

Curvas geodésicas: um exemplo com resolução analítica.

by J. P. FATELO AND N. MARTINS-FERREIRA

ESTG, CDRSP
Instituto Politécnico de Leiria

Resumo Apresentamos um exemplo de uma superfície não trivial em \mathbb{R}^3 na qual as curvas geodésicas são encontradas analiticamente.

1 Introdução

Tal como explicado em [1], na maioria dos casos, as curvas geodésicas são obtidas com recurso a aplicações computacionais. Entre as superfícies com curvas geodésicas encontradas analiticamente e sem aproximações, destacam-se o caso da superfície esférica com a solução (*intuitiva*) correspondente aos "grandes círculos" e o caso do cilindro que, neste particular, não é muito diferente de um plano onde as geodésicas são retas. Neste artigo considera-se uma superfície de revolução que, mesmo não sendo trivial, permite uma determinação explícita, em termos de funções elementares, das suas curvas geodésicas.

Na secção 2, apresentamos a superfície considerada. Na secção 3, resolvemos as equações das geodésicas para este exemplo e explicitamos as soluções sujeitas a condições iniciais e, na secção 4, as soluções na presença de condições de fronteira.

As figuras expostas neste artigo foram geradas usando a aplicação Mathematica [2].

2 A superfície

Em geral, as superfícies de revolução em \mathbb{R}^3 podem ser parametrizadas da seguinte maneira

$$\vec{\sigma}(\alpha, \theta) = (r(\alpha) \cos \theta, r(\alpha) \sin \theta, z(\alpha)). \quad (1)$$

Neste artigo, vamos considerar o caso em que

$$r(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}},$$

$$z(\alpha) = \int_{\frac{1}{\sqrt[3]{4}}}^{\alpha} \sqrt{1 - \frac{1}{4x^3}} dx,$$

onde $\alpha \geq \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ e $\theta \in \mathbb{R}$. A função z pode ser expressa em termos da função gama Γ e da função hipergeométrica ${}_2F_1$ da seguinte maneira:

$$z(\alpha) = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(-\frac{1}{3})}{\sqrt[3]{4} \Gamma(\frac{1}{6})} + \alpha {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4\alpha^3}\right).$$

Parte da superfície assim definida está representada na Fig. 1.

O parâmetro θ assume qualquer valor real e considera-se a seguinte interpretação: pontos com o mesmo valor de α mas com valores de θ que diferem por um múltiplo de 2π correspondem à mesma posição geométrica mas situam-se em *camadas* diferentes da superfície.

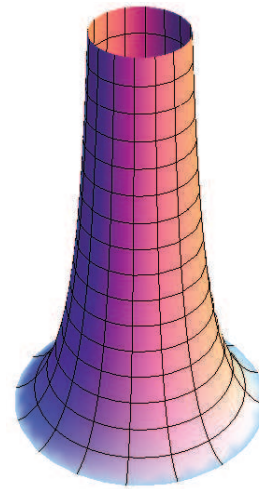


Fig. 1: Vista parcial da superfície em estudo.

Estas expressões de r e z foram escolhidas porque têm a seguinte propriedade:

$$r'^2 + z'^2 = 1.$$

Assim, o tensor métrico da superfície é uma matriz com a forma

$$g = \begin{pmatrix} r'^2 + z'^2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/\alpha \end{pmatrix}.$$

A partir do tensor métrico, obtêm-se as equações das geodésicas [1]:

$$\ddot{\alpha} + \frac{1}{2\alpha^2} \dot{\theta}^2 = 0 \quad (2)$$

$$\ddot{\theta} - \frac{1}{\alpha} \dot{\alpha} \dot{\theta} = 0. \quad (3)$$

Uma geodésica na superfície é um conjunto de pontos parametrizado por $\vec{\sigma}(\alpha(t), \theta(t))$, onde t é um parâmetro real e $\alpha = \alpha(t)$ e $\theta = \theta(t)$ são soluções das equações (2) e (3). Estas equações formam um sistema autónomo uma

vez que não dependem explicitamente da variável independente t . Na secção seguinte, o sistema é resolvido com a utilização de leis de conservação, também conhecidas por *first integrals*.

3 Geodésicas a partir de um ponto dado

Nesta secção apresentam-se os cálculos necessários para obter as soluções dos caminhos geodésicos que começam num dado ponto inicial. Em primeiro lugar, observa-se que o sistema de equações (2) e (3) implica:

$$\frac{d}{dt} \left(\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{\alpha} \dot{\theta}^2 \right) = 2 \dot{\alpha} \left(\ddot{\alpha} + \frac{1}{2\alpha^2} \dot{\theta}^2 \right) = 0$$

e

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\theta}}{\alpha} \right) = \frac{1}{\alpha} \left(\ddot{\theta} - \frac{1}{\alpha} \dot{\alpha} \dot{\theta} \right) = 0.$$

Por conseguinte, as curvas geodésicas são soluções do seguinte sistema mais simples:

$$\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{\alpha} \dot{\theta}^2 = v^2 \quad (4)$$

$$\dot{\theta} = \alpha l, \quad (5)$$

onde v e l são constantes arbitrárias. É possível relacionar (4) e (5), respetivamente, com a conservação da energia e do momento angular. De facto, estas quantidades são conservadas ao longo de um caminho geodésico uma vez que este é o caminho seguido por uma partícula livre, ou seja, sem forças a atuar sobre ela (para além daquelas que a mantêm na superfície).

Uma primeira classe de soluções corresponde ao caso $l = 0$, em que θ se mantém constante ao longo da geodésica, que é portanto um "meridiano" da superfície, e em que α varia linearmente com t .

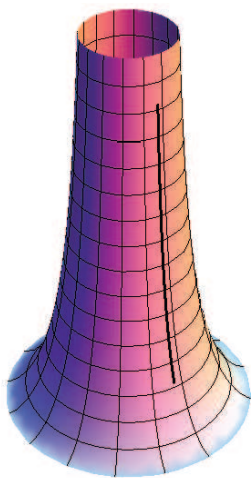


Fig. 2: Um meridiano.

Para determinar as soluções com $l \neq 0$, substitui-se (5) em (4), e obtém-se a equação

$$\dot{\alpha}^2 = v^2 - \alpha l^2,$$

donde

$$\dot{\alpha} = \pm \sqrt{v^2 - \alpha l^2}.$$

Considerando que são conhecidos os valores de α e θ em $t = 0$ (e notando $\alpha(0) = \alpha_0$ e $\theta(0) = \theta_0$), esta equação reduz-se a:

$$\sqrt{v^2 - \alpha l^2} = \sqrt{v^2 - \alpha_0 l^2} \mp \frac{l^2}{2} t.$$

Usando a notação $\beta_0 = \dot{\alpha}(0) = \pm \sqrt{v^2 - \alpha_0 l^2}$, a solução escreve-se

$$v^2 - \alpha l^2 = \left(\beta_0 - \frac{l^2}{2} t \right)^2,$$

ou seja,

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \beta_0 t - \frac{l^2}{4} t^2. \quad (6)$$

Usando este resultado na equação (5), determina-se θ :

$$\theta(t) = \theta_0 + \alpha_0 l t + \frac{\beta_0 l}{2} t^2 - \frac{l^3}{12} t^3. \quad (7)$$

Em resumo, com as condições iniciais $\alpha(0) = \alpha_0$, $\theta(0) = \theta_0$, $\beta_0 = \dot{\alpha}(0)$ e $\omega_0 = \dot{\theta}(0) = \alpha_0 l$, as soluções de (2) e (3) são

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \beta_0 t - \frac{\omega_0^2}{4\alpha_0^2} t^2$$

e

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{\beta_0 \omega_0}{2\alpha_0} t^2 - \frac{\omega_0^3}{12\alpha_0^3} t^3,$$

sempre que $\alpha_0 + \beta_0 t - \frac{\omega_0^2}{4\alpha_0^2} t^2 \geq \frac{1}{\alpha_0^3}$.

Por exemplo, no caso $\alpha_0 = 1$, $\theta_0 = -2$, $\beta_0 = 4.25$ e $\omega_0 = 1.3$, a geodésica está representada na figura seguinte.

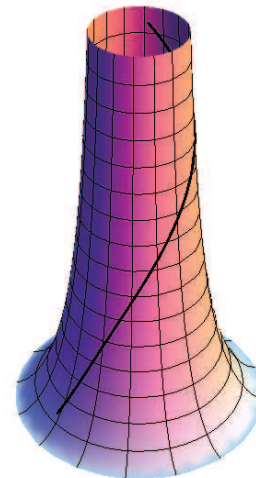


Fig. 3: Caminho geodésico 1.

Segue outro exemplo com $\alpha_0 = 2$, $\theta_0 = -1.8$, $\beta_0 = 4.5$ e $\omega_0 = 4$.

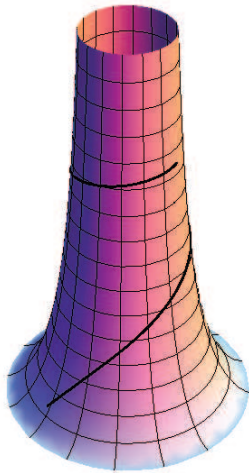


Fig. 4: Caminho geodésico 2.

Neste segundo exemplo, a curva geodésica não corresponde ao caminho mais curto entre as extremidades representadas. Mas isso não é uma contradição, conforme vamos esclarecer na próxima seção. Devido às condições iniciais, a curva não podia seguir diretamente para o ponto final, ou dito de outra forma, nas condições deste exemplo as extremidades da curva representadas estão em *camadas* diferentes da superfície o que obriga a curva a enrolar uma vez.

4 Geodésicas entre dois pontos

As soluções obtidas na seção anterior permitem obter os caminhos geodésicos a partir de um ponto inicial caracterizado pelos valores α_0 e θ_0 e conhecidos os dois parâmetros β_0 e l ou, de forma equivalente, β_0 e $\omega_0 = \alpha_0 l$. Na prática, um problema que surge com alguma frequência consiste na determinação de um caminho geodésico entre dois pontos dados. Para isso, é necessário conseguir escrever os dois parâmetros β_0 e l em função dos pontos extremos do caminho em causa. A Fig. 5 mostra um exemplo de dois pontos sobre um "paralelo" (conjunto de pontos da superfície com o mesmo valor de z) bem como o caminho geodésico que os liga.

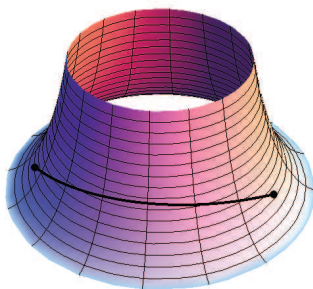


Fig. 5: Caminho geodésico entre dois pontos de um mesmo paralelo.

Os próprios paralelos não são curvas geodésicas uma vez que girar sobre paralelos de menor raio equivale a uma menor distância percorrida.

Supõe-se então que os valores de α e θ são conhecidos para dois valores de t . Sem perda de generalidade, a escolha destes valores pode ser $t = 0$ e $t = 1$:

$$\alpha(0) = \alpha_0 \quad ; \quad \theta(0) = \theta_0 \quad ; \quad \alpha(1) = \alpha_1 \quad ; \quad \theta(1) = \theta_1.$$

Uma escolha diferente de $t = 1$, correspondente ao segundo ponto dado, apenas altera a velocidade com que o caminho geodésico é percorrido mas não o *trilho* na superfície. A partir de (6) e (7), obtêm-se as relações

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha_0 + \beta_0 - \frac{l^2}{4} \\ \theta_1 &= \theta_0 + \left(\alpha_0 + \frac{\beta_0}{2} \right) l - \frac{l^3}{12}, \end{aligned}$$

donde se conclui que:

$$\beta_0 = \alpha_1 - \alpha_0 + \frac{l^2}{4} \quad (8)$$

$$l^3 + 12(\alpha_0 + \alpha_1)l + 24(\theta_0 - \theta_1) = 0. \quad (9)$$

Esta equação de terceiro grau é incompleta e pode resolver-se através da mudança de variável

$$l = x - 4 \frac{\alpha_0 + \alpha_1}{x},$$

que produz uma equação quadrática em x^3 . A solução é:

$$\begin{aligned} l &= \sqrt[3]{12(\theta_1 - \theta_0) + 4\sqrt{9(\theta_1 - \theta_0)^2 + 4(\alpha_0 + \alpha_1)^3}} \\ &+ \sqrt[3]{12(\theta_1 - \theta_0) - 4\sqrt{9(\theta_1 - \theta_0)^2 + 4(\alpha_0 + \alpha_1)^3}}. \quad (10) \end{aligned}$$

Usando (8) e (9), as equações (6) e (7) podem agora ser escritas em termos de α_0 , α_1 , θ_0 e θ_1 . Mantendo a notação (10) por conveniência, o resultado é:

$$\alpha(t) = \alpha_0(1-t) + \alpha_1 t + \frac{l^2}{4} t(1-t) \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \theta(t) &= \theta_0(1-t) + \theta_1 t + \frac{l}{2}(\alpha_0 - \alpha_1)t(1-t) \\ &+ \frac{l^3}{24} t(1-t)(2t-1). \quad (12) \end{aligned}$$

Estão reunidas as condições para voltar ao aparente paradoxo da Fig. 4 onde a curva representada, apesar de ser parte de uma geodésica, não é o caminho mais curto entre as suas extremidades. Para exemplificar a análise, considere os pontos $A = \vec{\sigma}(2, -1.8)$ e $B = \vec{\sigma}(5.5, 6)$. Usando as equações (11) e (12) com $\alpha_0 = 2$, $\theta_0 = -1.8$, $\alpha_1 = 5.5$ e $\theta_1 = 6$, obtêm-se a curva geodésica entre A e B representada na Fig. 6.

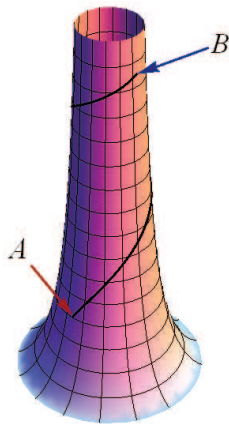
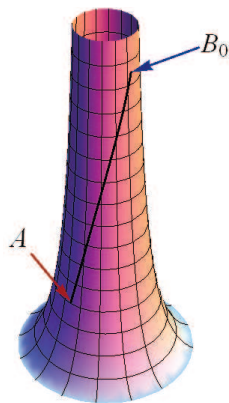
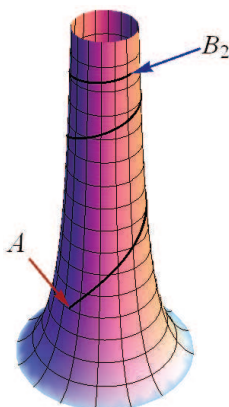


Fig. 6: Caminho geodésico entre A e B.

Fig. 7: Caminho geodésico entre A e B_0 .Fig. 8: Caminho geodésico entre A e B_2 .

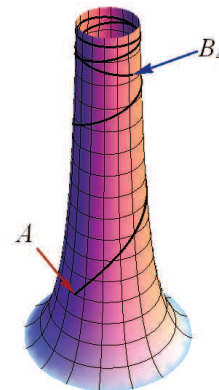
Observa-se que $\theta_1 - \theta_0 = 7.8$, ou seja, superior a 2π . O que significa que A e B não estão situados na mesma camada da superfície. O ponto $B_0 = \vec{\sigma}(5.5, 6 - 2\pi)$ está situado na mesma posição da superfície de B e na mesma camada de A. Usando as equações (11) e (12) com $\alpha_0 = 2$, $\theta_0 = -1.8$, $\alpha_1 = 5.5$ e $\theta_1 = 6 - 2\pi$, obtém-se a curva geodésica entre A e B_0 representada na Fig. 7.

Agora sim, foi encontrado o caminho mais curto entre as duas posições na superfície.

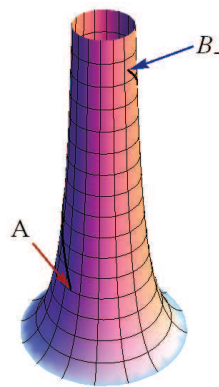
Podemos também procurar caminhos geodésicos entre A e outros pontos na mesma posição de B mas

em camadas diferentes. A curva geodésica entre A e $B_2 = \vec{\sigma}(5.5, 6 + 2\pi)$ está representada na Fig. 8.

A Fig. 9 representa a curva geodésica entre A e $B_4 = \vec{\sigma}(5.5, 6 + 6\pi)$

Fig. 9: Caminho geodésico entre A e B_4 .

enquanto a Fig. 10 representa a curva geodésica entre A e $B_{-1} = \vec{\sigma}(5.5, 6 - 4\pi)$.

Fig. 10: Caminho geodésico entre A e B_{-1} .

5 Conclusão

Este estudo resulta de um trabalho ainda em curso sobre a possibilidade de axiomatizar a noção de caminho geodésico através de uma operação binária que a cada dois pontos associa o ponto médio do percurso geodésico que os une. Neste caso a operação binária seria dada pelas equações (11) e (12) com $t = \frac{1}{2}$. O exemplo aqui ilustrado serviu o propósito de testar os axiomas de uma tal estrutura algébrica.

Bibliografia

- [1] J. P. Fatelo, Nelson Martins-Ferreira, *Curvas Geodésicas em superfícies*, Scripta-Ingenia, June 2014, No. 2, 22-25.
- [2] Wolfram Research, Inc., *Mathematica*, Version 9.0, Champaign, IL (2012).