbf{H}_{ji}^A
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

Por analogia, podemos também obter os seguintes resultados para os outros dois elementos da segunda linha:

$$\mathbf{H}_{jj}^A - \mathbf{H}_{jj}^B \left( \mathbf{H}_{jj} \right)^{-1} \mathbf{H}_{ji}^A = \mathbf{H}_{jj}^A \left( \mathbf{H}_{jj}^B + \mathbf{H}_{jj}^A \right)^{-1} \mathbf{H}_{jj}^A \tag{4.15}$$

$$\mathbf{H}_{jj}^B \left( \mathbf{H}_{jj} \right)^{-1} \mathbf{H}_{jk}^B - \mathbf{H}_{jk}^B = -\mathbf{H}_{jj}^A \left( \mathbf{H}_{jj}^B + \mathbf{H}_{jj}^A \right)^{-1} \mathbf{H}_{jk}^B \tag{4.16}$$

Substituindo as equações (4.14), (4.15) e (4.16) em (4.13) e (4.12), vem

$$\mathbf{H}^C = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ii}^A & \mathbf{H}_{ij}^A & \mathbf{0} \\ \mathbf{H}_{ji}^A & \mathbf{H}_{jj}^A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{H}_{kk}^B \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ij}^A \left( \mathbf{H}_{jj} \right)^{-1} \mathbf{H}_{ji}^A & \mathbf{H}_{ij}^A \left( \mathbf{H}_{jj} \right)^{-1} \mathbf{H}_{jj}^A & -\mathbf{H}_{ij}^A \left( \mathbf{H}_{jj} \right)^{-1} \mathbf{H}_{jk}^B \\ \mathbf{H}_{jj}^A \left( \mathbf{H}_{jj} \right)^{-1} \mathbf{H}_{ji}^A & \mathbf{H}_{jj}^A \left( \mathbf{H}_{jj} \right)^{-1} \mathbf{H}_{jj}^A & -\mathbf{H}_{jj}^A \left( \mathbf{H}_{jj} \right)^{-1} \mathbf{H}_{jk}^B \\ -\mathbf{H}_{kj}^B \left( \mathbf{H}_{jj} \right)^{-1} \mathbf{H}_{ji}^A & -\mathbf{H}_{kj}^B \left( \mathbf{H}_{jj} \right)^{-1} \mathbf{H}_{jj}^A & \mathbf{H}_{kj}^B \left( \mathbf{H}_{jj} \right)^{-1} \mathbf{H}_{jk}^B \end{bmatrix} \tag{4.17}$$

ou de uma maneira mais simples,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ii}^C & \mathbf{H}_{ij}^C & \mathbf{H}_{ik}^C \\ \mathbf{H}_{ji}^C & \mathbf{H}_{jj}^C & \mathbf{H}_{jk}^C \\ \mathbf{H}_{ki}^C & \mathbf{H}_{kj}^C & \mathbf{H}_{kk}^C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ii}^A & \mathbf{H}_{ij}^A & \mathbf{0} \\ \mathbf{H}_{ji}^A & \mathbf{H}_{jj}^A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{H}_{kk}^B \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ij}^A \\ \mathbf{H}_{jj}^A \\ -\mathbf{H}_{kj}^B \end{bmatrix} \left( \mathbf{H}_{jj}^A + \mathbf{H}_{jj}^B \right)^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ji}^A & \mathbf{H}_{jj}^A & -\mathbf{H}_{jk}^B \end{bmatrix} \tag{4.18}$$

A equação (4.18) pode trazer algumas vantagens nalgumas aplicações em relação a equação (4.12). Estas duas formulações pretendem normalmente obter a matriz de FRF da estrutura completa C a partir das matrizes das subestruturas A e B a acoplar. Este método permite substituir três inversões de matrizes da equação (4.4) por uma apenas  $\left( \mathbf{H}_{jj}^B + \mathbf{H}_{jj}^A \right)^{-1}$ , limitando assim possíveis problemas numéricos.

Será aqui sugerida uma abordagem mais simples ao problema sem utilizar as coordenadas internas da estrutura B.

### 4.3 Técnica alternativa de acoplamento

Na formulação aqui apresentada, no acoplamento das duas subestruturas A e B, serão apenas consideradas as coordenadas internas  $i$  de uma subestrutura A e as coordenadas  $j$  de ligação com uma subestrutura B, Batista e Maia [65] (Figura 4.3). As coordenadas internas da subestrutura B em grande parte das situações ou não tem interesse ou são de difícil acesso. A subestrutura B será objecto de identificação no processo de desacoplamento dinâmico.

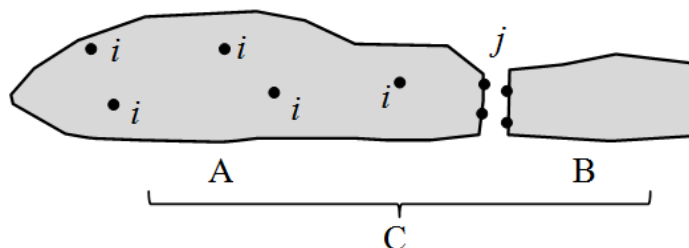


Figura 4.3: Acoplamento das subestruturas A e B numa estrutura C

A rigidez dinâmica  $Z^C$  da estrutura C pode ser escrita pela soma da rigidez dinâmica da subestrutura A,  $Z^A$ , com a rigidez dinâmica da subestrutura B,  $Z^B$ :

$$Z^C = Z^A + Z^B \quad (4.19)$$

Colocando em evidência à esquerda a matriz  $Z^A$  no segundo membro da equação (4.19),

$$Z^C = Z^A (I + H^A Z^B) \quad (4.20)$$

Onde  $H^A$  é a matriz de receptância da subestrutura A, ou seja, a inversa da matriz de rigidez dinâmica  $Z^A$ . Invertendo ambos os membros, temos,

$$H^C = (I + H^A Z^B)^{-1} H^A \quad (4.21)$$

Explicitando, em termos de submatrizes com as coordenadas  $i$  e  $j$ ,

$$\begin{bmatrix} H_{ii}^C & H_{ij}^C \\ H_{ji}^C & H_{jj}^C \end{bmatrix} = \left[ \begin{bmatrix} I_{ii} & 0 \\ 0 & I_{jj} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_{ii}^A & H_{ij}^A \\ H_{ji}^A & H_{jj}^A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Z_{jj}^B \end{bmatrix} \right]^{-1} \begin{bmatrix} H_{ii}^A & H_{ij}^A \\ H_{ji}^A & H_{jj}^A \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

Da equação (4.22), temos

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ii}^C & \mathbf{H}_{ij}^C \\ \mathbf{H}_{ji}^C & \mathbf{H}_{jj}^C \end{bmatrix} = \left[ \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{ii} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{jj} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{H}_{ij}^A \mathbf{Z}_{jj}^B \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_{jj}^A \mathbf{Z}_{jj}^B \end{bmatrix} \right]^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ii}^A & \mathbf{H}_{ij}^A \\ \mathbf{H}_{ji}^A & \mathbf{H}_{jj}^A \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

Simplificando,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ii}^C & \mathbf{H}_{ij}^C \\ \mathbf{H}_{ji}^C & \mathbf{H}_{jj}^C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{ii} & \mathbf{H}_{ij}^A \mathbf{Z}_{jj}^B \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{jj} + \mathbf{H}_{jj}^A \mathbf{Z}_{jj}^B \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ii}^A & \mathbf{H}_{ij}^A \\ \mathbf{H}_{ji}^A & \mathbf{H}_{jj}^A \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

A inversa de uma matriz triangular superior por blocos é demonstrada em [64] que pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} & -\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{C}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}^{-1} \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

Assim, a equação (4.24) pode ser assim escrita,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ii}^C & \mathbf{H}_{ij}^C \\ \mathbf{H}_{ji}^C & \mathbf{H}_{jj}^C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{ii} & -\mathbf{H}_{ij}^A \mathbf{Z}_{jj}^B \left( \mathbf{I}_{jj} + \mathbf{H}_{jj}^A \mathbf{Z}_{jj}^B \right)^{-1} \\ \mathbf{0} & \left( \mathbf{I}_{jj} + \mathbf{H}_{jj}^A \mathbf{Z}_{jj}^B \right)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ii}^A & \mathbf{H}_{ij}^A \\ \mathbf{H}_{ji}^A & \mathbf{H}_{jj}^A \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

Desenvolvendo,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ii}^C & \mathbf{H}_{ij}^C \\ \mathbf{H}_{ji}^C & \mathbf{H}_{jj}^C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ii}^A - \mathbf{H}_{ij}^A \mathbf{Z}_{jj}^B \left( \mathbf{I}_{jj} + \mathbf{H}_{jj}^A \mathbf{Z}_{jj}^B \right)^{-1} \mathbf{H}_{ji}^A & \mathbf{H}_{ij}^A - \mathbf{H}_{ij}^A \mathbf{Z}_{jj}^B \left( \mathbf{I}_{jj} + \mathbf{H}_{jj}^A \mathbf{Z}_{jj}^B \right)^{-1} \mathbf{H}_{jj}^A \\ \left( \mathbf{I}_{jj} + \mathbf{H}_{jj}^A \mathbf{Z}_{jj}^B \right)^{-1} \mathbf{H}_{ji}^A & \left( \mathbf{I}_{jj} + \mathbf{H}_{jj}^A \mathbf{Z}_{jj}^B \right)^{-1} \mathbf{H}_{jj}^A \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

Colocando a matriz  $\mathbf{H}^A$  em evidência,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ii}^C & \mathbf{H}_{ij}^C \\ \mathbf{H}_{ji}^C & \mathbf{H}_{jj}^C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ii}^A & \mathbf{H}_{ij}^A \\ \mathbf{H}_{ji}^A & \mathbf{H}_{jj}^A \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ij}^A \mathbf{Z}_{jj}^B \left( \mathbf{I}_{jj} + \mathbf{H}_{jj}^A \mathbf{Z}_{jj}^B \right)^{-1} \mathbf{H}_{ji}^A & \mathbf{H}_{ij}^A \mathbf{Z}_{jj}^B \left( \mathbf{I}_{jj} + \mathbf{H}_{jj}^A \mathbf{Z}_{jj}^B \right)^{-1} \mathbf{H}_{jj}^A \\ \mathbf{H}_{ji}^A - \left( \mathbf{I}_{jj} + \mathbf{H}_{jj}^A \mathbf{Z}_{jj}^B \right)^{-1} \mathbf{H}_{ji}^A & \mathbf{H}_{jj}^A - \left( \mathbf{I}_{jj} + \mathbf{H}_{jj}^A \mathbf{Z}_{jj}^B \right)^{-1} \mathbf{H}_{jj}^A \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

ou ainda,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ii}^A & \mathbf{H}_{ij}^A \\ \mathbf{H}_{ji}^A & \mathbf{H}_{jj}^A \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ii}^C & \mathbf{H}_{ij}^C \\ \mathbf{H}_{ji}^C & \mathbf{H}_{jj}^C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ij}^A \mathbf{Z}_{jj}^B \left( \mathbf{I}_{jj} + \mathbf{H}_{jj}^A \mathbf{Z}_{jj}^B \right)^{-1} \mathbf{H}_{ji}^A & \mathbf{H}_{ij}^A \mathbf{Z}_{jj}^B \left( \mathbf{I}_{jj} + \mathbf{H}_{jj}^A \mathbf{Z}_{jj}^B \right)^{-1} \mathbf{H}_{jj}^A \\ \mathbf{H}_{ji}^A - \left( \mathbf{I}_{jj} + \mathbf{H}_{jj}^A \mathbf{Z}_{jj}^B \right)^{-1} \mathbf{H}_{ji}^A & \mathbf{H}_{jj}^A - \left( \mathbf{I}_{jj} + \mathbf{H}_{jj}^A \mathbf{Z}_{jj}^B \right)^{-1} \mathbf{H}_{jj}^A \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

Os elementos da segunda linha da matriz do segundo membro são constituídas por diferenças de matrizes, vamos de seguida simplificar esses dois elementos. Do primeiro, vem

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{H}_{ji}^A - \left( \mathbf{I}_{jj} + \mathbf{H}_{jj}^A \mathbf{Z}_{jj}^B \right)^{-1} \mathbf{H}_{ji}^A \\
 &= \left( \mathbf{I}_{jj} - \left( \mathbf{I}_{jj} + \mathbf{H}_{jj}^A \mathbf{Z}_{jj}^B \right)^{-1} \right) \mathbf{H}_{ji}^A \\
 &= \left( \left( \mathbf{I}_{jj} + \mathbf{H}_{jj}^A \mathbf{Z}_{jj}^B \right) \left( \mathbf{I}_{jj} + \mathbf{H}_{jj}^A \mathbf{Z}_{jj}^B \right)^{-1} - \left( \mathbf{I}_{jj} + \mathbf{H}_{jj}^A \mathbf{Z}_{jj}^B \right)^{-1} \right) \mathbf{H}_{ji}^A \\
 &= \left( \left( \mathbf{I}_{jj} + \mathbf{H}_{jj}^A \mathbf{Z}_{jj}^B - \mathbf{I}_{jj} \right) \left( \mathbf{I}_{jj} + \mathbf{H}_{jj}^A \mathbf{Z}_{jj}^B \right)^{-1} \right) \mathbf{H}_{ji}^A \\
 &= \mathbf{H}_{jj}^A \mathbf{Z}_{jj}^B \left( \mathbf{I}_{jj} + \mathbf{H}_{jj}^A \mathbf{Z}_{jj}^B \right)^{-1} \mathbf{H}_{ji}^A
 \end{aligned} \tag{4.30}$$

Do segundo, seguindo um processo inteiramente análogo, temos

$$\mathbf{H}_{jj}^A - \left( \mathbf{I}_{jj} + \mathbf{H}_{jj}^A \mathbf{Z}_{jj}^B \right)^{-1} \mathbf{H}_{jj}^A = \mathbf{H}_{jj}^A \mathbf{Z}_{jj}^B \left( \mathbf{I}_{jj} + \mathbf{H}_{jj}^A \mathbf{Z}_{jj}^B \right)^{-1} \mathbf{H}_{jj}^A \tag{4.31}$$

Substituindo as equações (4.30) e (4.31) na equação (4.29) vem,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ii}^A & \mathbf{H}_{ij}^A \\ \mathbf{H}_{ji}^A & \mathbf{H}_{jj}^A \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ii}^C & \mathbf{H}_{ij}^C \\ \mathbf{H}_{ji}^C & \mathbf{H}_{jj}^C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ij}^A \mathbf{Z}_{jj}^B \left( \mathbf{I}_{jj} + \mathbf{H}_{jj}^A \mathbf{Z}_{jj}^B \right)^{-1} \mathbf{H}_{ji}^A & \mathbf{H}_{ij}^A \mathbf{Z}_{jj}^B \left( \mathbf{I}_{jj} + \mathbf{H}_{jj}^A \mathbf{Z}_{jj}^B \right)^{-1} \mathbf{H}_{jj}^A \\ \mathbf{H}_{jj}^A \mathbf{Z}_{jj}^B \left( \mathbf{I}_{jj} + \mathbf{H}_{jj}^A \mathbf{Z}_{jj}^B \right)^{-1} \mathbf{H}_{ji}^A & \mathbf{H}_{jj}^A \mathbf{Z}_{jj}^B \left( \mathbf{I}_{jj} + \mathbf{H}_{jj}^A \mathbf{Z}_{jj}^B \right)^{-1} \mathbf{H}_{jj}^A \end{bmatrix} \tag{4.32}$$

Reorganizando o segundo membro, obtém-se,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ii}^A & \mathbf{H}_{ij}^A \\ \mathbf{H}_{ji}^A & \mathbf{H}_{jj}^A \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ii}^C & \mathbf{H}_{ij}^C \\ \mathbf{H}_{ji}^C & \mathbf{H}_{jj}^C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ii}^A & \mathbf{H}_{ij}^A \\ \mathbf{H}_{ji}^A & \mathbf{H}_{jj}^A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Z}_{jj}^B \left( \mathbf{I}_{jj} + \mathbf{H}_{jj}^A \mathbf{Z}_{jj}^B \right)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ii}^A & \mathbf{H}_{ij}^A \\ \mathbf{H}_{ji}^A & \mathbf{H}_{jj}^A \end{bmatrix} \tag{4.33}$$

Simplificando o elemento que contém a rigidez dinâmica de B,  $\mathbf{Z}_{jj}^B$ ,

$$\mathbf{Z}_{jj}^B \left( \mathbf{I}_{jj} + \mathbf{H}_{jj}^A \mathbf{Z}_{jj}^B \right)^{-1} = \left( \left( \mathbf{I}_{jj} + \mathbf{H}_{jj}^A \mathbf{Z}_{jj}^B \right) \mathbf{H}_{jj}^B \right)^{-1} = \left( \mathbf{H}_{jj}^B + \mathbf{H}_{jj}^A \right)^{-1} \tag{4.34}$$

Substituindo a equação (4.34) na equação (4.33) temos,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ii}^A & \mathbf{H}_{ij}^A \\ \mathbf{H}_{ji}^A & \mathbf{H}_{jj}^A \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ii}^C & \mathbf{H}_{ij}^C \\ \mathbf{H}_{ji}^C & \mathbf{H}_{jj}^C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ii}^A & \mathbf{H}_{ij}^A \\ \mathbf{H}_{ji}^A & \mathbf{H}_{jj}^A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \left( \mathbf{H}_{jj}^A + \mathbf{H}_{jj}^B \right)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ii}^A & \mathbf{H}_{ij}^A \\ \mathbf{H}_{ji}^A & \mathbf{H}_{jj}^A \end{bmatrix} \tag{4.35}$$

Simplificando,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ii}^C & \mathbf{H}_{ij}^C \\ \mathbf{H}_{ji}^C & \mathbf{H}_{jj}^C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ii}^A & \mathbf{H}_{ij}^A \\ \mathbf{H}_{ji}^A & \mathbf{H}_{jj}^A \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ij}^A \\ \mathbf{H}_{jj}^A \end{bmatrix} \left( \mathbf{H}_{jj}^A + \mathbf{H}_{jj}^B \right)^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ii}^A & \mathbf{H}_{ij}^A \\ \mathbf{H}_{ji}^A & \mathbf{H}_{jj}^A \end{bmatrix} \tag{4.36}$$

A equação (4.36) representa a expressão do acoplamento entre duas subestruturas A e B; neste processo apenas é necessário fazer uma inversão, envolvendo somente as coordenadas  $j$ ,  $\left( \mathbf{H}_{jj}^A + \mathbf{H}_{jj}^B \right)^{-1}$ , para obter a resposta dinâmica da estrutura C.

A equação (4.36) encontrada é uma simplificação do acoplamento clássico (equação (4.18)). Efectivamente, se na equação (4.18) forem eliminadas as FRF contendo as coordenadas  $k$ , obtemos a equação (4.36).

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{\ddot{u}\ddot{u}}^C & \mathbf{H}_{\ddot{u}\ddot{v}}^C & \mathbf{H}_{\ddot{u}\ddot{k}}^C \\ \mathbf{H}_{\ddot{v}\ddot{u}}^C & \mathbf{H}_{\ddot{v}\ddot{v}}^C & \mathbf{H}_{\ddot{v}\ddot{k}}^C \\ \mathbf{H}_{\ddot{k}\ddot{u}}^C & \mathbf{H}_{\ddot{k}\ddot{v}}^C & \mathbf{H}_{\ddot{k}\ddot{k}}^C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{\ddot{u}\ddot{u}}^A & \mathbf{H}_{\ddot{u}\ddot{v}}^A & \mathbf{0} \\ \mathbf{H}_{\ddot{v}\ddot{u}}^A & \mathbf{H}_{\ddot{v}\ddot{v}}^A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{H}_{\ddot{k}\ddot{k}}^B \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{\ddot{u}\ddot{v}}^A \\ \mathbf{H}_{\ddot{v}\ddot{v}}^A \\ -\mathbf{H}_{\ddot{k}\ddot{v}}^B \end{bmatrix} \left( \mathbf{H}_{\ddot{v}\ddot{v}}^A + \mathbf{H}_{\ddot{v}\ddot{v}}^B \right)^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{\ddot{v}\ddot{u}}^A & \mathbf{H}_{\ddot{v}\ddot{v}}^A & -\mathbf{H}_{\ddot{v}\ddot{k}}^B \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

A equação (4.18) só será realmente útil nos casos em que é necessário realizar medições nas coordenadas internas da subestrutura B. Na subestrutura B, que representa genericamente a junta de um acoplamento, temos geralmente uma grande dificuldade no acesso a essas coordenadas; assim, é fácil perceber que as coordenadas  $k$  sejam normalmente ignoradas nos estudos.

## 4.4 Técnicas de desacoplamento

As juntas são geralmente subestruturas complexas e difíceis de analisar; perante esse obstáculo, surge a ideia de fazer o processo inverso do acoplamento utilizando a equação (4.36).

Neste processo, as FRF da subestrutura A são calculadas numericamente, admitindo que é possível obter com alguma exactidão um modelo desta subestrutura. As FRF da estrutura C só podem ser obtidas experimentalmente pois temos o desconhecimento do comportamento da subestrutura B.

Da equação (4.36) podemos desenvolver três expressões para a determinação da matriz  $\mathbf{H}_{jj}^B$ , que caracteriza dinamicamente a subestrutura B. Uma das expressões não utiliza as coordenadas da junta, a outra apenas utiliza as coordenadas da junta e uma terceira utiliza as coordenadas na junta e fora dela.

### 4.4.1 Sem a utilização das coordenadas da junta

Podemos não ter a possibilidade de utilizar as coordenadas  $j$  da estrutura C, ou seja, as coordenadas de ligação da junta ao resto da estrutura podem ficar inacessíveis pelo seu posicionamento, Batista e Maia [63].

Desta forma, o único elemento da matriz  $\mathbf{H}^C$  a ter em conta é  $\mathbf{H}_{ii}^C$  e assim da equação (4.36), vem

$$\mathbf{H}_{ii}^C = \mathbf{H}_{ii}^A - \mathbf{H}_{ij}^A \left( \mathbf{H}_{jj}^A + \mathbf{H}_{jj}^B \right)^{-1} \mathbf{H}_{ji}^A \quad (4.37)$$

Reorganizando a equação (4.37), obtemos

$$\mathbf{H}_{ij}^A \left( \mathbf{H}_{jj}^A + \mathbf{H}_{jj}^B \right)^{-1} \mathbf{H}_{ji}^A = \mathbf{H}_{ii}^A - \mathbf{H}_{ii}^C \quad (4.38)$$

Multiplicando a equação (4.38) à esquerda por  $\left( \mathbf{H}_{ij}^A \right)^{-1}$  e à direita por  $\left( \mathbf{H}_{ji}^A \right)^{-1}$  temos,

$$\left( \mathbf{H}_{jj}^A + \mathbf{H}_{jj}^B \right)^{-1} = \left( \mathbf{H}_{ij}^A \right)^{-1} \left( \mathbf{H}_{ii}^A - \mathbf{H}_{ii}^C \right) \left( \mathbf{H}_{ji}^A \right)^{-1} \quad (4.39)$$

Esta operação só é possível matematicamente se  $i$  for igual a  $j$ , pois só com esta condição podemos garantir a existência das duas inversas das duas matrizes em simultâneo, ou seja, as duas matrizes têm que ser quadradas.

E assim, resolvendo em ordem a  $\mathbf{H}_{jj}^B$  vem,

$$\mathbf{H}_{jj}^B = \mathbf{H}_{ji}^A \left( \mathbf{H}_{ii}^A - \mathbf{H}_{ii}^C \right)^{-1} \mathbf{H}_{ij}^A - \mathbf{H}_{jj}^A \quad (4.40)$$

Para obter as propriedades da junta (subestrutura B) apenas é necessária uma inversão de uma matriz com a dimensão igual ao número de coordenadas  $i$ , com  $i = j$ .

No caso de  $i > j$  (situação mais comum), podemos obter  $\mathbf{H}_{jj}^B$  de outra forma, multiplicando a equação (4.38) à esquerda por  $\mathbf{W}_{ji}$  e a direita por  $\mathbf{W}_{ij}$  temos,

$$\mathbf{W}_{ji} \mathbf{H}_{ij}^A \left( \mathbf{H}_{jj}^A + \mathbf{H}_{jj}^B \right)^{-1} \mathbf{H}_{ji}^A \mathbf{W}_{ij} = \mathbf{W}_{ji} \left( \mathbf{H}_{ii}^A - \mathbf{H}_{ii}^C \right) \mathbf{W}_{ij} \quad (4.41)$$

Assumimos que estas novas matrizes são arbitrárias e com dimensões  $ji$  e  $ij$ . Reorganizando a equação (4.41), podemos escrever

$$\left( \mathbf{H}_{jj}^A + \mathbf{H}_{jj}^B \right)^{-1} = \left( \mathbf{W}_{ji} \mathbf{H}_{ij}^A \right)^{-1} \mathbf{W}_{ji} \left( \mathbf{H}_{ii}^A - \mathbf{H}_{ii}^C \right) \mathbf{W}_{ij} \left( \mathbf{H}_{ji}^A \mathbf{W}_{ij} \right)^{-1} \quad (4.42)$$

Que matrizes  $\mathbf{W}_{ji}$  e  $\mathbf{W}_{ij}$  é que devemos usar? Não havendo nenhuma indicação especial, usaremos  $\mathbf{H}_{ji}^A$  e  $\mathbf{H}_{ij}^A$  respectivamente, assim

$$\left( \mathbf{H}_{jj}^A + \mathbf{H}_{jj}^B \right)^{-1} = \left( \mathbf{H}_{ji}^A \mathbf{H}_{ij}^A \right)^{-1} \mathbf{H}_{ji}^A \left( \mathbf{H}_{ii}^A - \mathbf{H}_{ii}^C \right) \mathbf{H}_{ij}^A \left( \mathbf{H}_{ji}^A \mathbf{H}_{ij}^A \right)^{-1} \quad (4.43)$$

em que  $\left( \mathbf{H}_{ji}^A \mathbf{H}_{ij}^A \right)^{-1} \mathbf{H}_{ji}^A$  é a pseudo-inversa de  $\mathbf{H}_{ji}^A$ , designada habitualmente por  $\left( \mathbf{H}_{ji}^A \right)^+$  e  $\mathbf{H}_{ij}^A \left( \mathbf{H}_{ji}^A \mathbf{H}_{ij}^A \right)^{-1}$  é a pseudo-inversa de  $\mathbf{H}_{ij}^A$  ( $\left( \mathbf{H}_{ij}^A \right)^+$ ). Estas pseudo-inversas só existem se  $i \geq j$  (Anexo A). Poderíamos portanto, da equação (4.38), ter escrito

$$\left( \mathbf{H}_{jj}^A + \mathbf{H}_{jj}^B \right)^{-1} = \left( \mathbf{H}_{ij}^A \right)^+ \left( \mathbf{H}_{ii}^A - \mathbf{H}_{ii}^C \right) \left( \mathbf{H}_{ji}^A \right)^+ \quad (4.44)$$

donde

$$\mathbf{H}_{jj}^B = \mathbf{H}_{ji}^A \left( \mathbf{H}_{ii}^A - \mathbf{H}_{ii}^C \right)^{-1} \mathbf{H}_{ij}^A - \mathbf{H}_{jj}^A \quad (4.45)$$

No entanto, podemos de uma forma mais eficaz usar a equação (4.43) e após realizar as inversas de ambos os membros, obtemos

$$\mathbf{H}_{jj}^B = \mathbf{H}_{ji}^A \mathbf{H}_{ij}^A \left( \mathbf{H}_{ji}^A \left( \mathbf{H}_{ii}^A - \mathbf{H}_{ii}^C \right) \mathbf{H}_{ij}^A \right)^{-1} \mathbf{H}_{ji}^A \mathbf{H}_{ij}^A - \mathbf{H}_{jj}^A \quad (4.46)$$

Com  $i \geq j$  e desta forma, em lugar de invertermos uma matriz de ordem  $i$ , basta-nos inverter uma matriz com a dimensão igual ao número de coordenadas  $j$ .

### 4.4.2 Utilização apenas das coordenadas da junta

Se nos for permitido recolher respostas nas coordenadas das juntas podemos chegar a outras expressões para a determinação da resposta dinâmica de B.

Recorrendo à equação (4.36) e procurando a determinação da matriz  $\mathbf{H}_{jj}^B$  com a possibilidade de medição nas coordenadas  $j$  da junta, temos,

$$\mathbf{H}_{jj}^C = \mathbf{H}_{jj}^A - \mathbf{H}_{jj}^A \left( \mathbf{H}_{jj}^A + \mathbf{H}_{jj}^B \right)^{-1} \mathbf{H}_{jj}^A \quad (4.47)$$

Reorganizando a equação (4.47), obtemos

$$\mathbf{H}_{jj}^A \left( \mathbf{H}_{jj}^A + \mathbf{H}_{jj}^B \right)^{-1} \mathbf{H}_{jj}^A = \mathbf{H}_{jj}^A - \mathbf{H}_{jj}^C \quad (4.48)$$

Multiplicando a equação (4.48) à esquerda por  $\left( \mathbf{H}_{jj}^A \right)^{-1}$ , temos

$$\left( \mathbf{H}_{jj}^A + \mathbf{H}_{jj}^B \right)^{-1} \mathbf{H}_{jj}^A = \mathbf{I}_{jj} - \left( \mathbf{H}_{jj}^A \right)^{-1} \mathbf{H}_{jj}^C \quad (4.49)$$

Invertendo (4.49),

$$\left( \mathbf{H}_{jj}^A \right)^{-1} \left( \mathbf{H}_{jj}^A + \mathbf{H}_{jj}^B \right) = \left( \mathbf{I}_{jj} - \left( \mathbf{H}_{jj}^A \right)^{-1} \mathbf{H}_{jj}^C \right)^{-1} \quad (4.50)$$

Assim, resolvendo em ordem a  $\mathbf{H}_{jj}^B$ , vem

$$\mathbf{H}_{jj}^B = \mathbf{H}_{jj}^A \left( \mathbf{I}_{jj} - \left( \mathbf{H}_{jj}^A \right)^{-1} \mathbf{H}_{jj}^C \right)^{-1} - \mathbf{H}_{jj}^A \quad (4.51)$$

Podemos reorganizar o segundo membro para chegar a uma expressão mais simples,

$$\mathbf{H}_{jj}^B = \mathbf{H}_{jj}^A \left( \left( \mathbf{I}_{jj} - \left( \mathbf{H}_{jj}^A \right)^{-1} \mathbf{H}_{jj}^C \right)^{-1} - \mathbf{I}_{jj} \right) \quad (4.52)$$

$$\mathbf{H}_{jj}^B = \mathbf{H}_{jj}^A \left[ \left( \mathbf{I}_{jj} - \left( \mathbf{H}_{jj}^A \right)^{-1} \mathbf{H}_{jj}^C \right)^{-1} - \left( \mathbf{I}_{jj} - \left( \mathbf{H}_{jj}^A \right)^{-1} \mathbf{H}_{jj}^C \right)^{-1} \left( \mathbf{I}_{jj} - \left( \mathbf{H}_{jj}^A \right)^{-1} \mathbf{H}_{jj}^C \right) \right] \quad (4.53)$$

Donde se obtém,

$$\mathbf{H}_{jj}^B = \mathbf{H}_{jj}^A \left( \mathbf{I}_{jj} - \left( \mathbf{H}_{jj}^A \right)^{-1} \mathbf{H}_{jj}^C \right)^{-1} \left[ \mathbf{I}_{jj} - \left( \mathbf{I}_{jj} - \left( \mathbf{H}_{jj}^A \right)^{-1} \mathbf{H}_{jj}^C \right) \right] \quad (4.54)$$

Simplificando,

$$\mathbf{H}_{jj}^B = \mathbf{H}_{jj}^A \left( \mathbf{I}_{jj} - \left( \mathbf{H}_{jj}^A \right)^{-1} \mathbf{H}_{jj}^C \right)^{-1} \left( \mathbf{H}_{jj}^A \right)^{-1} \mathbf{H}_{jj}^C \quad (4.55)$$

$$\mathbf{H}_{jj}^B = \mathbf{H}_{jj}^A \left( \mathbf{H}_{jj}^A \left( \mathbf{I}_{jj} - \left( \mathbf{H}_{jj}^A \right)^{-1} \mathbf{H}_{jj}^C \right) \right)^{-1} \mathbf{H}_{jj}^C \quad (4.56)$$

$$\mathbf{H}_{jj}^B = \mathbf{H}_{jj}^A \left( \mathbf{H}_{jj}^A - \mathbf{H}_{jj}^C \right)^{-1} \mathbf{H}_{jj}^C \quad (4.57)$$

$$\mathbf{H}_{jj}^B = \left( \mathbf{I}_{jj} - \mathbf{H}_{jj}^C \left( \mathbf{H}_{jj}^A \right)^{-1} \right)^{-1} \mathbf{H}_{jj}^C \quad (4.58)$$

D'Ambrogio e Fregolent [39], partindo da matriz de rigidez dinâmica condensada da estrutura A deduzem uma expressão idêntica à equação (4.58).

Em alternativa, podemos escrever esta formulação de uma forma mais “simpática”, partindo da equação (4.48):

$$\left( \mathbf{H}_{jj}^A + \mathbf{H}_{jj}^B \right)^{-1} = \left( \mathbf{H}_{jj}^A \right)^{-1} \left( \mathbf{H}_{jj}^A - \mathbf{H}_{jj}^C \right) \left( \mathbf{H}_{jj}^A \right)^{-1} \quad (4.59)$$

de onde se obtém,

$$\mathbf{H}_{jj}^B = \mathbf{H}_{jj}^A \left( \mathbf{H}_{jj}^A - \mathbf{H}_{jj}^C \right)^{-1} \mathbf{H}_{jj}^A - \mathbf{H}_{jj}^A \quad (4.60)$$

ou seja,

$$\mathbf{H}_{jj}^B = \left( \mathbf{H}_{jj}^A \left( \mathbf{H}_{jj}^A - \mathbf{H}_{jj}^C \right)^{-1} - \mathbf{I}_{jj} \right) \mathbf{H}_{jj}^A \quad (4.61)$$

### 4.4.3 Utilização das coordenadas $i$ e $j$

Recorrendo novamente à equação (4.36) e procurando de outra forma a determinação da matriz  $\mathbf{H}_{jj}^B$  com a possibilidade de medição nas coordenadas  $j$  da junta, temos,

$$\mathbf{H}_{ij}^C = \mathbf{H}_{ij}^A - \mathbf{H}_{ij}^A \left( \mathbf{H}_{jj}^A + \mathbf{H}_{jj}^B \right)^{-1} \mathbf{H}_{jj}^A \quad (4.62)$$

Reorganizando a equação (4.62), obtemos

$$\mathbf{H}_{ij}^A \left( \mathbf{H}_{jj}^A + \mathbf{H}_{jj}^B \right)^{-1} \mathbf{H}_{jj}^A = \mathbf{H}_{ij}^A - \mathbf{H}_{ij}^C \quad (4.63)$$

Multiplicando a equação (4.63) à esquerda por  $\mathbf{W}_{ji}$  temos,

$$\mathbf{W}_{ji} \mathbf{H}_{ij}^A \left( \mathbf{H}_{jj}^A + \mathbf{H}_{jj}^B \right)^{-1} \mathbf{H}_{jj}^A = \mathbf{W}_{ji} \left( \mathbf{H}_{ij}^A - \mathbf{H}_{ij}^C \right) \quad (4.64)$$

Assumimos que estas novas matrizes  $\mathbf{W}$  são arbitrárias e com dimensão  $ji$ . Podemos também aqui usar a mesma lógica usada na equação (4.43), fazendo  $\mathbf{W}_{ji} = \mathbf{H}_{ji}^A$ .

Reorganizando a equação (4.64), podemos escrever:

$$\left( \mathbf{H}_{jj}^A + \mathbf{H}_{jj}^B \right)^{-1} = \left( \mathbf{H}_{ji}^A \mathbf{H}_{ij}^A \right)^{-1} \mathbf{H}_{ji}^A \left( \mathbf{H}_{ij}^A - \mathbf{H}_{ij}^C \right) \left( \mathbf{H}_{jj}^A \right)^{-1} \quad (4.65)$$

Resolvendo em ordem a  $\mathbf{H}_{jj}^B$ , vem

$$\mathbf{H}_{jj}^B = \mathbf{H}_{jj}^A \left( \mathbf{H}_{ji}^A \left( \mathbf{H}_{ij}^A - \mathbf{H}_{ij}^C \right) \right)^{-1} \mathbf{H}_{ji}^A \mathbf{H}_{ij}^A - \mathbf{H}_{jj}^A \quad (4.66)$$

Para existir inversa temos que acautelar que  $i \geq j$ .

#### 4.4.4 Sumário

Concluindo, temos três formulações que nos permitem determinar a matriz  $\mathbf{H}_{jj}^B$ .

##### Formulação 1

$$\mathbf{H}_{jj}^B = \mathbf{H}_{ji}^A \mathbf{H}_{ij}^A \left( \mathbf{H}_{ji}^A \left( \mathbf{H}_{ii}^A - \mathbf{H}_{ii}^C \right) \mathbf{H}_{ij}^A \right)^{-1} \mathbf{H}_{ji}^A \mathbf{H}_{ij}^A - \mathbf{H}_{jj}^A \quad (4.46)$$

##### Formulação 2

$$\mathbf{H}_{jj}^B = \left( \mathbf{H}_{jj}^A \left( \mathbf{H}_{jj}^A - \mathbf{H}_{jj}^C \right) - \mathbf{I}_{jj} \right) \mathbf{H}_{jj}^A \quad (4.61)$$

##### Formulação 3

$$\mathbf{H}_{jj}^B = \mathbf{H}_{jj}^A \left( \mathbf{H}_{ji}^A \left( \mathbf{H}_{ij}^A - \mathbf{H}_{ij}^C \right) \right)^{-1} \mathbf{H}_{ji}^A \mathbf{H}_{ij}^A - \mathbf{H}_{jj}^A \quad (4.66)$$

Na Formulação 1 e na Formulação 3 temos que salvaguardar que  $i \geq j$ .

#### 4.4.5 Exemplo numérico 1

Vamos aqui abordar o método referido anteriormente aplicando-o a uma estrutura simples constituída por três vigas com quatro graus de liberdade cada, Figura 4.4. Este modelo pode ser entendido como uma união de duas vigas feita por uma ligação aparafusada que será entendida como a subestrutura B. O modelo escolhido remete para a situação em que temos tantas coordenadas internas  $i$  como coordenadas da junta  $j$ . Iremos, só neste exemplo numérico, usar as acelerações obtidas nas coordenadas.

Vamos admitir que não é possível realizar medições nas coordenadas da junta. Assim, devemos utilizar a equação (4.40) para determinar as características dinâmicas da junta (subestrutura B),

$$\mathbf{H}_{jj}^B = \mathbf{H}_{ji}^A \left( \mathbf{H}_{ii}^A - \mathbf{H}_{ii}^C \right)^{-1} \mathbf{H}_{ij}^A - \mathbf{H}_{jj}^A \quad (4.40)$$

A estrutura C é constituída pela subestrutura A mais a subestrutura B.

Coordenadas  $i$ : 1, 2, 7, 8

Coordenadas  $j$ : 3, 4, 5, 6

Subestrutura A – Viga A<sub>1</sub> + Viga A<sub>2</sub>

Subestrutura B – Viga B

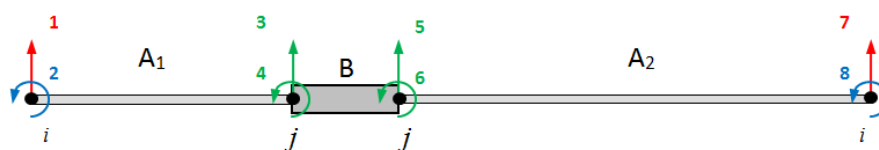


Figura 4.4: Acoplamento das subestruturas A e B, formando a estrutura C

As características dos elementos a unir estão na Tabela 4.1.

| Viga           | Comprimento | Largura | Espessura | $\nu$ | $E$     | $\rho$                  |
|----------------|-------------|---------|-----------|-------|---------|-------------------------|
| A <sub>1</sub> | 270 mm      | 30 mm   | 5 mm      | 0.3   | 194 GPa | 7562 kg/m <sup>3</sup>  |
| B              | 200 mm      | 30 mm   | 5 mm      | 0.3   | 194 GPa | 7562 kg/m <sup>3</sup>  |
| A <sub>2</sub> | 370 mm      | 30 mm   | 5 mm      | 0.3   | 194 GPa | 7562 kg/ m <sup>3</sup> |

Tabela 4.1: Características das vigas do exemplo numérico 1

Para obter todas as FRF da equação (4.40) vamos utilizar três soluções:

- 1- Determinar as FRF a partir da solução analítica das equações de Bernoulli-Euler.
- 2- Determinar as FRF a partir da solução analítica das equações de Timoshenko.
- 3- Determinar as FRF utilizando a solução do método dos elementos finitos Bernoulli-Euler (*MEF*).

As expressões que descrevem as FRF das equações de Bernoulli-Euler e Timoshenko estão descritas no Anexo C. Vamos utilizar a gama de frequência de 0-1000 Hz. Neste intervalo já iremos encontrar algumas frequências naturais e algumas anti-ressonâncias das várias vigas.

A matriz  $H_{jj}^B$  terá a dimensão de 4x4 visto que temos quatro graus de liberdade que formam a ligação (o numero de coordenadas  $j$  é 4). Assim podemos comparar as FRF das duas matrizes elemento a elemento.

As FRF das subestruturas A, B e C são calculadas como se apenas se tratasse de uma só viga com secção constante e assim as equações de Bernoulli-Euler e Timoshenko aplicam-se directamente, pois as expressões analíticas são formuladas com as coordenadas nas extremidades de uma viga. No caso do método dos elementos finitos é discretizado cada subestrutura em 5 elementos Bernoulli-Euler.

Como podemos verificar na Figura 4.5 comparando as FRF  $H_{11}^C$  e  $H_{12}^C$ , as três soluções reproduzem resultados ligeiramente diferentes nas mais altas frequências.

Como era de esperar a solução de MEF apresenta frequências naturais mais elevadas que as duas soluções analíticas.

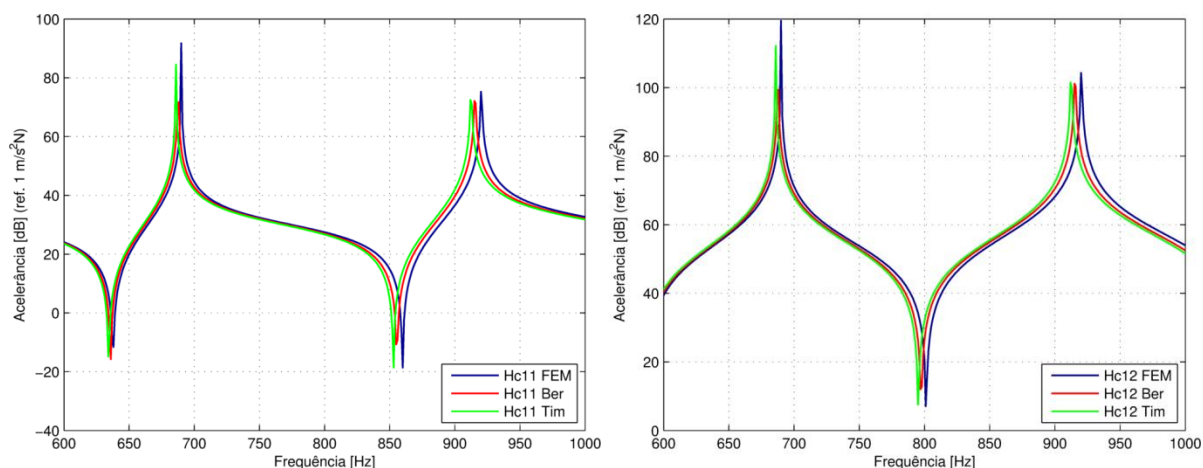


Figura 4.5: Comparação das acelerações  $H_{11}^C$  e  $H_{12}^C$  obtido com as três soluções

As equações de Timoshenko são mais precisas que as equações de Bernoulli-Euler pelo facto de acrescentar a influência da inércia de rotação e da deformação de corte das secções. Vamos neste exemplo utilizar cada uma delas para fazer o desacoplamento.

Neste processo de desacoplamento é considerado que não há qualquer perturbação na obtenção das FRF, ou seja, não há qualquer ruído. As FRF são matematicamente exactas.

Para avaliar a eficácia do método vamos apenas comparar as FRF  $H_{11}^B$  e  $H_{12}^B$  obtidas no desacoplamento, designadas por Hb11 e Hb12 respectivamente.

Na Figura 4.6 e Figura 4.7, temos a comparação das FRF exactas (linha preta) com as FRF obtidas pelo desacoplamento da equação (4.40) com as soluções analíticas (Ruído: 0%). Podemos verificar, sem grandes surpresas, que o método funciona bem para estas duas soluções.

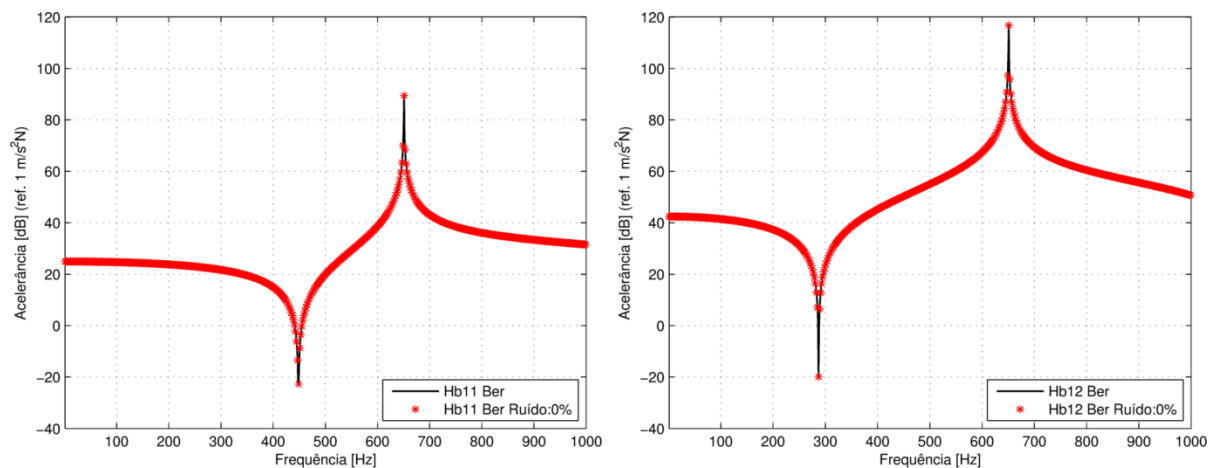


Figura 4.6: Acelerâncias  $H_{11}^B$  e  $H_{12}^B$  - Vigas Bernoulli-Euler

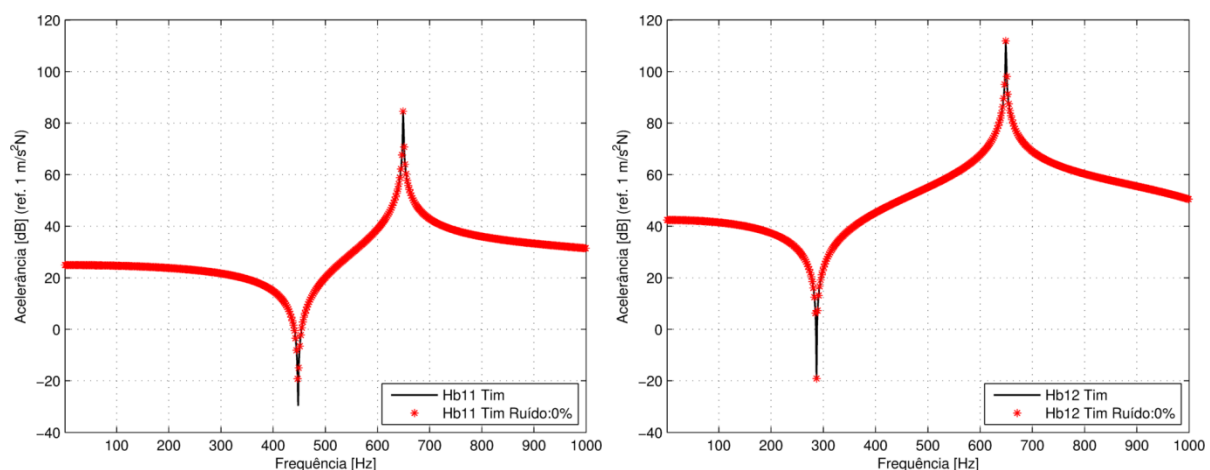


Figura 4.7: Acelerâncias  $H_{11}^B$  e  $H_{12}^B$  - Vigas Timoshenko

Na solução de elementos finitos é utilizado o elemento finito de viga com quatro graus de liberdade e assim temos as seguintes matrizes de rigidez e de massa do elemento Bernoulli-Euler:

$$K_e = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad M_e = \frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (4.67)$$

A aceleração  $H(\omega)$  é definida por:

$$H(\omega) = -\omega^2 (K - \omega^2 M)^{-1} \quad (4.68)$$

Na Figura 4.8 temos também uma correcta relação entre as FRF exactas (linha preta) e as FRF Hbjj11 e Hbjj12 determinadas pelo desacoplamento..

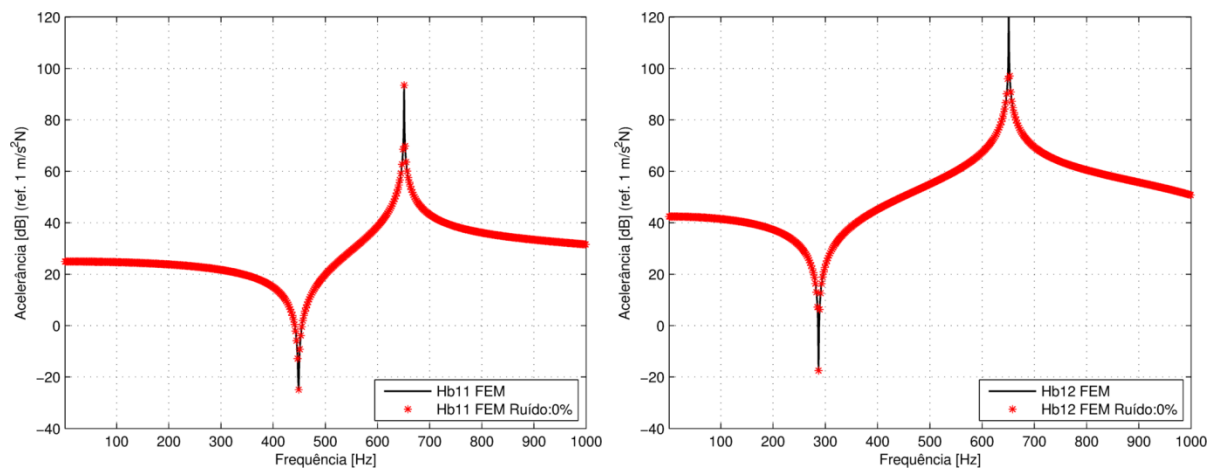


Figura 4.8: Acelerações  $H_{11}^B$  e  $H_{12}^B$  – Vigas MEF

### Exemplo numérico com ruído

Considerando a estrutura da Figura 4.4, podemos verificar que ao aplicar o método de desacoplamento utilizando a equação (4.40) a um caso real só necessitamos de determinar o  $H_{ii}^C$  experimentalmente. As outras FRF podem ser determinadas por métodos numéricos.

Para simular os erros inerentes à aquisição das FRF da matriz  $H_{ii}^C$ , vamos perturbar os valores dessas FRF impondo um ruído, dependente da amplitude, de acordo com a seguinte expressão:

$$\tilde{H}_{pq}(\omega_k) = H_{pq}(\omega_k) + H_{pq}(\omega_k) \cdot \frac{\gamma}{50} \cdot (rand(1) - 0,5) \quad (4.69)$$

onde o  $\gamma$  é o nível de ruído em % e o  $rand(1)$  é uma distribuição aleatória uniforme com valores entre 0 e 1. Neste exemplo vamos utilizar um nível de ruído de 1%.

As FRF com ruído obtidas com o desacoplamento utilizando os elementos finitos são muito semelhantes aos obtidos pelas soluções analíticas das equações de Bernoulli-Euler e Timoshenko. Assim vamos aqui utilizar os elementos finitos para calcular as FRF do desacoplamento.

Como facilmente vamos verificar, o resultado obtido confirma a elevada instabilidade do método. As Figura 4.9 e a Figura 4.10 mostram a evolução do ruído.

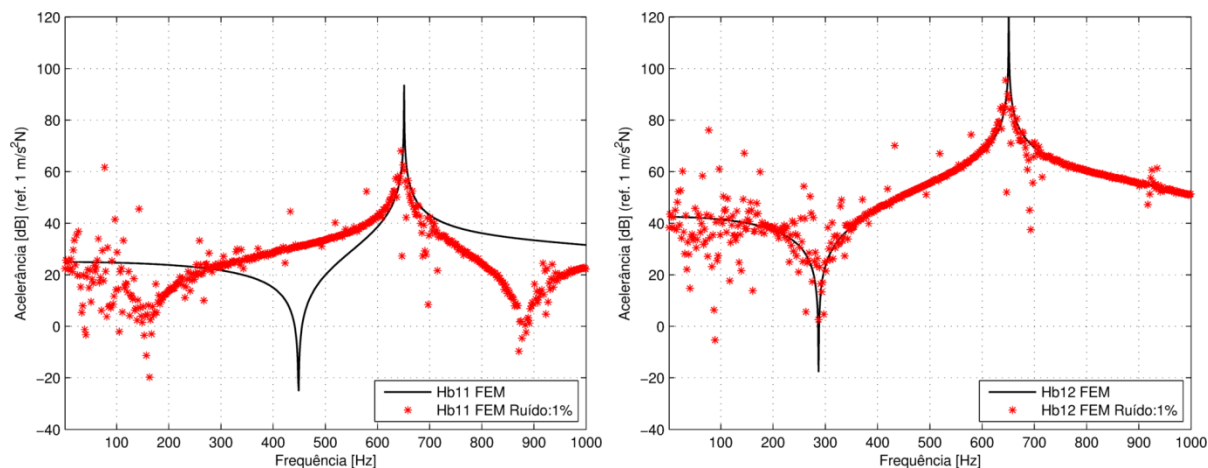


Figura 4.9: Acelerâncias  $H_{11}^B$  e  $H_{12}^B$  com ruído de 1%

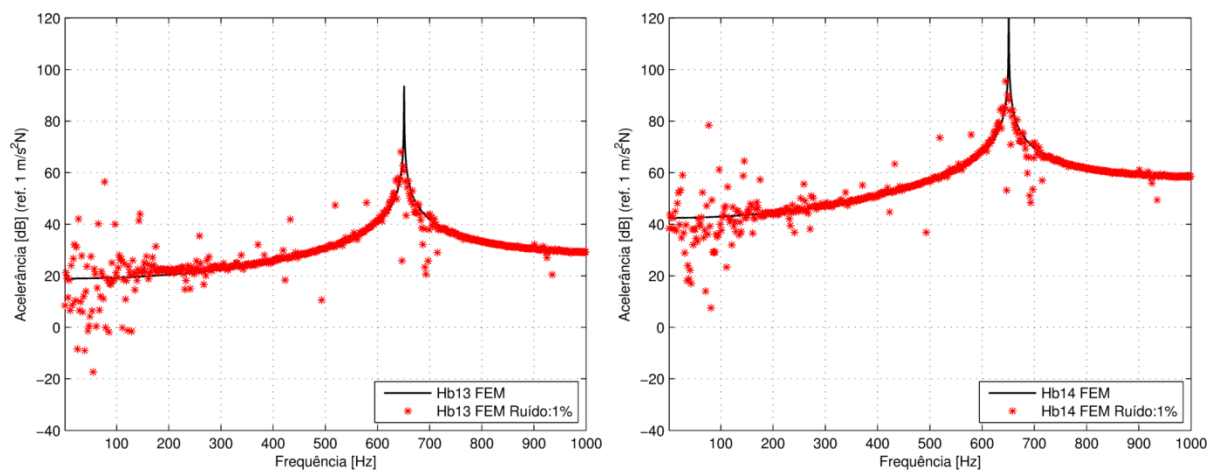


Figura 4.10: Acelerâncias  $H_{13}^B$  e  $H_{14}^B$  com ruído de 1%

## Discussão

O facto de termos apenas quatro coordenadas fora da junta pode ter levado a que o processo de desacoplamento clássico aplicado a esta situação seja ainda mais instável que o previsto. A operação de inversão  $(\mathbf{H}_{ii}^A - \mathbf{H}_{ii}^C)^{-1}$  é com certeza a responsável pela instabilidade.

As duas soluções analíticas utilizadas para a determinação das FRF de vigas não se revelam práticas para estruturas em que seja necessário a obtenção de FRF em coordenadas internas da viga. Por este motivo neste trabalho será utilizado o método dos elementos finitos para a obtenção de modelos numéricos.

### 4.4.6 Exemplo numérico 2

Este exemplo será utilizado para comparar as três formulações de desacoplamento referidas na secção 4.4.4. Vamos utilizar para isso um acoplamento de vigas como identificado na Figura 4.11 e escolher a formulação que nos possa dar um melhor resultado. Verifica-se que se adicionarmos massas pontuais em determinadas coordenadas podemos melhorar o resultado do desacoplamento (Batista e Maia [63]).

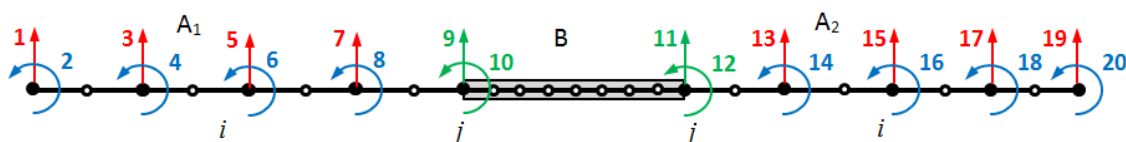


Figura 4.11: Acoplamento das subestruturas A e B, formando a estrutura C

A estrutura C é constituída pelo acoplamento das vigas A1, B e A2. O objectivo é caracterizar a viga central B (determinar  $\mathbf{H}_{jj}^B$ ) assumindo que  $\mathbf{H}^A$  é calculada numericamente e que  $\mathbf{H}^C$  é calculado via experimental.

Utilizando o método dos elementos finitos, foi escolhido o elemento de vigas com quatro graus de liberdade. Descretizou-se cada uma das três vigas em oito elementos e

só se consideraram os nós indicados na Figura 4.11. como coordenadas  $i$  e  $j$  onde é possível medir e excitar a estrutura.

As características das vigas a unir estão na Tabela 4.2.

| Vigas | Comprimento | Largura | Espessura | $E$     | $\rho$                 |
|-------|-------------|---------|-----------|---------|------------------------|
| $A_1$ | 300 mm      | 25 mm   | 3 mm      | 210 GPa | 7850 kg/m <sup>3</sup> |
| B     | 400 mm      | 25 mm   | 6 mm      | 210 GPa | 7850 kg/m <sup>3</sup> |
| $A_2$ | 300 mm      | 25 mm   | 3 mm      | 210 GPa | 7850 kg/m <sup>3</sup> |

Tabela 4.2: Características das vigas do exemplo numérico 2

### Escolha da formulação

Para simular os erros experimentais foi imposto uma perturbação a todos os elementos  $pq$  da matriz  $H^C$  para as três formulações. Esta perturbação está descrita na equação (4.69). Neste exemplo também vamos utilizar um nível de ruído de 1%.

Os elementos  $H_{11}^B$  e  $H_{12}^B$  da matriz  $H_{jj}^B$  obtida com as três formulações estão representados na Figura 4.12. As grandes perturbações nas respostas obtidas são em parte devido a problemas numéricos das inversões das matrizes existentes em cada uma das formulações.

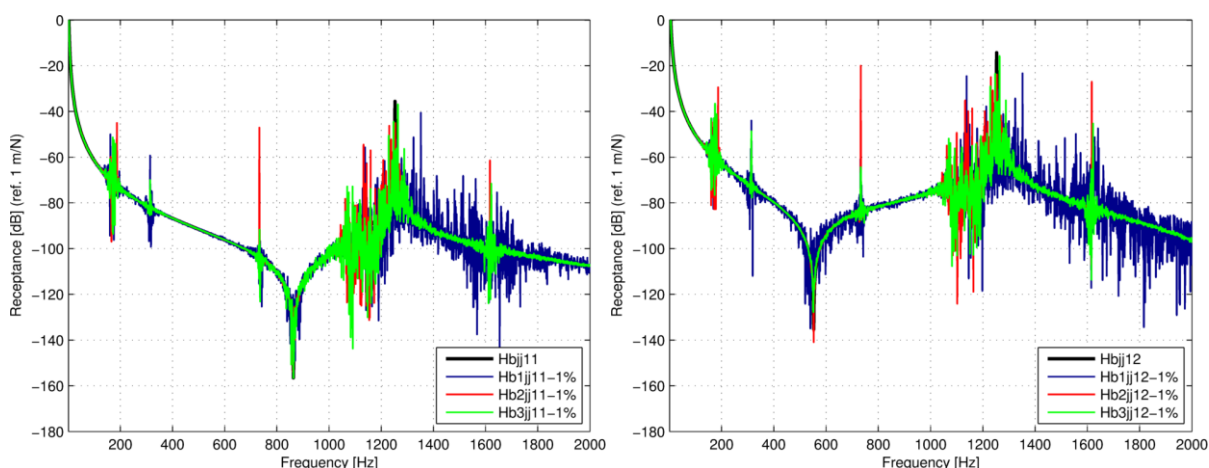


Figura 4.12: FRF  $H_{11}^B$  e  $H_{12}^B$  das três formulações

Na Figura 4.13 estão representados o módulo das diferenças entre a resposta numericamente exacta  $H_{bjj}$  e a resposta obtida pelas três formulações ( $H_{b1jj}$ ,  $H_{b2jj}$  e  $H_{b3jj}$ ). A resposta  $H_{b2jj}$  da segunda formulação produz ao longo de toda a gama de frequência um erro inferior às outras duas.

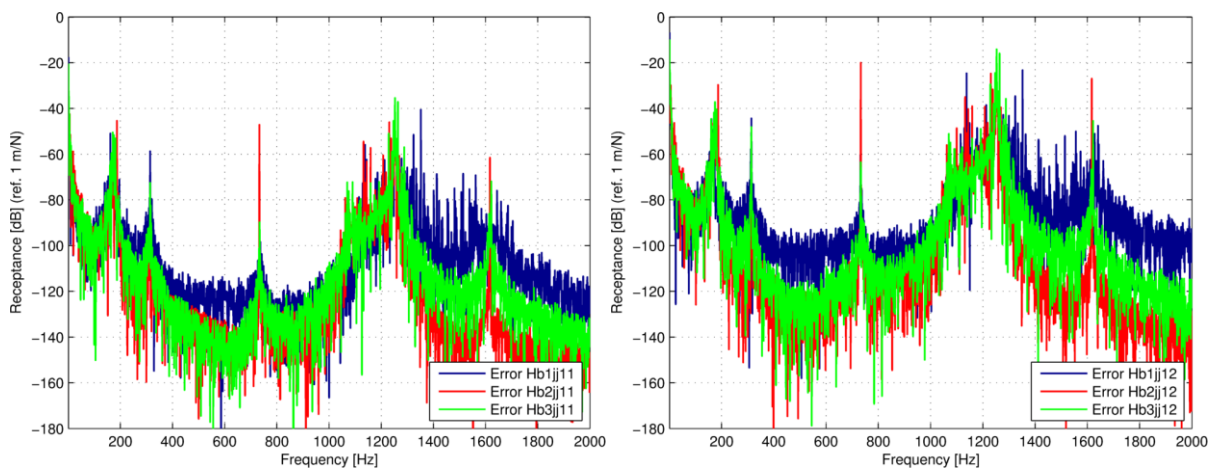


Figura 4.13: Erro das FRF  $H_{11}^B$  e  $H_{12}^B$  das três formulações

Podemos concluir que para a nossa situação a segunda formulação reproduzirá melhores resultados. Na Figura 4.14 está a resposta  $H_{b2jj}$  do modelo 2 com a resposta numericamente exacta  $H_{bjj}$ .

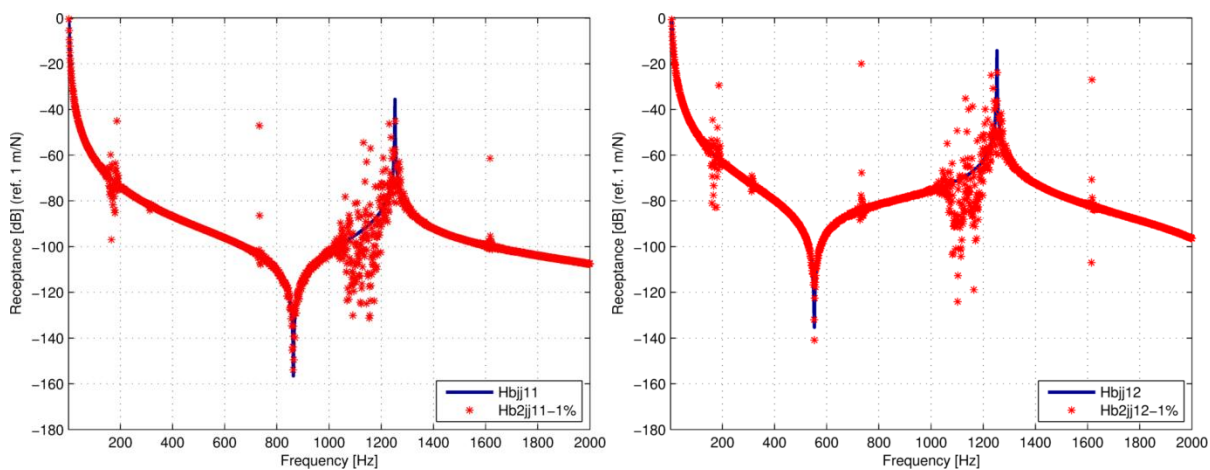


Figura 4.14: FRF  $H_{11}^B$  e  $H_{12}^B$  da Formulação 2

### ***Estratégias para melhorar os resultados***

É claro que não podemos ficar satisfeitos com o resultado da Figura 4.14. Vamos tentar melhorá-los. Da equação (4.61) facilmente se pode concluir que haverá problemas na inversão se a diferença entre  $H_{jj}^A$  e  $H_{jj}^C$  for muito pequena. Para tentar aumentar esta diferença vamos alterar a nossa estrutura adicionando massas pontuais nos nós da subestrutura A e estrutura C sem alterar a subestrutura B.

#### **Adicionar massas à estrutura A**

Foi adicionado aos nós 1,3,5 e 15,17,19 da estrutura C uma massa de 35 gramas. Os novos resultados de  $H_{11}^B$  e  $H_{12}^B$  estão na Figura 4.15.

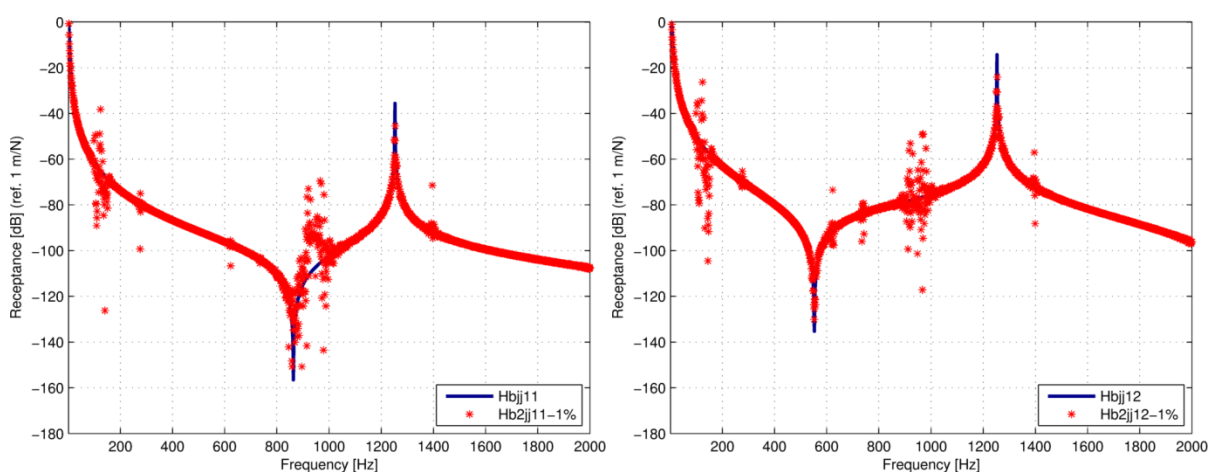


Figura 4.15: FRF  $H_{11}^B$  e  $H_{12}^B$  com a adição das seis massas na subestrutura A

Verificamos que a perturbação encontrada entre os 1000-1200 Hz na Figura 4.14 se desloca para o intervalo 800-1000 Hz, Figura 4.15. O resultado obtido é de certa forma melhorado.

#### **Adicionar massas a estrutura B**

Uma alternativa pode ser adicionar massas na subestrutura B. Assim, vamos adicionar massas nas coordenadas  $j$ , 9 e 11 (massas de 35 gramas). Os resultados obtidos estão na Figura 4.16.

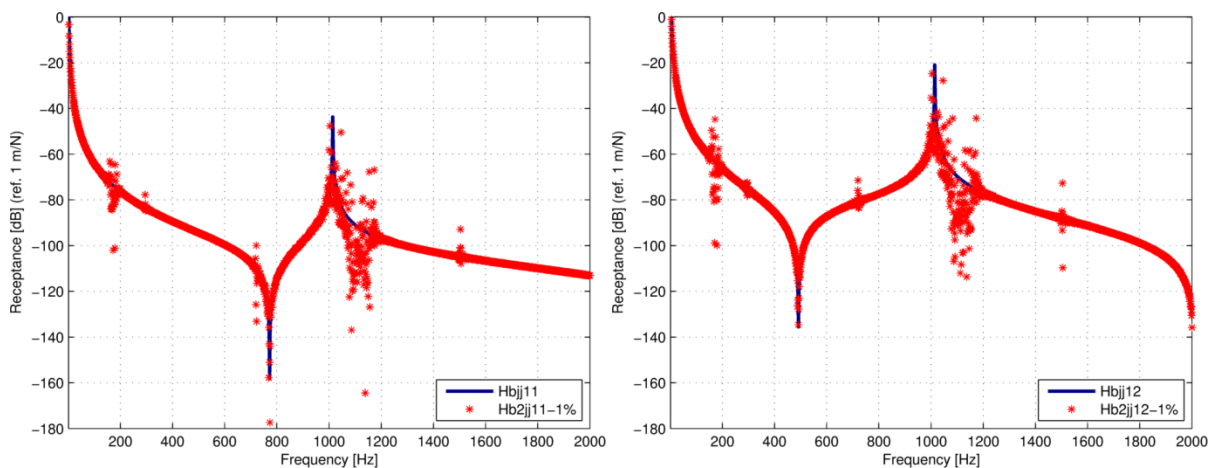


Figura 4.16: FRF  $H_{11}^B$  e  $H_{12}^B$  com a adição das duas massas de 35 gramas na estrutura B

A estrutura B foi alterada, a frequência natural identificada na Figura 4.14 é deslocada para a esquerda. No entanto, a perturbação mantém-se na zona dos 1000-1200 Hz.

Podemos concluir que a perturbação é provocada pela subestrutura A. Assim podemos melhorar os resultados adicionando massas maiores na subestrutura B para que a frequência natural se afaste da zona de perturbação.

Assim foi colocado nos mesmos nós uma massa de 70 gramas, Figura 4.17.

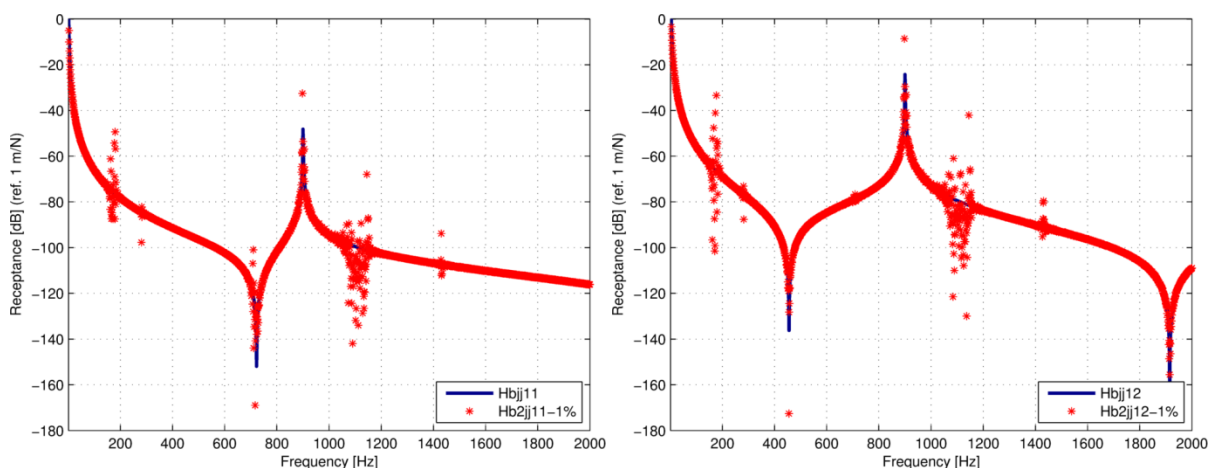


Figura 4.17: FRF  $H_{11}^B$  e  $H_{12}^B$  com a adição das duas massas de 70 gramas na estrutura B

Os resultados são claramente melhores. Para obter a resposta dinâmica de B temos que fazer um desacoplamento das massas adicionadas, como podemos ver na Figura 4.18.

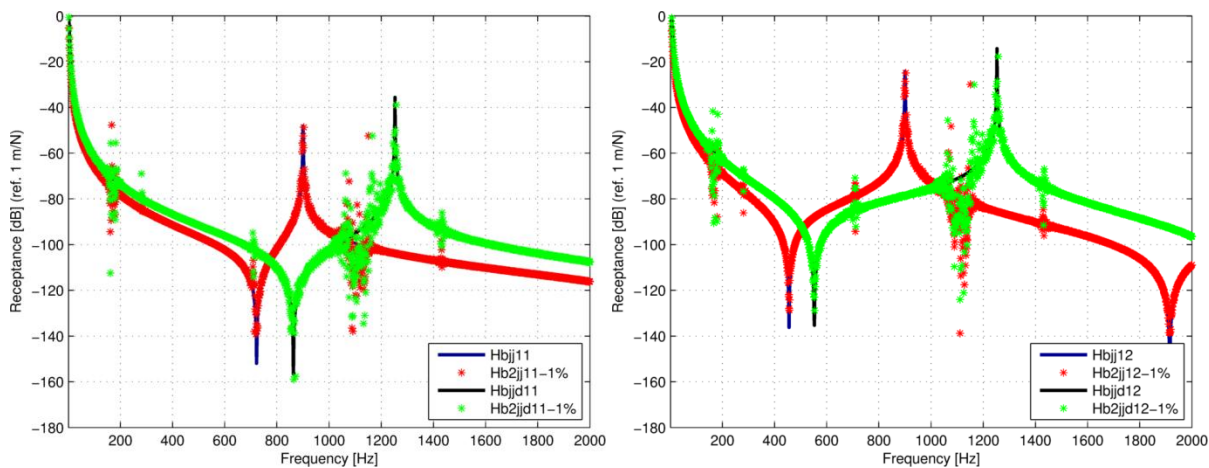


Figura 4.18: FRF  $H_{11}^B$  e  $H_{12}^B$  com e sem as duas massas de 70 gramas na estrutura B

Embora os resultados sejam melhores do que o inicial (Figura 4.14), são piores do que os da Figura 4.15, quando as massas foram adicionadas à subestrutura A. As perturbações aumentaram novamente na mesma gama de frequências.

### Acoplamento

Um dos interesses do desacoplamento de estruturas é a necessidade de caracterizar uma determinada estrutura específica que está inserida numa estrutura mais complexa. Com esta caracterização podemos inclusive prever o comportamento de estruturas mais complexas onde estas poderão estar inseridas. Contrariamente ao processo de desacoplamento, que tende a ser instável, como mostrado no presente trabalho, o processo de acoplamento é geralmente bastante estável.

Partindo desta necessidade, vamos acoplar a subestrutura B do problema anterior, determinada com 1% de ruído, às mesmas duas subestruturas  $A_1$  e  $A_2$  mas com um comprimento de 400 mm. Usando os resultados da Figura 4.14 é obtido o comportamento mostrado na Figura 4.19.

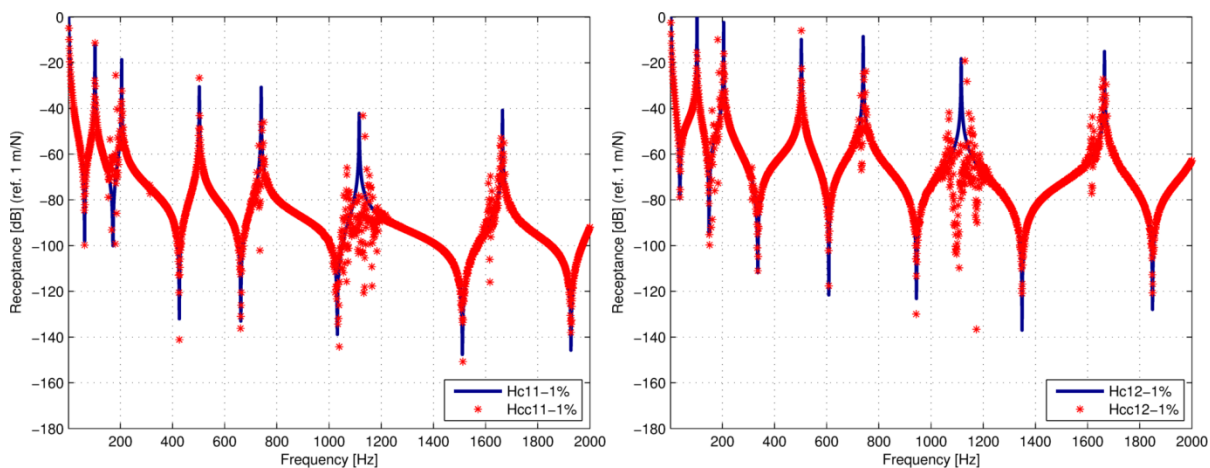


Figura 4.19: FRF  $H_{11}^C$  e  $H_{12}^C$  do acoplamento de  $A_1$  e  $A_2$  com a subestrutura B

Na Figura 4.19 é visível a perturbação na zona dos 1000-1200 Hz. Vamos avaliar o comportamento do acoplamento com a subestrutura B determinado com a adição da massa na subestrutura A presente na Figura 4.15.

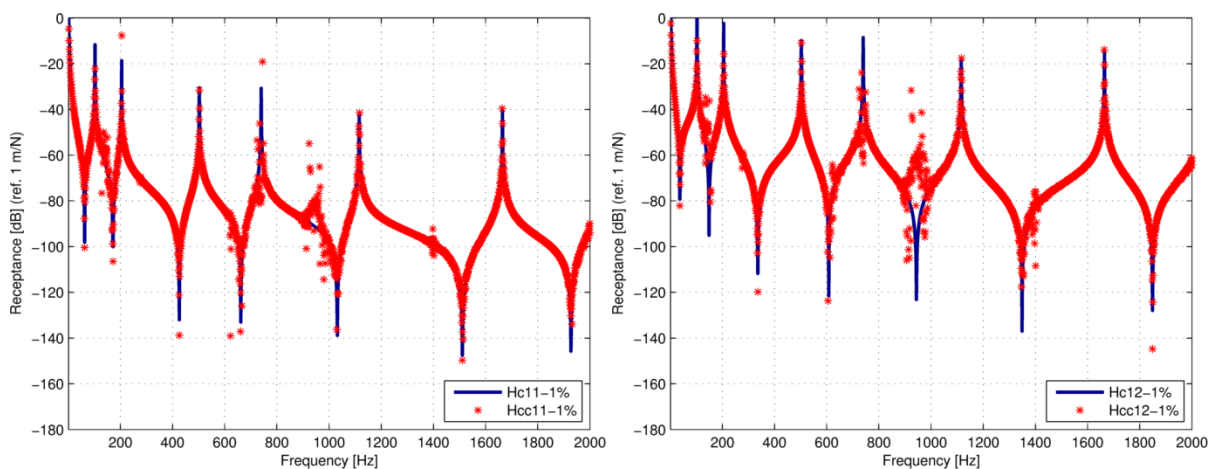


Figura 4.20:  $H_{11}^C$  e  $H_{12}^C$  do acoplamento de  $A_1$  e  $A_2$  com a subestrutura B com a adição de massa em A

Os resultados são melhorados e as perturbações são mais reduzidas, conforme o esperado. Certamente as melhores soluções teriam sido obtidas se se tivesse realizada uma análise modal de identificação para os resultados da Figura 4.15, antes de realizar o processo de acoplamento.

### ***Discussão***

Foram aqui expostas três formulações para realizar um desacoplamento em função dos locais possíveis de medição. A formulação que apresentou melhores resultados requer medições nos pontos de ligação das subestruturas, o que, infelizmente, nem sempre é possível.

Qualquer uma das três formulações revelou ser numericamente instável, devido à inversão de diferença de matrizes. Foram apresentadas melhorias quando são adicionadas massas pontuais em subestruturas fora daquela que pretendemos caracterizar. Com a adição dessas massas foi possível mover as frequências naturais, permitindo entender os problemas que acontecem e como já foi referido, melhorar os resultados.

#### **4.4.7 Outras técnicas de desacoplamento**

Na tentativa de minimizar os problemas de instabilidade surgidos nos exemplos numéricos descritos no ponto 4.4.5 e 4.4.6, Wang [50] sugere uma alternativa para a determinação da característica dinâmica da junta  $H_{jj}^B$  e para além desta serão aqui sugeridas outras duas formas de determinar  $H_{jj}^B$ . Estas três formulações que vão ser aqui apresentadas têm a particularidade de utilizarem todas as submatrizes com coordenadas  $i$  e  $j$  das subestruturas A e da estrutura C.

### Formulação 4 - Técnica de desacoplamento de Wang

Wang e Zheng [50], utilizando o equilíbrio de forças do acoplamento utilizado por Ren [46], consegue chegar à expressão do desacoplamento clássico, equação (4.35),

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ii}^A & \mathbf{H}_{ij}^A \\ \mathbf{H}_{ji}^A & \mathbf{H}_{jj}^A \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ii}^C & \mathbf{H}_{ij}^C \\ \mathbf{H}_{ji}^C & \mathbf{H}_{jj}^C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ii}^A & \mathbf{H}_{ij}^A \\ \mathbf{H}_{ji}^A & \mathbf{H}_{jj}^A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (\mathbf{H}_{jj}^A + \mathbf{H}_{jj}^B)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ii}^A & \mathbf{H}_{ij}^A \\ \mathbf{H}_{ji}^A & \mathbf{H}_{jj}^A \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

Simplificando a equação, temos

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ij}^A \mathbf{H}_{jj}^{-1} \mathbf{H}_{ji}^A & \mathbf{H}_{ij}^A \mathbf{H}_{jj}^{-1} \mathbf{H}_{jj}^A \\ \mathbf{H}_{jj}^A \mathbf{H}_{jj}^{-1} \mathbf{H}_{ji}^A & \mathbf{H}_{jj}^A \mathbf{H}_{jj}^{-1} \mathbf{H}_{jj}^A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ii}^A - \mathbf{H}_{ii}^C & \mathbf{H}_{ij}^A - \mathbf{H}_{ij}^C \\ \mathbf{H}_{ji}^A - \mathbf{H}_{ji}^C & \mathbf{H}_{jj}^A - \mathbf{H}_{jj}^C \end{bmatrix} \quad (4.70)$$

onde  $\mathbf{H}_{jj} = \mathbf{H}_{jj}^A + \mathbf{H}_{jj}^B$ . Adicione-se a seguinte matriz aos dois membros:

$$\mathbf{Add} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ii}^A \mathbf{H}_{ii}^A & \mathbf{H}_{ii}^A \mathbf{H}_{ij}^A \\ \mathbf{H}_{ji}^A \mathbf{H}_{ii}^A & \mathbf{H}_{ji}^A \mathbf{H}_{ij}^A \end{bmatrix} \quad (4.71)$$

Assim, temos

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ii}^A \mathbf{H}_{ii}^A + \mathbf{H}_{ij}^A \mathbf{H}_{jj}^{-1} \mathbf{H}_{ji}^A & \mathbf{H}_{ii}^A \mathbf{H}_{ij}^A + \mathbf{H}_{ij}^A \mathbf{H}_{jj}^{-1} \mathbf{H}_{jj}^A \\ \mathbf{H}_{ji}^A \mathbf{H}_{ii}^A + \mathbf{H}_{jj}^A \mathbf{H}_{jj}^{-1} \mathbf{H}_{ji}^A & \mathbf{H}_{ji}^A \mathbf{H}_{ij}^A + \mathbf{H}_{jj}^A \mathbf{H}_{jj}^{-1} \mathbf{H}_{jj}^A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ii}^A - \mathbf{H}_{ii}^C & \mathbf{H}_{ij}^A - \mathbf{H}_{ij}^C \\ \mathbf{H}_{ji}^A - \mathbf{H}_{ji}^C & \mathbf{H}_{jj}^A - \mathbf{H}_{jj}^C \end{bmatrix} + \mathbf{Add} \quad (4.72)$$

Com o objectivo de isolar  $\mathbf{H}_{jj}$  podemos reescrever o primeiro membro,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ii}^A & \mathbf{H}_{ij}^A \\ \mathbf{H}_{ji}^A & \mathbf{H}_{jj}^A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{ii} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_{jj}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ii}^A & \mathbf{H}_{ij}^A \\ \mathbf{H}_{ji}^A & \mathbf{H}_{jj}^A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ii}^A \mathbf{H}_{ii}^A + \mathbf{H}_{ii}^A - \mathbf{H}_{ii}^C & \mathbf{H}_{ii}^A \mathbf{H}_{ij}^A + \mathbf{H}_{ij}^A - \mathbf{H}_{ij}^C \\ \mathbf{H}_{ji}^A \mathbf{H}_{ii}^A + \mathbf{H}_{ji}^A - \mathbf{H}_{ji}^C & \mathbf{H}_{ji}^A \mathbf{H}_{ij}^A + \mathbf{H}_{jj}^A - \mathbf{H}_{jj}^C \end{bmatrix} \quad (4.73)$$

Depois de realizar a inversa de ambos os membros, obtém-se

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_{ii} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_{jj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ii}^A & \mathbf{H}_{ij}^A \\ \mathbf{H}_{ji}^A & \mathbf{H}_{jj}^A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ii}^A \mathbf{H}_{ii}^A + \mathbf{H}_{ii}^A - \mathbf{H}_{ii}^C & \mathbf{H}_{ii}^A \mathbf{H}_{ij}^A + \mathbf{H}_{ij}^A - \mathbf{H}_{ij}^C \\ \mathbf{H}_{ji}^A \mathbf{H}_{ii}^A + \mathbf{H}_{ji}^A - \mathbf{H}_{ji}^C & \mathbf{H}_{ji}^A \mathbf{H}_{ij}^A + \mathbf{H}_{jj}^A - \mathbf{H}_{jj}^C \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ii}^A & \mathbf{H}_{ij}^A \\ \mathbf{H}_{ji}^A & \mathbf{H}_{jj}^A \end{bmatrix} \quad (4.74)$$

Recorrendo à expressão  $\mathbf{H}_{jj} = \mathbf{H}_{jj}^A + \mathbf{H}_{jj}^B$ , conseguimos determinar  $\mathbf{H}_{jj}^B$ :

$$\mathbf{H}_{jj}^B = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ji}^A & \mathbf{H}_{jj}^A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ii}^A \mathbf{H}_{ii}^A + \mathbf{H}_{ii}^A - \mathbf{H}_{ii}^C & \mathbf{H}_{ii}^A \mathbf{H}_{ij}^A + \mathbf{H}_{ij}^A - \mathbf{H}_{ij}^C \\ \mathbf{H}_{ji}^A \mathbf{H}_{ii}^A + \mathbf{H}_{ji}^A - \mathbf{H}_{ji}^C & \mathbf{H}_{ji}^A \mathbf{H}_{ij}^A + \mathbf{H}_{jj}^A - \mathbf{H}_{jj}^C \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ij}^A \\ \mathbf{H}_{jj}^A \end{bmatrix} - \mathbf{H}_{jj}^A \quad (4.75)$$

Mais adiante iremos quantificar a sensibilidade ao ruído desta formulação (4.75).

Como novidade, apresentam-se de seguida duas novas metodologias alternativas, as formulações 5 e 6.

### Formulação 5

Iniciamos com a equação (4.22):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ii}^C & \mathbf{H}_{ij}^C \\ \mathbf{H}_{ji}^C & \mathbf{H}_{jj}^C \end{bmatrix} = \left[ \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{ii} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{jj} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ii}^A & \mathbf{H}_{ij}^A \\ \mathbf{H}_{ji}^A & \mathbf{H}_{jj}^A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Z}_{jj}^B \end{bmatrix} \right]^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ii}^A & \mathbf{H}_{ij}^A \\ \mathbf{H}_{ji}^A & \mathbf{H}_{jj}^A \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

Multiplicando à esquerda por  $\left[ \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{ii} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{jj} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ii}^A & \mathbf{H}_{ij}^A \\ \mathbf{H}_{ji}^A & \mathbf{H}_{jj}^A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Z}_{jj}^B \end{bmatrix} \right]$  temos,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ii}^C & \mathbf{H}_{ij}^C \\ \mathbf{H}_{ji}^C & \mathbf{H}_{jj}^C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ii}^A & \mathbf{H}_{ij}^A \\ \mathbf{H}_{ji}^A & \mathbf{H}_{jj}^A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Z}_{jj}^B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ii}^C & \mathbf{H}_{ij}^C \\ \mathbf{H}_{ji}^C & \mathbf{H}_{jj}^C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ii}^A & \mathbf{H}_{ij}^A \\ \mathbf{H}_{ji}^A & \mathbf{H}_{jj}^A \end{bmatrix} \quad (4.76)$$

Isolando a matriz de rigidez  $\mathbf{Z}_{jj}^B$ , podemos escrever

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Z}_{jj}^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ii}^A & \mathbf{H}_{ij}^A \\ \mathbf{H}_{ji}^A & \mathbf{H}_{jj}^A \end{bmatrix}^{-1} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ii}^A & \mathbf{H}_{ij}^A \\ \mathbf{H}_{ji}^A & \mathbf{H}_{jj}^A \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ii}^C & \mathbf{H}_{ij}^C \\ \mathbf{H}_{ji}^C & \mathbf{H}_{jj}^C \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ii}^C & \mathbf{H}_{ij}^C \\ \mathbf{H}_{ji}^C & \mathbf{H}_{jj}^C \end{bmatrix}^{-1} \quad (4.77)$$

Realizando a inversa de ambos os membros, obtém-se

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_{jj}^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ii}^C & \mathbf{H}_{ij}^C \\ \mathbf{H}_{ji}^C & \mathbf{H}_{jj}^C \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ii}^A & \mathbf{H}_{ij}^A \\ \mathbf{H}_{ji}^A & \mathbf{H}_{jj}^A \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ii}^C & \mathbf{H}_{ij}^C \\ \mathbf{H}_{ji}^C & \mathbf{H}_{jj}^C \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ii}^A & \mathbf{H}_{ij}^A \\ \mathbf{H}_{ji}^A & \mathbf{H}_{jj}^A \end{bmatrix} \quad (4.78)$$

Podemos assim obter uma quinta formulação para caracterizar a subestrutura B,

$$\mathbf{H}_{jj}^B = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ii}^C & \mathbf{H}_{ij}^C \\ \mathbf{H}_{ji}^C & \mathbf{H}_{jj}^C \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ii}^A & \mathbf{H}_{ij}^A \\ \mathbf{H}_{ji}^A & \mathbf{H}_{jj}^A \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ii}^C & \mathbf{H}_{ij}^C \\ \mathbf{H}_{ji}^C & \mathbf{H}_{jj}^C \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ij}^A \\ \mathbf{H}_{jj}^A \end{bmatrix} \quad (4.79)$$

Vamos também mais à frente quantificar a sensibilidade ao ruído desta formulação.

### Formulação 6

Nesta nova formulação vamos retomar a equação (4.35):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ii}^A & \mathbf{H}_{ij}^A \\ \mathbf{H}_{ji}^A & \mathbf{H}_{jj}^A \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ii}^C & \mathbf{H}_{ij}^C \\ \mathbf{H}_{ji}^C & \mathbf{H}_{jj}^C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ii}^A & \mathbf{H}_{ij}^A \\ \mathbf{H}_{ji}^A & \mathbf{H}_{jj}^A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (\mathbf{H}_{jj}^A + \mathbf{H}_{jj}^B)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ii}^A & \mathbf{H}_{ij}^A \\ \mathbf{H}_{ji}^A & \mathbf{H}_{jj}^A \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

Multiplicando à direita e à esquerda por  $\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ii}^A & \mathbf{H}_{ij}^A \\ \mathbf{H}_{ji}^A & \mathbf{H}_{jj}^A \end{bmatrix}^{-1}$ , resulta

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ii}^A & \mathbf{H}_{ij}^A \\ \mathbf{H}_{ji}^A & \mathbf{H}_{jj}^A \end{bmatrix}^{-1} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ii}^A & \mathbf{H}_{ij}^A \\ \mathbf{H}_{ji}^A & \mathbf{H}_{jj}^A \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ii}^C & \mathbf{H}_{ij}^C \\ \mathbf{H}_{ji}^C & \mathbf{H}_{jj}^C \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ii}^A & \mathbf{H}_{ij}^A \\ \mathbf{H}_{ji}^A & \mathbf{H}_{jj}^A \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (\mathbf{H}_{jj}^A + \mathbf{H}_{jj}^B) \end{bmatrix}^{-1} \quad (4.80)$$

Invertendo ambos os membros e isolando  $\mathbf{H}_{jj}^B$  obtemos,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_{jj}^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ii}^A & \mathbf{H}_{ij}^A \\ \mathbf{H}_{ji}^A & \mathbf{H}_{jj}^A \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ii}^A & \mathbf{H}_{ij}^A \\ \mathbf{H}_{ji}^A & \mathbf{H}_{jj}^A \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ii}^C & \mathbf{H}_{ij}^C \\ \mathbf{H}_{ji}^C & \mathbf{H}_{jj}^C \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ii}^A & \mathbf{H}_{ij}^A \\ \mathbf{H}_{ji}^A & \mathbf{H}_{jj}^A \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_{jj}^A \end{bmatrix} \quad (4.81)$$

Podemos assim obter uma sexta formulação para caracterizar a subestrutura B,

$$\mathbf{H}_{jj}^B = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ji}^A & \mathbf{H}_{jj}^A \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ii}^A & \mathbf{H}_{ij}^A \\ \mathbf{H}_{ji}^A & \mathbf{H}_{jj}^A \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ii}^C & \mathbf{H}_{ij}^C \\ \mathbf{H}_{ji}^C & \mathbf{H}_{jj}^C \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ij}^A \\ \mathbf{H}_{jj}^A \end{bmatrix} - \mathbf{H}_{jj}^A \quad (4.82)$$

Mais à frente vamos também quantificar a sensibilidade ao ruído desta formulação.

## 4.5 Análise do problema mal condicionado

O comportamento dinâmico da subestrutura A face ao comportamento dinâmico da estrutura C é importante para poder caracterizar a subestrutura B, como é de certa forma apresentado no exemplo numérico do ponto 4.4.6 ao adicionar massas pontuais.

Qualquer perturbação na resposta dinâmica da subestrutura A e/ou na estrutura C leva a que as respectivas matrizes presentes em cada formulação reproduzam erros elevados. Estas perturbações têm maior impacto nas matrizes sujeitas ao processo de inversão. Estas matrizes são por natureza mal condicionadas, ou seja, qualquer perturbação reproduz um erro elevado na sua inversa.

Todas as formulações aqui apresentadas têm matrizes para inverter, constituídas pela diferença entre as matrizes ou submatrizes de  $H^A$  e  $H^C$ , este facto também conduz ao mal condicionamento das matrizes a inverter.

Vamos retomar as seis formulações e identificar as matrizes a inverter.

### Formulação 1

$$H_{jj}^B = H_{ji}^A H_{ij}^A \left( H_{ji}^A \left( H_{ii}^A - H_{ii}^C \right) H_{ij}^A \right)^{-1} H_{ji}^A H_{ij}^A - H_{jj}^A \quad (4.46)$$

### Formulação 2

$$H_{jj}^B = \left( H_{jj}^A \left( H_{jj}^A - H_{jj}^C \right) - I_{jj} \right) H_{jj}^A \quad (4.61)$$

### Formulação 3

$$H_{jj}^B = H_{jj}^A \left( H_{ji}^A \left( H_{ij}^A - H_{ij}^C \right) \right)^{-1} H_{ji}^A H_{ij}^A - H_{jj}^A \quad (4.66)$$

### Formulação 4

$$H_{jj}^B = \begin{bmatrix} H_{ji}^A & H_{jj}^A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{ii}^A H_{ii}^A + H_{ii}^A - H_{ii}^C & H_{ii}^A H_{ij}^A + H_{ij}^A - H_{ij}^C \\ H_{ji}^A H_{ii}^A + H_{ji}^A - H_{ji}^C & H_{ji}^A H_{ij}^A + H_{ij}^A - H_{ij}^C \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} H_{ij}^A \\ H_{jj}^A \end{bmatrix} - H_{jj}^A \quad (4.75)$$

### Formulação 5

$$H_{jj}^B = \begin{bmatrix} H_{ji}^C & H_{jj}^C \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} H_{ii}^A & H_{ij}^A \\ H_{ji}^A & H_{jj}^A \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} H_{ii}^C & H_{ij}^C \\ H_{ji}^C & H_{jj}^C \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} H_{ij}^A \\ H_{jj}^A \end{bmatrix} \quad (4.79)$$

### Formulação 6

$$H_{jj}^B = \begin{bmatrix} H_{ji}^A & H_{jj}^A \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} H_{ii}^A & H_{ij}^A \\ H_{ji}^A & H_{jj}^A \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} H_{ii}^C & H_{ij}^C \\ H_{ji}^C & H_{jj}^C \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} H_{ij}^A \\ H_{jj}^A \end{bmatrix} - H_{jj}^A \quad (4.82)$$

As matrizes sujeitas a inversão são agora designadas da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 Q_1 &= H_{ji}^A (H_{ii}^A - H_{ii}^C) H_{ij}^A \\
 Q_2 &= H_{jj}^A - H_{jj}^C \\
 Q_3 &= H_{ji}^A (H_{ij}^A - H_{ij}^C) \\
 Q_4 &= \begin{bmatrix} H_{ii}^A H_{ii}^A + H_{ii}^A - H_{ii}^C & H_{ii}^A H_{ij}^A + H_{ij}^A - H_{ij}^C \\ H_{ji}^A H_{ii}^A + H_{ii}^A - H_{ii}^C & H_{ji}^A H_{ij}^A + H_{ij}^A - H_{ij}^C \end{bmatrix} \\
 Q_5 &= Q_6 = \begin{bmatrix} H_{ii}^A & H_{ij}^A \\ H_{ji}^A & H_{jj}^A \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} H_{ii}^C & H_{ij}^C \\ H_{ji}^C & H_{jj}^C \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.83}$$

Em que nas matrizes  $Q_1$  e  $Q_3$  temos que garantir que  $i \geq j$ .

Na maioria das situações, apenas  $H^C$  é determinada experimentalmente e é a principal responsável pela instabilidade do processo de desacoplamento devido ao ruído associado aos ensaios experimentais. Das matrizes a inverter em (4.83),  $Q_1$  utiliza apenas coordenadas fora da junta,  $Q_2$  apenas coordenadas da junta e as restantes utilizam ambas.

Foi verificado para determinadas formulações que existe uma relação directa ao longo da frequência entre a condição da matriz  $Q$  e o nível de perturbação do desacoplamento. Para valores altos da condição temos elevados níveis de ruído no processo. Assim, temos todo o interesse em encontrar as gamas de frequência em que isso acontece, para que possamos determinar a rigidez dinâmica com mais precisão e com isso determinar a matriz de rigidez e a matriz de massa da subestrutura B.

### 4.5.1 Algoritmo de cálculo da gama de frequências

Para determinar a gama de frequências onde a condição das matrizes é mínima foi criada uma função  $r_i(\omega)$ , relacionada com o logaritmo da condição de cada matriz  $Q$ :

$$r_i(\omega) = \tau \cdot \ln(\text{cond}(Q_i(\omega))) \quad i = 1, \dots, 6 \quad (4.84)$$

onde o parâmetro  $\tau$  é um factor de ampliação do logaritmo da condição. Como esta função está sujeita a ruído, existe alguma dificuldade em identificar as gamas de frequência onde esta função é mínima. Para resolver este problema foi utilizada uma função de regressão existente no programa MatLab® [1]:

$$R_i(\omega) = \text{csaps}(r_i(\omega), \nu) \quad i = 1, \dots, 6 \quad (4.85)$$

onde  $\nu$  é um parâmetro de peso que varia entre 0 e 1. Se  $\nu = 0$ , a regressão é linear; se  $\nu = 1$ , estamos perante uma interpolação que passa por todos os pontos. Esta função gerada pelo programa dá-nos a oportunidade de aplicar derivadas.

Para determinar os mínimos foram escolhidas as gamas de frequências em que a derivada de  $R_i(\omega)$  é inferior a um parâmetro  $\zeta$  e a segunda derivada é positiva:

$$\frac{dR_i(\omega)}{d\omega} < \zeta \quad \wedge \quad \frac{d^2R_i(\omega)}{d\omega^2} > 0 \quad i = 1, \dots, 6 \quad (4.86)$$

Para exemplificar este processo vamos usar o exemplo numérico que se segue.

### 4.5.2 Exemplo numérico 3

Foi utilizado o acoplamento de vigas da Figura 4.21. A estrutura C é constituída pelo acoplamento das vigas  $A_1$ , B e  $A_2$ .

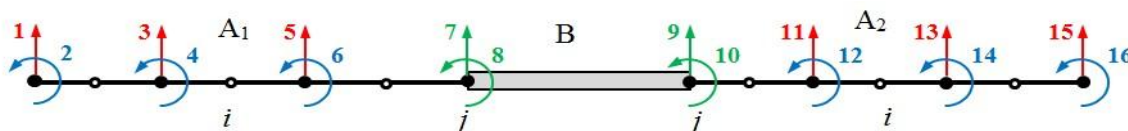


Figura 4.21: Acoplamento das subestruturas A e B, formando a estrutura C

Utilizando o método dos elementos finitos, foi escolhido o elemento de viga com quatro graus de liberdade, como foi feito nos exemplos numéricos anteriores.

Discretizaram-se as subestruturas  $A_1$  e  $A_2$  em seis elementos e só se consideraram os nós indicados como coordenadas  $i$  e  $j$  onde é possível medir e excitar a estrutura.

As características das vigas a unir estão na Tabela 4.3

| Viga  | Comprimento | Largura | Espessura | $E$     | $\rho$                 |
|-------|-------------|---------|-----------|---------|------------------------|
| $A_1$ | 270 mm      | 30 mm   | 5 mm      | 194 GPa | 7562 kg/m <sup>3</sup> |
| B     | 200 mm      | 30 mm   | 10 mm     | 194 GPa | 7562 kg/m <sup>3</sup> |
| $A_2$ | 370 mm      | 30 mm   | 5 mm      | 194 GPa | 7562 kg/m <sup>3</sup> |

Tabela 4.3: Características das vigas do exemplo numérico 3

Nos sinais dos transdutores as grandes amplitudes não são tão contaminadas pelo ruído como as pequenas amplitudes e assim, Liu [66], para simular os erros experimentais na obtenção das FRF  $H^C$ , definiu um erro numérico que é independente da amplitude, da seguinte forma:

$$\tilde{H}_{pq}(\omega_k) = H_{pq}(\omega_k) + \frac{\gamma}{100} \cdot \text{normrnd}(\omega_k) \cdot \max(|H_{pq}(\omega)|) \quad (4.87)$$

onde o  $\gamma$  é o nível de ruído em % e o  $\text{normrnd}(\omega)$  é uma distribuição normal com média zero e com desvio padrão igual à unidade. Neste exemplo vamos utilizar um nível de ruído de 3%.

Vamos utilizar de seguida as seis formulações para fazer o desacoplamento da estrutura Figura 4.21 e utilizar o algoritmo de cálculo da secção 4.5.1 para determinar as gamas de frequências onde a condição das matrizes  $Q$  são mínimas.

Foram assumidos determinados valores para os parâmetros do algoritmo:  $\tau = 30$ ,  $\nu = 10^{-6}$  e  $\zeta = 0,05$ .

Nas figuras seguintes estão representadas para cada formulação a FRF  $H_{11}^B$  e a FRF exacta (linha preta). Ao lado destas também estão figuras com as funções  $r(\omega)$  e  $R(\omega)$  respectivas. Em cada uma das figuras estão apresentadas bandas verticais que indicam as frequências encontradas onde  $R(\omega)$  tem mínimos locais.

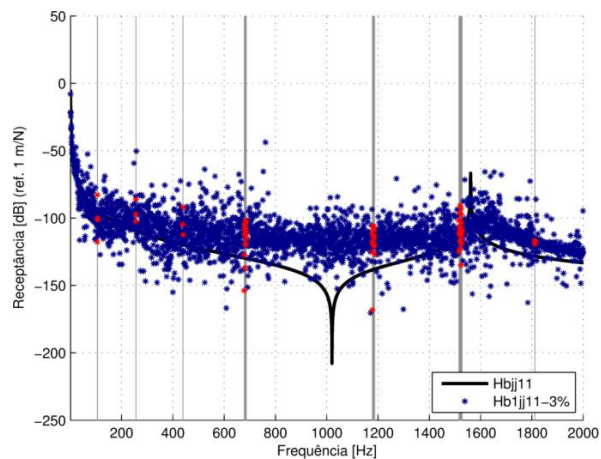


Figura 4.22: FRF  $H_{11}^B$  da Formulação 1

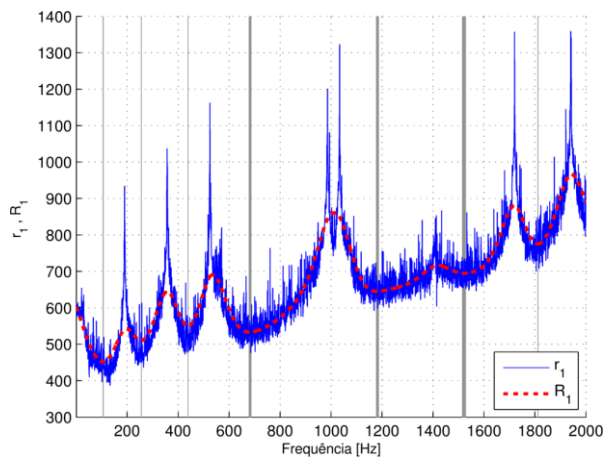


Figura 4.23:  $r_1(\omega)$  com  $R_1(\omega)$  da Formulação 1

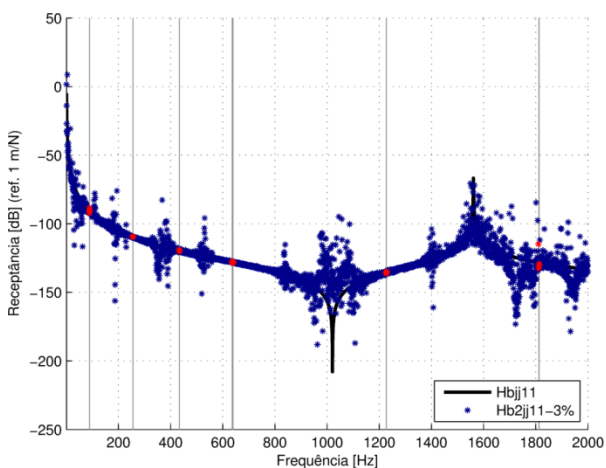


Figura 4.24: FRF  $H_{11}^B$  da Formulação 2

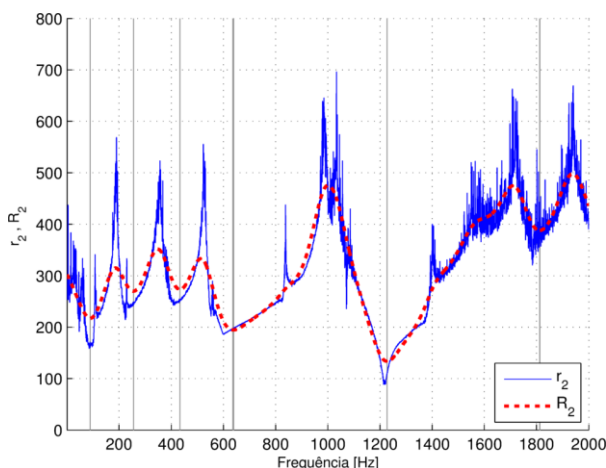


Figura 4.25:  $r_2(\omega)$  com  $R_2(\omega)$  da Formulação 2

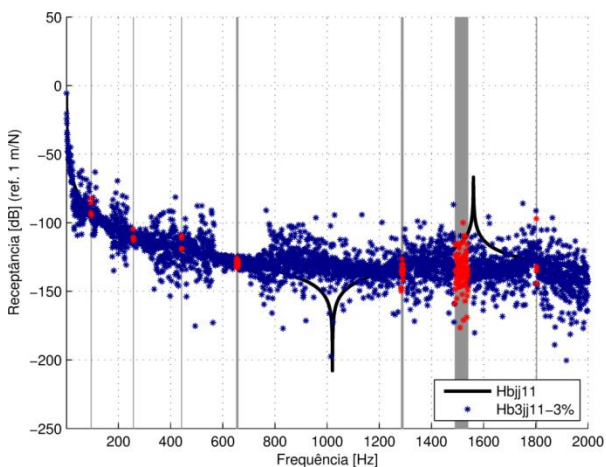


Figura 4.26: FRF  $H_{11}^B$  da Formulação 3

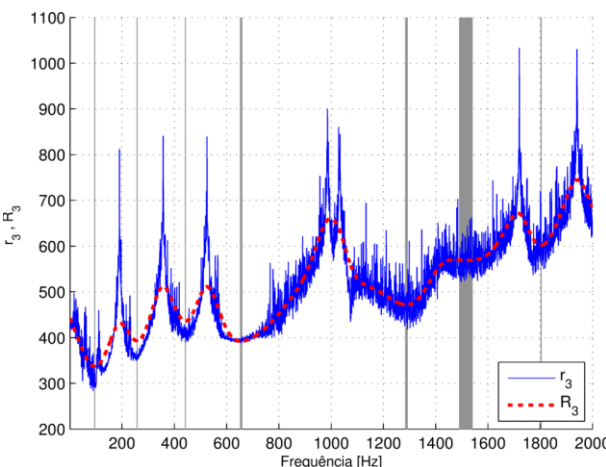


Figura 4.27:  $r_3(\omega)$  com  $R_3(\omega)$  da Formulação 3

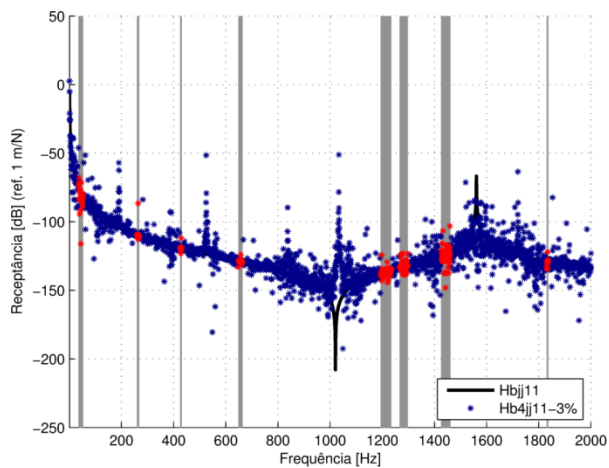


Figura 4.28: FRF  $H_{11}^B$  da Formulação 4

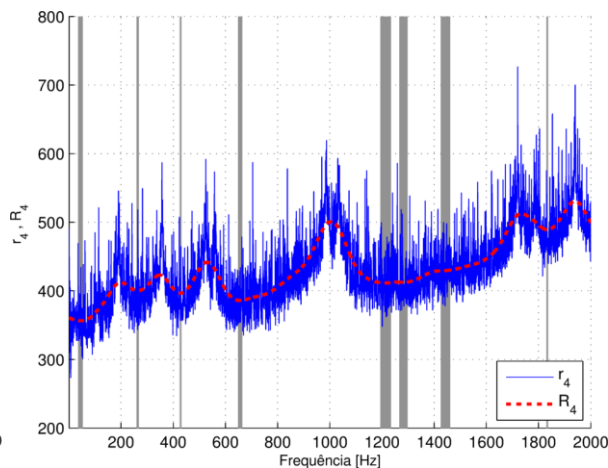


Figura 4.29:  $r_4(\omega)$  com  $R_4(\omega)$  da Formulação 4

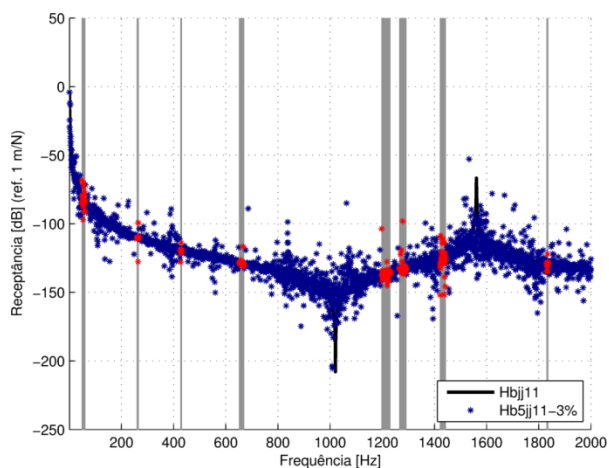


Figura 4.30: FRF  $H_{11}^B$  da Formulação 5

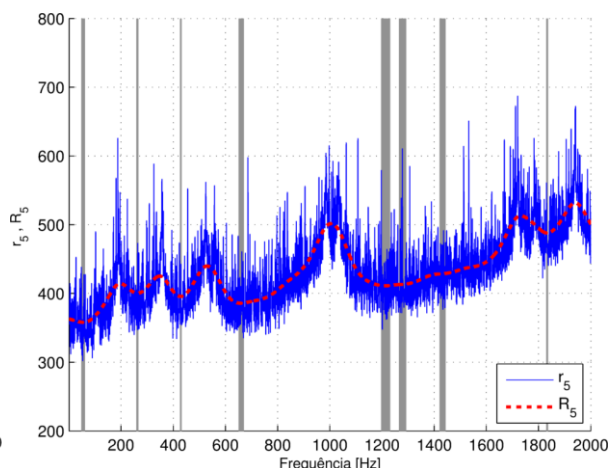


Figura 4.31:  $r_5(\omega)$  com  $R_5(\omega)$  da Formulação 5

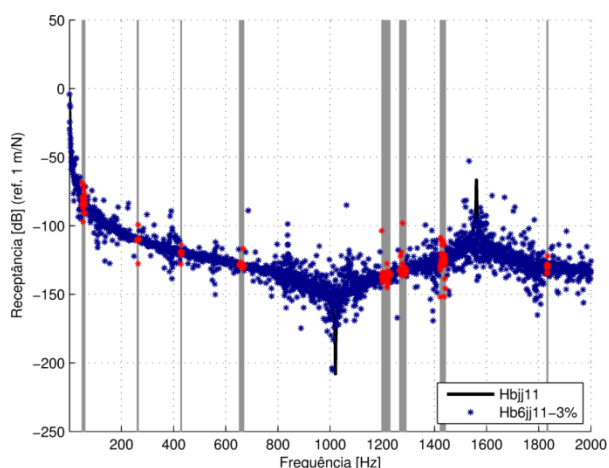


Figura 4.32: FRF  $H_{11}^B$  da Formulação 6

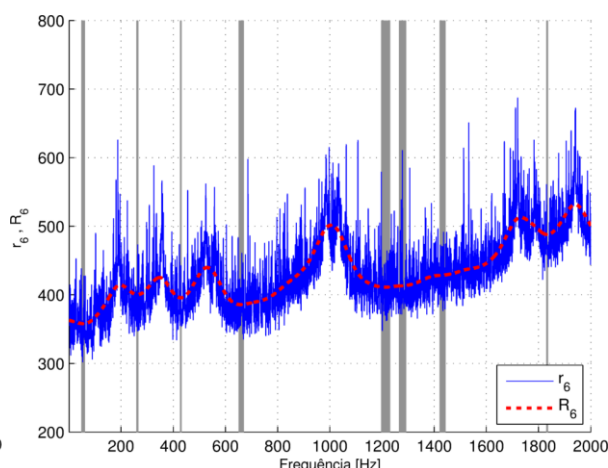


Figura 4.33:  $r_6(\omega)$  com  $R_6(\omega)$  da Formulação 6

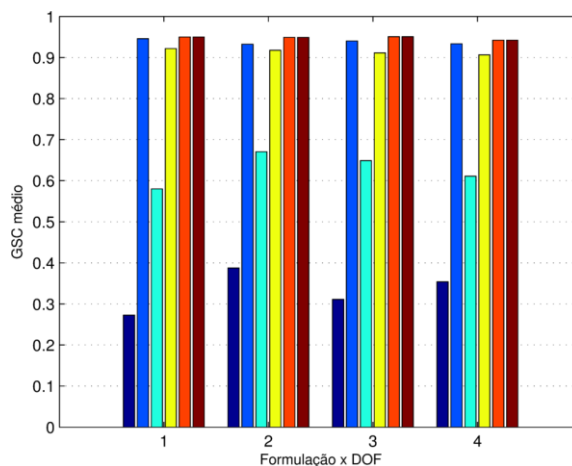


Figura 4.34: Média da correlação GSC

Na Figura 4.34 está apresentada a média da correlação *Global Shape Criterion* GSC, que nos dá uma ideia da proximidade que existe entre cada formulação e o teoricamente exacto. É visível que as formulações 1 e 3 têm maus resultados.

No caso da Formulação 1, na Figura 4.22 e no caso da Formulação 3, na Figura 4.26, é visível uma grande perturbação ao longo de todas as frequências mesmo nas zonas onde foram identificados mínimos de  $R_1(\omega)$  e  $R_3(\omega)$ . Uma das razões é o facto de utilizar o número reduzido de coordenadas  $i$ .

A Formulação 2 apresenta um nível de ruído mais baixo que as restantes como também se identificou no exemplo numérico 2 do ponto 4.4.6. Neste caso verifica-se claramente que as zonas onde  $R_2(\omega)$  é mínimo coincidem com a gama de frequência onde o ruído é mais baixo.

As formulações 4, 5 e 6 também apresentam um ruído considerável, embora nas zonas identificadas haja algum melhoramento. É de notar que as formulações 5 e 6 apresentam o mesmo comportamento dinâmico e o mesmo nível de ruído.

Vamos escolher as formulações 2, 4 e 5 para determinar a rigidez dinâmica de B e com isso determinar as matrizes de rigidez e de massa da subestrutura B.

Na Figura 4.24, Figura 4.28 e Figura 4.30 estão identificadas a vermelho as bandas de frequências de  $H^B$  que vamos utilizar.

### Calculo das rigidezes dinâmicas

Depois de identificar as gamas de frequências, foi determinada a rigidez dinâmica  $(H^B(\omega))^{-1}$  para essas frequências. Para determinar a matriz de massa  $M^B$  e a matriz de rigidez  $K^B$  da subestrutura B foi feita uma regressão linear (descrita no Anexo B) com as respectivas frequências.

Para a Formulação 2 (Figura 4.35) temos os pontos (azul) e a regressão (linha vermelha) obtida com todas as frequências e na Figura 4.36 temos os pontos (azul) e a regressão (linha vermelha) com apenas as frequências escolhidas. A linha a preto representa a rigidez dinâmica exacta.

Podemos verificar que com as frequências escolhidas é obtida uma melhor regressão.

Também foi feito o mesmo estudo para as formulações 4 e 5 (Figura 4.37 a Figura 4.40).

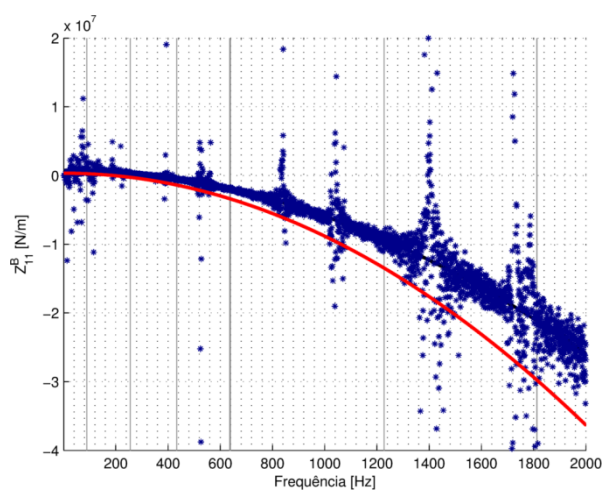


Figura 4.35:  $Z_{11}^B$  da Formulação 2 obtida com todas as frequências

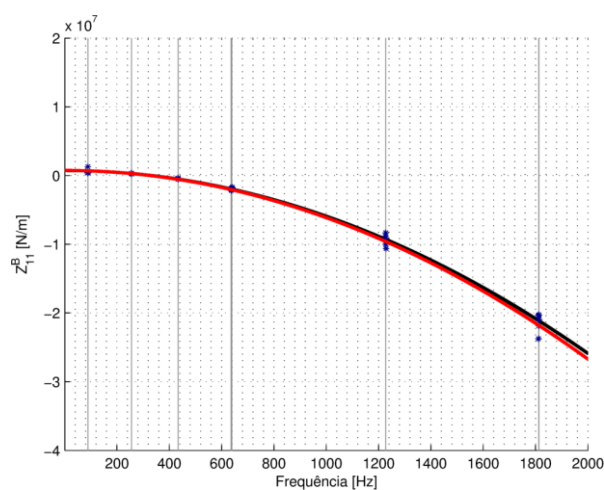


Figura 4.36:  $Z_{11}^B$  da Formulação 2 obtida apenas com as frequências escolhidas

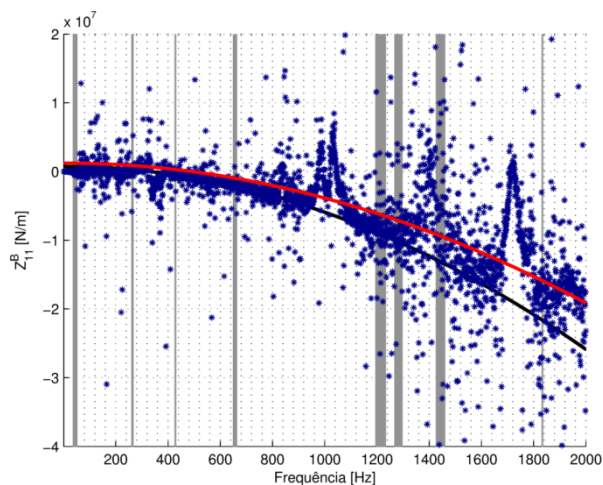


Figura 4.37:  $Z_{11}^B$  da Formulação 4 obtida com todas as frequências

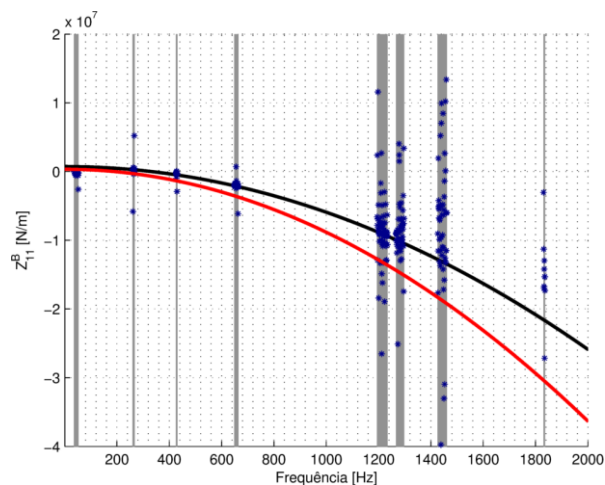


Figura 4.38:  $Z_{11}^B$  da Formulação 4 obtida apenas com as frequências escolhidas

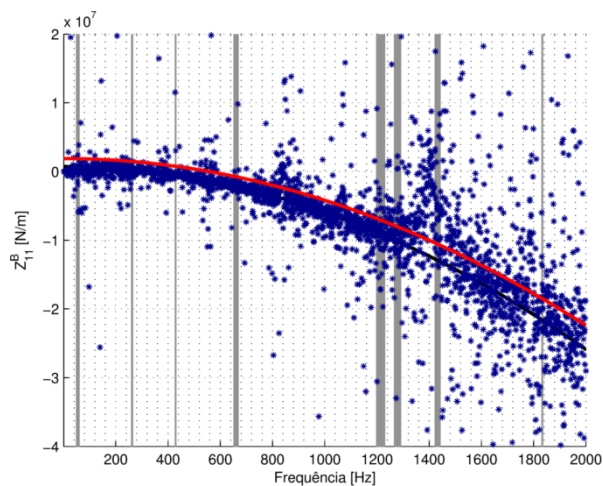


Figura 4.39:  $Z_{11}^B$  da Formulação 5 obtida com todas as frequências

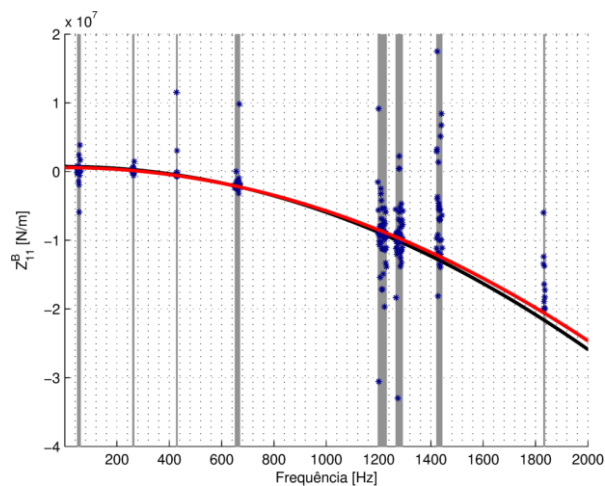


Figura 4.40:  $Z_{11}^B$  da Formulação 5 obtida apenas com as frequências escolhidas

Como era de esperar, as formulações 4 e 5 apresentam uma dispersão de valores superiores à Formulação 2.

Para as frequências escolhidas, a Formulação 2 tem os melhores resultados, o que era de esperar, pois os valores nas bandas das frequências escolhidas apresentam uma dispersão inferior às outras.

### Calculo das receptâncias

Com a matriz de massa  $M^B$  e a matriz de rigidez  $K^B$  da subestrutura B para as formulações 2, 4 e 5 foi calculada a respectiva receptância  $H^B = (K^B - \omega^2 M^B)^{-1}$  com todas as frequências e com as frequências escolhidas.

Na Figura 4.41, Figura 4.43 e Figura 4.45 as linhas a azul representam a receptância calculada com todos as frequências, as linhas a vermelho representam a receptância calculada com as frequências escolhidas e as linhas pretas representam as FRF exactas.

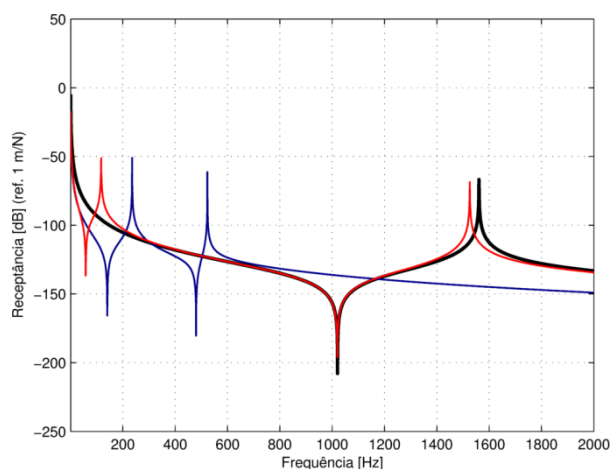


Figura 4.41: FRF  $H_{11}^B$  da Formulação 2; linha a azul: com todos as frequências; linha a vermelho com as frequências escolhidas

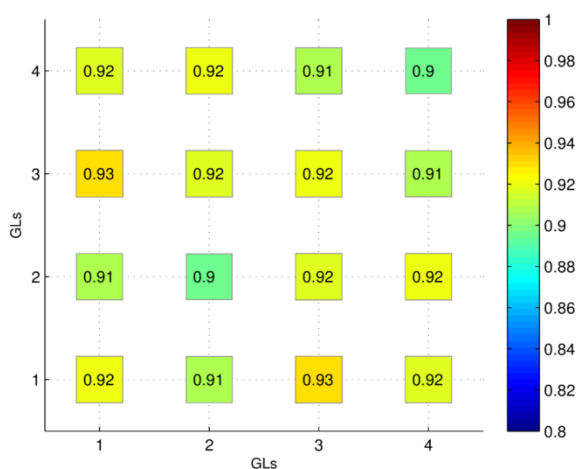


Figura 4.42: Correlação LAC média da Formulação 2

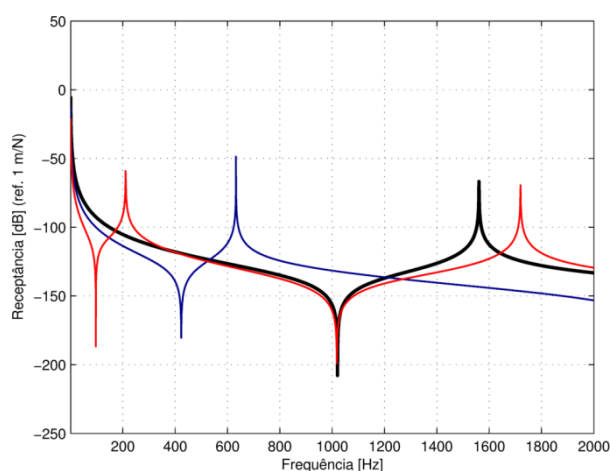


Figura 4.43: FRF  $H_{11}^B$  da Formulação 4; linha a azul: com todos as frequências; linha a vermelho com as frequências escolhidas

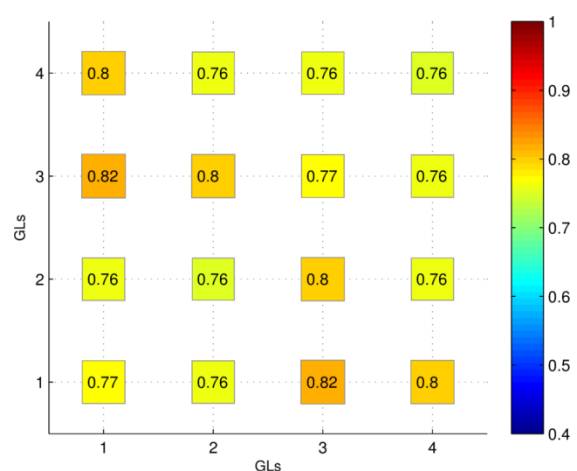


Figura 4.44: Correlação LAC média da Formulação 4

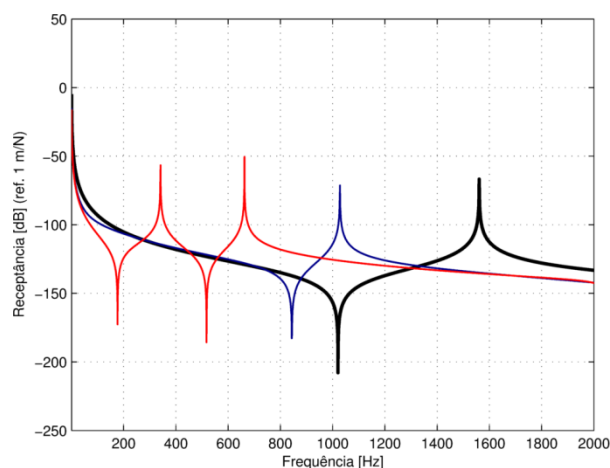


Figura 4.45: FRF  $H_{11}^B$  da Formulação 5; linha a azul: com todos as frequências; linha a vermelho com as frequências escolhidas

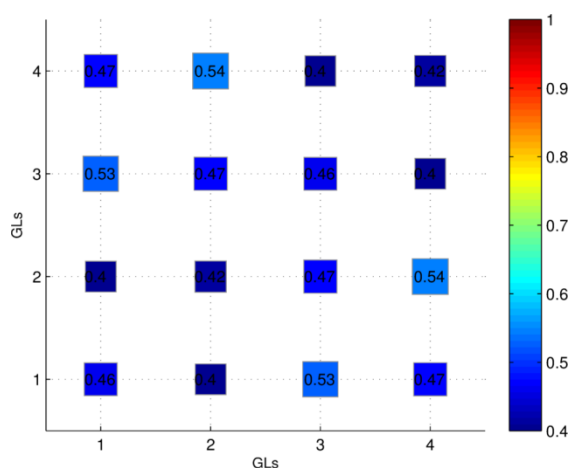


Figura 4.46: Correlação LAC média da Formulação 5

Nas formulações 2 e 4 a utilização das frequências escolhidas melhora os resultados, o que não acontece na Formulação 5.

Na Figura 4.41, com a Formulação 2, a receptância calculada com as frequências escolhidas apresenta a melhor aproximação, apenas com uma ressonância inexistente nas baixas frequências.

Na Figura 4.42, Figura 4.44 e Figura 4.46 podemos ver a correlação LAC média para as três formulações. A Formulação 2 é a que apresenta valores mais próximos da unidade, confirmando assim, ser a melhor das três.

A Formulação 2 com a escolha das frequências é assim a melhor entre as seis apresentadas. No entanto, a esta formulação é exigido o conhecimento das respostas dinâmicas nas coordenadas da junta, o que pode tornar-se um problema caso não seja possível fazê-lo.



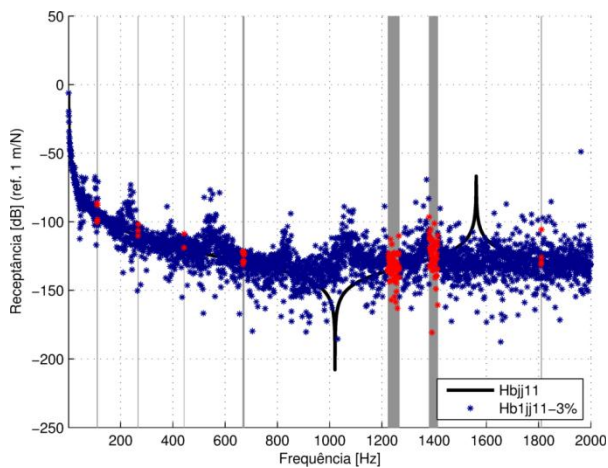


Figura 4.49: FRF  $H_{11}^B$  da Formulação 1

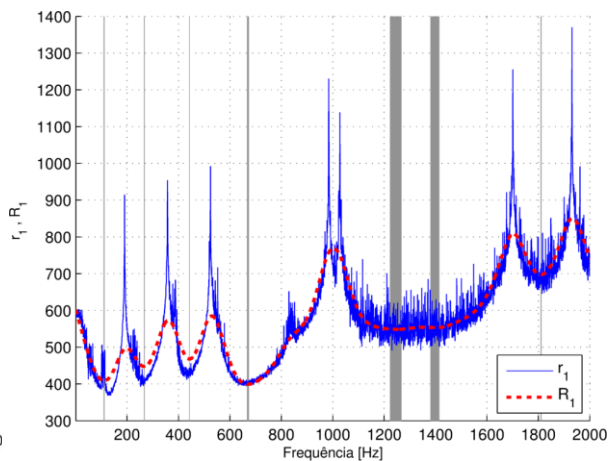


Figura 4.50:  $r_1(\omega)$  com  $R_1(\omega)$  da Formulação 1

### Discussão

O conhecimento das respostas nas coordenadas da junta revelou-se essencial para o desacoplamento. As formulações 2, 4 e 5 têm melhores resultados que as formulações 1 e 3. No caso da Formulação 1, o aumento de pontos de medição apenas melhorou os resultados na situação em que são utilizadas todas as frequências.

O melhor resultado corresponde à Formulação 2 na estrutura inicial (Figura 4.21), utilizando as bandas de frequências escolhida.

## 4.6 Técnica de desacoplamento de Ren

Ren [67] nos seus trabalhos para caracterizar uma junta procurou determinar a rigidez dinâmica da subestrutura B,  $Z^B$  e não a receptância  $H^B$ . Utilizando a formulação-base vamos ao encontro das suas expressões de forma mais simples.

Multiplicando à esquerda ambos os membros da equação (4.21) por  $(I + H^A Z^B)$  temos

$$H^C + H^A Z^B H^C = H^A \quad (4.88)$$

explicitando, em termos de submatrizes com as coordenadas  $i$  e  $j$ ,

$$\begin{bmatrix} H_{ii}^C & H_{ij}^C \\ H_{ji}^C & H_{jj}^C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_{ii}^A & H_{ij}^A \\ H_{ji}^A & H_{jj}^A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Z_{jj}^B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{ii}^C & H_{ij}^C \\ H_{ji}^C & H_{jj}^C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{ii}^A & H_{ij}^A \\ H_{ji}^A & H_{jj}^A \end{bmatrix} \quad (4.89)$$

Reorganizando a equação (4.89),

$$\begin{bmatrix} H_{ii}^A & H_{ij}^A \\ H_{ji}^A & H_{jj}^A \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} H_{ii}^C & H_{ij}^C \\ H_{ji}^C & H_{jj}^C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & H_{ij}^A Z_{jj}^B \\ 0 & H_{jj}^A Z_{jj}^B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{ii}^C & H_{ij}^C \\ H_{ji}^C & H_{jj}^C \end{bmatrix} \quad (4.90)$$

Simplificando, obtemos quatro equações, (4.91), que nos permitem determinar a rigidez dinâmica  $Z^B$ , como veremos mais adiante.

$$\begin{bmatrix} H_{ii}^A & H_{ij}^A \\ H_{ji}^A & H_{jj}^A \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} H_{ii}^C & H_{ij}^C \\ H_{ji}^C & H_{jj}^C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{ij}^A Z_{jj}^B H_{ji}^C & H_{ij}^A Z_{jj}^B H_{jj}^C \\ H_{jj}^A Z_{jj}^B H_{ji}^C & H_{jj}^A Z_{jj}^B H_{jj}^C \end{bmatrix} \quad (4.91)$$

Por outro lado, da equação (4.19), se se colocar em evidência a matriz  $Z^A$  à direita no segundo membro da equação temos,

$$Z^C = (I + Z^B H^A) Z^A \quad (4.92)$$

Invertendo ambos os membros,

$$H^C = H^A (I + Z^B H^A)^{-1} \quad (4.93)$$

Multiplicando a direita ambos os membros por  $(I + Z^B H^A)$  temos,

$$H^C + H^C Z^B H^A = H^A \quad (4.94)$$

Explicitando em termos de submatrizes com as coordenadas  $i$  e  $j$ ,

$$\begin{bmatrix} H_{ii}^C & H_{ij}^C \\ H_{ji}^C & H_{jj}^C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_{ii}^C & H_{ij}^C \\ H_{ji}^C & H_{jj}^C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Z_{jj}^B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{ii}^A & H_{ij}^A \\ H_{ji}^A & H_{jj}^A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{ii}^A & H_{ij}^A \\ H_{ji}^A & H_{jj}^A \end{bmatrix} \quad (4.95)$$

Reorganizando a equação (4.95),

$$\begin{bmatrix} H_{ii}^A & H_{ij}^A \\ H_{ji}^A & H_{jj}^A \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} H_{ii}^C & H_{ij}^C \\ H_{ji}^C & H_{jj}^C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & H_{ij}^C Z_{jj}^B \\ 0 & H_{jj}^C Z_{jj}^B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{ii}^A & H_{ij}^A \\ H_{ji}^A & H_{jj}^A \end{bmatrix} \quad (4.96)$$

Simplificando, obtemos outras quatro equações, (4.97), que nos permitem também determinar a rigidez dinâmica  $Z^B$ ,

$$\begin{bmatrix} H_{ii}^A & H_{ij}^A \\ H_{ji}^A & H_{jj}^A \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} H_{ii}^C & H_{ij}^C \\ H_{ji}^C & H_{jj}^C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{ij}^C Z_{jj}^B H_{ji}^A & H_{ij}^C Z_{jj}^B H_{jj}^A \\ H_{jj}^C Z_{jj}^B H_{ji}^A & H_{jj}^C Z_{jj}^B H_{jj}^A \end{bmatrix} \quad (4.97)$$

Utilizando o equilíbrio dinâmico entre dois conjuntos de estruturas independentes Ren e Beards [68] chegaram também a estas quatro equações (4.97). Veremos na secção seguinte de que forma é possível determinar a rigidez dinâmica  $Z^B$  a partir das equações (4.91) ou (4.97).

Para facilitar a identificação das equações, vamos identifica-las da seguinte forma:

**Formulação R1**

$$H_{ij}^C Z_{jj}^B H_{ji}^A = H_{ii}^A - H_{ii}^C \quad (4.98)$$

**Formulação R2**

$$H_{ij}^C Z_{jj}^B H_{jj}^A = H_{ij}^A - H_{ij}^C \quad (4.99)$$

**Formulação R3**

$$H_{jj}^C Z_{jj}^B H_{ji}^A = H_{ji}^A - H_{ji}^C \quad (4.100)$$

**Formulação R4**

$$H_{jj}^C Z_{jj}^B H_{jj}^A = H_{jj}^A - H_{jj}^C \quad (4.101)$$

Nas Formulações R1, R2 e R3 temos que acautelar que  $i \geq j$  para poder aplicar o algoritmo de resolução de um sistema de equações apresentado na secção seguinte.

É de notar que os primeiros membros das equações (4.91) e (4.97) são iguais, donde, pelo teorema de Euclides,

$$\begin{bmatrix} H_{ij}^C Z_{jj}^B H_{ji}^A & H_{ij}^C Z_{jj}^B H_{jj}^A \\ H_{jj}^C Z_{jj}^B H_{ji}^A & H_{jj}^C Z_{jj}^B H_{jj}^A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{ij}^A Z_{jj}^B H_{ji}^C & H_{ij}^A Z_{jj}^B H_{jj}^C \\ H_{jj}^A Z_{jj}^B H_{ji}^C & H_{jj}^A Z_{jj}^B H_{jj}^C \end{bmatrix} \quad (4.102)$$

Ou da forma mais compacta comparando as equações (4.88) e (4.94),

$$H^C Z^B H^A = H^A Z^B H^C \quad (4.103)$$

Esta igualdade aqui verificada não foi explorada neste trabalho, podendo vir a ser objecto de um estudo futuro.

### 4.6.1 Algoritmo de identificação da junta

Ren e Beards [68] apresentaram uma forma linear de resolução de cada uma das quatro formulações. Cada formulação tem o seguinte formato,

$$\mathbf{H}_{kj}^C \mathbf{Z}_{jj}^B \mathbf{H}_{jh}^A = \mathbf{H}_{kh}^{AC} \quad (4.104)$$

Se  $k \geq j$  e  $h \geq j$ , o que acontece quase sempre pois temos em geral mais coordenadas fora do que na junta, podemos reescrever a equação (4.104) e obter um sistema de equações lineares do tipo:

$$\mathbf{E}_{pq} \mathbf{z}_q = \mathbf{b}_p \quad (4.105)$$

onde a matriz  $\mathbf{E}_{pq}$ , o vector  $\mathbf{z}$  e o vector  $\mathbf{b}$  são escritos da seguinte forma:

$$\mathbf{E}_{pq} = \mathbf{H}_{dn}^C \mathbf{H}_{me}^A \quad \mathbf{z}_q = \mathbf{Z}_{nm}^B \quad \mathbf{b}_p = \mathbf{H}_{de}^{AC} \quad (4.106)$$

com os índices seguintes,

$$\begin{aligned} p &= (d-1)h + e & d &= 1, \dots, k & m &= 1, \dots, j \\ q &= (n-1)j + m & n &= 1, \dots, j & e &= 1, \dots, h \end{aligned} \quad (4.107)$$

A matriz de rigidez dinâmica da junta com amortecimento viscoso e histerético é definida por

$$\mathbf{Z} = \mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{C} + i\mathbf{D} \quad (4.108)$$

O que torna o vector  $\mathbf{z}$  dependente da frequência. Ren propõe uma transformação para tornar o vector de incógnitas independentes da frequência.

$$\mathbf{z}_q(\omega) = \mathbf{T}(\omega)_{q \times 4q} \mathbf{x}_{4q} \quad (4.109)$$

onde a matriz de transformação é dado por,

$$\mathbf{T}(\omega)_{q \times 4q} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{qq} & -\omega^2 \mathbf{I}_{qq} & i\omega \mathbf{I}_{qq} & i\mathbf{I}_{qq} \end{bmatrix} \quad (4.110)$$

O vector  $\mathbf{x}$  será formado pelos quatro vectores que têm todos os elementos da matriz de rigidez, massa, amortecimento viscoso e histerético da junta,

$$\mathbf{x}_{4q} = \left\{ \mathbf{k}_q \quad \mathbf{m}_q \quad \mathbf{c}_q \quad \mathbf{d}_q \right\}^T \quad (4.111)$$

Substituindo a equação (4.109) na equação (4.105) temos,

$$\mathbf{A}(\omega)_{p \times 4q} \mathbf{x}_{4q} = \mathbf{b}(\omega)_p \quad (4.112)$$

Em que  $\mathbf{A}(\omega)_{p \times 4q} = \mathbf{E}(\omega)_{pq} \mathbf{T}(\omega)_{q \times 4q}$ . Podemos assim resolver o sistema (4.112) com dois algoritmos diferentes, o algoritmo particionado e o não particionado.

### ***Algoritmo particionado***

O algoritmo particionado, sugerido por Liu ([66] [69]) permite a determinação do vector  $\boldsymbol{x}$  utilizando a equação (4.112) com apenas duas frequências,  $\omega_1$  e  $\omega_2$ ,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}(\omega_1)_{pq} & -\omega_1^2 \mathbf{E}(\omega_1)_{pq} & i\omega_1 \mathbf{E}(\omega_1)_{pq} & i\mathbf{E}(\omega_1)_{pq} \\ \mathbf{E}(\omega_2)_{pq} & -\omega_2^2 \mathbf{E}(\omega_2)_{pq} & i\omega_2 \mathbf{E}(\omega_2)_{pq} & i\mathbf{E}(\omega_2)_{pq} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{k}_q \\ \mathbf{m}_q \\ \mathbf{c}_q \\ \mathbf{d}_q \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{b}(\omega_1)_p \\ \mathbf{b}(\omega_2)_p \end{Bmatrix} \quad (4.113)$$

Resolvendo o problema de mínimos quadrados (Anexo A), temos os seguintes quatro sistemas:

$$\begin{cases} \mathbf{k}_q - \omega_1^2 \mathbf{m}_q = \text{Re} \left( \left( \mathbf{E}(\omega_1)_{pq} \right)^+ \left( \mathbf{b}(\omega_1)_p \right) \right) \\ \mathbf{k}_q - \omega_2^2 \mathbf{m}_q = \text{Re} \left( \left( \mathbf{E}(\omega_2)_{pq} \right)^+ \left( \mathbf{b}(\omega_2)_p \right) \right) \\ \omega_1 \mathbf{c}_q + \mathbf{d}_q = \text{Im} \left( \left( \mathbf{E}(\omega_1)_{pq} \right)^+ \left( \mathbf{b}(\omega_1)_p \right) \right) \\ \omega_2 \mathbf{c}_q + \mathbf{d}_q = \text{Im} \left( \left( \mathbf{E}(\omega_2)_{pq} \right)^+ \left( \mathbf{b}(\omega_2)_p \right) \right) \end{cases} \quad (4.114)$$

Liu ([66] [69]) usa a decomposição SVD (Anexo A) para obter a pseudo-inversa  $( )^+$ . Os vectores  $\mathbf{k}_q$ ,  $\mathbf{m}_q$ ,  $\mathbf{c}_q$ , e  $\mathbf{d}_q$  são dados por:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_q &= \frac{1}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \left( \omega_2^2 \text{Re} \left( \left( \mathbf{E}(\omega_1)_{pq} \right)^+ \left( \mathbf{b}(\omega_1)_p \right) \right) - \omega_1^2 \text{Re} \left( \left( \mathbf{E}(\omega_2)_{pq} \right)^+ \left( \mathbf{b}(\omega_2)_p \right) \right) \right) \\ \mathbf{m}_q &= \frac{1}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \left( \text{Re} \left( \left( \mathbf{E}(\omega_1)_{pq} \right)^+ \left( \mathbf{b}(\omega_1)_p \right) \right) - \text{Re} \left( \left( \mathbf{E}(\omega_2)_{pq} \right)^+ \left( \mathbf{b}(\omega_2)_p \right) \right) \right) \\ \mathbf{c}_q &= \frac{1}{\omega_1 - \omega_2} \left( \text{Im} \left( \left( \mathbf{E}(\omega_1)_{pq} \right)^+ \left( \mathbf{b}(\omega_1)_p \right) \right) - \text{Im} \left( \left( \mathbf{E}(\omega_2)_{pq} \right)^+ \left( \mathbf{b}(\omega_2)_p \right) \right) \right) \\ \mathbf{d}_q &= \frac{1}{\omega_1 - \omega_2} \left( \omega_1 \text{Im} \left( \left( \mathbf{E}(\omega_2)_{pq} \right)^+ \left( \mathbf{b}(\omega_2)_p \right) \right) - \omega_2 \text{Im} \left( \left( \mathbf{E}(\omega_1)_{pq} \right)^+ \left( \mathbf{b}(\omega_1)_p \right) \right) \right) \end{aligned} \quad (4.115)$$

### ***Algoritmo não particionado***

O algoritmo não particionado sugerido por Liu ([66] [69]) permite também a determinação do vector  $\boldsymbol{x}$  utilizando agora a equação (4.112) com todas as frequências:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{A}}_R(\omega)_{f \cdot p \times 2q} \mathbf{x}_{2q} &= \bar{\mathbf{b}}_R(\omega)_{f \cdot p} \\ \bar{\mathbf{A}}_I(\omega)_{f \cdot p \times 2q} \mathbf{x}_{2q} &= \bar{\mathbf{b}}_I(\omega)_{f \cdot p}\end{aligned}\quad (4.116)$$

Onde  $f$  é o número de frequências e

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{A}}_R(\omega)_{f \cdot p \times 2q} &= \begin{bmatrix} \text{Re}(\mathbf{A}(\omega_1)_{p \times 4q}) \\ \vdots \\ \text{Re}(\mathbf{A}(\omega_f)_{p \times 4q}) \end{bmatrix} & e \quad \bar{\mathbf{b}}_R(\omega)_{f \cdot p} &= \begin{bmatrix} \text{Re}(\mathbf{b}(\omega_1)_p) \\ \vdots \\ \text{Re}(\mathbf{b}(\omega_f)_p) \end{bmatrix} \\ \bar{\mathbf{A}}_I(\omega)_{f \cdot p \times 2q} &= \begin{bmatrix} \text{Im}(\mathbf{A}(\omega_1)_{p \times 4q}) \\ \vdots \\ \text{Im}(\mathbf{A}(\omega_f)_{p \times 4q}) \end{bmatrix} & e \quad \bar{\mathbf{b}}_I(\omega)_{f \cdot p} &= \begin{bmatrix} \text{Im}(\mathbf{b}(\omega_1)_p) \\ \vdots \\ \text{Im}(\mathbf{b}(\omega_f)_p) \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (4.117)$$

Liu também utiliza a decomposição SVD (Anexo A) para a resolução dos sistemas (4.116). Em alternativa, Ren e Beards [68] junta as duas equações (4.116) e revolve o problema num só sistema.

### **Discussão**

Vários autores utilizaram estes dois algoritmos, como por exemplo Ren e Beards [68], Liu e Ewins [69], Ratcliffe e Lieven [70], Wang e Chuang [71] e Celic e Boltezar [49]. Todos tiveram problemas numéricos nos resultados devido ao ruído dos dados experimentais que se reflectem tanto na matriz  $\mathbf{E}$  como também no vector  $\mathbf{b}$  da equação (4.105).

Ren e Beards [68] verificou que para determinadas frequências os valores de  $\mathbf{H}_{kh}^{AC}$  da equação (4.104) eram demasiado pequenos e induziam grandes erros na solução. Estes valores pequenos surgem quando os valores de  $\mathbf{H}^A$  são muito próximos de  $\mathbf{H}^C$ , o que acontece quando há frequências naturais próximas ou existe algum erro significativo nas medições. Ren sugere que para uma determinada diferença relativa não sejam consideradas as frequências respectivas. Ratcliffe e Lieven [70] também utilizaram esta ponderação, o que de certa forma melhorou os resultados.

Vamos de seguida com um exemplo numérico utilizar esta técnica de Ren juntamente com o algoritmo de escolha de frequências da secção 4.5.1.

## 4.6.2 Exemplo numérico 4

Foi utilizado o mesmo acoplamento de vigas do exemplo numérico 3 como identificado na Figura 4.21 na secção 4.5.2. A estrutura C também é constituída pelo acoplamento das vigas A<sub>1</sub>, B e A<sub>2</sub>.

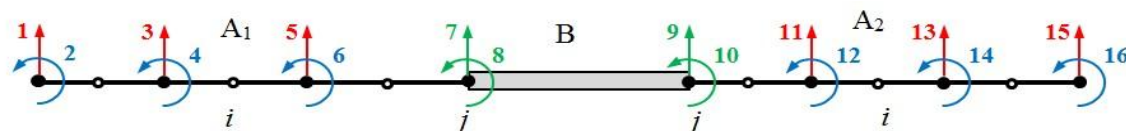


Figura 4.21: Acoplamento de vigas

Foram utilizados os mesmos dados estruturais, ou seja, os dados da Tabela 4.3

| Viga           | Comprimento | Largura | Espessura | $E$     | $\rho$                 |
|----------------|-------------|---------|-----------|---------|------------------------|
| A <sub>1</sub> | 270 mm      | 30 mm   | 5 mm      | 194 GPa | 7562 kg/m <sup>3</sup> |
| B              | 200 mm      | 30 mm   | 10 mm     | 194 GPa | 7562 kg/m <sup>3</sup> |
| A <sub>2</sub> | 370 mm      | 30 mm   | 5 mm      | 194 GPa | 7562 kg/m <sup>3</sup> |

Tabela 4.3: Características das vigas do exemplo numérico 4

Para simular os erros experimentais na obtenção das FRF  $H^C$ , foi também imposto um erro numérico do mesmo tipo,

$$\tilde{H}_{pq}(\omega_k) = H_{pq}(\omega_k) + \frac{\gamma}{100} \cdot \text{normrnd}(\omega_k) \cdot \max(|H_{pq}(\omega)|) \quad (4.87)$$

Neste exemplo vamos também utilizar um nível de ruído de 3%.

Nesta situação não foi adoptado o algoritmo de cálculo que resolve o problema de mínimos quadrados independente da frequência, pois há o interesse em aplicar o método de escolha de frequências referido no ponto 0. Assim, é resolvido o problema de mínimos quadrados presente na equação (4.105) para assim calcular a rigidez dinâmica de B.

Na Figura 4.51, na Figura 4.52 e na Figura 4.53 podemos ver uma grande dispersão de valores da rigidez dinâmica ao longo de toda a gama de frequências e assim a regressão está bastante afastada das linhas pretas; este facto leva-nos a abandonar a ideia de aplicar o algoritmo de escolha de frequências a estas formulações. No entanto, na Figura 4.54, a dispersão dos valores acompanha a linha preta com algumas perturbações verticais, o que sugere a aplicação do algoritmo da secção 4.5.1.

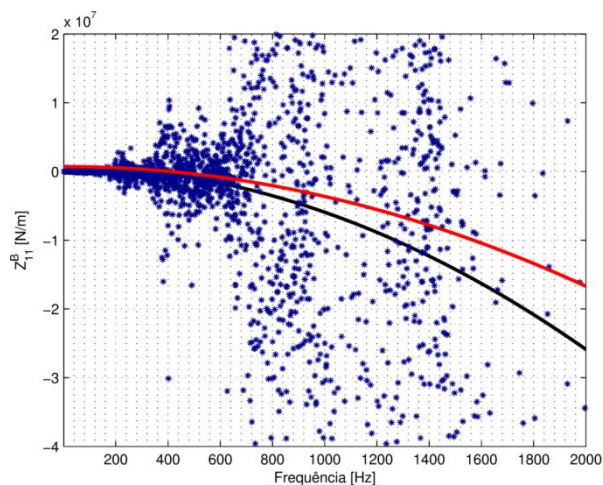


Figura 4.51:  $Z_{11}^B$  obtida com todas as frequências para a Formulação R1

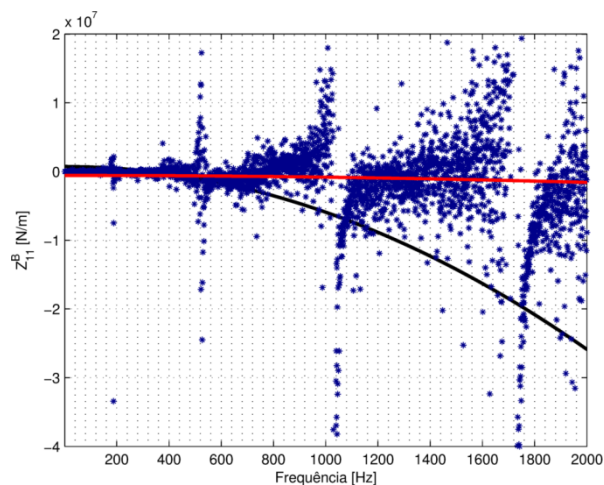


Figura 4.52:  $Z_{11}^B$  obtida com todas as frequências para a Formulação R2

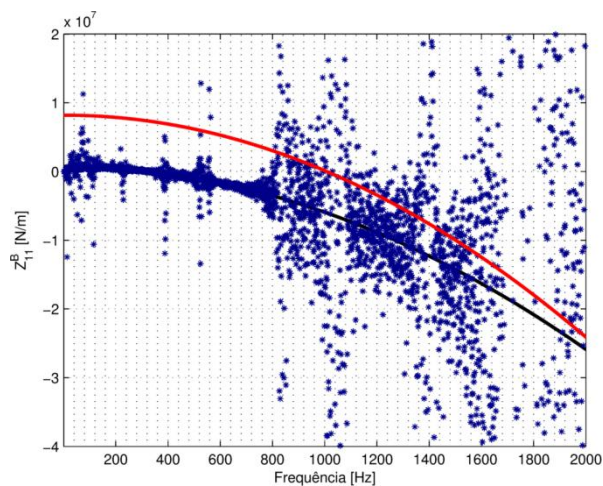


Figura 4.53:  $Z_{11}^B$  obtida com todas as frequências para a Formulação R3

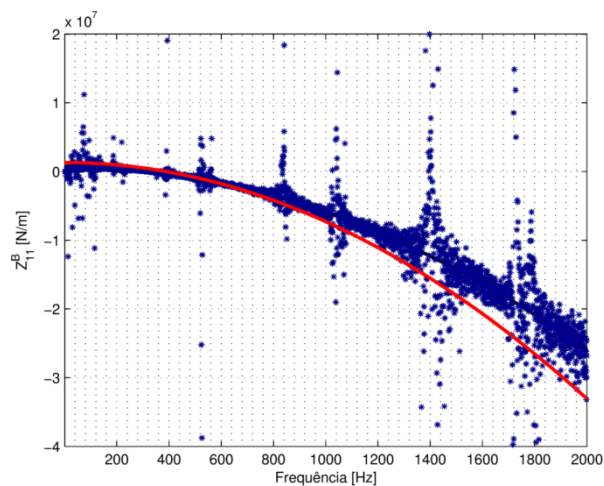


Figura 4.54:  $Z_{11}^B$  obtida com todas as frequências para a Formulação R4

Efectivamente, a Formulação R4 tem no segundo membro uma diferença entre a resposta dinâmicas da subestrutura A e resposta dinâmicas de estrutura C,  $(H_{jj}^A - H_{jj}^C)$ . Este facto leva-nos a aplicar o método de escolha de frequências referido no ponto 0, pois a diferença referida é importante para o problema de mínimos quadrados. Esta diferença vai assim representar a matriz  $Q$  do algoritmo.

Na Figura 4.55 temos identificado as bandas de frequências onde  $R_4(\omega)$  é mínimo. Estas frequências coincidem com as zonas de menor perturbação na Figura 4.56.

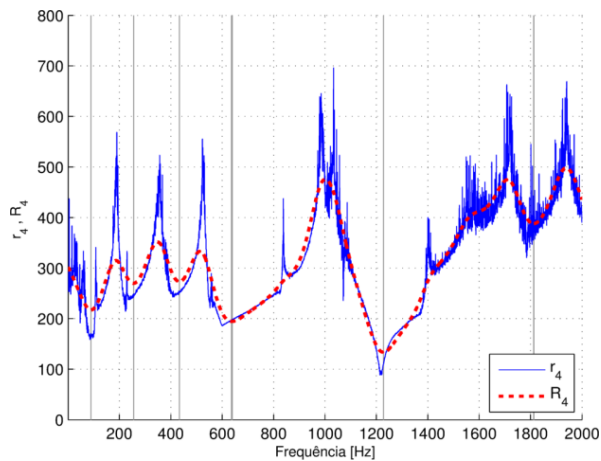


Figura 4.55:  $r_4(\omega)$  com  $R_4(\omega)$  da Formulação R4

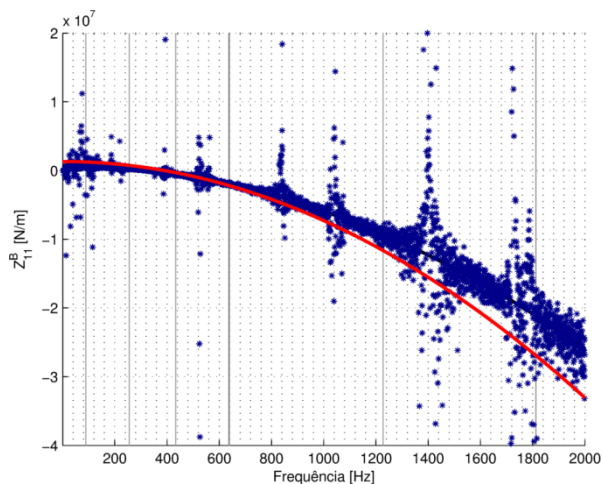


Figura 4.56:  $Z_{11}^B$  obtida com todas as frequências para a Formulação R4

As zonas de maior perturbação verticais da Figura 4.56 coincidem com os máximos locais de  $R_4(\omega)$  visíveis na Figura 4.55.

Após a escolha das frequências realizou-se uma nova regressão com apenas os valores de rigidez dinâmica correspondentes. Na Figura 4.57 e Figura 4.58 podemos verificar uma óptima aproximação à linha preta.

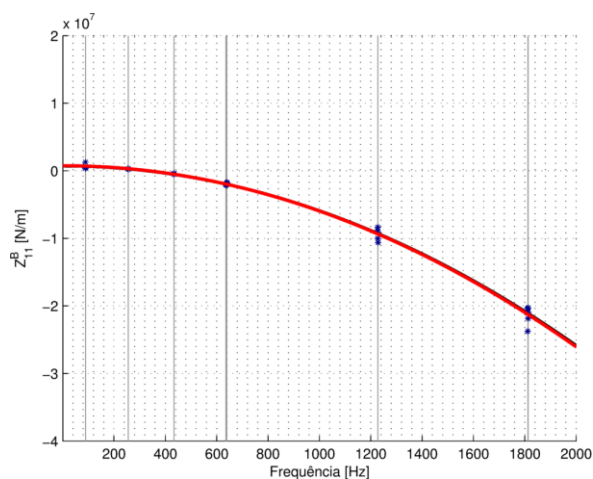


Figura 4.57:  $Z_{11}^B$  obtida apenas com as frequências escolhidas para a Formulação R4

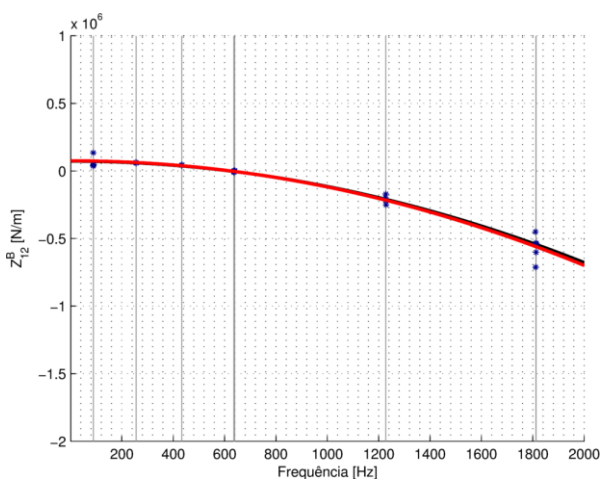


Figura 4.58:  $Z_{12}^B$  obtida apenas com as frequências escolhidas para a Formulação R4

Depois de obter a matriz de massa e a matriz de rigidez com todas as frequências e com as frequências escolhidas calcularam-se as respectivas receptâncias  $H^B = (K^B - \omega^2 M^B)^{-1}$ . Na Figura 4.59 podemos ver o grande melhoramento da receptância calculada com as frequências escolhidas.

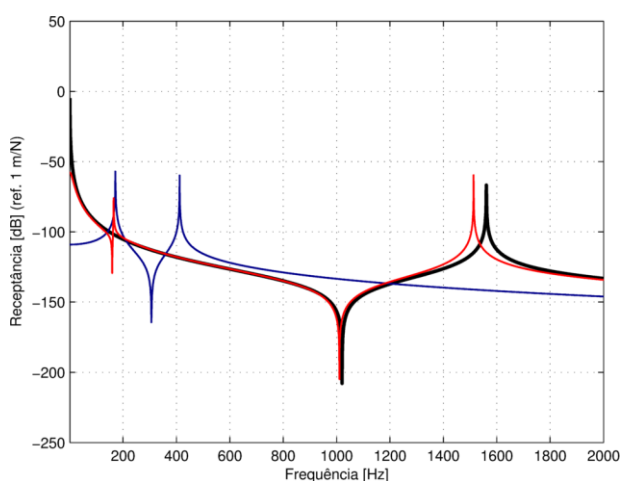


Figura 4.59: FRF  $H_{11}^B$  da Formulação R4; a linha a azul: com todas as frequências; a linha a vermelho com as frequências escolhidas

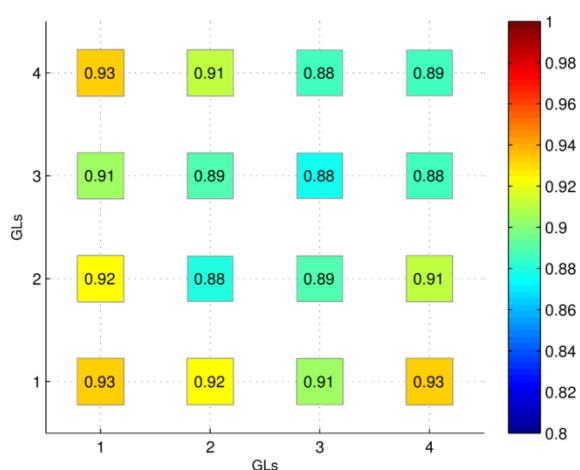


Figura 4.60: Correlação LAC média da Formulação R4

### Discussão

No cálculo da rigidez dinâmica a Formulação R4 apresentou resultados aceitáveis. A escolha das frequências melhorou bastante os resultados na Formulação R4 à semelhança dos resultados obtidos pela Formulação 2.

O cálculo das respectivas receptâncias também foi verificado o mesmo nível de semelhança (Figura 4.41 e Figura 4.59).

Na Figura 4.60 podemos ver a correlação LAC média da Formulação R4, que está com a mesma gama de valores que a correlação LAC média da Formulação 2 (Figura 4.42).

A aplicação da Formulação R4 sofre da mesma dificuldade da Formulação 2, ambas utilizam as coordenadas da junta.

## 4.7 Técnica de desacoplamento iterativa

Os métodos de desacoplamento sugeridos pela maioria dos autores obrigam ao cálculo de inversões de matrizes, como já foi aqui referido antes. Ren e Beards [37] sugerem um método iterativo para a determinação da rigidez dinâmica da junta,  $\mathbf{Z}_{jj}^B$ . O método apresentado não se revelou muito aconselhado por depender muito da estimativa inicial adoptada para cada frequência.

Vamos aqui sugerir uma abordagem diferente para contornar esse problema. Retomamos a formulação que nos deu lugar às equações do desacoplamento clássico.

Da equação (4.32) podemos retirar as seguintes expressões:

$$\mathbf{H}_{ii}^A - \mathbf{H}_{ii}^C = \mathbf{H}_{ij}^A \mathbf{Z}_{jj}^B \left( \mathbf{I}_{jj} + \mathbf{H}_{jj}^A \mathbf{Z}_{jj}^B \right)^{-1} \mathbf{H}_{ji}^A \quad (4.118)$$

$$\mathbf{H}_{ij}^A - \mathbf{H}_{ij}^C = \mathbf{H}_{ij}^A \mathbf{Z}_{jj}^B \left( \mathbf{I}_{jj} + \mathbf{H}_{jj}^A \mathbf{Z}_{jj}^B \right)^{-1} \mathbf{H}_{jj}^A \quad (4.119)$$

$$\mathbf{H}_{ji}^A - \mathbf{H}_{ji}^C = \mathbf{H}_{jj}^A \mathbf{Z}_{jj}^B \left( \mathbf{I}_{jj} + \mathbf{H}_{jj}^A \mathbf{Z}_{jj}^B \right)^{-1} \mathbf{H}_{ji}^A \quad (4.120)$$

$$\mathbf{H}_{jj}^A - \mathbf{H}_{jj}^C = \mathbf{H}_{jj}^A \mathbf{Z}_{jj}^B \left( \mathbf{I}_{jj} + \mathbf{H}_{jj}^A \mathbf{Z}_{jj}^B \right)^{-1} \mathbf{H}_{jj}^A \quad (4.121)$$

Multiplicando a equação (4.118) à esquerda por  $(\mathbf{H}_{ij}^A)^+$  e à direita por  $(\mathbf{H}_{ji}^A)^+$ , onde

$$(\mathbf{H}_{ij}^A)^+ = (\mathbf{H}_{ji}^A \mathbf{H}_{ij}^A)^{-1} \mathbf{H}_{ij}^A \quad e \quad (\mathbf{H}_{ji}^A)^+ = \mathbf{H}_{ij}^A (\mathbf{H}_{ji}^A \mathbf{H}_{ij}^A)^{-1} \quad (4.122)$$

Estas duas pseudo-inversas só existem se  $i \geq j$  (Anexo A). Assim temos

$$(\mathbf{H}_{ij}^A)^+ (\mathbf{H}_{ii}^A - \mathbf{H}_{ii}^C) (\mathbf{H}_{ji}^A)^+ = \mathbf{Z}_{jj}^B \left( \mathbf{I}_{jj} + \mathbf{H}_{jj}^A \mathbf{Z}_{jj}^B \right)^{-1} \quad (4.123)$$

Multiplicando à direita por  $(\mathbf{I}_{jj} + \mathbf{H}_{jj}^A \mathbf{Z}_{jj}^B)$  podemos escrever,

$$\mathbf{Z}_{jj}^B = \left( (\mathbf{H}_{ij}^A)^+ (\mathbf{H}_{ii}^A - \mathbf{H}_{ii}^C) (\mathbf{H}_{ji}^A)^+ \right) \mathbf{H}_{jj}^A \mathbf{Z}_{jj}^B + (\mathbf{H}_{ij}^A)^+ (\mathbf{H}_{ii}^A - \mathbf{H}_{ii}^C) (\mathbf{H}_{ji}^A)^+ \quad (4.124)$$

A equação (4.124) tem a forma “clássica” dos métodos iterativos de resoluções de equações lineares, Axelsson [72], Chen *et al.* [73] e Pina [74]. A forma geral é a seguinte:

$$\mathbf{X}^{(k+1)} = \mathbf{G}_k \mathbf{X}^{(k)} + \mathbf{P}_k \quad (4.125)$$

Onde  $\mathbf{G}_k$  é conhecida pela matriz de iteração que depende da iteração  $k$  e  $\mathbf{P}_k$  é uma matriz que também depende da iteração  $k$ .

Este método iterativo é convergente só e só se o raio espectral da matriz de iteração é inferior à unidade,  $\rho(\mathbf{G}_k) < 1$  para qualquer estimativa inicial  $\mathbf{X}^{(0)}$ . O raio espectral de uma matriz corresponde ao maior valor próprio dessa matriz.

Se a matriz de iteração  $\mathbf{G}_k$  e a matriz  $\mathbf{P}_k$  não dependerem de  $k$  diz-se que o método iterativo é estacionário.

A aplicação do método para cada frequência, na nossa situação, leva que a matriz de iteração  $\mathbf{G}_k$  e a matriz  $\mathbf{P}_k$  não dependam da iteração. Ou seja, temos  $\mathbf{G}_k = \mathbf{G}$  e  $\mathbf{P}_k = \mathbf{P}$ .

$$\mathbf{X}^{(k+1)} = \mathbf{G}\mathbf{X}^{(k)} + \mathbf{P} \quad (4.126)$$

A matriz de iteração  $\mathbf{G}$  é composta por duas matrizes  $\mathbf{G} = \mathbf{P}\mathbf{N}$ . Assim podemos escrever este método para cada frequência  $\omega$  da seguinte forma:

$$\mathbf{Z}_{jj}^B(\omega)^{(k+1)} = \mathbf{P}(\omega) \cdot \mathbf{N}(\omega) \cdot \mathbf{Z}_{jj}^B(\omega)^{(k)} + \mathbf{P}(\omega) \quad (4.127)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\omega) &= \left( \mathbf{H}_{ij}^A(\omega) \right)^+ \left( \mathbf{H}_{ii}^A(\omega) - \mathbf{H}_{ii}^C(\omega) \right) \left( \mathbf{H}_{ji}^A(\omega) \right)^+ \\ \mathbf{N}(\omega) &= \mathbf{H}_{jj}^A(\omega) \end{aligned} \quad (4.128)$$

Na nossa situação temos também que impor um critério de paragem do processo iterativo, a partir do qual assumimos que temos uma solução óptima. Foi imposta a seguinte norma de Frobenius,

$$\left\| \mathbf{Z}_{jj}^B(\omega)^{(k)} - \mathbf{Z}_{jj}^B(\omega)^{(k-1)} \right\|_F < \delta' \quad (4.129)$$

onde a norma de Frobenius é definida como

$$\| \mathbf{A} \|_F = \sqrt{\sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n |a_{pq}|^2} \quad (4.130)$$

Em princípio, será desejável que este erro  $\delta'$  seja o menor possível, mas um excesso de precisão pode em alguns casos produzir um número elevado de iterações e assim exigir um tempo de cálculo maior.

Este procedimento, que foi aplicado à equação (4.118), pode ser aplicado às outras três. Multiplicando a equação (4.119) à esquerda por  $\left( \mathbf{H}_{ij}^A \right)^+$  e à direita por  $\left( \mathbf{H}_{jj}^A \right)^{-1}$  temos,

$$\left(\mathbf{H}_{ij}^A\right)^+ \left(\mathbf{H}_{ij}^A - \mathbf{H}_{ij}^C\right) \left(\mathbf{H}_{jj}^A\right)^{-1} = \mathbf{Z}_{jj}^B \left(\mathbf{I}_{jj} + \mathbf{H}_{jj}^A \mathbf{Z}_{jj}^B\right)^{-1} \quad (4.131)$$

Em que  $i \geq j$ . Reorganizando a equação (4.131), podemos escrever:

$$\mathbf{Z}_{jj}^B = \left( \left(\mathbf{H}_{ij}^A\right)^+ \left(\mathbf{H}_{ij}^A - \mathbf{H}_{ij}^C\right) \left(\mathbf{H}_{jj}^A\right)^{-1} \right) \mathbf{H}_{jj}^A \mathbf{Z}_{jj}^B + \left(\mathbf{H}_{ij}^A\right)^+ \left(\mathbf{H}_{ij}^A - \mathbf{H}_{ij}^C\right) \left(\mathbf{H}_{jj}^A\right)^{-1} \quad (4.132)$$

Multiplicando a equação (4.120) à esquerda por  $\left(\mathbf{H}_{jj}^A\right)^{-1}$  e à direita por  $\left(\mathbf{H}_{ji}^A\right)^+$ , conduz a,

$$\left(\mathbf{H}_{jj}^A\right)^{-1} \left(\mathbf{H}_{ji}^A - \mathbf{H}_{ji}^C\right) \left(\mathbf{H}_{ji}^A\right)^+ = \mathbf{Z}_{jj}^B \left(\mathbf{I}_{jj} + \mathbf{H}_{jj}^A \mathbf{Z}_{jj}^B\right)^{-1} \quad (4.133)$$

Onde  $i \geq j$ . Reorganizando a equação (4.133), chegamos a

$$\mathbf{Z}_{jj}^B = \left( \left(\mathbf{H}_{jj}^A\right)^{-1} \left(\mathbf{H}_{ji}^A - \mathbf{H}_{ji}^C\right) \left(\mathbf{H}_{ji}^A\right)^+ \right) \mathbf{H}_{jj}^A \mathbf{Z}_{jj}^B + \left(\mathbf{H}_{jj}^A\right)^{-1} \left(\mathbf{H}_{ji}^A - \mathbf{H}_{ji}^C\right) \left(\mathbf{H}_{ji}^A\right)^+ \quad (4.134)$$

Por fim, da equação (4.121) obtém-se

$$\left(\mathbf{H}_{jj}^A\right)^{-1} \left(\mathbf{H}_{jj}^A - \mathbf{H}_{jj}^C\right) \left(\mathbf{H}_{jj}^A\right)^{-1} = \mathbf{Z}_{jj}^B \left(\mathbf{I}_{jj} + \mathbf{H}_{jj}^A \mathbf{Z}_{jj}^B\right)^{-1} \quad (4.135)$$

que pode ser organizada da seguinte forma:

$$\mathbf{Z}_{jj}^B = \left( \left(\mathbf{H}_{jj}^A\right)^{-1} \left(\mathbf{H}_{jj}^A - \mathbf{H}_{jj}^C\right) \left(\mathbf{H}_{jj}^A\right)^{-1} \right) \mathbf{H}_{jj}^A \mathbf{Z}_{jj}^B + \left(\mathbf{H}_{jj}^A\right)^{-1} \left(\mathbf{H}_{jj}^A - \mathbf{H}_{jj}^C\right) \left(\mathbf{H}_{jj}^A\right)^{-1} \quad (4.136)$$

Se analisarmos com atenção as equações (4.124), (4.132), (4.134) e (4.136), que podem ser resolvidas iterativamente para o cálculo da rigidez dinâmica de B, podemos agrupá-las na seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_{jj}^B = & \left[ \left(\mathbf{H}_{ij}^A\right)^+ \quad \vdots \quad \left(\mathbf{H}_{jj}^A\right)^{-1} \right] \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ii}^A - \mathbf{H}_{ii}^C & \mathbf{H}_{ij}^A - \mathbf{H}_{ij}^C \\ \mathbf{H}_{ji}^A - \mathbf{H}_{ji}^C & \mathbf{H}_{jj}^A - \mathbf{H}_{jj}^C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(\mathbf{H}_{ji}^A\right)^+ \\ \left(\mathbf{H}_{jj}^A\right)^{-1} \end{bmatrix} \mathbf{H}_{jj}^A \mathbf{Z}_{jj}^B + \\ & + \left[ \left(\mathbf{H}_{ij}^A\right)^+ \quad \vdots \quad \left(\mathbf{H}_{jj}^A\right)^{-1} \right] \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ii}^A - \mathbf{H}_{ii}^C & \mathbf{H}_{ij}^A - \mathbf{H}_{ij}^C \\ \mathbf{H}_{ji}^A - \mathbf{H}_{ji}^C & \mathbf{H}_{jj}^A - \mathbf{H}_{jj}^C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(\mathbf{H}_{ji}^A\right)^+ \\ \left(\mathbf{H}_{jj}^A\right)^{-1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.137)$$

onde a matriz de iteração é definida por

$$\mathbf{G} = \left[ \left(\mathbf{H}_{ij}^A\right)^+ \quad \vdots \quad \left(\mathbf{H}_{jj}^A\right)^{-1} \right] \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ii}^A - \mathbf{H}_{ii}^C & \mathbf{H}_{ij}^A - \mathbf{H}_{ij}^C \\ \mathbf{H}_{ji}^A - \mathbf{H}_{ji}^C & \mathbf{H}_{jj}^A - \mathbf{H}_{jj}^C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(\mathbf{H}_{ji}^A\right)^+ \\ \left(\mathbf{H}_{jj}^A\right)^{-1} \end{bmatrix} \mathbf{H}_{jj}^A \quad (4.138)$$

Contudo, esta matriz revelou-se desadequada nos testes numéricos realizados, pois em todas as frequências utilizadas o raio espectral era sempre superior à unidade e o método não convergia.

## Sumário

Disponemos de quatro formulações que nos permitem determinar de forma iterativa a matriz de rigidez dinâmica da junta,  $\mathbf{Z}_{jj}^B$ .

### Formulação G1

$$\mathbf{Z}_{jj}^B = \left( (\mathbf{H}_{ij}^A)^+ (\mathbf{H}_{ii}^A - \mathbf{H}_{ii}^C) (\mathbf{H}_{ji}^A)^+ \right) \mathbf{H}_{jj}^A \mathbf{Z}_{jj}^B + (\mathbf{H}_{ij}^A)^+ (\mathbf{H}_{ii}^A - \mathbf{H}_{ii}^C) (\mathbf{H}_{ji}^A)^+ \quad (4.124)$$

### Formulação G2

$$\mathbf{Z}_{jj}^B = \left( (\mathbf{H}_{ij}^A)^+ (\mathbf{H}_{ij}^A - \mathbf{H}_{ij}^C) (\mathbf{H}_{jj}^A)^{-1} \right) \mathbf{H}_{jj}^A \mathbf{Z}_{jj}^B + (\mathbf{H}_{ij}^A)^+ (\mathbf{H}_{ij}^A - \mathbf{H}_{ij}^C) (\mathbf{H}_{jj}^A)^{-1} \quad (4.132)$$

### Formulação G3

$$\mathbf{Z}_{jj}^B = \left( (\mathbf{H}_{jj}^A)^{-1} (\mathbf{H}_{ji}^A - \mathbf{H}_{ji}^C) (\mathbf{H}_{ji}^A)^+ \right) \mathbf{H}_{jj}^A \mathbf{Z}_{jj}^B + (\mathbf{H}_{jj}^A)^{-1} (\mathbf{H}_{ji}^A - \mathbf{H}_{ji}^C) (\mathbf{H}_{ji}^A)^+ \quad (4.134)$$

### Formulação G4

$$\mathbf{Z}_{jj}^B = \left( (\mathbf{H}_{jj}^A)^{-1} (\mathbf{H}_{jj}^A - \mathbf{H}_{jj}^C) (\mathbf{H}_{jj}^A)^{-1} \right) \mathbf{H}_{jj}^A \mathbf{Z}_{jj}^B + (\mathbf{H}_{jj}^A)^{-1} (\mathbf{H}_{jj}^A - \mathbf{H}_{jj}^C) (\mathbf{H}_{jj}^A)^{-1} \quad (4.136)$$

Nas Formulações G1, G2 e G3 temos que prevenir que  $i \geq j$  para permitir a existência das pseudo-inversas presentes.

### 4.7.1 Exemplo numérico 5

Para avaliar a consistência destes métodos iterativos vamos utilizar o acoplamento de vigas do exemplo numérico 3, como está identificado na Figura 4.21 na secção 4.5.2. A estrutura C é constituída pelo acoplamento das vigas A<sub>1</sub>, B e A<sub>2</sub>. O objectivo agora é determinar a rigidez dinâmica de B ( $Z_{jj}^B$ ), assumindo que  $H^A$  é calculada analiticamente e que  $H^C$  é calculada por via experimental.

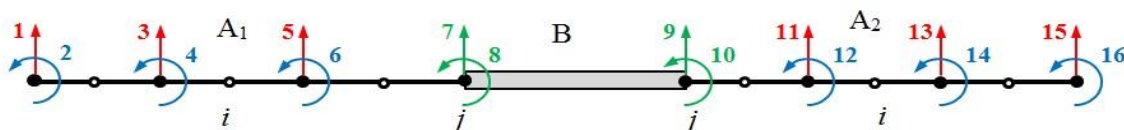


Figura 4.21: Acoplamento de vigas

Utilizando também o método dos elementos finitos, foi escolhido o elemento de viga com quatro graus de liberdade como foi feito no exemplo numérico 3. Foi utilizado os mesmos dados estruturais, ou seja, os dados da Tabela 4.3.

| Viga           | Comprimento | Largura | Espessura | $E$     | $\rho$                 |
|----------------|-------------|---------|-----------|---------|------------------------|
| A <sub>1</sub> | 270 mm      | 30 mm   | 5 mm      | 194 GPa | 7562 kg/m <sup>3</sup> |
| B              | 200 mm      | 30 mm   | 10 mm     | 194 GPa | 7562 kg/m <sup>3</sup> |
| A <sub>2</sub> | 370 mm      | 30 mm   | 5 mm      | 194 GPa | 7562 kg/m <sup>3</sup> |

Tabela 4.3: Características das vigas do exemplo numérico 5

Para simular os erros experimentais na obtenção das  $H^C$ , vamos impor um erro numérico igual ao do exemplo numérico 3 com um nível de ruído de 3%.

$$\tilde{H}_{pq}(\omega_k) = H_{pq}(\omega_k) + \frac{\gamma}{100} \cdot \text{normrnd}(\omega_k) \cdot \max(|H_{pq}(\omega)|) \quad (4.87)$$

Foi assumido um valor para o critério de paragem  $\delta^i = 10^{-7}$ . Depois de encontrar a rigidez dinâmica para as frequências admissíveis do método iterativo foi feita uma regressão linear utilizando a solução de mínimos quadrados (Anexo B). Este processo permitiu-nos determinar cada elemento da matriz de massa,  $m_{pq}$  e cada elemento da matriz de rigidez  $k_{pq}$  da subestrutura B.

Um dos problemas que surgiu foi a escassez de frequências em que o raio espectral da matriz de iteração era inferior à unidade. Este obstáculo leva a que o processo de regressão seja mais sensível às perturbações dos poucos valores admitidos.

Na Figura 4.61, Figura 4.62 e Figura 4.63 podemos observar o cálculo de  $Z_{11}^B$  para as formulações G1, G2 e G3. Os pontos à azul são os valores obtidos em cada frequência pelo método iterativo e a curva a vermelho é a  $Z_{11}^B$  obtida pela regressão dos pontos que determinou  $k_{pq}$  e de  $m_{pq}$  de cada matriz. Os resultados não são aceitáveis pois a rigidez dinâmica obtida está muito longe da curva preta pretendida.

Na Figura 4.64, está o cálculo de  $Z_{11}^B$  para a Formulação G4, os resultados já são melhores. Sobre a dispersão dos pontos verifica-se que em certas gamas de frequências a perturbação é bem menor do que noutras adjacentes em que os valores têm uma dispersão vertical.

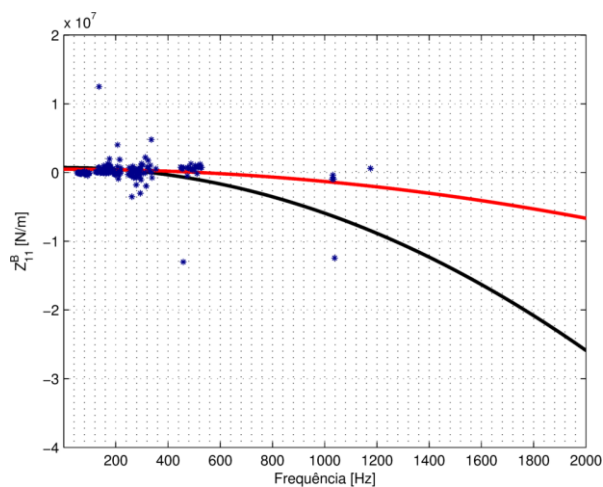


Figura 4.61:  $Z_{11}^B$  da Formulação G1

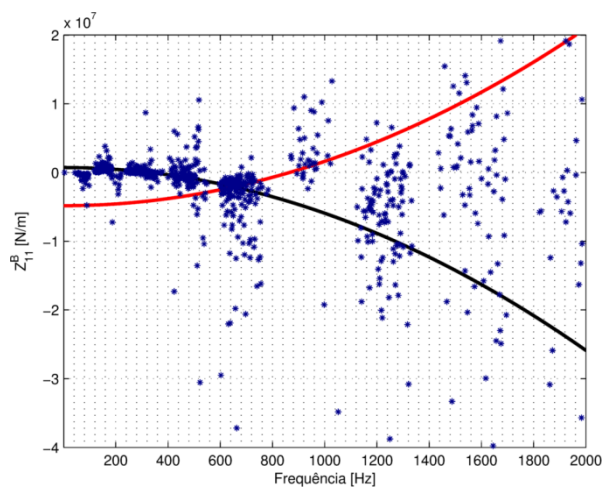


Figura 4.62:  $Z_{11}^B$  da Formulação G2

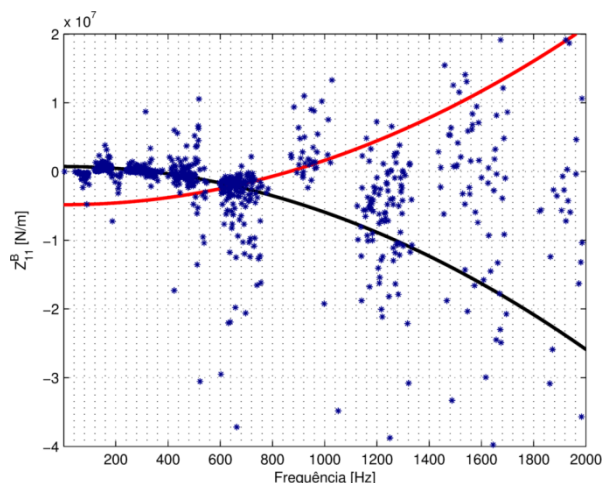


Figura 4.63:  $Z_{11}^B$  da Formulação G3

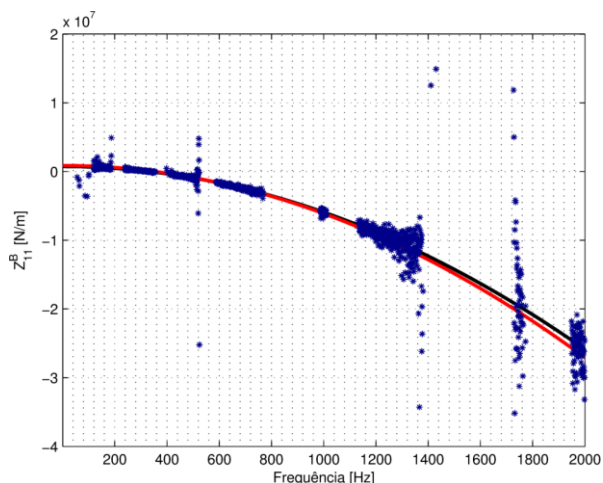


Figura 4.64:  $Z_{11}^B$  da Formulação G4

Ao comparar a Figura 4.54 com a Figura 4.64 verifica-se que temos perturbações verticais e uma dispersão menor junto das mesmas frequências. Efectivamente, a diferença  $(H_{jj}^A - H_{jj}^C)$  presente na Formulação R4 também está presente na Formulação G4 o que nos leva a utilizar o algoritmo do ponto 0 para assim fazer uma escolha de frequências e melhorar os resultados.

Assim, na Figura 4.65 temos identificadas as bandas de frequências onde  $R_4(\omega)$  é mínimo e estas coincidem também com as zonas de menor perturbação na Figura 4.66.

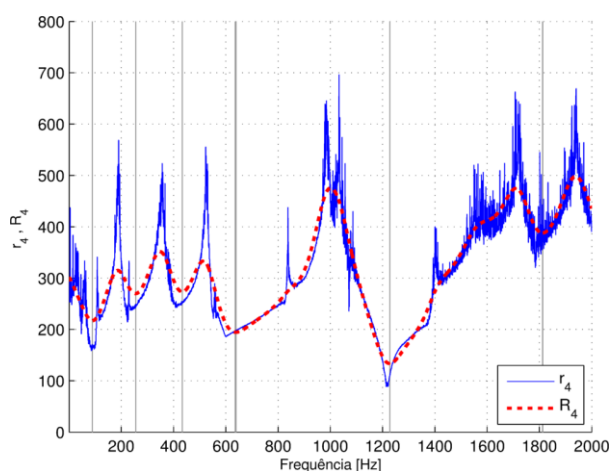


Figura 4.65:  $r_4(\omega)$  com  $R_4(\omega)$  da Formulação G4

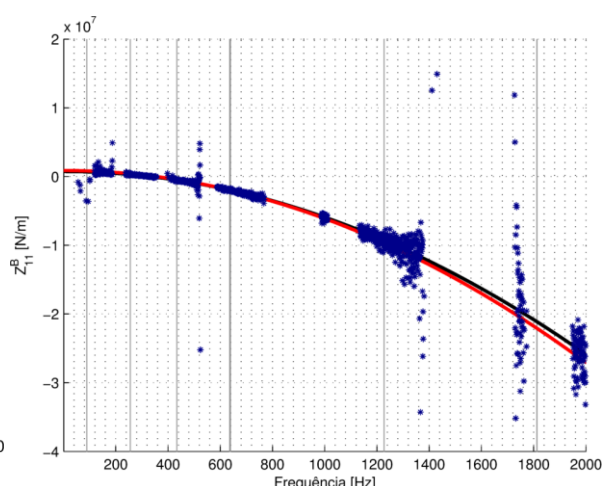


Figura 4.66:  $Z_{11}^B$  obtida com todas as frequências da Formulação G4

Com as frequências escolhidas realizou-se uma nova regressão (Figura 4.67 e Figura 4.68) com resultados melhorados.

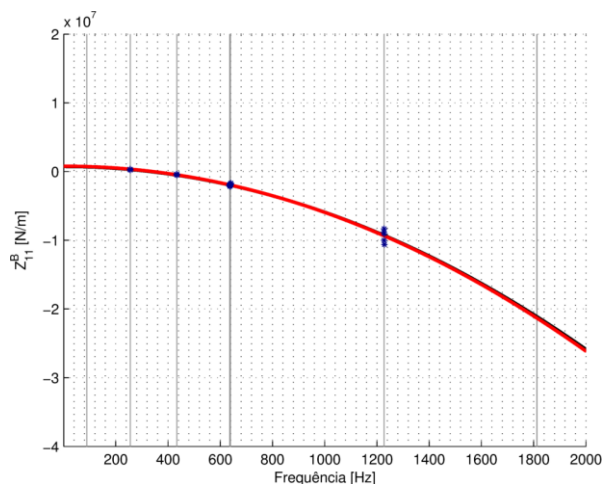


Figura 4.67:  $Z_{11}^B$  obtida apenas com as frequências escolhidas para a Formulação G4

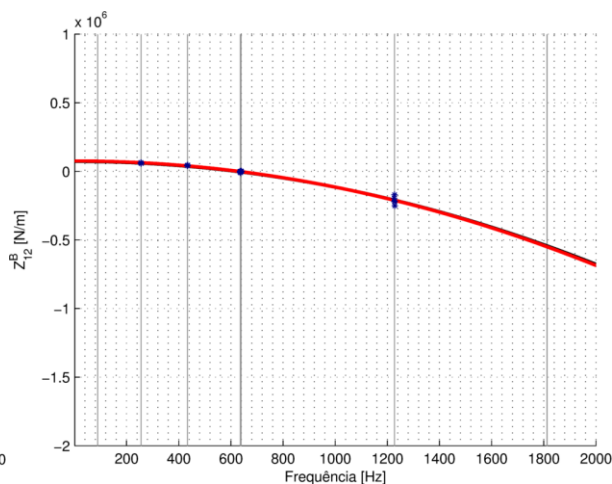


Figura 4.68:  $Z_{12}^B$  obtida apenas com as frequências escolhidas para a Formulação G4

Depois de obter a matriz de massa e a matriz de rigidez utilizando todas as frequências e utilizando apenas as frequências escolhidas calcularam-se as respectivas receptâncias  $H^B = (K^B - \omega^2 M^B)^{-1}$ . Na Figura 4.69 é visível um melhoramento claro da receptância quando são utilizadas as frequências escolhidas. A respectiva correlação LAC média apresenta valores muito próximos de 1 (Figura 4.70).

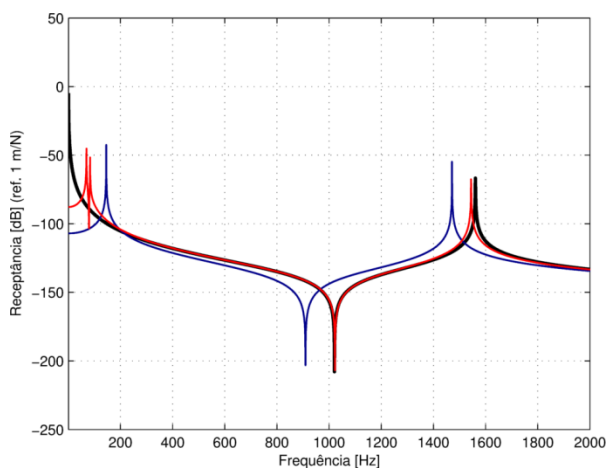


Figura 4.69: FRF  $H_{11}^B$  da Formulação G4; a linha a azul: com todas as frequências; a linha a vermelho com as frequências escolhidas

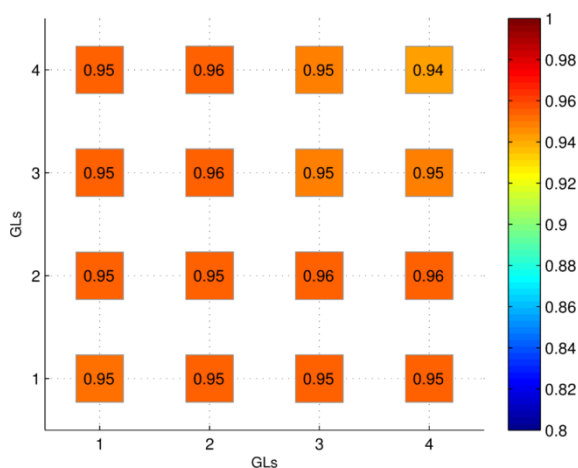


Figura 4.70: Correlação LAC média da Formulação G4

### ***Discussão***

Este método iterativo fica muito à mercê do valor do raio espectral da matriz de iteração. A Formulação G1 apresentou poucas frequências admissíveis, o que não contribuiu para uma boa regressão (Figura 4.61). A Formulação G4 apresentou um melhor comportamento (Figura 4.64).

Na tentativa de melhorar os resultados da Formulação G4 foi aplicado o mesmo método de escolha de frequências que está presente no ponto 0. De entre as frequências admissíveis (Figura 4.66) ainda foi possível encontrar frequências que satisfizessem o algoritmo e assim melhorar bastante os resultados (Figura 4.67 e Figura 4.68).

No cálculo das receptâncias, o método iterativo utilizado na Formulação G4 é o que conduz ao melhor resultado (Figura 4.69), apresentando mesmo uma melhor aproximação comparando com a Formulação R4 (Figura 4.59) e a Formulação 2 (Figura 4.41). Este facto pode ser confirmado na comparação das respectivas correlações LAC médias (Figura 4.70, Figura 4.60 e Figura 4.42).

# **5** Aplicação prática

## **5.1 Introdução**

Neste capítulo pretende-se aplicar as técnicas de desacoplamento descritas no capítulo anterior numa ligação aparafusada real, com a finalidade de identificar as características dinâmicas dessa ligação.

Neste tipo de ligação é imposto um determinado binário de aperto para garantir a união entre as duas subestruturas. Foi efectuada uma análise da importância deste aperto nalgumas estruturas.

No processo de aquisição das respostas dinâmicas deparamo-nos, entre outros problemas, com a dificuldade de medir as rotações nos pontos de interesse, no problema do efeito dinâmico originado pela adição da massa dos acelerómetros na estrutura e pelo ruído que surge no processo de aquisição do sinal dos transdutores. Antes de aplicar as técnicas de desacoplamento numa estrutura vamos tentar resolver os três problemas aqui identificados.

## 5.2 Determinação de funções de resposta em frequência não medidas

### 5.2.1 Introdução

A necessidade de medir rotações é importante do ponto vista geral, mas também é importante no nosso problema de identificação de junta neste contexto esta secção é dedicada a determinação de FRF não medidas.

Em grande parte das situações a determinação das FRF em estruturas complexas é feita em zonas da estrutura geometricamente bem definidas. Na maioria dos casos estas zonas são de fácil modelação numérica. No entanto, experimentalmente, algumas dessas FRF são de difícil obtenção. Assumindo o conhecimento numérico de parte da estrutura, vamos aqui propor um método para determinar as FRF não medidas (Batista e Maia [65]).

Vamos utilizar o método alternativo de acoplamento descrito na secção 4.3. Vamos considerar que as coordenadas  $i$  se dividem-se em dois grupos: coordenadas medidas experimentalmente,  $t$ , e coordenadas  $r$ , onde por alguma razão não é possível medir as respostas Figura 5.1.

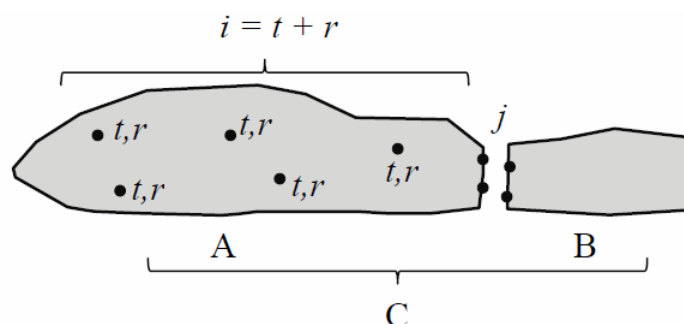


Figura 5.1: Acoplamento das subestruturas A e B formando a estrutura C

Vamos de seguida procurar determinar as respostas nas coordenadas  $r$  e  $j$  de C com apenas a informação obtida numericamente da estrutura A e com as medições nas coordenadas  $t$  da estrutura C.

## 5.2.2 Formulação teórica

Para obter as expressões que nos vão servir de base para estimar as FRF não medidas podemos seguir várias vias. Batista e Maia [65] partiram directamente da relação entre as rigidezes dinâmicas das subestruturas A e B com a rigidez dinâmica da estrutura C, ou seja, seguiu o caminho descrito no capítulo 4. Para simplificar, vamos utilizar a expressão do acoplamento descrita na secção 4.3, ou seja, a expressão (4.36):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ii}^C & \mathbf{H}_{ij}^C \\ \mathbf{H}_{ji}^C & \mathbf{H}_{jj}^C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ii}^A & \mathbf{H}_{ij}^A \\ \mathbf{H}_{ji}^A & \mathbf{H}_{jj}^A \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ij}^A \\ \mathbf{H}_{jj}^A \end{bmatrix} \left( \mathbf{H}_{jj}^A + \mathbf{H}_{jj}^B \right)^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ji}^A & \mathbf{H}_{jj}^A \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

Esta expressão é constituída por quatro equações que contêm informação das três estruturas; vamos reescrever estas quatro equações sem incluir a resposta dinâmica de B ( $\mathbf{H}_{jj}^B$ ). Assim, temos

$$\mathbf{H}_{ii}^C = \mathbf{H}_{ii}^A - \mathbf{H}_{ij}^A \left( \mathbf{H}_{jj}^A + \mathbf{H}_{jj}^B \right)^{-1} \mathbf{H}_{ji}^A \quad (5.1)$$

$$\mathbf{H}_{ij}^C = \mathbf{H}_{ij}^A - \mathbf{H}_{ij}^A \left( \mathbf{H}_{jj}^A + \mathbf{H}_{jj}^B \right)^{-1} \mathbf{H}_{jj}^A \quad (5.2)$$

$$\mathbf{H}_{ji}^C = \mathbf{H}_{ji}^A - \mathbf{H}_{jj}^A \left( \mathbf{H}_{jj}^A + \mathbf{H}_{jj}^B \right)^{-1} \mathbf{H}_{ji}^A \quad (5.3)$$

$$\mathbf{H}_{jj}^C = \mathbf{H}_{jj}^A - \mathbf{H}_{jj}^A \left( \mathbf{H}_{jj}^A + \mathbf{H}_{jj}^B \right)^{-1} \mathbf{H}_{jj}^A \quad (5.4)$$

Da equação (5.1) podemos escrever (com  $i \geq j$ ),

$$\left( \mathbf{H}_{ij}^A \right)^+ \left( \mathbf{H}_{ii}^A - \mathbf{H}_{ii}^C \right) = \left( \mathbf{H}_{jj}^A + \mathbf{H}_{jj}^B \right)^{-1} \mathbf{H}_{ji}^A \quad (5.5)$$

Substituindo a equação (5.5) na equação (5.3), obtemos  $\mathbf{H}_{ji}^C$ :

$$\mathbf{H}_{ji}^C = \mathbf{H}_{ji}^A - \mathbf{H}_{jj}^A \left( \mathbf{H}_{ij}^A \right)^+ \left( \mathbf{H}_{ii}^A - \mathbf{H}_{ii}^C \right) \quad (5.6)$$

Da equação (5.3) também podemos escrever

$$\left( \mathbf{H}_{jj}^A \right)^{-1} \left( \mathbf{H}_{ji}^A - \mathbf{H}_{ji}^C \right) = \left( \mathbf{H}_{jj}^A + \mathbf{H}_{jj}^B \right)^{-1} \mathbf{H}_{ji}^A \quad (5.7)$$

Substituindo a equação (5.7) na equação (5.1) podemos escrever a  $\mathbf{H}_{ii}^C$ :

$$\mathbf{H}_{ii}^C = \mathbf{H}_{ii}^A - \mathbf{H}_{ij}^A \left( \mathbf{H}_{jj}^A \right)^{-1} \left( \mathbf{H}_{ji}^A - \mathbf{H}_{ji}^C \right) \quad (5.8)$$

Reescrevendo a equação (5.2) (com  $i \geq j$ ),

$$\left( \mathbf{H}_{ij}^A \right)^+ \left( \mathbf{H}_{ij}^A - \mathbf{H}_{ij}^C \right) = \left( \mathbf{H}_{jj}^A + \mathbf{H}_{jj}^B \right)^{-1} \mathbf{H}_{jj}^A \quad (5.9)$$

Simplificando a equação (5.9), temos

$$I_{ij} - (H_{ij}^A)^+ H_{ij}^C = (H_{jj}^A + H_{jj}^B)^{-1} H_{jj}^A \quad (5.10)$$

Substituindo a equação (5.10) na equação (5.4), obtemos  $H_{jj}^C$ :

$$H_{jj}^C = H_{jj}^A (H_{ij}^A)^+ H_{ij}^C \quad (5.11)$$

### 5.2.3 Sumário

Podemos agora determinar com as seguintes equações a matriz  $H^C$ , que é simétrica, sem necessitar de saber nada sobre a subestrutura B.

$$H_{ji}^C = H_{ji}^A - H_{jj}^A (H_{ij}^A)^+ (H_{ii}^A - H_{ii}^C) \quad (5.6)$$

$$H_{ii}^C = H_{ii}^A - H_{ij}^A (H_{jj}^A)^{-1} (H_{ji}^A - H_{ji}^C) \quad (5.8)$$

$$H_{jj}^C = H_{jj}^A (H_{ij}^A)^+ H_{ij}^C \quad (5.11)$$

As pseudo-inversas presentes nas equações (5.6) e (5.11) só existem se  $i \geq j$  (Anexo A).

## 5.2.4 Determinação das respostas nas coordenadas não medidas

As coordenadas  $i$  da estrutura C são constituídas pelas coordenadas  $t$  e  $r$ . Assim, temos a matriz  $\mathbf{H}^C$ , também simétrica, constituída da seguinte forma:

$$\mathbf{H}^C = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ii}^C & \mathbf{H}_{ij}^C \\ \mathbf{H}_{ji}^C & \mathbf{H}_{jj}^C \end{bmatrix} \quad i = t + r \quad \rightarrow \quad \mathbf{H}^C = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{tt}^C & \mathbf{H}_{tr}^C & \mathbf{H}_{tj}^C \\ \mathbf{H}_{rt}^C & \mathbf{H}_{rr}^C & \mathbf{H}_{rj}^C \\ \mathbf{H}_{jt}^C & \mathbf{H}_{jr}^C & \mathbf{H}_{jj}^C \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

Na matriz  $\mathbf{H}^C$  apenas será possível determinar a submatriz  $\mathbf{H}_{tt}^C$  experimentalmente. Com esta informação vamos determinar o resto dos elementos, utilizando as equações ((5.6), (5.8) e (5.11)).

Da equação (5.6), se considerarmos apenas as coordenadas  $i$  como de translação, temos (com  $t \geq j$ ):

$$i = t \quad i = t \quad \rightarrow \quad \mathbf{H}_{jt}^C = \mathbf{H}_{jt}^A - \mathbf{H}_{jj}^A \left( \mathbf{H}_{tj}^A \right)^+ \left( \mathbf{H}_{tt}^A - \mathbf{H}_{tt}^C \right) \quad (5.13)$$

Das equações (5.8) e (5.13), relacionamos as rotações com as translações podemos escrever

$$i = r \quad i = t \quad \rightarrow \quad \mathbf{H}_{rt}^C = \mathbf{H}_{rt}^A - \mathbf{H}_{rj}^A \left( \mathbf{H}_{jj}^A \right)^{-1} \left( \mathbf{H}_{jt}^A - \mathbf{H}_{jt}^C \right) \quad (5.14)$$

Das equações (5.6) e (5.14), relacionando de outra forma, obtemos (com  $t \geq j$ )

$$i = t \quad i = r \quad \rightarrow \quad \mathbf{H}_{jr}^C = \mathbf{H}_{jr}^A - \mathbf{H}_{jj}^A \left( \mathbf{H}_{tj}^A \right)^+ \left( \mathbf{H}_{tr}^A - \mathbf{H}_{tr}^C \right) \quad (5.15)$$

Das equações (5.8) e (5.15), se considerarmos apenas as coordenadas  $i$  como de rotação,

$$i = r \quad i = r \quad \rightarrow \quad \mathbf{H}_{rr}^C = \mathbf{H}_{rr}^A - \mathbf{H}_{rj}^A \left( \mathbf{H}_{jj}^A \right)^{-1} \left( \mathbf{H}_{jr}^A - \mathbf{H}_{jr}^C \right) \quad (5.16)$$

Por fim, das equações (5.11) e (5.13), considerando apenas as coordenadas  $i$  como de translação, temos (com  $t \geq j$ ),

$$i = t \quad \rightarrow \quad \mathbf{H}_{jj}^C = \mathbf{H}_{jj}^A \left( \mathbf{H}_{tj}^A \right)^+ \mathbf{H}_{tj}^C \quad (5.17)$$

Todos as componentes da matriz  $\mathbf{H}^A$  são determinadas numericamente pelo método dos elementos finitos. Assim, de forma sequencial, podemos a partir das respostas conhecidas experimentalmente,  $\mathbf{H}_{tt}^C$ , estimar todas as respostas nas outras

coordenadas  $r$  e  $j$  da estrutura C, temos no entanto de garantir que  $t \geq j$  para acautelar a existência das pseudo-inversas.

### **Formulação alternativa**

Podemos determinar todas as FRF da matriz  $\mathbf{H}^C$  que procuramos de outra forma mais simples. Retomemos as equações (4.36), (5.1) e (5.12):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ii}^C & \mathbf{H}_{ij}^C \\ \mathbf{H}_{ji}^C & \mathbf{H}_{jj}^C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ii}^A & \mathbf{H}_{ij}^A \\ \mathbf{H}_{ji}^A & \mathbf{H}_{jj}^A \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ij}^A \\ \mathbf{H}_{jj}^A \end{bmatrix} \left( \mathbf{H}_{jj}^A + \mathbf{H}_{jj}^B \right)^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ji}^A & \mathbf{H}_{jj}^A \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

$$\mathbf{H}_{ii}^C = \mathbf{H}_{ii}^A - \mathbf{H}_{ij}^A \left( \mathbf{H}_{jj}^A + \mathbf{H}_{jj}^B \right)^{-1} \mathbf{H}_{ji}^A \quad (5.1)$$

$$\mathbf{H}^C = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ii}^C & \mathbf{H}_{ij}^C \\ \mathbf{H}_{ji}^C & \mathbf{H}_{jj}^C \end{bmatrix} \quad i = t + r \quad \rightarrow \quad \mathbf{H}^C = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{tt}^C & \mathbf{H}_{tr}^C & \mathbf{H}_{tj}^C \\ \mathbf{H}_{rt}^C & \mathbf{H}_{rr}^C & \mathbf{H}_{rj}^C \\ \mathbf{H}_{jt}^C & \mathbf{H}_{jr}^C & \mathbf{H}_{jj}^C \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

Da equação (5.1) considerarmos apenas as coordenadas  $i$  como de translação podemos escrever (com  $t \geq j$ )

$$\left( \mathbf{H}_{jj}^A + \mathbf{H}_{jj}^B \right)^{-1} = \left( \mathbf{H}_{tj}^A \right)^+ \left( \mathbf{H}_{tt}^A - \mathbf{H}_{tt}^C \right) \left( \mathbf{H}_{jt}^A \right)^+ \quad (5.18)$$

Substituindo a equação (5.18) na equação (4.36), obtemos

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ii}^C & \mathbf{H}_{ij}^C \\ \mathbf{H}_{ji}^C & \mathbf{H}_{jj}^C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ii}^A & \mathbf{H}_{ij}^A \\ \mathbf{H}_{ji}^A & \mathbf{H}_{jj}^A \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ij}^A \\ \mathbf{H}_{jj}^A \end{bmatrix} \left( \left( \mathbf{H}_{tj}^A \right)^+ \left( \mathbf{H}_{tt}^A - \mathbf{H}_{tt}^C \right) \left( \mathbf{H}_{jt}^A \right)^+ \right) \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ji}^A & \mathbf{H}_{jj}^A \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

Se utilizarmos a decomposição das coordenadas  $i$  como apresentada na equação (5.12), podemos escrever a equação geral:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{tt}^C & \mathbf{H}_{tr}^C & \mathbf{H}_{tj}^C \\ \mathbf{H}_{rt}^C & \mathbf{H}_{rr}^C & \mathbf{H}_{rj}^C \\ \mathbf{H}_{jt}^C & \mathbf{H}_{jr}^C & \mathbf{H}_{jj}^C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{tt}^A & \mathbf{H}_{tr}^A & \mathbf{H}_{tj}^A \\ \mathbf{H}_{rt}^A & \mathbf{H}_{rr}^A & \mathbf{H}_{rj}^A \\ \mathbf{H}_{jt}^A & \mathbf{H}_{jr}^A & \mathbf{H}_{jj}^A \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{tj}^A \\ \mathbf{H}_{rj}^A \\ \mathbf{H}_{jj}^A \end{bmatrix} \left( \left( \mathbf{H}_{tj}^A \right)^+ \left( \mathbf{H}_{tt}^A - \mathbf{H}_{tt}^C \right) \left( \mathbf{H}_{jt}^A \right)^+ \right) \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{jt}^A & \mathbf{H}_{jr}^A & \mathbf{H}_{jj}^A \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

Ao realizar o algoritmo de substituição descrito no início desta secção encontramos o conjunto de equações que estão representadas de forma mais compacta na equação (5.20) onde também temos de garantir que  $t \geq j$ . Vamos de seguida realizar um exemplo numérico para avaliar a viabilidade desta formulação.

### 5.2.5 Exemplo numérico 6

Para fazer uma primeira validação do método proposto são apresentados quatro exemplos numéricos de estruturas acopladas, representadas na Figura 5.2, Figura 5.3, Figura 5.4 e Figura 5.5. Cada estrutura é constituída por três componentes,  $A_1$ ,  $B$  e  $A_2$  que juntas formam a estrutura  $C$ . As subestruturas  $A_1$  e  $A_2$  formam a estrutura  $A$ .



Figura 5.2: Caso 1

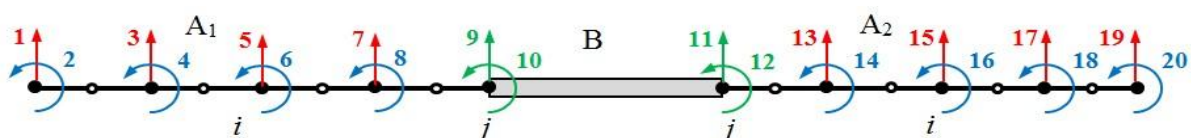


Figura 5.3: Caso 2

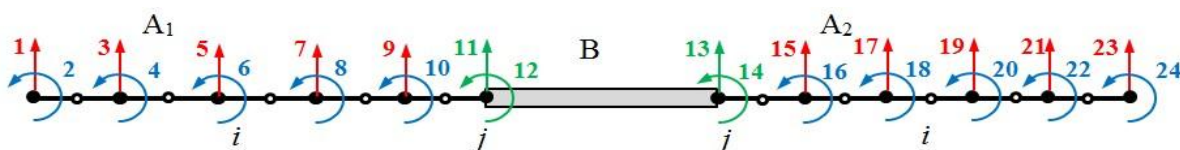


Figura 5.4: Caso 3



Figura 5.5: Caso 4

Vamos utilizar elementos de viga com quatro graus de liberdade; cada componente  $A_1$  e  $A_2$  é dividida em vários elementos. Só nos nós indicados nas figuras é que serão considerados as coordenadas para o nosso estudo. As coordenadas a vermelho são as coordenadas de translação  $t$  conhecidas, as coordenadas a azul são as coordenadas de rotação  $r$  desconhecidas e as coordenadas verdes são as coordenadas comuns à junta  $j$ , também desconhecidas. As características de cada componente são apresentadas na

Tabela 4.3. Para simular os erros experimentais na obtenção de  $H_{tt}^C$ , impomos um erro numérico igual ao do exemplo numérico 3, secção 4.5.2,

$$\tilde{H}_{pq}(\omega_k) = H_{pq}(\omega_k) + \frac{\gamma}{100} \cdot normrnd(\omega_k) \cdot \max(|H_{pq}(\omega)|) \quad (4.87)$$

Neste exemplo também foi utilizado um nível de ruído de 3%.

| Viga           | Comprimento | Largura | Espessura | $E$     | $\rho$                 |
|----------------|-------------|---------|-----------|---------|------------------------|
| A <sub>1</sub> | 270 mm      | 30 mm   | 5 mm      | 194 GPa | 7562 kg/m <sup>3</sup> |
| B              | 200 mm      | 30 mm   | 10 mm     | 194 GPa | 7562 kg/m <sup>3</sup> |
| A <sub>2</sub> | 370 mm      | 30 mm   | 5 mm      | 194 GPa | 7562 kg/m <sup>3</sup> |

Tabela 4.3: Características das vigas do exemplo numérico 6

### Quantificação do efeito do erro

Vamos usar o critério de correlação que está na secção 2.7 para mostrar a influência do número de coordenadas escolhidas  $i$ . Na Figura 5.6, Figura 5.7, Figura 5.8 e Figura 5.9 estão representadas as médias do LAC da matriz  $H^C$  de cada caso estudado.

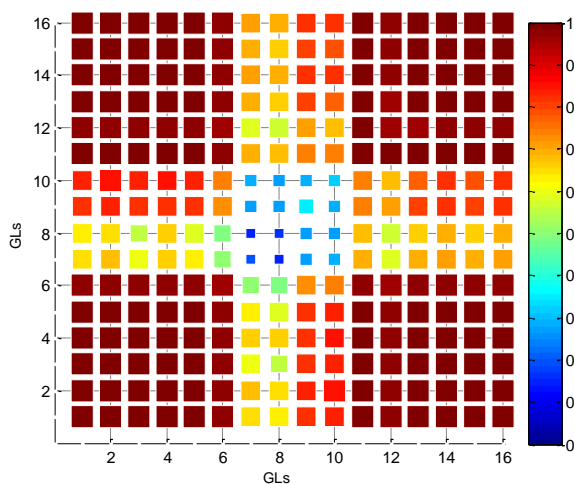


Figura 5.6: LAC médio - Caso 1

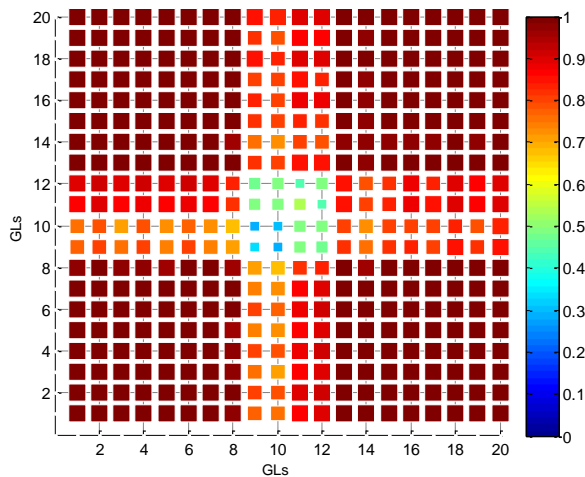


Figura 5.7: LAC médio - Caso 2

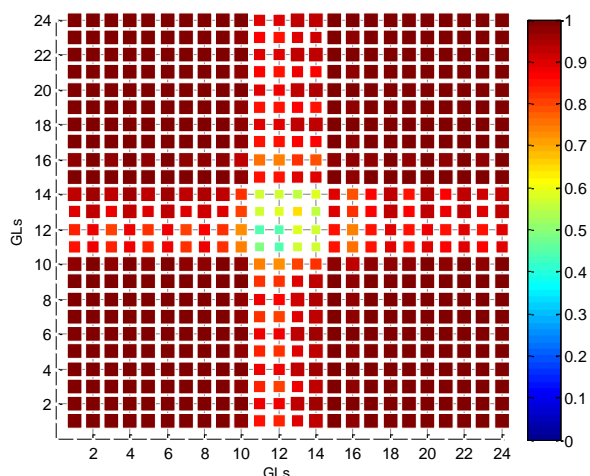


Figura 5.8: LAC médio - Caso 3

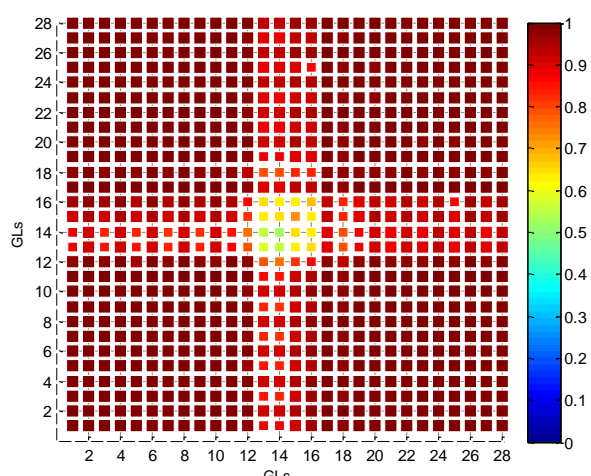


Figura 5.9: LAC médio - Caso 4

Dos valores representados, os que são relacionados com as coordenadas  $i$  revelam uma muito boa correlação. No entanto, os que são relacionados com as coordenadas  $j$  revelam uma má correlação. Este efeito é mais expressivo nas correlações entre coordenadas  $j$ .

No entanto, há consideráveis melhoramentos se tivermos um maior número de coordenadas  $i$  para medir, como se pode ver comparando a Figura 5.6 e a Figura 5.9.

Na Figura 5.10 e Figura 5.11 podemos ver duas FRF estimadas, do Caso 1. É visível apenas alguma perturbação nas anti-ressonâncias.

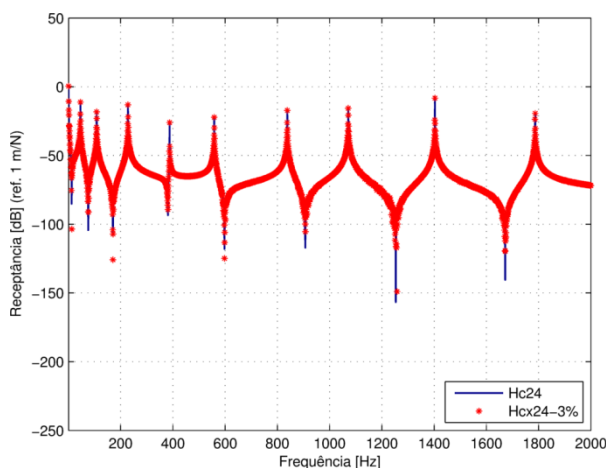


Figura 5.10: FRF  $H_{24}^C$  - Caso 1

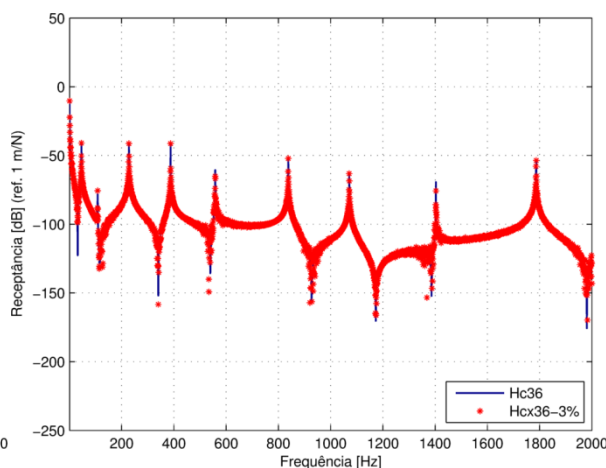


Figura 5.11: FRF  $H_{36}^C$  - Caso 1

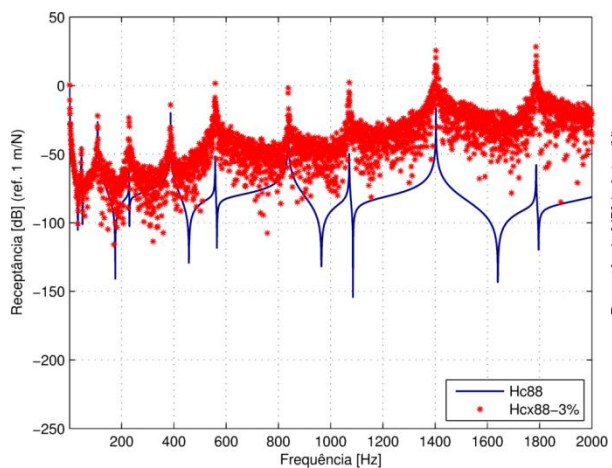


Figura 5.12: FRF  $H_{88}^C$  - Caso 1

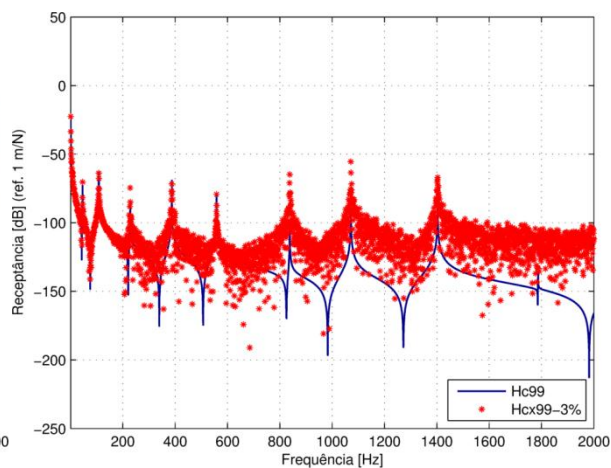


Figura 5.13: FRF  $H_{99}^C$  - Caso 1

Na Figura 5.12 e Figura 5.13 há bastante perturbação, como era previsível pela informação dada pelo LAC médio da Figura 5.6.

### ***Discussão***

Neste exemplo foi apresentado um novo método de determinação de FRF não medidas, utilizando o modelo numérico de parte da estrutura. Podemos utilizar estas formulações para estimar as rotações das estruturas, medindo apenas as translações.

## 5.3 Cancelamento de massas

A utilização de acelerómetros e transdutores de forças em estruturas afectam o comportamento dinâmico da estrutura, uma vez que se está a adicionar elementos que têm massa e inércia. Em determinadas situações, quando essas massas e inércias são pequenas, pode fazer sentido desprezá-las. No entanto, se uma massa adicionada tiver um valor muito próximo de uma massa modal associada a uma frequência natural, vai fazer com que essa frequência natural seja inferior à real. Assim, em geral, dever-se-á sempre efectuar um cancelamento de massas e/ou inércias.

Silva *et al.* [75] sugerem um algoritmo de cálculo baseado no método de desacoplamento clássico. Efectivamente, podemos obter as expressões necessárias à nossa situação partindo da equação (4.27):

$$\begin{cases} \mathbf{H}_{jj}^C = (\mathbf{I}_{jj} + \mathbf{H}_{jj}^A \mathbf{Z}_{jj}^B)^{-1} \mathbf{H}_{jj}^A \\ \mathbf{H}_{ji}^C = (\mathbf{I}_{jj} + \mathbf{H}_{jj}^A \mathbf{Z}_{jj}^B)^{-1} \mathbf{H}_{ji}^A \end{cases} \quad (5.21)$$

Em que  $\mathbf{H}_{jj}^C$  e  $\mathbf{H}_{ji}^C$  representam as FRF medidas,  $\mathbf{H}_{jj}^A$  e  $\mathbf{H}_{ji}^A$  representam as FRF reais da estrutura e  $\mathbf{Z}_{jj}^B$  é a rigidez dinâmica do acelerómetro como podemos ver na Figura 5.14.

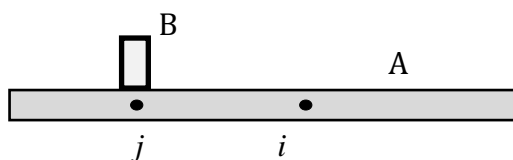


Figura 5.14: Sistema com a massa B adicionada

Com as equações (5.21) vamos determinar  $\mathbf{H}_{jj}^A$  e  $\mathbf{H}_{ji}^A$ . Recorrendo à igualdade seguinte:

$$\left(\mathbf{I}_{jj} + \mathbf{H}_{jj}^A \mathbf{Z}_{jj}^B\right)^{-1} = \left(\left(\mathbf{H}_{jj}^B + \mathbf{H}_{jj}^A\right) \mathbf{Z}_{jj}^B\right)^{-1} = \mathbf{H}_{jj}^B \left(\mathbf{H}_{jj}^B + \mathbf{H}_{jj}^A\right)^{-1} \quad (5.22)$$

e substituindo na equação (5.21) podemos escrever

$$\mathbf{H}_{jj}^C = \mathbf{H}_{jj}^B \left(\mathbf{H}_{jj}^B + \mathbf{H}_{jj}^A\right)^{-1} \mathbf{H}_{jj}^A \quad (5.23)$$

$$\mathbf{H}_{ji}^C = \mathbf{H}_{jj}^B \left(\mathbf{H}_{jj}^B + \mathbf{H}_{jj}^A\right)^{-1} \mathbf{H}_{ji}^A \quad (5.24)$$

Da equação (5.23) vamos determinar  $\mathbf{H}_{jj}^A$ :

$$\left(\mathbf{H}_{jj}^B\right)^{-1} \mathbf{H}_{jj}^C = \left(\mathbf{H}_{jj}^B + \mathbf{H}_{jj}^A\right)^{-1} \mathbf{H}_{jj}^A \quad (5.25)$$

Multiplicando à esquerda por  $\left(\mathbf{H}_{jj}^B + \mathbf{H}_{jj}^A\right)$ , temos,

$$\mathbf{H}_{jj}^C + \mathbf{H}_{jj}^A \left(\mathbf{H}_{jj}^B\right)^{-1} \mathbf{H}_{jj}^C = \mathbf{H}_{jj}^A \quad (5.26)$$

Organizando a equação (5.26),

$$\mathbf{H}_{jj}^C = \mathbf{H}_{jj}^A \left(\mathbf{I}_{jj} - \left(\mathbf{H}_{jj}^B\right)^{-1} \mathbf{H}_{jj}^C\right) \quad (5.27)$$

Resolvendo em ordem a  $\mathbf{H}_{jj}^A$ ,

$$\mathbf{H}_{jj}^A = \mathbf{H}_{jj}^C \left(\mathbf{I}_{jj} - \left(\mathbf{H}_{jj}^B\right)^{-1} \mathbf{H}_{jj}^C\right)^{-1} \quad (5.28)$$

A equação (5.28) é tão válida para as receptâncias como acelerações e é comum as FRF medidas serem acelerações, o que será considerado até ao fim desta secção.

O acelerómetro da Figura 5.14 pode neste caso ser considerado um corpo rígido e assim temos a respectiva aceleração dada por,

$$\mathbf{H}_{jj}^B = H_{jj}^B = \frac{1}{m_B} \quad (5.29)$$

Substituindo na equação (5.28), encontramos a expressão clássica do cancelamento de massas de uma FRF directa:

$$H_{jj}^A = H_{jj}^C \left(1 - m_B H_{jj}^C\right)^{-1} = \frac{H_{jj}^C}{1 - m_B H_{jj}^C} \quad (5.30)$$

Para determinar a expressão do cancelamento de massas para as FRF cruzadas vamos utilizar a equação (5.24) e temos

$$\left(\mathbf{H}_{jj}^B\right)^{-1} \mathbf{H}_{ji}^C = \left(\mathbf{H}_{jj}^B + \mathbf{H}_{jj}^A\right)^{-1} \mathbf{H}_{ji}^A \quad (5.31)$$

Multiplicando à esquerda por  $\left(\mathbf{H}_{jj}^B + \mathbf{H}_{jj}^A\right)$ , temos

$$\mathbf{H}_{ji}^A = \mathbf{H}_{ji}^C + \mathbf{H}_{jj}^A \left(\mathbf{H}_{jj}^B\right)^{-1} \mathbf{H}_{ji}^C \quad (5.32)$$

Donde,

$$H_{ji}^A = H_{ji}^C + m_B H_{jj}^A H_{ji}^C \quad (5.33)$$

Substituindo a equação (5.30) na equação (5.33),

$$H_{ji}^A = H_{ji}^C + \frac{m_B H_{jj}^C H_{ji}^C}{1 - m_B H_{jj}^C} \quad (5.34)$$

E por fim, simplificando,

$$H_{ji}^A = \frac{H_{ji}^C}{1 - m_B H_{jj}^C} \quad (5.35)$$

Se nas medições apenas tivermos a oportunidade de utilizar um só acelerómetro, com a equação (5.30) e a equação (5.35) podemos realizar o cancelamento da massa do acelerómetro em todas as FRF medidas.

### 5.3.1 Exemplo experimental

Para exemplificar o cancelamento de massas foi utilizada a viga V10 (Tabela 3.1), com o acelerómetro colocado na coordenada 1 (Figura 5.15). Foram medidas as FRF indicadas, com a estrutura suspensa por dois fios de nylon. A excitação foi feita com um martelo instrumentado e a resposta foi obtida com um acelerómetro (Anexo D).

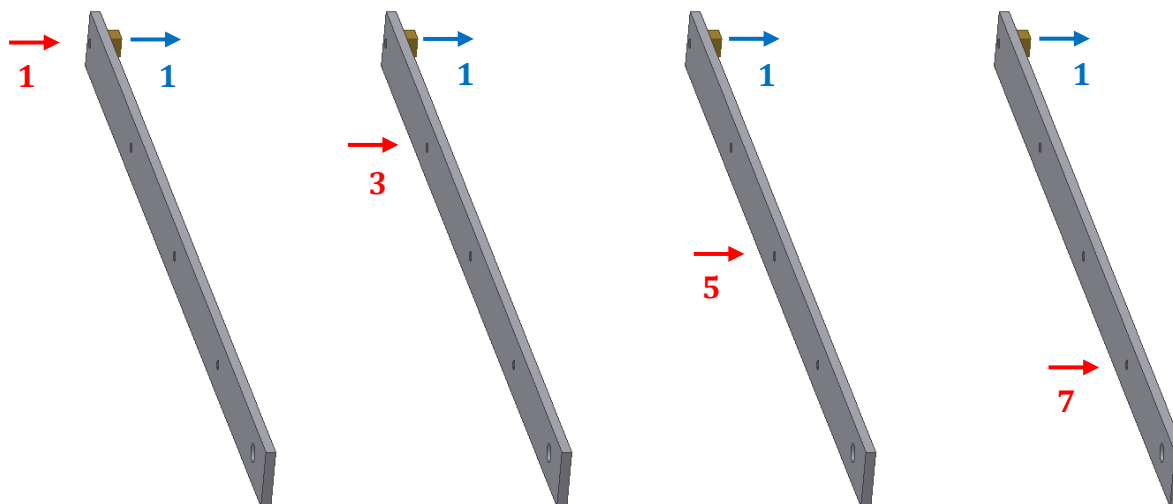


Figura 5.15: Viga V10 com a representação das FRF realizadas

Nas quatro figuras seguintes estão representadas as FRF medidas (linha preta) e as FRF determinadas pelo processo de cancelamento de massa (linha vermelha).

É visível que as frequências naturais se deslocam “para a direita” como era de esperar visto que estamos a “retirar” massa da estrutura. Este movimento é mais significativo nas mais altas frequências.

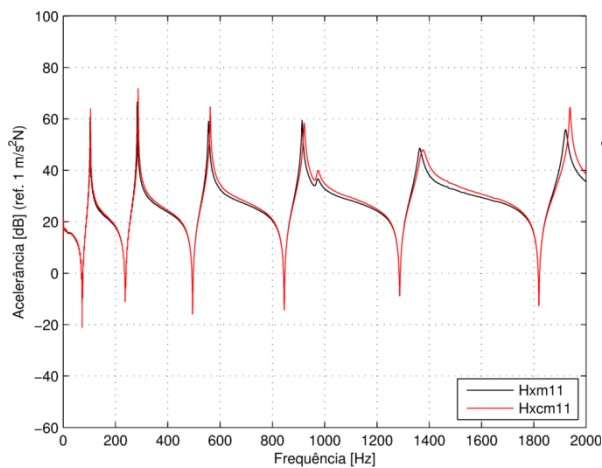


Figura 5.16: FRF  $H_{X11}$  com o acelerómetro e FRF  $H_{X11}$  com a massa cancelada

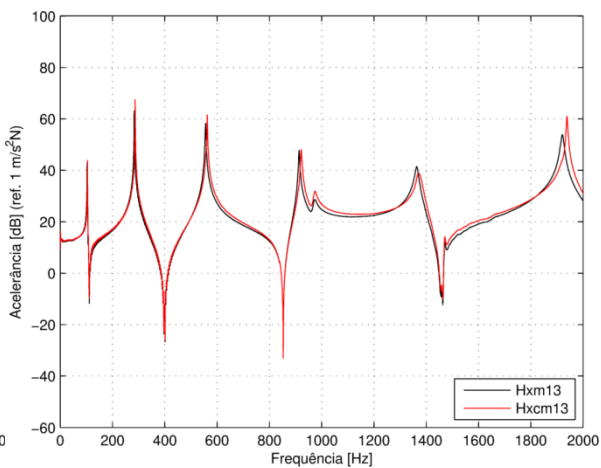


Figura 5.17: FRF  $H_{X13}$  com o acelerómetro e FRF  $H_{X13}$  com a massa cancelada

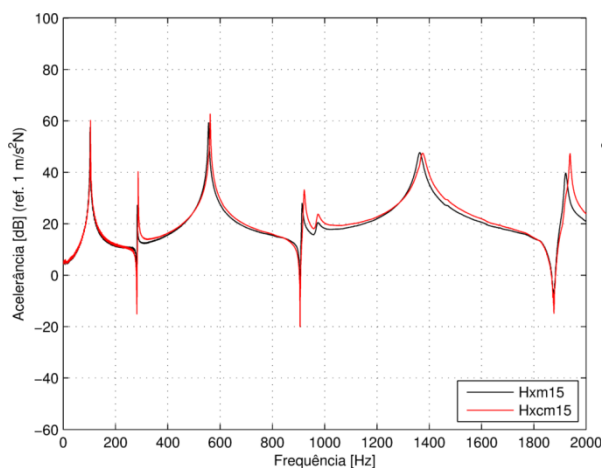


Figura 5.18: FRF  $H_{X15}$  com o acelerómetro e FRF  $H_{X15}$  com a massa cancelada

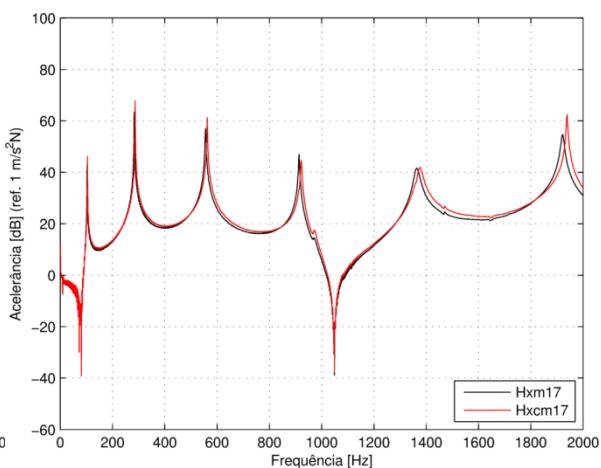


Figura 5.19: FRF  $H_{X17}$  com o acelerómetro e FRF  $H_{X17}$  com a massa cancelada

## 5.4 Técnicas para a redução dos efeitos do ruído

As medições de FRF são usadas para muitos propósitos, incluindo: verificação dos modelos teóricos, actualização de modelos, modificação estrutural, determinação de forças, assim como detecção de anomalias resolvendo problemas gerais de vibração e de ruído. Exceptuando alguns casos, é extremamente desejável a aquisição de dados de alta qualidade a partir de ensaios dinâmicos. De facto, a alta qualidade das FRF é exigida em quase qualquer operação envolvendo inversão de matrizes e/ou diferenças entre matrizes. No entanto, existem alguns erros experimentais inevitáveis e emanados das fontes de erro experimentais (Jung e Ewins [76] e Marudachalam e Wicks [77]). Uma das fontes de erro inevitável que reduzem a qualidade da medida é o chamado "ruído". A responsabilidade deste "ruído" é bastante complexa e depende de muitos factores, que na maioria são desconhecidos.

Algumas destas fontes de ruído são efeitos não-lineares das estruturas, proximidades de dispositivos electrónicos, proximidades de computadores, efeito da fonte de alimentação AC, etc.

Este problema representa uma área muito importante na dinâmica de estruturas. Diversas técnicas, normalmente baseadas na decomposição de uma matriz utilizando o método da decomposição em valores singulares, de uma matriz, *Singular Value Decomposition* (SVD) (Maia [78]), têm sido desenvolvidas para reduzir o ruído nas FRF em várias áreas, como estimativa de parâmetros modais (Liu [79]), acoplamento estrutural, modificação estrutural, etc., onde é necessário uma grande fiabilidade na inversão de uma matriz (To e Ewins [80], Gialamas *et al.* [81] e Lim e Li [82]) e na optimização da análise modal (Liu [83]). O tema da eliminação/minimização do ruído gerado a obtenção de FRF não têm atraído, aparentemente, a atenção merecida, embora haja alguns desenvolvimentos em técnicas para a redução do ruído. Na área da acústica este problema também é debatido.

Acredita-se que a minimização do ruído contido nas FRF após as medições experimentais pode melhorar significativamente a sua qualidade, e assim aumentar a fiabilidade e a taxa de sucesso de muitas aplicações que dependem de medição das FRF.

Numa outra abordagem, podemos comparar uma FRF a um espectro acústico, pois também este é proveniente de um sinal adquirido no tempo e também lhe são aplicadas

transformadas de Fourier. Partindo deste princípio, Sanliturk e Cakar [84] utilizaram a decomposição SVD (Anexo A) da matriz de Hankel [85]. Este método é descrito de seguida.

A independência linear das colunas da matriz experimental  $\mathbf{A}$  é de certa forma afectada pelo ruído experimental obtido nos ensaios. Podemos escrever a decomposição SVD dessa matriz da seguinte forma,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_r & \mathbf{U}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Sigma_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_r^T \\ \mathbf{V}_0^T \end{bmatrix} \quad (5.36)$$

Onde  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{L \times M}$  com  $L \geq M$ ,  $\mathbf{U}_r \in \mathbb{R}^{L \times K}$ ,  $\Sigma_r \in \mathbb{R}^{K \times K}$ ,  $\mathbf{V}_r \in \mathbb{R}^{M \times K}$  e  $R$  é a característica da matriz  $\mathbf{A}$  que representa o numero de linhas ou colunas da matriz linearmente independentes.

Existe uma matriz  $\bar{\mathbf{A}}$ , com  $r \leq R$  que minimiza a soma da diferença quadrática do erro entre  $\mathbf{A}$  e  $\bar{\mathbf{A}}$ .

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_r & \mathbf{U}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_r^T \\ \mathbf{V}_0^T \end{bmatrix} = \mathbf{U}_r \Sigma_r \mathbf{V}_r^T \quad (5.37)$$

A matriz diagonal  $\Sigma_0$  passou a ter os elementos  $\sigma_{r+1} \cong \sigma_{r+2} \dots \cong \sigma_M \cong 0$ .

Assim, os valores singulares “muito pequenos”, que são de certa forma responsáveis pelos componentes do ruído, são retirados. Este princípio é utilizado em muitas aplicações. No entanto, nas matrizes constituídas por FRF não se tem relevado muito eficaz, pois essas têm uma dimensão pequena para se poder retirar o número correcto de valores singulares pequenos.

Jensen *et al.* [85] para a redução de ruído acústico, consideram o vector do sinal acústico  $\mathbf{y} = [y_0, y_1, \dots, y_{N-1}]^T$  de  $N$  elementos e assumem que o ruído é uma componente deste vector, ou seja,

$$\mathbf{y} = \bar{\mathbf{y}} + \mathbf{n} \quad (5.38)$$

Onde  $\bar{\mathbf{y}}$  é uma componente do sinal e  $\mathbf{n}$  representa o ruído. Com os elementos do vector  $\mathbf{y}$  podemos construir uma matriz de Hankel  $\mathbf{H}$  (5.39) com dimensão  $L \times M$ . Onde  $M + L = N + 1$  e  $L \geq M$ .

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & \cdots & x_{M-1} \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_M \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{L-1} & x_L & \cdots & x_{N-1} \end{bmatrix} \quad (5.39)$$

Podemos assim escrever  $\mathbf{H}$  da seguinte forma,

$$\mathbf{H} = \bar{\mathbf{H}} + \mathbf{N} \quad (5.40)$$

A construção da matriz de Hankel a partir de um sinal de ruído é muito utilizada em acústica. A estimativa da componente do sinal  $\bar{\mathbf{H}}$  será obtida com a decomposição SVD da matriz  $\mathbf{H}$ .

Podemos assim também aplicar esta construção a uma FRF  $H_{pq}$  obtida experimentalmente ou, obtendo melhores resultados [84], construir a matriz de Hankel a partir da resposta a um impulso, IRF. Se as FRF forem obtidas com uma excitação de um martelo com um transdutor de forças, basta realizar a inversa da transformada de Fourier, ou seja,  $h(t) = F^{-1}(H_{pq})$ .

$$H_{pq}(w) = \{H_{pq}(w_1), H_{pq}(w_2), \dots, H_{pq}(w_N)\} \quad (5.41)$$

$$h_{pq}(t) = \{h_1, h_2, h_3, h_4, \dots, h_s\} \quad (5.42)$$

onde  $p$  e  $q$  são as coordenadas de resposta e de excitação, respectivamente; o vector  $h_{pq}(t)$  tem o dobro dos elementos de  $H_{pq}(w)$ , ou seja,  $s=2N$ .

Desta forma a matriz de Hankel é real e é escrita da seguinte forma:

$$\mathbf{A}_{m \times n} = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & \cdots & h_n \\ h_2 & h_3 & \cdots & h_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_m & h_{m+1} & \cdots & h_s \end{bmatrix} \quad (5.43)$$

onde  $m + n = s + 1$  e  $\mathbf{A}_{ij} = h_{i+j-1}$ .

Aplicando a decomposição SVD (Anexo A), a esta matriz  $\mathbf{A}$ , temos,

$$\mathbf{A} = \bar{\mathbf{A}} + \mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_r & \mathbf{U}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Sigma_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_r^T \\ \mathbf{V}_0^T \end{bmatrix} \quad (5.44)$$

A matriz  $\bar{\mathbf{A}}$  representa a parte não contaminada do sinal, como em (5.37):

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{U}_r \boldsymbol{\Sigma}_r \mathbf{V}_r^T \quad (5.45)$$

A matriz diagonal  $\boldsymbol{\Sigma}_r$  é constituída pelos valores singulares  $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r)$ . Após a estimativa da característica da matriz  $\mathbf{A}$ , resta-nos realizar as operações “inversas”,

$$\bar{h}_i = \frac{1}{k - l + 1} \sum_{j=l}^k \bar{\mathbf{A}}_{i-j+1, j} \quad (5.46)$$

onde  $l = \max(1, i - m + 1)$  e  $k = \min(n, i)$ .

Desta forma, para obter o  $\bar{H}_{pq}$  basta aplicar a transformada de Fourier no domínio da frequência ao vector  $\bar{h}$  que é no domínio do tempo.

Jensen *et al.* [85], desenvolvem mais este conceito e utilizam o QSVD (quociente SVD), que consiste sistematicamente em aplicar a duas matrizes o SVD, de forma a encontrar iterativamente as matrizes  $\bar{\mathbf{A}}$  e  $\mathbf{N}$ . Para isso recorrem-se da decomposição matricial ULLV, que não foi objecto de estudo neste trabalho.

### 5.4.1 Exemplo aplicado a uma FRF

Como é difícil obter a característica da matriz de Hankel, todo o procedimento carece sempre de uma análise cuidadosa da evolução dos valores singulares.

Na Figura 5.20 temos um exemplo de uma aceleração com quatro filtragens (a Figura 5.21 e a Figura 5.22 mostram detalhes). Esta FRF foi obtida com o equipamento indicado no Anexo D. Após conhecer-se a evolução dos valores singulares (Figura 5.23) normalizados da matriz A pelo maior valor, ou seja, pelo primeiro, como sugeriu Sanliturk e Cakar [84].

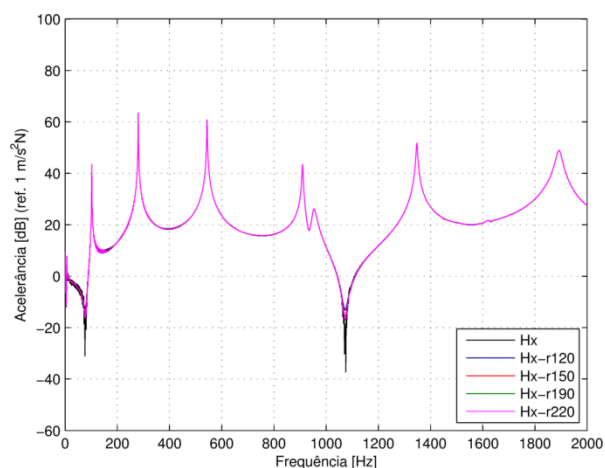


Figura 5.20: Aceleração medida vs. FRF filtradas

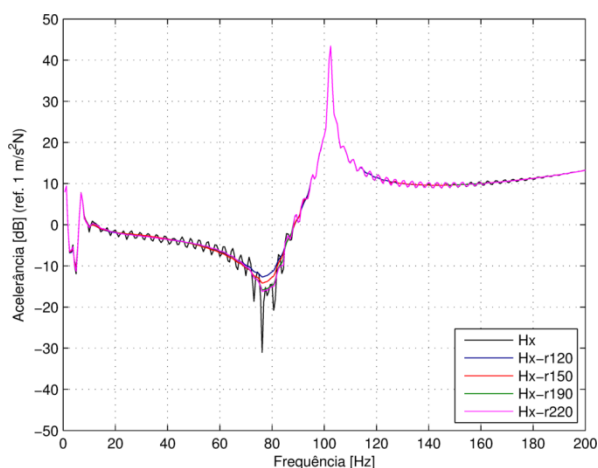


Figura 5.21: Primeiro pormenor da aceleração

O problema que se coloca é o de escolher o número de valores singulares mais adequado, não muito grande para não trazer ruído para a matriz e não muito pequeno, para não correremos o risco de alterar a informação importante da matriz e termos assim um resultado pior que o inicial.

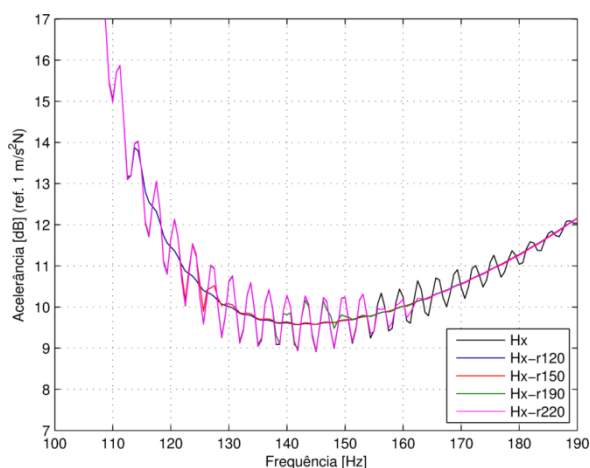


Figura 5.22: Segundo pormenor da aceleração

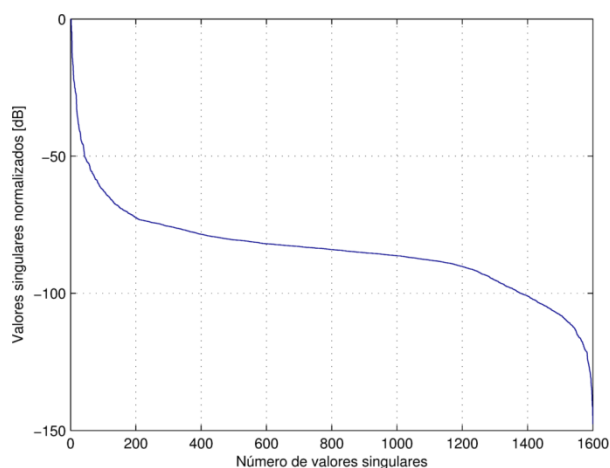


Figura 5.23: Distribuição normalizada dos valores singulares

Após várias tentativas foram escolhidos para esta FRF quatro valores diferentes para a característica  $r$  da matriz: 120, 150, 190 e 220 como podemos observar na Figura 5.20, Figura 5.21 e Figura 5.22.

Podemos reparar que na Figura 5.20 existe uma boa coincidência das ressonâncias para os quatro valores de  $r$  escolhidos.

Na Figura 5.21, nos valores de amplitude baixa verifica-se que um  $r$  de 220 representa melhor a FRF; em contrapartida, na Figura 5.22, um  $r$  de 120 apresenta melhores resultados. Ou seja, um valor de  $r$  entre estes dois irá melhorar globalmente a FRF, tirando assim boa parte do ruído apresentado.

Observando a Figura 5.23, podemos verificar que é a partir de  $r = 220$  que se inicia graficamente uma assíntota a partir da qual a aplicação deste filtro não irá melhorar a FRF [84].

## 5.5 Avaliação do efeito do momento de aperto

Com a finalidade de avaliar a importância do aperto na ligação aparafusada foram escolhidos três pares de vigas para realizar os ensaios, utilizando o mesmo equipamento experimental já referido (Anexo D). Utilizou-se um parafuso M10 e várias áreas de sobreposição (Figura 5.24). Os dados geométricos das várias vigas estão indicados na Tabela 5.1.

| Viga | Largura | Comprimento | Espessura | Distância ao furo |
|------|---------|-------------|-----------|-------------------|
| 1    | 25 mm   | 387,5 mm    | 5 mm      | 12,5 mm           |
| 2    | 25 mm   | 400 mm      | 5 mm      | 25 mm             |
| 3    | 25 mm   | 412,5 mm    | 5 mm      | 37,5 mm           |
| 4    | 25 mm   | 487,5 mm    | 5 mm      | 12,5 mm           |
| 5    | 25 mm   | 500 mm      | 5 mm      | 25 mm             |
| 6    | 25 mm   | 512,5 mm    | 5 mm      | 37,5 mm           |

Tabela 5.1: Dados geométricos dos acoplamentos

Os 3 acoplamentos com 3 sobreposições diferentes são representados na Tabela 5.2.

| Acoplamento | Vigas             | Sobreposição |
|-------------|-------------------|--------------|
| 0104        | Viga 01 + Viga 04 | 25 mm        |
| 0205        | Viga 02 + Viga 05 | 50 mm        |
| 0306        | Viga 03 + Viga 06 | 75 mm        |

Tabela 5.2: Sobreposição

Os acoplamentos foram suspensos por dois fios de nylon de forma a simular condições de “vibração livre”. Foram avaliadas as respostas dinâmicas do sistema a uma solicitação provocada por um martelo. Foram realizadas apenas FRF directas na extremidade esquerda do acoplamento.

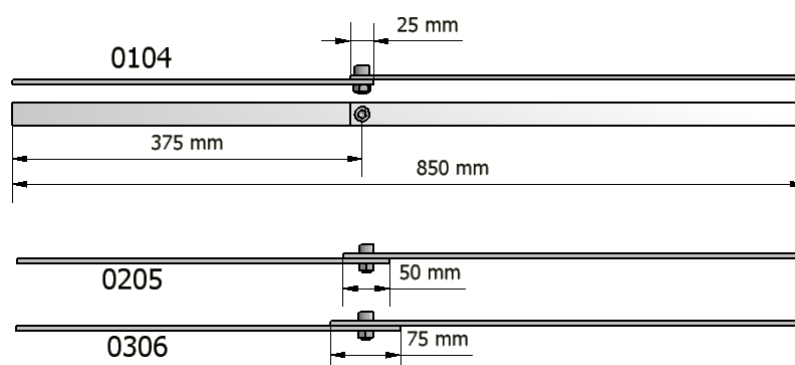


Figura 5.24: Estruturas utilizadas

Utilizando uma chave dinamométrica realizaram-se 5 apertos distintos no parafuso M10. Os momentos aplicados foram de 10, 15, 20, 25 e 30 Nm. As respostas avaliadas com as FRF estão representadas na Figura 5.25, Figura 5.26 e Figura 5.27.

Verifica-se que os apertos impostos nas condições dos ensaios (estrutura suspensa), não conduzem a respostas muito distintas. Provavelmente a energia fornecida pelo martelo não é suficiente para que haja acção de forças dinâmicas que vençam as forças de atrito de escorregamento entre as duas vigas.

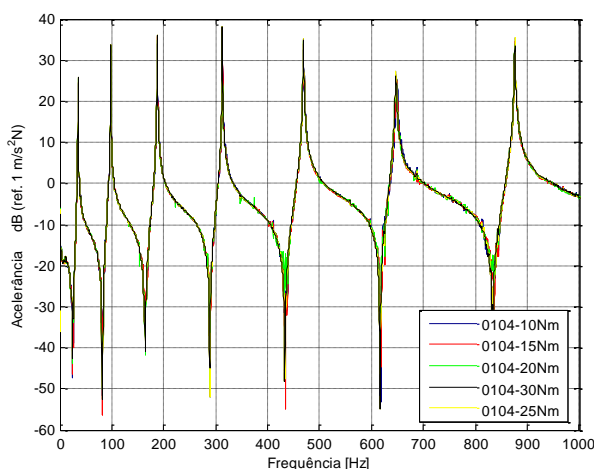


Figura 5.25: FRF dos vários apertos do conjunto 0104

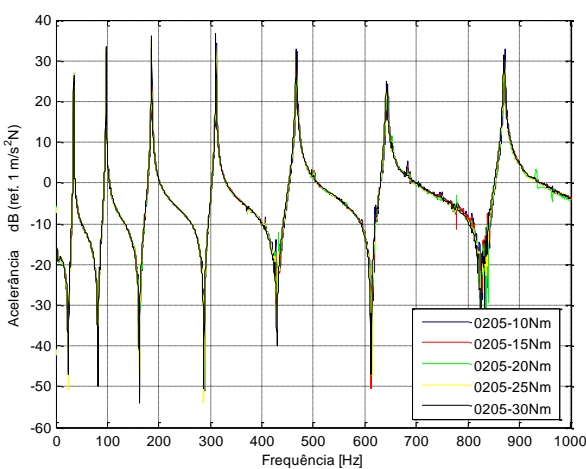


Figura 5.26: FRF dos vários apertos do conjunto 0205

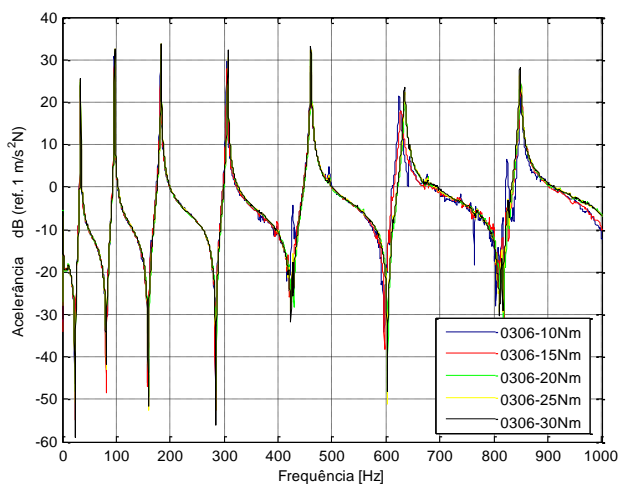


Figura 5.27: FRF dos vários apertos do conjunto 0306

## 5.6 Identificação de uma junta aparafusada

Foi retomada a estrutura utilizada no capítulo 3, tendo sido aplicado um momento de aperto de 50 Nm. O valor deste momento não vai influenciar o comportamento dinâmico da estrutura como foi demonstrado na secção anterior. Para as solicitações e para as respostas, foi utilizado o mesmo equipamento experimental (Anexo D).

O acoplamento de vigas e a indicação das coordenadas são indicados na Figura 5.28. Foi definida como junta a identificar a parte da estrutura compreendida entre as coordenadas 7 e 9 (subestrutura B); nesta parte do acoplamento está a ligação aparafusada que queremos identificar. O comprimento de 200 mm permite que o comportamento da junta não seja o de um corpo rígido.

A restante estrutura representa a subestrutura A com as coordenadas internas  $i$ ; as translações e rotações estão indicadas a vermelho e a preto, respectivamente. As coordenadas de ligação entre as subestrutura A (A1+A2) e a subestrutura B representam as coordenadas  $j$ , indicadas a verde. Estas duas subestruturas juntas formam a estrutura C.

Para caracterizar dinamicamente a subestrutura A foi utilizado o método dos elementos finitos. Discretizou-se cada subestrutura A1 e A2 em 12 elementos finitos de viga *Bernoulli-Euler* de 4 GL.

O objectivo é identificar a subestrutura B realizando um desacoplamento. A fim de se avaliar a consistência do processo será feito um acoplamento dessa subestrutura com outras duas vigas de dimensões diferentes.

As características dimensionais e a posição dos pontos de interesse das três vigas que foram utilizadas estão indicadas na Figura 5.28, na Figura 5.29 e na Tabela 5.3.

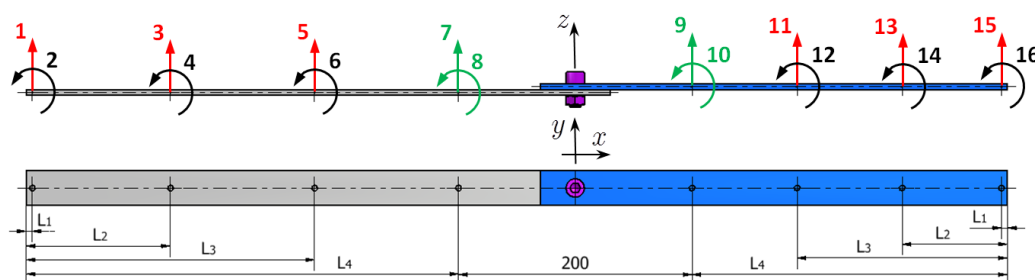


Figura 5.28: Características geométricas do acoplamento ensaiado

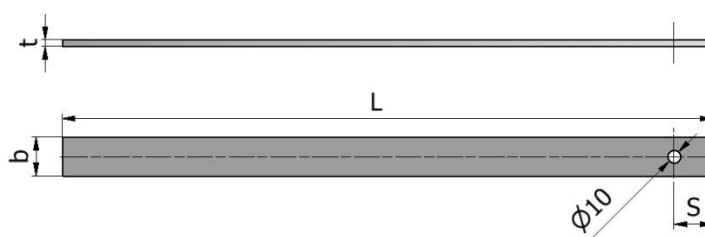


Figura 5.29: Tipo de viga ensaiada

| Viga | L   | b  | t | S  | $L_1$ | $L_2$ | $L_3$ | $L_4$ |
|------|-----|----|---|----|-------|-------|-------|-------|
| 08   | 400 | 30 | 5 | 30 | 5     | 90.0  | 180.0 | 270   |
| 10   | 500 | 30 | 5 | 30 | 5     | 123.3 | 246.7 | 370   |
| 12   | 600 | 30 | 5 | 30 | 5     | 156.7 | 313.3 | 470   |

Tabela 5.3: Dados geométricos das três vigas em milímetros

O primeiro acoplamento é constituído pelas vigas 10 e 08 (estrutura 1008) e o segundo acoplamento é constituído pelas vigas 10 e 12 (estrutura 1012).

No processo de desacoplamento foram utilizadas várias técnicas para obter ou melhorar as FRF obtidas experimentalmente:

- Foi utilizado o método de cálculo das FRF não medidas para determinar as FRF que envolvem rotações (secção 5.2). Na nossa situação só tivemos a oportunidade de medir as translações.

- Para tentar reduzir o ruído das FRF foi aplicado o filtro que utiliza uma Matriz de Hankel com quatro valores de característica diferentes (120, 150, 190 e 220) (secção 5.4). A aplicação deste filtro neste caso não se revelou muito vantajosa pois os resultados apresentados não apresentavam diferenças significativas e em contrapartida há um custo computacional elevado ao aplicar o algoritmo a cada FRF.

- O problema da massa do acelerómetro foi abordado de duas formas, (i) realizar o cancelamento de massas (secção 5.3) ou (ii) assumir a adição de massas pontuais nos restantes pontos de interesse. No processo de desacoplamento estas duas formas não apresentaram diferenças significativas e assim foi apenas aplicado o cancelamento de massas, pois é um método que permite reproduzir a estrutura inicial.

Foi utilizada uma gama de frequências de 0-2000 Hz na aquisição das FRF, embora seja apenas apresentada a gama de 0-1000 Hz, uma vez que acima dos 1000 Hz se verificou em termos gerais mais ruído nos processos de desacoplamento.

Para realizar o desacoplamento e o acoplamento é mais vantajoso utilizar uma formulação que nos permite determinar a resposta dinâmica da subestrutura B; neste sentido, é a Formulação 2 (secção 4.4) que será utilizada.

### 5.6.1 Desacoplamento das estruturas 1008 e 1012

Inicialmente foi realizado o desacoplamento da estrutura 1008 e determinou-se assim as características dinâmicas de subestrutura B (Figura 5.30 e Figura 5.31). Foi aplicado o algoritmo de escolha de frequências descrito na secção 4.5, o que deu lugar às bandas verticais presentes nos gráficos. As bandas identificadas nem sempre coincidem com zonas de pouca perturbação.

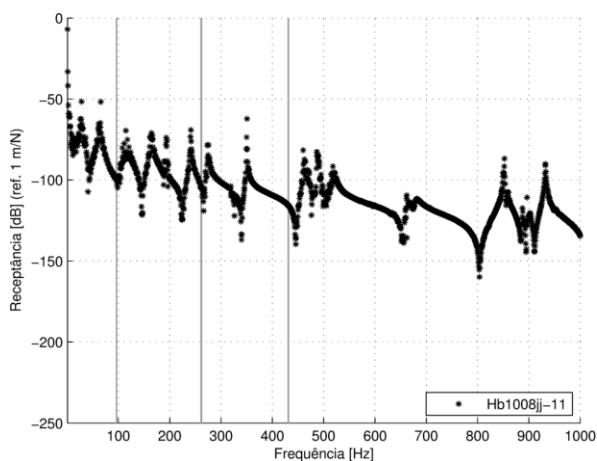


Figura 5.30: FRF  $H_{11}^B$  da estrutura B1008

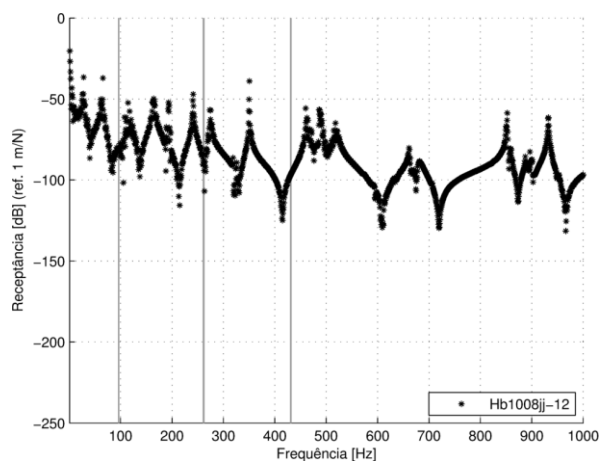


Figura 5.31: FRF  $H_{12}^B$  da estrutura B1008

Após a identificação da junta e antes de fazer o acoplamento com outra estrutura foi realizado um acoplamento com a estrutura inicial para assim averiguar se o desacoplamento foi bem realizado.

Assim, o acoplamento deu lugar a um novo  $H^C$ . As FRF de translação das coordenadas  $i$  foram comparadas graficamente com as respectivas FRF medidas e os resultados foram quantificados por uma função de correlação.

Na Figura 5.32 e Figura 5.33 é possível observar alguma correspondência entre as FRF, essencialmente nas ressonâncias.

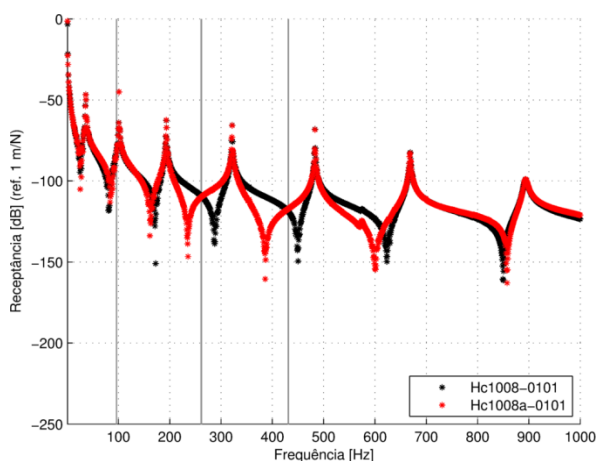


Figura 5.32: FRF  $H_{1,1}^C$  medida vs. FRF  $H_{1,1}^C$  do acoplamento 1008

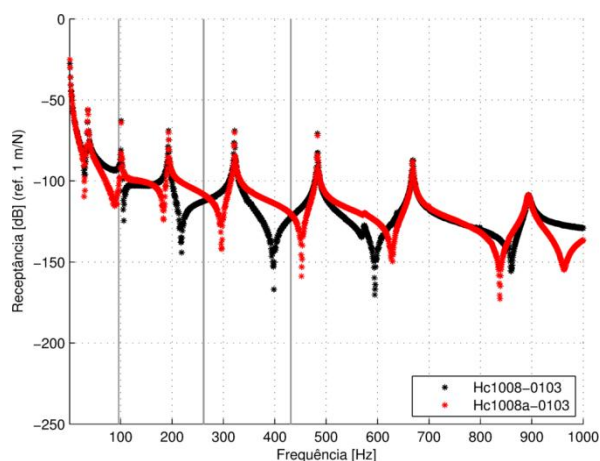


Figura 5.33: FRF  $H_{1,3}^C$  medida vs. FRF  $H_{1,3}^C$  do acoplamento 1008

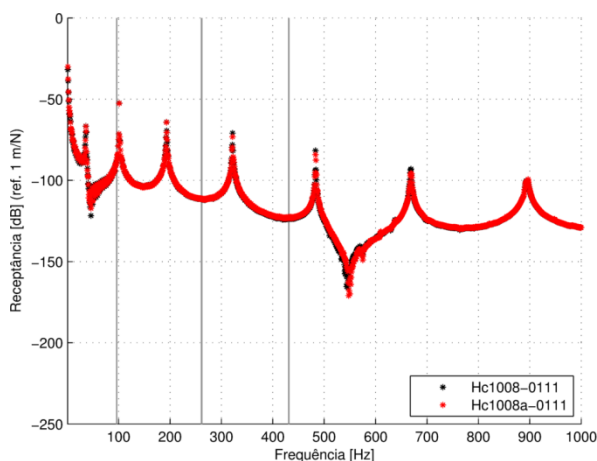


Figura 5.34: FRF  $H_{1,11}^C$  medida vs. FRF  $H_{1,11}^C$  do acoplamento 1008

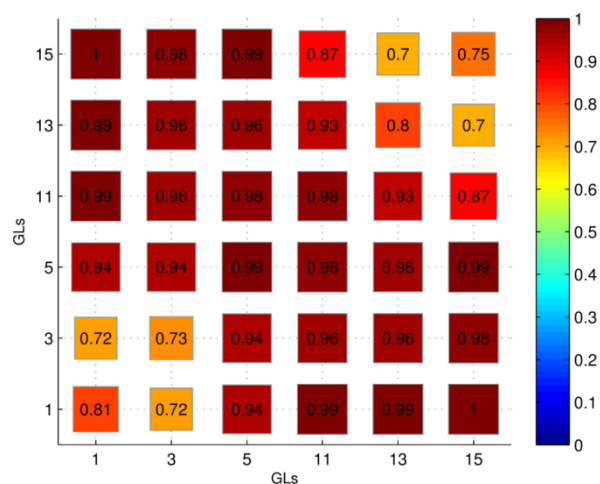


Figura 5.35: LAC médio do acoplamento 1008 - B1008

No entanto, outras FRF apresentam uma melhor correspondência como podemos ver na Figura 5.34 e como fica claro na correlação LAC médio na Figura 5.35.

Com a resposta dinâmica da junta determinada (B1008), foi feito um acoplamento da viga 10 e com a viga 12 para assim averiguar o correcto desacoplamento.

Na Figura 5.36, Figura 5.37, e Figura 5.38 podemos ver que o acoplamento não apresenta grande correspondência entre FRF. Podemos confirmar isso na correlação LAC médio presente na Figura 5.39.

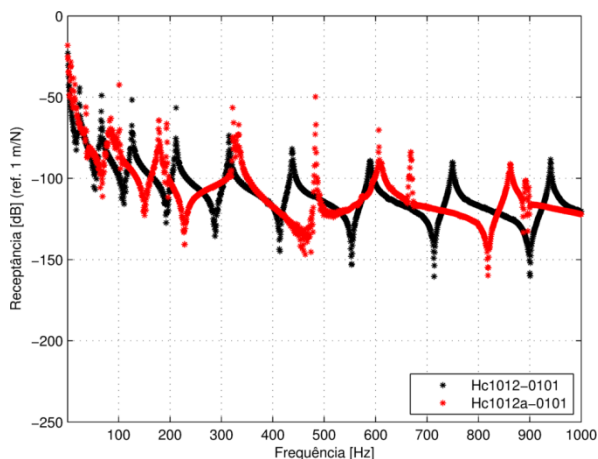


Figura 5.36: FRF  $H_{1,1}^C$  da estrutura 1012 vs. FRF  $H_{1,1}^C$  estrutura 1012 - B1008

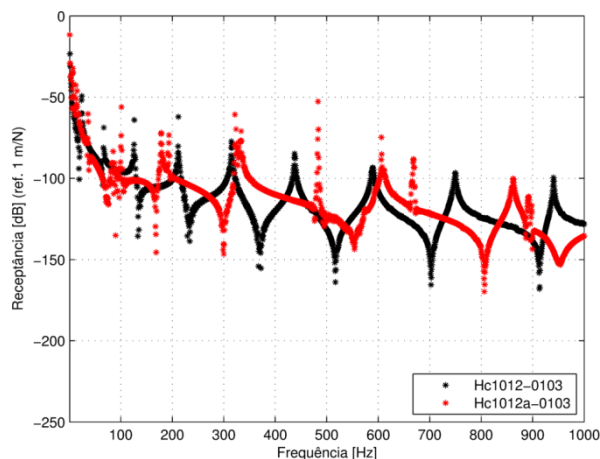


Figura 5.37: FRF  $H_{1,3}^C$  da estrutura 1012 vs. FRF  $H_{1,3}^C$  estrutura 1012 - B1008

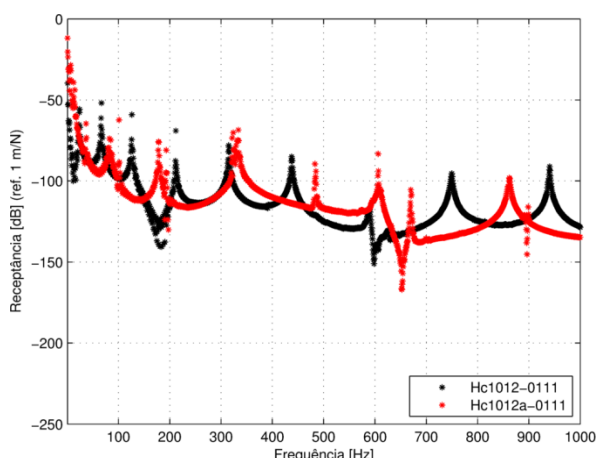


Figura 5.38: FRF  $H_{1,11}^C$  da estrutura 1012 vs. FRF  $H_{1,11}^C$  estrutura 1012 - B1008

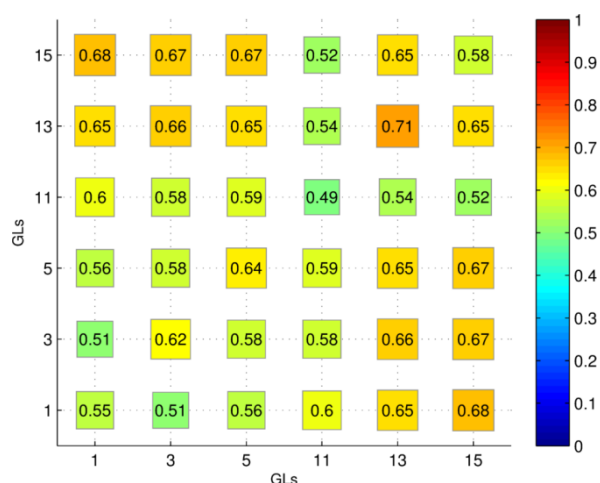


Figura 5.39: LAC médio do acoplamento 1012 - B1008

Foi feito o mesmo raciocínio com a estrutura 1012, ou seja, foi feito o desacoplamento (B1012) e depois realizado o acoplamento da viga 10 e com a viga 08.

Na Figura 5.40 e Figura 5.41 podemos registrar que o acoplamento também não é aceitável e apresenta globalmente piores resultados (comparar Figura 5.39 com a Figura 5.41).

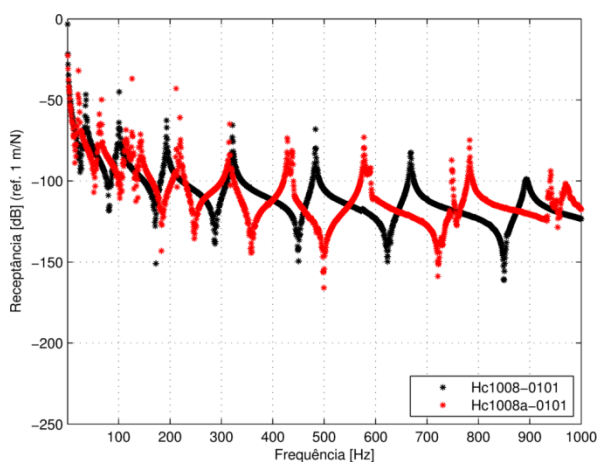


Figura 5.40: FRF  $H_{1,1}^C$  da estrutura 1008 vs. FRF  $H_{1,1}^C$  estrutura 1008 - B1012

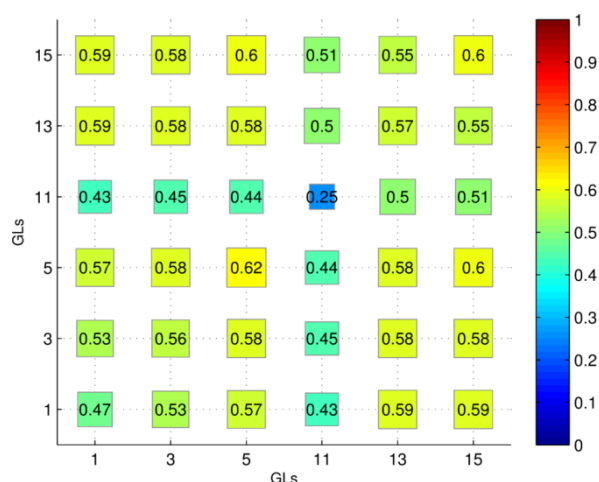


Figura 5.41: LAC médio do acoplamento 1008 - B1012

Para ter uma noção se os dois desacoplamentos representam a mesma subestrutura (junta aparafusada) foram também comparadas as respectivas FRF (B1008 com B1012).

Na Figura 5.42 podemos observar alguma correspondência em determinadas gamas de frequência. No entanto, ao realizar a correlação LAC médio (Figura 5.43) verifica-se que em termos globais a correspondência é bastante pequena.

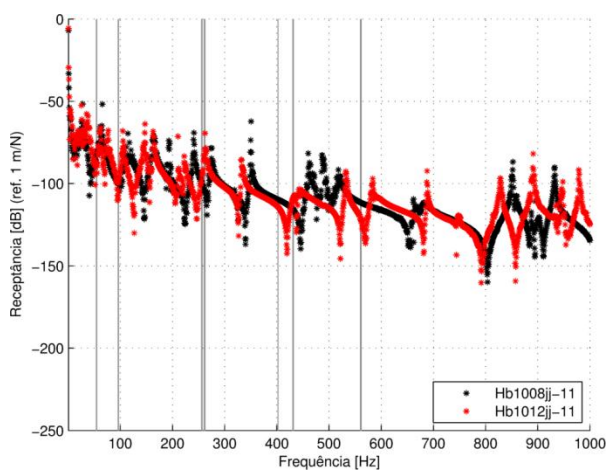


Figura 5.42: FRF  $H_{1,1}^B$  de B1008 vs. FRF  $H_{1,1}^C$  de B1012

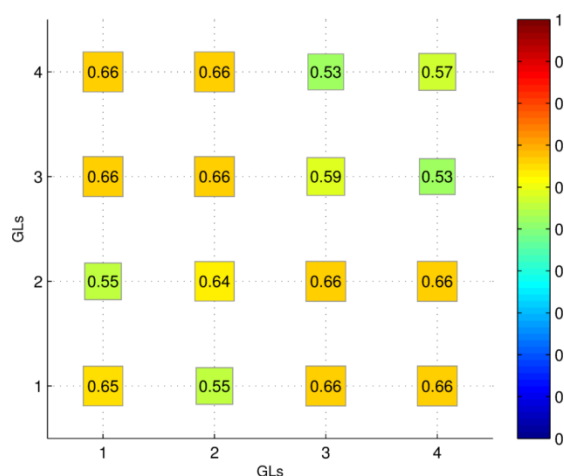


Figura 5.43: LAC médio entre B1008 e B1012

## Discussão

O processo de desacoplamento não foi realizado com sucesso, pois os acoplamentos realizados com as juntas identificadas não apresentaram uma boa correspondência. As juntas identificadas das duas estruturas também não apresentaram bons resultados. A formulação apresentada para o desacoplamento utiliza coordenadas  $j$  que com certeza são as grandes responsáveis por estes maus resultados. Vamos tentar na secção seguinte melhorar os procedimentos.

### 5.6.2 Desacoplamento das estruturas reduzidas

O processo de determinação das FRF não medidas é muito sensível ao ruído no cálculo das FRF que envolvem as coordenadas  $j$  e com resultados péssimos para as FRF entre as coordenadas  $j$  como foi verificado no exemplo numérico 6 (secção 5.2.5). Para ajudar a ultrapassar esta dificuldade e assim tentar melhorar o desacoplamento, foram assumidas duas coordenadas internas da subestrutura B, como podemos ver na Figura 5.44, que passaram a ser as coordenadas  $j$  da junta.

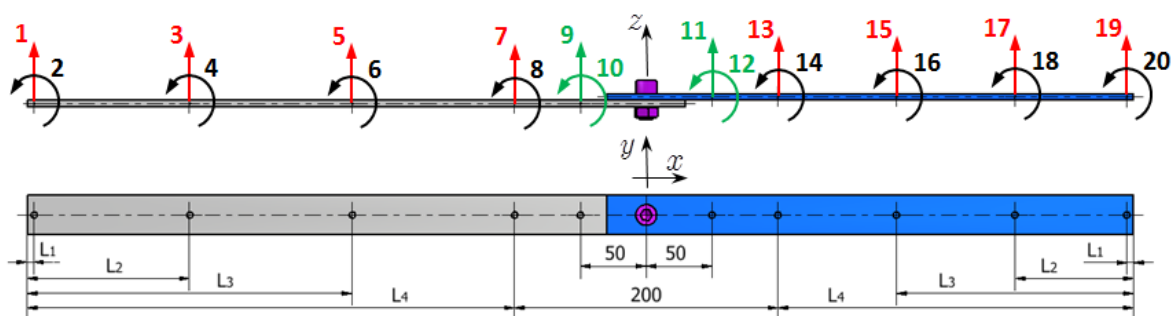


Figura 5.44: Características geométricas do acoplamento ensaiado com as coordenadas internas em B

Foram determinadas experimentalmente as FRF de translação (coordenadas a vermelho da Figura 5.44), depois foi aplicado o algorítmico de cálculo das FRF não medidas e determinou-se a matriz  $\mathbf{H}_{(20 \times 20)}^C$ .

A esta matriz de dimensão 20x20 foram retiradas as 4 linhas e colunas do meio, ou seja, as respostas que envolvem as coordenadas 9, 10, 11 e 12 da Figura 5.44, ficando

assim com uma FRF 16x16 que corresponde a uma aproximação da matriz  $H^C$  da estrutura inicial (Figura 5.28,) retirando assim o “efeito” das FRF calculadas na junta.

Utilizando a estrutura 1008, temos na Figura 5.45 uma FRF que envolve uma coordenada 8 pertencendo à junta, onde é visível (linha azul) o melhoramento da FRF.

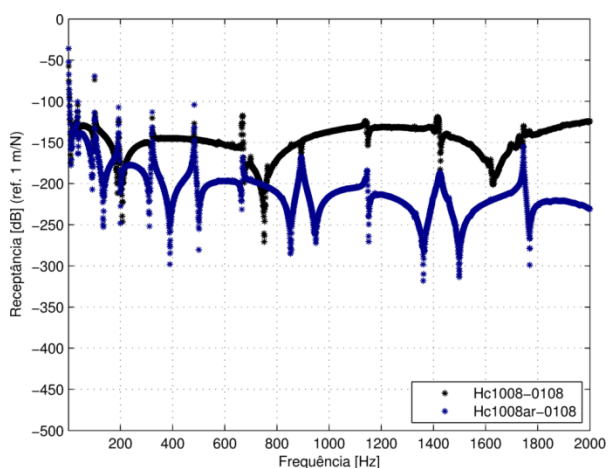


Figura 5.45: FRF  $H_{18}^C$  das duas estruturas

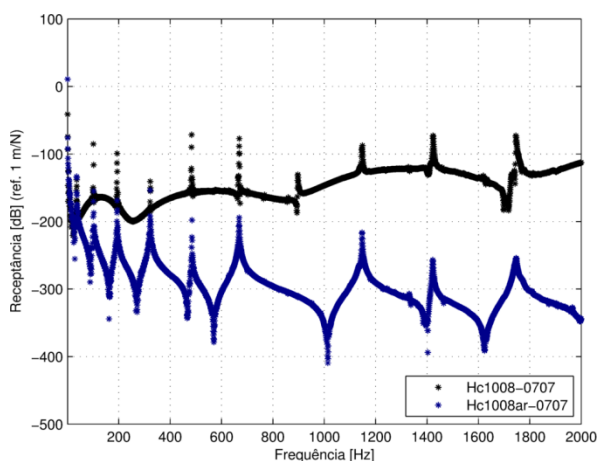


Figura 5.46: FRF  $H_{77}^C$  das duas estruturas

Na Figura 5.46, Figura 5.47, e Figura 5.48 temos as FRF com coordenadas da junta, verifica-se uma melhoria nas várias FRF.

Estas três FRF da junta serão utilizadas para aplicação do método de desacoplamento da Formulação 2.

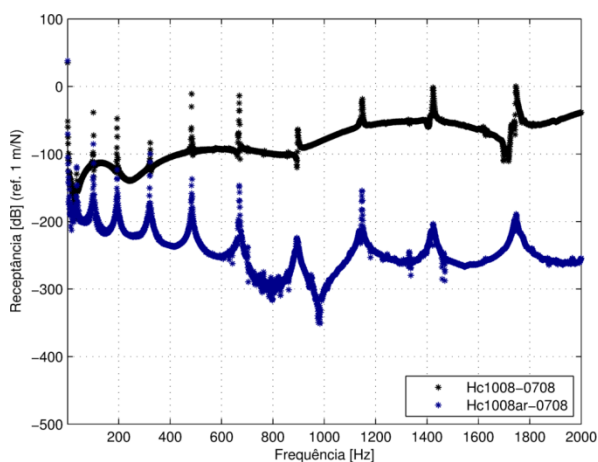


Figura 5.47: FRF  $H_{78}^C$  das duas estruturas

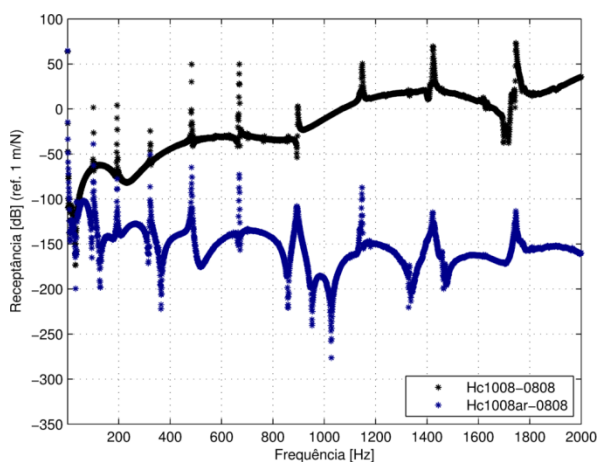


Figura 5.48: FRF  $H_{88}^C$  das duas estruturas

Realizou-se o desacoplamento da estrutura 1008 e foi determinada a subestrutura B1008r; na Figura 5.49 e Figura 5.50 estão representadas duas das FRF.

Se compararmos estas duas figuras com a Figura 5.30 e Figura 5.31 não temos grandes correspondências.

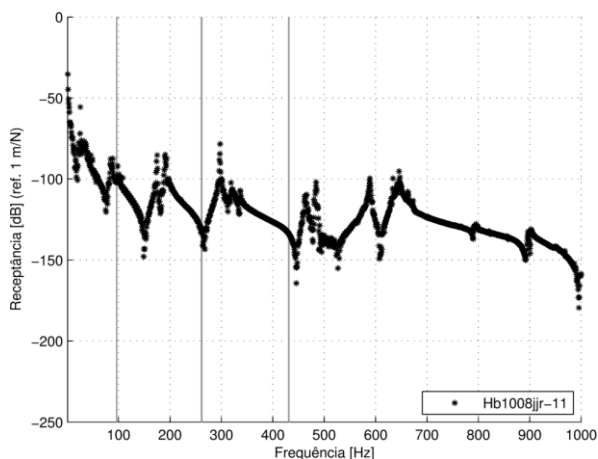


Figura 5.49: FRF  $H_{11}^B$  da estrutura B1008r

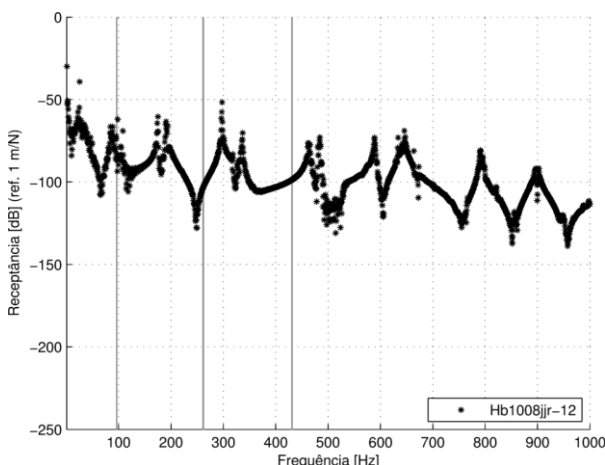


Figura 5.50: FRF  $H_{12}^B$  da estrutura B1008r

Foi realizado assim o acoplamento com a mesma estrutura (1008).

Se compararmos a Figura 5.51 e Figura 5.52 com a Figura 5.32 e Figura 5.35 é notório que não temos o nível de correspondência tão bom como anteriormente.

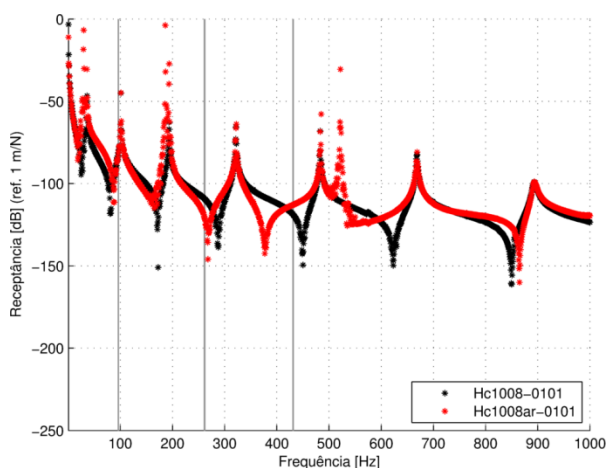


Figura 5.51: FRF  $H_{1,1}^C$  medida vs. FRF  $H_{1,1}^C$  do acoplamento 1008r

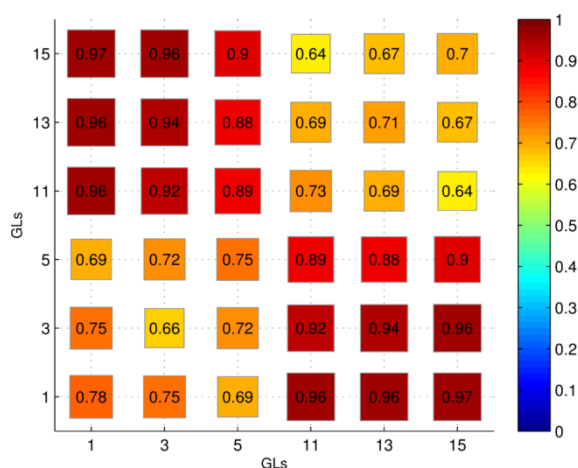


Figura 5.52: LAC médio do acoplamento 1008r - B1008r

Também com a resposta dinâmica da junta B1008r foi realizado um acoplamento com uma viga 10 e com uma viga 12.

Ao comparar a Figura 5.36 com a Figura 5.53 é visível que temos alguma correspondência entre os dois acoplamentos (entre as duas linhas vermelhas). No entanto temos mais perturbação na Figura 5.53.

Comparando as respectivas correlações, LAC médio (Figura 5.39 e Figura 5.54), verifica-se que temos globalmente o mesmo nível de correlação.

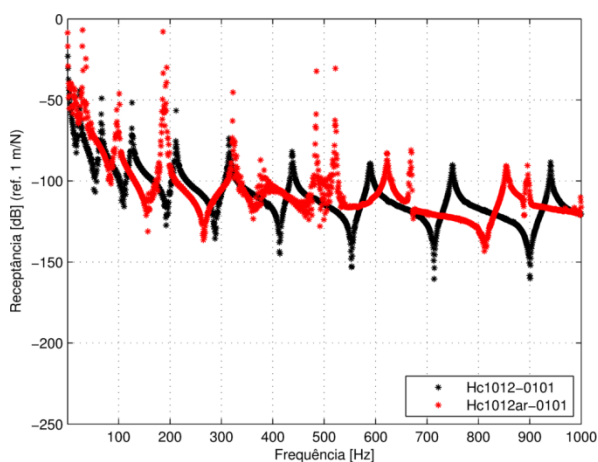


Figura 5.53: FRF  $H_{1,1}^C$  da estrutura 1012 vs. FRF  $H_{1,1}^C$  estrutura 1012 - B1008r

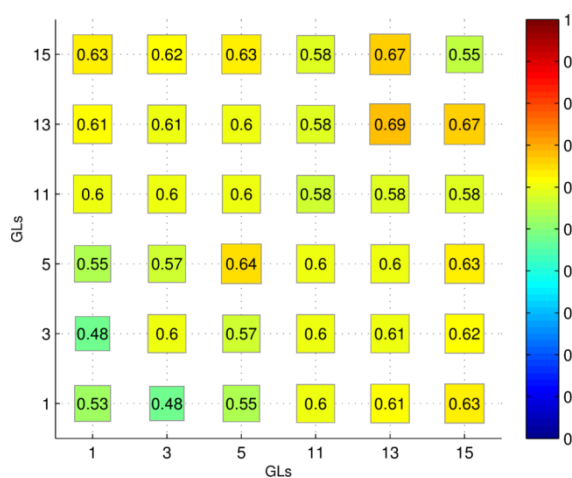


Figura 5.54: LAC médio do acoplamento 1012 - B1008r

Também foi feito o mesmo raciocínio com a estrutura 1012, ou seja, foi feito o desacoplamento (B1012r) e depois realizado o acoplamento entre as vigas 10 e 08.

Ao comparar a Figura 5.40 com Figura 5.55 também aqui há alguma correspondência entre as linhas vermelhas mas também aqui com mais perturbação na Figura 5.55. O LAC médio presente na Figura 5.56 é melhorado face ao LAC médio da Figura 5.41.

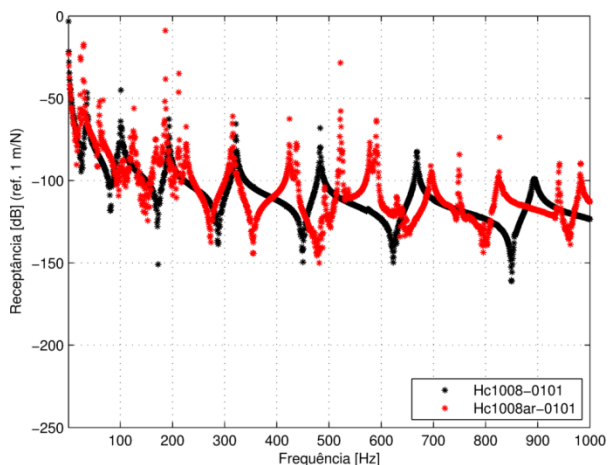


Figura 5.55: FRF  $H_{1,1}^C$  da estrutura 1008 vs. FRF  $H_{1,1}^C$  estrutura 1008 - B1012r

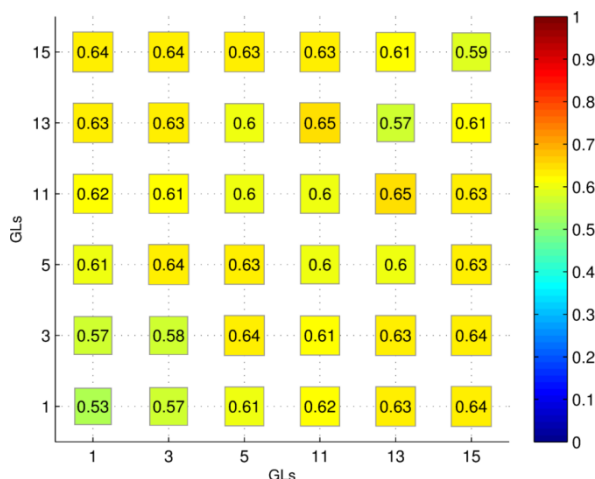


Figura 5.56: LAC médio do acoplamento 1008 - B1012r

Para se ter uma noção se os dois desacoplamentos representam a mesma junta foram igualmente aqui comparadas as respectivas FRF (B1008r com B1012r).

É visível uma boa correspondência em determinadas gamas (Figura 5.57), um pouco melhor que na Figura 5.42. No entanto, o LAC médio apresenta globalmente apenas um ligeiro melhoramento (Figura 5.43 e Figura 5.58).

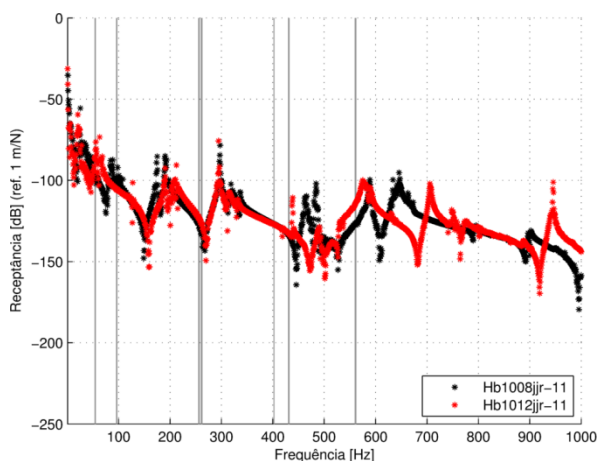


Figura 5.57: FRF  $H_{1,1}^B$  de B1008r vs. FRF  $H_{1,1}^B$  de B1012r

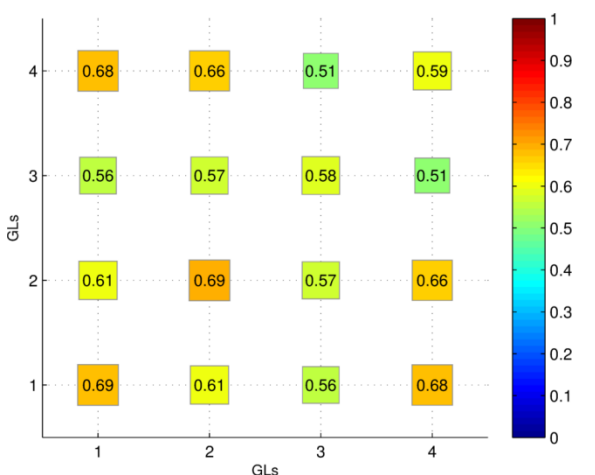


Figura 5.58: LAC médio entre B1008r e B1012r

### ***Discussão***

Este procedimento de escolha de coordenadas internas da junta e a eliminação de linhas e colunas da matriz  $H^C$  não se revelou tão bom como se poderia esperar, pois embora tenham sido melhoradas as FRF das coordenadas  $j$ , não se obtiveram os resultados esperados, após o acoplamento com a subestrutura B. O que se pode afirmar como positivo é o facto de se ter conseguido uma melhor correlação em consequência do desacoplamento (B1008r e B1012r) (Figura 5.42 e Figura 5.57). Futuros melhoramentos nos vários procedimentos e técnicas serão necessários para a obtenção de melhores resultados.

## **6** Conclusões e trabalhos futuros

### **6.1 Novas contribuições**

Neste trabalho houve vários contributos inovadores no sentido de desenvolver técnicas para identificar juntas em geral e uma junta aparafusada em particular. Dentro dos contributos mais relevantes podemos indicar os seguintes:

- No modelo de elementos finitos foi demonstrado que podemos substituir o parafuso e a porca da ligação por uma ligação rígida entre alguns nós comuns da zona de contacto. Este conjunto de nós coincidiu com a coroa de contacto gerada pelo chamado cone de aperto. Com esta ligação foi construído um modelo que prevê o comportamento dinâmico da junta no plano que passa pelo eixo do parafuso e pelo eixo das vigas.
- Com a finalidade de generalizar a identificação de juntas foi formulado um método alternativo novo para a realização de desacoplamentos dinâmicos de estruturas e assim identificar as respectivas juntas. Este método deu lugar a várias formulações, algumas novas e outras já utilizadas por outros autores.
  - Algumas formulações já existentes foram melhoradas para ajudar a resolver o problema conhecido do mal condicionamento de matrizes.
  - Foi identificado que a condição das diferenças entre as submatrizes de  $H^A$  e as submatrizes de  $H^C$  tem influência no processo de desacoplamento. Verificou-se que as formulações têm um melhor comportamento nas frequências onde a condição referida tem um mínimo local, o que levou a concluir que os métodos são mais fiáveis nessas gamas de frequências.
  - Utilizando simulações de ruído experimental, a formulação nova que utiliza um método iterativo revelou-se o método mais fiável entre as várias formulações possíveis, utilizando para isso apenas as frequências escolhidas referidas no ponto anterior e as coordenadas na junta.
- Uma das grandes dificuldades experimentais na aquisição de FRF é a medição de FRF que envolvam rotações. Esta dificuldade é objecto de estudo de vários autores.

Foi aqui sugerida uma técnica para prever essas FRF não medidas recorrendo apenas ao conhecimento da subestrutura A, que pode ser calculada numericamente ou nalguns casos analiticamente. Esta técnica surge a partir das expressões do acoplamento clássico de subestruturas.

## 6.2 Conclusões

Ao longo deste trabalho, foram surgindo várias dificuldades no processo de identificação da junta. Foi feito inicialmente uma abordagem numérica directa em que apenas foram comparadas as FRF experimentais com as FRF do modelo. Neste processo foram encontradas as seguintes situações:

- a escolha do elemento finito mais adequado ao problema revelou-se importante, pois o pretendido era representar o mais fiel possível a geometria da junta. No entanto dos elementos sólidos presentes no software comercial utilizado, nenhum deles têm o GL de rotação nos nós. A sua existência podia trazer-nos vantagem na aplicação das formulações desenvolvidas ao logo da tese;
- por outro lado, a escolha do tamanho da malha é importante, dado que a discretização da malha ao longo de toda a geometria leva a que tenhamos modelos espaciais bastante diferentes e com isso gerar comportamentos dinâmicos distintos. Este facto, por exemplo, pode afectar a determinação das características do material.

As técnicas clássicas de acoplamento de subestruturas utilizando FRF são há muito conhecidas. A sua aplicação em vários tipos de problemas levou à resolução de vários problemas dinâmicos. No entanto, a dificuldade não é em acoplar subestruturas mas sim em desacoplar subestruturas, que permitiria identificar elementos estruturais complexos sem solução analítica nem numérica. Nas técnicas utilizadas para realizar o desacoplamento foram levantadas as seguintes questões:

- a instabilidade dos métodos são de certa forma todos influenciados pela diferença entre as respostas dinâmicas da subestrutura A e as respostas dinâmica da estrutura C nas mesmas coordenadas. Com a adição de massas pontuais foram melhorados os

resultados em determinadas frequências, o que não é mais do que alterar a condição da diferença entre as matrizes de FRF de A e de C;

- as técnicas de desacoplamento que apresentam melhores resultados foram aquelas que utilizam apenas as coordenadas  $j$  da junta, embora em certas situações não seja possível ter acesso a elas;
- existiu uma grande dificuldade em tirar conclusões no momento de comparar as FRF simplesmente com a observação das FRF sobrepostas num gráfico. Para poder quantificar as diferenças e retirar alguma conclusão foram utilizados alguns factores de correlação entre FRF (LAC e GSC). Estes factores, juntamente com algumas FRF, revelaram-se muito úteis e práticos no momento em que era necessário comparar duas ou mais matrizes de FRF;
- no processo de simulação das FRF experimentais foi utilizado um erro numérico independente da amplitude da FRF, por ser mais realista, visto que grande parte das perturbações aparece nos baixos valores das FRF.

Para além de todos os conceitos teóricos e numéricos que foram tidos em conta, houve também alguma preocupação em tentar melhorar as FRF obtidas experimentalmente e prever outras de difícil medição. Foram abordados os seguintes pontos para tentar resolver estes problemas:

- o processo de determinação das FRF não medidas sugerido revelou-se aparentemente bastante bom nas FRF que não envolvem coordenadas  $j$  da junta. Estimar as FRF não medidas é, a priori, uma importante ajuda; no entanto, as FRF das coordenadas da junta que necessitávamos são aquelas que apresentam pior resultado. Foi sugerida uma solução para poder contornar este problema, mas não foram registados melhoramentos significativos;
- na aquisição experimental das FRF o sistema de aquisição induz um determinado ruído devido a vários factores de difícil controlo. Para melhorar estas FRF, foi aplicado um filtro que utiliza a decomposição da FRF no tempo e a formação da matriz de Hankel; é possível reduzir o nível de ruído utilizando uma decomposição em SVD dessa matriz. Fica ao critério do utilizador do método a escolha do número de valores singulares mais adequado para cada FRF.

A determinação das características dinâmicas de estruturas é experimentalmente um processo muito sensível a qualquer perturbação. Esta torna-se num problema que é inevitável em todo o processo de aquisição do sinal dos transdutores. Com o equipamento utilizado temos assumidamente estes problemas, o que conduziu de certa forma aos erros e às perturbações encontradas no processo de identificação da junta aqui apresentado. Toda esta problemática requer decididamente mais investigação no futuro, a fim de se desenvolverem técnicas e algoritmos suficientemente robustas para poderem ser usados com toda a confiança. Nesta tese foram dados alguns passos - ainda que modestos - nesse sentido.

### **6.3 Trabalhos futuros**

O problema de modelação ou identificação de estruturas complexas, como por exemplo as juntas aparafusadas, está longe de estar resolvido. Foram sugeridas várias técnicas novas que nos ajudam nesse caminho. Estas ainda carecem de maior exploração.

O estudo por métodos numéricos directos da junta aparafusada carece de outro estudo semelhante nos outros dois planos (XY e YZ). Para além disto, os futuros modelos numéricos podem ser gerados para entrar em conta com rotações nas coordenadas de interesse.

As formulações de desacoplamentos aqui sugeridas carecem de validação experimental em vários tipos de estruturas complexas, a fim de se avaliar a robustez dos métodos e da técnica de escolha de frequências apresentada.

O método sugerido para determinar as FRF não medidas apresenta um grande potencial no desenvolvimento de trabalhos inerentes, por exemplo no cálculo de FRF envolvendo rotações, comparando os resultados com os dos métodos clássicos existentes, que por sua vez também surgiram das expressões do acoplamento clássico.

Tanto as formulações de desacoplamento como o método de determinação das FRF não medidas assumem que é conhecido de forma exacta as características dinâmicas da subestrutura A. Foi utilizado, por facilidade, neste trabalho o método dos elementos

finitos aplicado às vigas o que representa sempre uma aproximação. No problema apresentado pode ser utilizado a solução analítica da resposta dinâmica de uma viga para assim descartarmos uma possível influência da matriz dinâmica de  $A$  nas formulações e métodos apresentados.

# Anexos

## Anexo A - Decomposição em valores singulares e pseudo-inversa

### Anexo A.1 - Decomposição em valores singulares

A decomposição em valores singulares de uma matriz, *Singular Value Decomposition* - SVD, é uma ferramenta importante para a resolução de vários problemas. É frequente encontrarmos sistemas sobredimensionados e a determinação dos valores singulares da matriz do sistema dá-nos uma informação extremamente valiosa sobre a independência linear das colunas da matriz. Vamos apresentar de forma sucinta esta factorização.

Se  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , com  $m \geq n$ , uma matriz com colunas linearmente independentes; então, existe duas matrizes ortogonais  $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$  e  $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e uma matriz  $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , tais que

$$A_{mn} = U_{mm} \Sigma_{mn} V_{nn}^T \quad (\text{A.1})$$

em que

$$\Sigma_{mn} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_n \\ 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

Com  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \dots \geq \sigma_n \geq 0$

Os elementos de  $\sigma$  são os chamados valores singulares da matriz  $A$ , as colunas de  $U$  e de  $V$  são os chamados vectores singulares à esquerda e à direita, respectivamente.

## Anexo A.2 - Mínimos quadrados

A solução de sistemas sobredimensionados do tipo,

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad (\text{A.3})$$

em que  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  com  $m \geq n$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  e  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{m \times 1}$  só tem solução se o vector  $\mathbf{b}$  pertencer ao espaço das colunas de  $\mathbf{A}$ . Se isso não acontecer significa que teremos sempre um erro,

$$\mathbf{r} = \mathbf{Ax} - \mathbf{b} \neq 0 \quad (\text{A.4})$$

Qualquer vector  $\mathbf{x}$  não deixa de ser a solução do problema, no entanto haverá um  $\mathbf{x}$  que minimiza este erro. Fará todo o sentido aplicar uma norma ao vector  $\mathbf{r}$ .

A estatística diz-nos que se as perturbações de  $\mathbf{A}$  foram caracterizadas por uma distribuição normal, a norma mais adequada é a norma euclidiana, que é diferenciável. Assim a solução do nosso sistema será encontrar o vector  $\mathbf{x}$  que minimiza,

$$\|\mathbf{r}\|^2 = \|\mathbf{b} - \mathbf{Ax}\|^2 \quad (\text{A.5})$$

O vector  $\mathbf{x}$  que minimiza este erro quadrático será encontrado no valor mínimo desta função quadrática; assim, temos

$$\|\mathbf{b} - \mathbf{Ax}\|^2 = (\mathbf{b} - \mathbf{Ax})^T (\mathbf{b} - \mathbf{Ax}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{Ax} - 2\mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{b} + \mathbf{b}^T \mathbf{b} \quad (\text{A.6})$$

Derivando em ordem a  $\mathbf{x}$  e igualando a zero,

$$\mathbf{A}^T \mathbf{Ax} = \mathbf{A}^T \mathbf{b} \quad (\text{A.7})$$

A matriz  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$  apenas será invertível se e só se as colunas de  $\mathbf{A}$  forem linearmente independentes, ou seja, se a característica de  $\mathbf{A}$  for igual a  $n$ . No entanto, se houver colunas de  $\mathbf{A}$  quase dependentes devido a erros de medição ou erros de cálculo numérico teremos esses erros ampliados na matriz  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ . Este problema é quantificado pela condição da matriz  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ . Quanto maior for a condição maior será o erro esperado.

A condição de uma matriz  $\mathbf{A}$  é por definição dada por,

$$\text{cond}(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\| \quad (\text{A.8})$$

Desta forma, aceitando o valor da condição da matriz  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ , podemos invertê-la e chegar à solução pretendida:

$$\mathbf{x} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b} \quad (\text{A.9})$$

**Anexo A.3 - Pseudo-inversa**

Em sistemas de equações lineares do tipo  $Bx = c$  em que  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e se  $B^{-1}$  existir, a resolução do sistema pode ser descrita da seguinte forma

$$x = B^{-1}c \quad (\text{A.10})$$

Ao comparar a solução do problema sobredimensionado (A.9) com a solução (A.10) é designado a matriz  $(A^T A)^{-1} A^T$  como a matriz pseudo-inversa de  $A$ , ou seja,

$$A^+ = (A^T A)^{-1} A^T \quad (\text{A.11})$$

Utilizando as propriedades da decomposição em valores singulares da matriz  $A$ , como as matrizes  $U$  e  $V$  são ortogonais, podemos obter a pseudo-inversa de  $A$  da seguinte forma:

$$A^+ = V \Sigma^+ U^T \quad (\text{A.12})$$

## Anexo B – Determinação das características espaciais

A matriz de rigidez dinâmica de uma estrutura  $\mathbf{Z}(\omega)$  é função da matriz de massa  $\mathbf{M}$  e da matriz de rigidez  $\mathbf{K}$  da estrutura. Para cada frequência  $\omega_i$  podemos escrever cada elemento da matriz de rigidez dinâmica  $z_{pq}$  da seguinte forma:

$$z_{pq}(\omega_i) = k_{pq} - \omega_i^2 m_{pq} = \{1 - \omega_i^2\} \begin{bmatrix} k_{pq} \\ m_{pq} \end{bmatrix} \quad (\text{B.1})$$

Como temos informação sobre a rigidez dinâmica ao longo de uma gama de frequências, podemos escrever o seguinte sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} z_{pq}(\omega_1) \\ z_{pq}(\omega_{i+1}) \\ \vdots \\ z_{pq}(\omega_L) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\omega_1^2 \\ 1 & -\omega_{i+1}^2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & -\omega_L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{pq} \\ m_{pq} \end{bmatrix} \Rightarrow \{z_{pq}(\omega)\} = \mathbf{\Omega} \begin{bmatrix} k_{pq} \\ m_{pq} \end{bmatrix} \quad i = 1, \dots, L \quad (\text{B.2})$$

A resolução do sistema da equação (B.2) pode ser encarada como um problema de mínimos quadrados,

$$\mathbf{\Omega}^T \{z_{ij}(\omega)\} = \mathbf{\Omega}^T \mathbf{\Omega} \begin{bmatrix} k_{ij} \\ m_{ij} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} k_{ij} \\ m_{ij} \end{bmatrix} = (\mathbf{\Omega}^T \mathbf{\Omega})^{-1} \mathbf{\Omega}^T \{z_{ij}(\omega)\} \quad (\text{B.3})$$

O produto a ser invertido pode ser simplificado da seguinte forma:

$$\mathbf{\Omega}^T \mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ -\omega_1^2 & \dots & -\omega_L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\omega_1^2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & -\omega_L^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L & -\sum \omega_i^2 \\ -\sum \omega_i^2 & \sum \omega_i^4 \end{bmatrix} \quad (\text{B.4})$$

e a inversão é dada por:

$$(\mathbf{\Omega}^T \mathbf{\Omega})^{-1} = \left( \begin{bmatrix} L & -\sum \omega_i^2 \\ -\sum \omega_i^2 & \sum \omega_i^4 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \frac{1}{L \sum \omega_i^4 - (\sum \omega_i^2)^2} \begin{bmatrix} \sum \omega_i^4 & \sum \omega_i^2 \\ \sum \omega_i^2 & L \end{bmatrix} \quad (\text{B.5})$$

Obtemos assim uma expressão que não é mais que uma regressão linear em  $\omega^2$ :

$$\begin{bmatrix} k_{pq} \\ m_{pq} \end{bmatrix} = \frac{1}{L \sum \omega_i^4 - (\sum \omega_i^2)^2} \begin{bmatrix} \sum \omega_i^4 & \sum \omega_i^2 \\ \sum \omega_i^2 & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ -\omega_1^2 & \dots & -\omega_L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{pq}(\omega_1) \\ z_{pq}(\omega_2) \\ \vdots \\ z_{pq}(\omega_L) \end{bmatrix} \quad (\text{B.6})$$

## Anexo C - Acelerância de vigas livre-livre a partir da Teoria de Timoshenko.

Ao contrário das vigas do tipo *Bernoulli-Euler*, as vigas do tipo *Timoshenko*, na sua formulação, entram em conta com os efeitos da inércia de rotação e com os efeitos transversos que por vezes são importantes. Fazendo o equilíbrio dinâmico de um elemento infinitesimal de uma viga, podemos escrever as seguintes equações diferenciais [86] [87]:

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - \rho I \left( \frac{E}{Gk} + 1 \right) \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho^2 I}{kG} \frac{\partial^4 y}{\partial t^4} + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (C.1)$$

$$EI \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} - \rho I \left( \frac{E}{Gk} + 1 \right) \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho^2 I}{kG} \frac{\partial^4 \psi}{\partial t^4} + \rho A \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \quad (C.2)$$

Onde  $y$  representa o deslocamento transversal,  $\psi$  a deformação angular devida ao momento flector,  $\rho$  a massa específica,  $G$  o módulo de elasticidade transversal,  $E$  o módulo de elasticidade,  $A$  a área da secção,  $I$  o momento de inércia da secção e  $k$  um coeficiente de corte que depende da forma da secção e do coeficiente de *Poisson* do material. Este coeficiente  $k$  está tabelado para várias secções (Karnovsky e Lebed [87]); a expressão para uma secção rectangular está indicada na equação (C.3).

$$k = \frac{10(1 + \nu)}{12 + 11\nu} \quad (C.3)$$

Do equilíbrio são deduzidas as seguintes equações para a inclinação da secção, momento flector e esforço de corte:

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial x} &= \psi + \varepsilon \\ M &= EI \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ V &= k \left( \frac{\partial y}{\partial x} - \psi \right) A G \end{aligned} \quad (C.4)$$

Em que  $\varepsilon$  é a deformação angular devido ao esforço transversal,  $M$  o momento flector na secção e  $V$  o esforço de corte.

Utilizando a solução harmónica (C.5) na equação diferencial (C.1)

$$y = Y e^{i\omega t} \quad (C.5)$$

Em que  $Y$  é a amplitude do movimento da secção e  $\omega$  a frequência angular, vamos obter a seguinte equação diferencial,

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \omega^2 \rho I \left( \frac{E}{Gk} + 1 \right) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \left( \omega^4 \frac{\rho^2 I}{kG} - \omega^2 \rho A \right) y = 0 \quad (\text{C.6})$$

Esta equação diferencial tem uma solução do tipo [88],

$$y = C_1 \cos(\alpha \cdot x) + C_2 \text{sen}(\alpha \cdot x) + C_3 \cosh(\beta \cdot x) + C_4 \text{senh}(\beta \cdot x) \quad (\text{C.7})$$

As constantes  $C_1, C_2, C_3$  e  $C_4$  são determinadas a partir das condições de fronteira da viga e

$$\alpha^2 = \frac{\omega^2 \rho}{2} \left( \frac{1}{Gk} + \frac{1}{E} \right) + \frac{\varepsilon_1}{2} \quad (\text{C.8})$$

$$\beta^2 = -\frac{\omega^2 \rho}{2} \left( \frac{1}{Gk} + \frac{1}{E} \right) + \frac{\varepsilon_1}{2} \quad (\text{C.9})$$

$$\varepsilon_1^2 = \omega^4 \rho^2 \left( \frac{1}{Gk} - \frac{1}{E} \right)^2 + \frac{4\omega^2 \rho A}{EI} \quad (\text{C.10})$$

Para calcular as acelerações de uma viga livre no espaço são determinadas as quatro constantes da equação (C.7) para os quatro tipos de esforços aplicados a cada grau de liberdade individualmente.



Figura A.1: Graus de liberdade da viga livre no espaço

Após algumas simplificações e agrupamentos de expressões, em [88] foram descritas as seguintes equações para as acelerações:

$$H_{11} = H_{33} = -\frac{\left( \frac{\beta}{\gamma_1^2} + \frac{1}{\alpha \varepsilon_2} \right) B_1 - \left( \frac{\alpha}{\gamma_2^2} + \frac{1}{\beta \varepsilon_2} \right) B_2}{\Delta EI} \omega^2 \quad (\text{C.11})$$

$$H_{12} = H_{21} = -H_{34} = -H_{43} = -\frac{\left( \frac{1}{\gamma_2} - \frac{1}{\gamma_1} \right) B_3 + \left( \frac{\varepsilon}{\beta \gamma_2} + \frac{\beta}{\alpha \gamma_1} \right) B_4}{\Delta EI} \omega^2 \quad (\text{C.12})$$

$$H_{13} = H_{31} - \frac{\left(\frac{\beta}{\gamma_2^2} + \frac{1}{\alpha\epsilon_2}\right)B_5 - \left(\frac{\alpha}{\gamma_2^2} + \frac{1}{\beta\epsilon_2}\right)B_6}{\Delta EI} \omega^2 \quad (\text{C.13})$$

$$H_{14} = H_{41} = -H_{23} = -H_{32} = \frac{\left(\frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2}\right)B_7}{\Delta EI} \omega^2 \quad (\text{C.14})$$

$$H_{22} = H_{44} = \frac{\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{\gamma_2}{\alpha\gamma_1}\right)B_2 + \left(\frac{1}{\beta} + \frac{\gamma_1}{\beta\gamma_2}\right)B_1}{\Delta EI} \omega^2 \quad (\text{C.15})$$

$$H_{24} = H_{42} = \frac{\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{\gamma_2}{\alpha\gamma_1}\right)B_6 + \left(\frac{1}{\beta} + \frac{\gamma_1}{\beta\gamma_2}\right)B_5}{\Delta EI} \omega^2 \quad (\text{C.16})$$

em que,

$$\gamma_1 = \alpha^2 - \frac{\omega^2 \rho}{Gk}; \quad \gamma_2 = \beta^2 + \frac{\omega^2 \rho}{Gk} \quad (\text{C.17})$$

$$\epsilon_2 = \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\alpha \beta} \quad (\text{C.18})$$

$$B_1 = \cos(\alpha L) \cdot \sinh(\beta L); \quad B_2 = \sin(\alpha L) \cdot \cosh(\beta L) \quad (\text{C.19})$$

$$B_3 = \cos(\alpha L) \cdot \cosh(\beta L) - 1; \quad B_4 = \sin(\alpha L) \cdot \sinh(\beta L) \quad (\text{C.20})$$

$$B_5 = \sinh(\beta L); \quad B_6 = \sin(\alpha L); \quad B_7 = \cos(\alpha L) - \cosh(\beta L) \quad (\text{C.21})$$

$$\Delta = 2 - 2 \cos(\alpha L) \cdot \cosh(\beta L) + \left(\frac{\alpha \gamma_1}{\beta \gamma_2} - \frac{\beta \gamma_2}{\alpha \gamma_1}\right) \sin(\alpha L) \cdot \sinh(\beta L) \quad (\text{C.22})$$

A formulação das vigas tipo Bernoulli-Euler, que não entra em conta com os efeitos da inércia de rotação e com os efeitos transversos, apenas vai produzir alterações nas equações (C.8), (C.9), (C.10) e (C.17), como está descrito nas equações seguintes:

$$\alpha^2 = \frac{\epsilon_1}{2}; \quad \beta^2 = \frac{\epsilon_1}{2} \quad (\text{C.23})$$

$$\epsilon_1^2 = \frac{4\omega^2 \rho A}{EI} \quad (\text{C.24})$$

$$\gamma_1 = \alpha^2; \quad \gamma_2 = \beta^2 \quad (\text{C.25})$$

## Anexo D - Equipamento experimental utilizado

Todos os ensaios foram realizados utilizando as estruturas suspensas por fios de nylon, para com isso criar as condições de vibração livre-livre.

Foi usado o analisador espectral OR25 PC-Pack II, que é o responsável pela recepção, tratamento e envio dos sinais dos vários transdutores utilizados para o PC através de uma placa. Possui uma resolução de 100 a 3200 linhas. Com a função “Trigger” presente no equipamento foi possível usar um martelo com um transdutor de força para excitar as estruturas estudadas.

A informação enviada para o PC é tratada pelo software “Real-time FFT OR762/OR763” dedicado ao equipamento.

Na realização dos ensaios, para cada FRF era realizada uma média linear de 6 FRFs obtidas com as respectivas 6 solicitações do martelo. Este valor foi sugerido pelo representante do equipamento.

Para medir as respostas, foi escolhido um transdutor o mais leve possível pois as estruturas analisadas já são, por si, leves. Recorreu-se ao acelerômetro da Bruel & Kjaer, Type 4508B com 4,8 gramas, que está representado na Figura A.2.

Para excitar a estrutura foi utilizado um martelo que é caracterizado essencialmente por uma massa que constitui a cabeça do martelo onde é fixado um sensor de força. Neste sensor é enroscada uma ponteira amovível; foi assim possível escolher uma ponteira com uma dureza adequada que permitiu excitar as gamas de frequências estudadas.



Figura A.2: Martelo e acelerômetro cúbico

# Referências

- [1] MATLAB, The MathWorks, Inc., 2001.
- [2] **Ibrahim, R.A., Pettit, C.L.**  
"Uncertainties and dynamic problems of bolted joints and other fasteners"  
Journal of Sound and Vibration, vol. 279, 2005, pp. 857-936.
- [3] **Yuan, J.X., Wu, X.M.**  
"Identification of the Joint Structural Parameters of Machine Tool by DDS and FEM"  
Journal of Engineering for Industry, vol. 107, no. 1, 1985, pp. 64-69.
- [4] **Wang, J., Sas, P.**  
"A Method for Identifying Parameters of Mechanical Joints"  
Journal of Applied Mechanics, vol. 57, no. 2, 1990, pp. 337-342.
- [5] **Huckelbridge, A.A., Lawrence, C.**  
"Identification of Structural Interface Characteristics Using Component Mode Synthesis"  
Journal of Vibration, Acoustics, Stress & Reliability in Design, vol. 111, 1989, pp. 140-147.
- [6] **Gaul, L., Lenz, J.**  
"Nonlinear dynamics of structures assembled by bolted joints"  
Acta Mechanica, vol. 125, no. 1, 1997, pp. 169-181.
- [7] **Gaul, L., Nitsche, R.**  
"The role of friction in mechanical joints."  
Applied Mechanics Review, 2001, pp. 93-106.
- [8] **Gaul, L., Roseira, J., Becker, J.**  
"Structural damping with friction beams"  
International Conference on Engineering Dynamics, 2007.
- [9] **Song, Yaxin. et al.**  
"Simulation of dynamics of beam structures with bolted joints using adjusted Iwan beam elements"  
Journal of Sound and Vibration, vol. 273, 2004, pp. 249-276.
- [10] **Hurlebaus, S., Gaul, L.**  
"Smart structure dynamics"  
Mechanical Systems and Signal Processing, vol. 20, no. 2, 2006, pp. 255-281.
- [11] **Mayer, M.H., Gaul, L.**  
"Segment-to-segment contact elements for modelling joint interfaces in finite element analysis"  
Mechanical Systems and Signal Processing, vol. 21, no. 2, 2007, pp. 724-734.
- [12] **Hanss, M., Oexl, S., Gaul, L.**  
"Identification of a bolted-joint model with fuzzy parameters loaded normal to the contact interface"  
Mechanics Research Communications, vol. 29, no. 2-3, 2002, pp. 177-187.
- [13] **Khodadadberomy, R., Ashory, M.R., Jamshidi, E.**  
"Identification of bolted joints under repeatable loads"  
Proceedings of the 28th International Modal Analysis Conference, 2010.

- [14] **Mottershead, J.E., Friswell, M.I.**  
 "Model Updating In Structural Dynamics: A Survey"  
 Journal of Sound and Vibration, vol. 167, 1993, pp. 347-375.
- [15] **Mottershead, J.E., Friswell, M.I., Ng, G.H., Brandon, J.A.**  
 "Geometric parameters for finite element model updating of joints and constraints"  
 Mechanical Systems and Signal Processing, vol. 10, 1996, pp. 171-182.
- [16] **Link, Michael.**  
 "Identification of Structural Parameters Based on Inverse Modification Theory"  
 Proceedings of the 22th International Modal Analysis Conference, 2004.
- [17] **Kwon, K., Lin, R.**  
 "Frequency selection method for FRF-based model updating"  
 Journal of Sound and Vibration, vol. 278, 2004, pp. 285-306.
- [18] **Arora, V., Singh, S.P., Kundra, T.K.**  
 "Damped FE model updating using complex updating parameters: Its use for dynamic design"  
 Journal of Sound and Vibration, vol. 324, 2009, pp. 350-364.
- [19] **Arora, V., Singh, S.P., Kundra, T.K.**  
 "Damped model updating using complex updating parameters"  
 Journal of Sound and Vibration, vol. 320, 2009, pp. 438-451.
- [20] **Mackerle, Jaroslav.**  
 "Finite element analysis of fastening and joining: A bibliography (1990-2002)"  
 International Journal of Pressure Vessels and Piping, vol. 80, 2003, pp. 253-271.
- [21] **Kim, Jeong., Yoon, Joo-Cheol., Kang, Beom-Soo.**  
 "Finite element analysis and modeling of structure with bolted joints"  
 Applied Mathematical Modelling, vol. 31, 2007, pp. 895--911.
- [22] **Brian, P.J.**  
 "Simple Joint Models"  
 Proceedings of International Conference on Noise and Vibration Engineering, 2000, pp. 801-805.
- [23] **Ma, X., Bergman, L.A., Vakakis, A.F.**  
 "Identification of bolted joints through laser vibrometry"  
 Journal of Sound and Vibration, vol. 246, no. 3, 2001, pp. 441-460.
- [24] **Maia, N.M.M. et al.**  
 Theoretical and Experimental Modal Analysis  
 Taunton, Somerset, England, Reserch Studies Press, Ltd, 1997.
- [25] **Maia, N.M.M.**  
 Extraction of valid modal properties from measured data in structural vibrations  
 Ph.D. Thesis, Mechanical Engineering Department, Imperial College of Science and Technology, University of London, U.K., 1988.
- [26] **Bishop, R.E.D.**  
 "The analysis and synthesis of vibrating systems"  
 Journal of the Royal Aeronautical Society, 1954, pp. 703-719.
- [27] **Jetmundsen, B., Bielawa, R.L., Flannelly, W.G.**  
 "Generalized Frequency Domain"  
 Journal of the American Helicopter Society, 1988, pp. 55-64.

- [28] **Tsai, J., Chou, Y.**  
 "The identification of dynamic characteristics of a single bolt joint"  
 Journal of Sound and Vibration, vol. 125, no. 3, 1988, pp. 487-502.
- [29] **Lee, C.W., Hong, S.W.**  
 "Estimation of Joint Structural Parameters from Measured and Computed  
 Frequency Responses"  
 Proceedings of the 8th International Modal Analysis Conference, 1990, pp. 1434-  
 1439.
- [30] **Wang, J.H., Liou, C.M.**  
 "Experimental Substructure Synthesis with Special Consideration of Joint Effects"  
 International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis, vol. 5, no. 1,  
 1989, pp. 13-24.
- [31] **Hong, S.W., Lee, C.W.**  
 "Identification of Linearized Joint Structural Parameters by Combined Use of  
 Measured and Computed Frequency Responses"  
 Mechanical Systems & Signal Processing, vol. 5, no. 4, 1991, pp. 267-277.
- [32] **Urgueira, A.P.V.**  
 Dynamic analysis of coupled structures using experimental data  
 Ph.D. Thesis, Mechanical Engineering Department, Imperial College of Science and  
 Technology, University of London, U.K, 1989.
- [33] **Chung, K.R.**  
 "Identification and Dynamic Reanalysis of Vibrating Structures by Modal Analysis"  
 Dep. of Mech. Eng., Korea, Advanced Institute of Science and Tech., 1987.
- [34] **Ren, Y., Beards, C.F.**  
 "On the Nature of FRF Joint Identification Technique"  
 Proceedings of the 11th International Modal Analysis Conference, 1993, pp. 473-  
 478.
- [35] **Ren, Y., Beards, C.F.**  
 "A Generalized Receptance Coupling Technique"  
 Proceedings of the 11th International Modal Analysis Conference, vol. 2, 1993, pp.  
 868-871.
- [36] **Ren, Y., Beards, C.F.**  
 "A New Multi-Step Two-Coordinate Coupling Technique and its Application for  
 Detecting Linearly-Dependent Coordinates"  
 Proceedings of the 11th International Modal Analysis Conference, vol. 2, 1993, pp.  
 872-876.
- [37] **Ren, Y., Beards, C.F.**  
 "An Iterative FRF Joint Identification Technique"  
 Proceedings of the 11th International Modal Analysis Conference, vol. 2, 1993, pp.  
 1133-1139.
- [38] **Ren, Y., Beards, C.F.**  
 "On the Importance of Weighting on FRF Joint Identification"  
 Proceedings of the 11th International Modal Analysis Conference, 1993, pp. 1606-  
 1611.
- [39] **D'Ambrogio, W., Fregolent, A.**  
 "Sensitivity of decoupling techniques to uncertainties in the properties"

- Proceedings of International Conference on Noise and Vibration Engineering, 2008, pp. 3737-3749.
- [40] **Rixen, Daniel.J.**  
 "A dual Craig-Bampton method for dynamic substructuring"  
 Journal of Computational and Applied Mathematics, vol. 168, 2004, pp. 383-391.
- [41] **Klerk, Dennis., Rixen, Daniel.J., Voormeeren, S.N.**  
 "General Framework for Dynamic Substructuring: History, Review, and Classification of Techniques"  
 Journal American Institute of Aeronautics and Astronautics, vol. 46, 2008.
- [42] **Craig, R., Bampton, M.**  
 "Coupling of Substructures for Dynamic Analysis"  
 AIAA Journal, vol. 6, 1968, pp. 1313.
- [43] **Jalali, H., Ahmadian, H., Mottershead, J.E.**  
 "Identification of nonlinear bolted lap-joint parameters by force-state mapping"  
 International Journal of Solids and Structures, vol. In Press, Correc, 2007.
- [44] **Ahmadian, H., Jalali, H.**  
 "Identification of bolted lap joints parameters in assembled structures"  
 Mechanical Systems and Signal Processing, vol. 21, 2007, pp. 1041-1050.
- [45] **Ahmadian, H., Jalali, H.**  
 "Generic element formulation for modelling bolted lap joints"  
 Mechanical Systems and Signal Processing, vol. 21, 2007, pp. 2318-2334.
- [46] **Ren, Y.Beards, C.F.**  
 "A new method for the identification of joint proprites using FRF data"  
 Florence Modal Analysis Conference, 1991.
- [47] **Maia, N.M.M., Silva, J.M., Ribeiro, A.M., Silva, P.L.**  
 "On the dynamic characterization of joints using uncoupling techniques"  
 Proceedings of the 16th International Modal Analysis Conference, 1998.
- [48] **Yang, Kyung-Taek., Park, Youn-sik.**  
 "Joint structural parameter identification using a subset of frequency response function measurements"  
 Mechanical Systems and Signal Processing, vol. 7, 1993.
- [49] **Celic, D., Boltezar, M.**  
 "Identification of the dynamic properties of joints using frequency-response functions"  
 Journal of Sound and Vibration, vol. 317, 2008, pp. 158-174.
- [50] **Wang, M., Wang, D., Zheng, G.**  
 "Joint dynamic properties identification with partially measured frequency response function"  
 Mechanical Systems and Signal Processing, vol. 27, 2012, pp. 499-512.
- [51] **Avitabile, P., O'Callahan, J.**  
 "Frequency response function expansion for unmeasured translation and rotation dofs for impedance modelling applications"  
 Mechanical Systems and Signal Processing, vol. 17, 2003, pp. 723-745.
- [52] **Silva, J.M.M., Maia, N.M.M., Ribeiro, A.M.**  
 "Cancellation of mass-loading effects of transducers and evaluation of unmeasured

- frequency response functions"  
Journal of Sound and Vibration, vol. 236, 2000, pp. 761-779.
- [53] **Allemang, R.J. Brown D. L.**  
"A Correlation Coefficient For Modal Vector Analysis"  
Proceedings of the 1st International Modal Analysis Conference, 1982, pp. 110-116.
- [54] **Pascual, R., Golinval, J.C., Razeto, M.**  
"A frequency domain correlation technique for model correlation and updating"  
Proceedings of the 15th International Modal Analysis Conference, 1997.
- [55] **Heylen, W., Avitable, P.**  
"Correlation Considerations - Part 5 (Degree of freedom Correlation Techniques)"  
Proceeding of the 16th International Modal Analysis Conference, 1998, pp. 207-214.
- [56] **Lieven, N.A., Ewins, D. J.**  
"Spatial Correlation of Mode Shapes, the Coordinate Modal Assurance (COMAC)"  
Proceedings of the 6th International Modal Analysis Conference, 1998, pp. 690-695.
- [57] **Grafe, H.**  
Model Updating of Large Structural Dynamics Models Using Measured Response Functions  
Ph.D. Thesis, Mechanical Engineering Department, Imperial College of Science and Technology, University of London, U.K., 1998.
- [58] ANSYS Mechanical APDL Programmer's Manual, Inc., California, 2007.
- [59] **Silva, Clarence.W. de.**  
Vibration and Shock Handbook  
Broken Sound Parkway NW, USATaylor & Francis Group, 2005.
- [60] **Maia, M.M. M.**  
Introdução à dinâmica analítica  
Portugal, Lisboa, IST Press, 2000.
- [61] **Skingle, G.W.**  
Structural Dynamic Modification Using Experimental Data  
Ph.D. Thesis, Mechanical Engineering Department, Imperial College of Science and Technology, University of London, U.K., 1989.
- [62] **Maia, N.M.M., Silva, J.M., Silva, P.L.**  
"Identification of the dynamic behavior of Joints using substructuring methods"  
Proceedings of the 18th International Modal Analysis Conference, 2000.
- [63] **Batista, F.C., Maia, N.M.M.**  
"Uncoupling Techniques for the Dynamic Characterization of Sub-structures"  
Linking Models and Experiments, Volume 2, vol. 4, 2011, pp. 383-392.
- [64] **Ben-Israel, Adi.**  
"A note on partitioned matrices and equations"  
Siam Review, vol. 11, 1969.
- [65] **Batista, F.C., Maia, N.M.M.**  
"Estimation of unmeasured frequency response functions"  
Proceedings of the 19th International Congress on Sound and Vibration (ICSV19), Vilnius, Lituânia, 2012.

- [66] **Liu, W.**  
Structural dynamics analysis and testing of coupled structures  
Ph.D. Thesis, Mechanical Engineering Department, Imperial College of Science and Technology, University of London, U.K., 2000.
- [67] **Ren, Y.**  
The analysis and identification of friction joint parameters in the dynamic response of structures  
Ph.D. Thesis, Mechanical Engineering Department, Imperial College of Science and Technology, University of London, U.K., 1992.
- [68] **Ren, Y., Beards, C.F.**  
"Identification of joint properties of a structure using frf data"  
Journal of Sound and Vibration, vol. 186, no. 4, 1995, pp. 567-587.
- [69] **Liu, W., Ewins, D.J.**  
"Substructure synthesis via elastic media part I: joint identification"  
Proceedings of the 18th International Modal Analysis Conference, 2000.
- [70] **Ratcliffe, J.M., Lieven, N.A.**  
"A generic element-based method for joint identification"  
Mechanical Systems and Signal Processing, 1998.
- [71] **Wang, J.H., Chuang, S.C.**  
"Reducing errors in the identification of structural joint parameters using error functions"  
Journal of Sound and Vibration, vol. 273, no. 1-2, 2004, pp. 295-316.
- [72] **Axelsson, O.**  
Iterative Solution Methods  
Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1996.
- [73] **Chen, Y.-L., Tan, X.-Y.**  
"Computing Generalized Inverses of Matrices by Iterative Methods Based on Splittings of Matrices"  
Applied Mathematics and Computation, vol. 163 (1), 2005, pp. 309 - 325.
- [74] **Pina, H.**  
Métodos Numéricos  
Alfragide, Portugal, McGraw-Hill, 1995.
- [75] **Silva, J.M., Maia, N.M., Ribeiro, A.M.**  
"Cancellation of mass-loading effects of transducers and evaluation of unmeasured frequency response functions"  
Journal of Sound and Vibration, vol. 236, 2000, pp. 761-779.
- [76] **Jung, H., Ewins, D.J.**  
"On the use of simulated experimental data for evaluation of modal analysis methods"  
Proceedings of the 10th International Modal Analysis Conference, 1992, pp. 421-429.
- [77] **Marudachalam, K., Wicks, A.L.**  
"An Attempt to Quantify the Errors in the Experimental Modal Analysis Process"  
Proceedings of the 9th International Modal Analysis Conference, 1991, pp. 1522-1527.

- [78] **Maia, N.M.M.**  
"Fundamentals of Singular Value Decomposition"  
Proceedings of the 9th International Modal Analysis Conference, 1991, pp. 1515-1521.
- [79] **Liu, K.**  
"Modal parameter estimation using the state space method"  
Journal of Sound and Vibration, vol. 197, no. 1, 1996, pp. 387-402.
- [80] **To, W.M., Ewins, D.J.**  
"The role of the generalized inverse in structural dynamics"  
Journal of Sound and Vibration, vol. 186, no. 2, 1995, pp. 185-195.
- [81] **Gialamas, T.P. et al.**  
"Substructuring technique: improvement by means of singular value decomposition (SVD)"  
Applied Acoustics, vol. 62, no. 10, 2001, pp. 1211-1219.
- [82] **Lim, T.C., Li, J.**  
"A theoretical and computational study of the frf-based substructuring technique applying enhanced least square and tsvd approaches"  
Journal of Sound and Vibration, vol. 231, no. 4, 2000, pp. 1135-1157.
- [83] **Liu, K.**  
"Application of SVD in optimization of structural modal test"  
Computers & Structures, vol. 63, no. 1, 1997, pp. 51-59.
- [84] **Sanliturk, K.Y., Cakar, O.**  
"Noise elimination from measured frequency response functions"  
Mechanical Systems and Signal Processing, vol. 19, no. 3, 2005, pp. 615-631.
- [85] **Jensen, S.H., Hansen, P.C., Hansen, S.D., Sorensen, J.A.**  
"Reduction of Broad-Band Noise in Speech by Truncated QSVD"  
IEEE Transactions on Speech and Audio Processing, vol. 3, no. 6, 1995, pp. 439-448.
- [86] **Weaver, Jr.W., Timoshenko, S.P., Donavan, H.Y.**  
Vibration Problems in Engineering  
John Wiley & Sons, 1999.
- [87] **Karnovsky, I.A., Lebed, O.I.**  
Formulas Structural Dynamics: Tables, Graphs and Solutions  
McGraw-Hill, 2001.
- [88] **Silva, J.M.M.**  
The Influence of the Joint on the Vibration Response of a Cross-Beam Assembly  
Master Thesis, Imperial College of Science and Tecnology, University of London, United Kingdom, 1974.