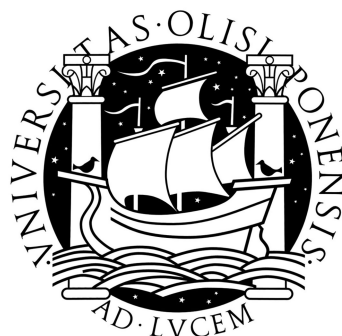


UNIVERSIDADE DE LISBOA  
FACULDADE DE CIÊNCIAS  
DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA



**INFLUÊNCIA DA DINÂMICA DE ACTUALIZAÇÃO  
NA EVOLUÇÃO DA COOPERAÇÃO**

**Carlos Fernando Almeida Grilo**

DOUTORAMENTO EM INFORMÁTICA  
Especialidade em Engenharia Informática

**2011**



UNIVERSIDADE DE LISBOA  
FACULDADE DE CIÊNCIAS  
DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA



**INFLUÊNCIA DA DINÂMICA DE ACTUALIZAÇÃO  
NA EVOLUÇÃO DA COOPERAÇÃO**

**Carlos Fernando Almeida Grilo**

DOUTORAMENTO EM INFORMÁTICA  
Especialidade em Engenharia Informática

**Orientador**  
Luís Miguel Parreira e Correia

**2011**



# Resumo

A identificação dos mecanismos que permitem promover a emergência e a manutenção de comportamentos de cooperação é um problema com relevância em diversas disciplinas científicas tais como a Biologia, a Sociologia, a Economia e a Informática. Numa população de indivíduos que interagem entre si, estes decidem, de vez em quando, alterar a forma como agem nas interações em que participam. Potencialmente, a relação temporal entre os processos de actualização que ocorrem na população pode influenciar a proliferação de comportamentos cooperativos uma vez que condiciona a informação disponível da qual estes processos dependem. Esta relação estabelece uma dinâmica que denominamos por *dinâmica de actualização*. A actualização diz-se síncrona se os agentes actualizam a sua estratégia em simultâneo e assíncrona em caso contrário.

Neste trabalho investigamos a influência da dinâmica de actualização na evolução da cooperação utilizando como plataforma de trabalho a Teoria dos Jogos Evolucionária. Os resultados mostram que, em geral, quando a dinâmica de actualização tem alguma influência, o assincronismo é benéfico à evolução da cooperação, ou seja, que é um mecanismo de promoção de comportamentos de cooperação numa população de indivíduos. O resultados são suportados pela utilização de uma grande variedade de condições, a qual permite proceder a uma caracterização da forma como a influência da dinâmica de actualização varia com as condições do sistema e a uma identificação dos aspectos que desempenham um papel relevante nessa influência.

**Palavras chave:** Evolução da Cooperação, Dinâmica de Actualização, Teoria dos Jogos Evolucionária, Jogos Evolucionários, Assincronismo.



# Abstract

The identification of the mechanisms that promote the emergence and maintenance of cooperative behaviors is of major relevance in a variety of scientific disciplines such as Biology, Sociology, Economics and Computer Science. Once in a while, the interacting agents belonging to a population decide to modify how they behave in the interactions in which they participate. Potentially, the temporal relation between the updating processes occurring in a population may influence the proliferation of cooperative behaviors, since it conditions the information from which these processes depend on. This relation establishes a dynamics which we call *update dynamics*. The update dynamics is called synchronous if the agents update their behavior simultaneously and asynchronous, otherwise.

In this work we investigate the influence of the update dynamics on the evolution of cooperation using Evolutionary Game Theory as a framework. The results show that, in general, when the update dynamics has some influence, asynchronism is beneficial to the evolution of cooperation. This means that asynchronism is a mechanism for the promotion of cooperative behaviors. The results are supported on a large number of tested conditions, which allowed us to characterize the way how the influence of the update dynamics changes with the system conditions and to identify the aspects that play a relevant role on that influence.

**Key words:** Evolution of Cooperation, Update Dynamics, Evolutionary Game Theory, Evolutionary Games, Asynchronism.



# Agradecimentos

São várias as pessoas e entidades que permitiram que este trabalho fosse, não apenas possível, mas também mais compensador e a quem quero agradecer:

- Ao meu orientador, o Professor Luís Correia, pela total disponibilidade que sempre teve, pelo incentivo, espírito crítico e sugestões dadas ao longo do tempo, essenciais para que este trabalho se realizasse.
- À Escola Superior de Tecnologia e Gestão do Instituto Politécnico de Leiria pelas facilidades concedidas para a realização deste trabalho, nomeadamente a concessão de dispensa de serviço docente. O meu agradecimento também aos meus colegas do Departamento de Engenharia Informática pelo companheirismo e apoio dado.
- À Fundação para a Ciência e Tecnologia pela bolsa de doutoramento concedida.
- Ao Professor Jorge Pacheco pela disponibilidade para discutir alguns aspectos relacionados com este trabalho.
- Ao grupo *Navigators* e em particular ao Professor António Casimiro por me terem permitido utilizar o seu cluster para a realização de experiências.
- Aos meus colegas do GruVA e em especial ao Pedro Santana e ao Pedro Mariano pelo companheirismo e pelas discussões sempre interessantes sobre os nossos trabalhos e não só.
- Ao Francisco, à Ana, à Filomena, ao Pedro, à Maria João, ao Veiga e ao Filipe por me terem permitido usar os seus computadores para a realização de experiências mas, sobretudo, pela amizade.
- Aos meus pais e irmãos, à Sandra e à Maria João.



# Acrónimos

**TJE** - Teoria dos Jogos Evolucionária.

**EEE** - Estratégia evolucionariamente estável.

**PG** - Regra proporcional generalizada.

**Tudo-C** - Estado da população em que todos os agentes são cooperantes.

**Tudo-D** - Estado da população em que todos os agentes são não-cooperantes.



# Nomenclatura

$\alpha$  - Taxa de sincronismo.

$\rho$  - Média da proporção de agentes cooperantes que sobrevivem na fase de equilíbrio.

$n$  - Tamanho de uma população de agentes ou número de vértices de um grafo.

$\Delta\rho$  - Diferença entre o valor de  $\rho$  obtido com  $\alpha = \frac{1}{n}$  e  $\alpha = 1$ .  $\Delta\rho > 0$  significa que o assincronismo é benéfico à evolução da cooperação e  $\Delta\rho < 0$  significa o contrário.

R - Ganho de um agente cooperante quando joga com outro agente cooperante.

S - Ganho de um agente cooperante quando joga com um agente não-cooperante.

T - Ganho de um agente não-cooperante quando joga com um agente cooperante.

P - Ganho de um agente não-cooperante quando joga com outro agente não-cooperante.

$b$  - Ganho de um agente não-cooperante quando joga com um agente cooperante na versão de um parâmetro do jogo Dilema do Prisioneiro. Quanto maior o valor de  $b$  maior a dificuldade do jogo para os agentes cooperantes.

$r$  - Rácio custo-benefício de cooperação mútua no jogo Snowdrift de um parâmetro. Quanto maior o valor de  $r$ , maior a dificuldade do jogo para os agentes cooperantes.

$G_i$  - Ganho agregado de um agente depois de jogar o jogo com cada um dos seus vizinhos.

$N_i$  - Vizinhança do agente/vértice  $i$ .

$L$  - Distância média entre os vértices de um grafo.

$C$  - Coeficiente de agregação médio de um grafo.

$k$  - Grau de um vértice ou número de vizinhos de um agente.

$\bar{k}$  - Grau médio de um grafo.

$K$  - Nível de ruído na regra Proporcional Generalizada e na regra de Fermi.

$\phi$  - Parâmetro do algoritmo de construção de redes de mundo-pequeno de Watts-Strogatz. Representa a probabilidade de se eliminar uma ligação pertencente à rede regular inicial e de se criar uma nova ligação que liga dois agentes escolhidos aleatoriamente.

$m$  - Parâmetro do algoritmo de construção de redes de escala-livre segundo o modelo de Barabási-Albert. Representa o número de agentes do grupo inicial e o número de ligações criado para cada agente adicionado à rede.

$nM$  - Grau de não-monotonia de  $\rho$  em relação a  $\alpha$  de uma combinação ⟨jogo, regra de transição, rede de contactos⟩.

$\overline{nM}$  - Média de  $nM$  para uma combinação ⟨regra de transição, rede de contactos⟩.

$sl_{max}$  - Valor absoluto do maior salto no valor de  $\rho$  entre dois valores consecutivos de  $\alpha$ .

$sl_{sinc}$  - Módulo da diferença entre o valor de  $\rho$  obtido com  $\alpha = 1$  e  $\alpha = 0.9$ .

$\mu$  - Frequência de mudanças de estratégia na fase de equilíbrio.

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Assincronismo e Sistemas Auto-Organizados . . . . .	2
1.2	Sistemas Dinâmicos Discretos e a Dinâmica de Actualização . . .	4
1.3	Objectivos e Contribuições . . . . .	7
1.4	Metodologia . . . . .	10
1.5	Estrutura da Tese . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Matéria Relacionada</b>	<b>13</b>
2.1	Métodos de Actualização . . . . .	13
2.1.1	Tempo Discreto . . . . .	14
2.1.1.1	Actualização Sequencial . . . . .	14
2.1.1.2	Assincronismo Intermédio . . . . .	15
2.2	Tempo Contínuo . . . . .	16
2.3	A Influência da Dinâmica de Actualização . . . . .	17
2.3.1	Autómatos Celulares . . . . .	18
2.3.2	Redes Booleanas Aleatórias . . . . .	20
2.3.3	Sistemas Multi-Agente . . . . .	21
2.4	Teoria dos Jogos . . . . .	22
2.4.1	Jogos e Equilíbrio de Nash . . . . .	23
2.4.2	Jogos Simétricos de 2 Jogadores e 2 Estratégias . . . . .	24
2.5	Teoria dos Jogos Evolucionária . . . . .	28
2.6	A Equação de Replicação . . . . .	29
2.7	Jogos Evolucionários Discretos . . . . .	29
2.8	Espaço . . . . .	30
2.9	Redes Complexas . . . . .	32
2.10	A Dinâmica de Actualização e a Evolução da Cooperação . . . . .	35

<b>3</b>	<b>Plano ST</b>	<b>39</b>
3.1	O Modelo . . . . .	39
3.1.1	População e Rede de Contactos . . . . .	39
3.1.1.1	Redes de Mundo-Pequeno . . . . .	40
3.1.1.2	Redes de Escala-Livre de Barabási-Albert . . . . .	41
3.1.2	Interacção, Desempenho e Dinâmica . . . . .	42
3.2	Configuração Geral das Simulações . . . . .	44
3.3	Redes de Watts-Strogatz . . . . .	44
3.4	Redes de Escala-Livre . . . . .	46
3.5	O Papel da Rede de Contactos . . . . .	48
3.6	Resumo . . . . .	54
<b>4</b>	<b>O Papel do Ruído</b>	<b>57</b>
4.1	Regras de Transição e Jogos Utilizados . . . . .	57
4.2	Influência da Dinâmica de Actualização em Função do Ruído . . . . .	60
4.3	Influência do Ruído Sobre a Proporção de Agentes Cooperantes . . . . .	63
4.4	Resumo e Comentários Finais . . . . .	65
<b>5</b>	<b>Assincronismo Intermédio</b>	<b>69</b>
5.1	Dinâmica Assíncrona Estocástica . . . . .	70
5.2	Monotonia de $\rho$ em Relação a $\alpha$ . . . . .	71
5.3	Sensibilidade Local à Taxa de Sincronismo . . . . .	74
5.3.1	Redes de Escala-Livre e Ganhos Acumulados . . . . .	76
5.4	Monotonia da Regra de Transição . . . . .	80
5.5	Resumo e Comentários Finais . . . . .	82
<b>6</b>	<b>Trocas de Estratégia</b>	<b>85</b>
6.1	Trocas de Estratégia, Assincronismo e Ruído . . . . .	87
6.2	Trocas de Estratégia e Cooperação . . . . .	89
6.3	Resumo e Comentários Finais . . . . .	94

<i>CONTEÚDO</i>	xiii
<b>7 Mudanças de Estratégia</b>	<b>95</b>
7.1 Regra Proporcional Generalizada . . . . .	96
7.2 Regra de Fermi e Regra de Replicação . . . . .	102
7.3 Resumo e Comentários Finais . . . . .	105
<b>8 Conclusão e Trabalho Futuro</b>	<b>107</b>
8.1 Principais Conclusões e Contribuições . . . . .	107
8.1.1 Jogos . . . . .	108
8.1.2 Redes de Contactos . . . . .	108
8.1.3 Regras de Transição . . . . .	109
8.1.4 Assincronismo Intermédio . . . . .	110
8.2 Trabalho Futuro . . . . .	112
8.2.1 Métodos de actualização . . . . .	113
8.2.2 Jogos Evolucionários . . . . .	114
8.2.3 Autómatos Celulares . . . . .	115
8.2.4 Algoritmos Evolucionários . . . . .	115
<b>A Artigos Publicados</b>	<b>117</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>119</b>



# Lista de Figuras

- 2.1 Representação do plano  $ST$ , correspondente aos jogos simétricos de dois jogadores e duas estratégias onde  $R = 1$ ,  $P = 0$ ,  $-1 < S < 1$ ,  $0 < T < 2$ . Cada quadrante deste plano corresponde a um jogo, sendo o Dilema do Prisioneiro, o Snowdrift e o Caça ao Veado os jogos mais utilizados no estudo da evolução da cooperação. . . . . 27
- 3.1 Proporção de agentes cooperantes,  $\rho$ , em grelhas regulares ( $\phi = 0$ ), com actualização síncrona (em cima) e actualização sequencial (em baixo). Regras de transição: regra de replicação (à esquerda), regra o-melhor-vence (ao centro) e a regra de Moran (à direita). Os valores nos eixos acima do jogo da Harmonia e do Snowdrift e abaixo do Caça ao Veado e do Dilema do Prisioneiro, são a média dos valores de  $\rho$  para o respectivo quadrante. Os parâmetros  $S$  e  $T$  variam em intervalos de 0.05. Não existem diferenças relevantes entre a actualização síncrona e sequencial para a regra de replicação. As principais diferenças ocorrem para a regra o-melhor-vence e, sobretudo, para a regra de Moran (ver detalhes no texto principal). 46
- 3.2 Proporção de agentes cooperantes,  $\rho$ , em redes de mundo-pequeno ( $\phi = 0.05$ ) com a regra o-melhor-vence (à esquerda) e com a regra de Moran (à direita). Em cima: actualização síncrona; Em baixo: actualização sequencial. No Snowdrift e no Dilema do Prisioneiro a actualização sequencial torna-se progressivamente benéfica para a cooperação à medida que  $\phi$  aumenta. Para  $\phi = 0.05$  a actualização sequencial suporta já mais cooperação do que a actualização síncrona quando a regra o-melhor-vence é utilizada. Não existem diferenças relevantes entre os resultados obtidos com grelhas regulares e redes de mundo-pequeno para a regra de Moran. Os gráficos para os restantes valores de  $\phi$  podem ser consultados no Anexo A. 47

- 3.3 Proporção de agentes cooperantes,  $\rho$ , em redes de escala-livre ( $m = 4$ ), com actualização síncrona (em cima) e actualização sequencial (em baixo) utilizando ganhos acumulados. À esquerda: regra o-melhor-vence; À direita: regra de Moran. Existem diferenças significativas entre as actualizações síncrona e sequencial para ambas as regras. A actualização sequencial nunca suporta menos cooperação do que a actualização síncrona. . . . . 48
- 3.4 Como na Figura 3.3 mas com ganhos normalizados. As diferenças não são tão significativas como quando se utilizam ganhos acumulados. No entanto, em muitas situações a mudança de uma actualização síncrona para uma actualização sequencial faz a diferença entre, respectivamente, a convergência para um equilíbrio onde coexistem os dois tipos de agentes e estados Tudo-C. É de salientar também que, à excepção de alguns casos, a actualização sequencial não é prejudicial à cooperação. . . . . 49
- 3.5 Proporção de agentes cooperantes,  $\rho$ , em grelhas regulares com vizinhança de von Neumann (à esquerda) e redes de escala-livre de Holme-Kim com ganhos acumulados (ao centro) e ganhos normalizados (à direita). Em cima: actualização síncrona; Em baixo: actualização sequencial. Os resultados obtidos com redes de Holme-Kim são qualitativamente semelhantes aos que são obtidos com redes de Barabási-Albert. No caso das grelhas regulares, os resultados obtidos com as vizinhanças de von Neumann e de More diferem apenas para o Snowdrift. . . . . 52

- 3.6 Configurações da população em grelhas regulares com vizinhança de More para o Dilema do Prisioneiro com  $S = -0.05$  e  $T = 1.35$  durante a fase transiente (à esquerda) e em equilíbrio (à direita). Em cima: actualização síncrona; Em baixo: actualização sequencial. Com actualização síncrona, durante a fase transiente formam-se grupos de agentes cooperantes (a vermelho) com fronteiras planas. Estes grupos crescem rapidamente até se juntarem num único grupo no meio do qual existem grupos em forma de filamento de agentes não-cooperantes. Com actualização sequencial, durante a fase transiente os grupos têm fronteiras irregulares e crescem lentamente. A população converge depois para um equilíbrio onde existem muitos grupos de agentes cooperantes que não conseguem juntar-se devido à presença de agentes não-cooperantes entre eles. 53
- 3.7 Configurações da população em grelhas regulares com vizinhança de More para o Snowdrift com  $S = 0.6$  e  $T = 1.6$  durante a fase de equilíbrio. À esquerda: actualização síncrona; À direita: actualização sequencial. Com actualização síncrona os agentes cooperantes formam grupos com fronteiras planas. Com actualização sequencial, os agentes cooperantes não conseguem formar grupos compactos. . . . . 54
- 3.8 Configurações da população em grelhas regulares com vizinhança de von Neumann para o Dilema do Prisioneiro com  $S = -0.05$  e  $T = 1.4$  (à esquerda) e com  $S = -0.4$  e  $T = 1.15$  (à direita) durante a fase de equilíbrio. Em cima: actualização síncrona; Em baixo: actualização sequencial. As configurações da esquerda ilustram uma situação em que o assincronismo suporta mais cooperação e as da direita ilustram a situação contrária. . . . . 55
- 3.9 Configurações da população em grelhas regulares com vizinhança de von Neumann para o Snowdrift com  $S = 0.6$  e  $T = 1.7$  (à esquerda) e com  $S = 0.2$  e  $T = 1.2$  (à direita) durante a fase de equilíbrio. Em cima: actualização síncrona; Em baixo: actualização sequencial. As configurações da esquerda ilustram uma situação em que o assincronismo suporta mais cooperação e as da direita ilustram a situação contrária. . . . . 56

- 4.1 Valores de  $\Delta\rho$  obtidos com a regra PG quando o Dilema do Prisioneiro (à esquerda) e o Snowdrift (à direita) são jogados em grelhas regulares (em cima), em redes de mundo-pequeno com  $\phi = 0.05$  (a meio) e em redes de escala-livre de Barabási-Albert com ganhos normalizados (em baixo). Notem-se as escalas diferentes. Para o Snowdrift mostramos resultados apenas para valores pares de  $r$  de modo a facilitar a leitura dos gráficos. A actualização sequencial é prejudicial à cooperação sobretudo para redes regulares e apenas para valores baixos de ruído. Em redes de escala-livre com ganhos normalizados  $\Delta\rho < 0$  apenas para os casos extremos  $b = 1$  (Dilema do Prisioneiro) e  $r = 0$  (Snowdrift) e apenas para  $K \rightarrow 0$ . . . . . 61
- 4.2 Como na Figura 4.1 mas para a regra de Fermi. A actualização sequencial é prejudicial apenas para valores baixos de ruído. Notem-se as escalas diferentes. Com o Dilema do Prisioneiro  $\Delta\rho < 0$  ocorre apenas para o caso extremo  $b = 1$ . A regra de Fermi é menos sensível à dinâmica de actualização do que a regra PG e, além disso, também suporta menos cooperação no caso do Dilema do Prisioneiro: a maior parte dos valores de  $\Delta\rho$  é igual a 0 porque  $\rho = 0$  tanto para a actualização síncrona como para a actualização sequencial. . . . . 62
- 4.3 Valores de  $\rho$  para o Dilema do Prisioneiro, com  $b = 1.1$ , jogado em grelhas regulares com a regra de Fermi. O facto de a população convergir para Tudo-D para  $K \geq 0.06$  quando a actualização é síncrona, faz com que o valor de  $\Delta\rho$  diminua para  $K \geq 0.06$ . Para  $K \gtrsim 0.08$  a população converge para Tudo-D também para a actualização sequencial, resultando em  $\Delta\rho = 0$ . . . . . 64
- 4.4 Valores de  $\rho$  em função de  $K$  para o Dilema do Prisioneiro jogado com a regra de Fermi (em cima) e a regra PG (em baixo) em grelhas regulares. À esquerda: actualização síncrona; À direita: actualização sequencial. Ver pormenores no texto principal. . . . . 65
- 4.5 Valores de  $\rho$  em função de  $K$  para o Snowdrift jogado com a regra de Fermi (em cima) e a regra PG (em baixo) em grelhas regulares. À esquerda: actualização síncrona; À direita: actualização sequencial. Ver pormenores no texto principal. . . . . 66
- 5.1 Gráfico de  $\rho$  em função de  $\alpha$ . Condições: Dilema do Prisioneiro, grelhas regulares e regra PG com  $K = 1/10$ . . . . . 71

- 5.2 Duas situações hipotéticas de não-monotonia:  $nM = 10$  para a linha azul e  $nM = 1$  para a linha vermelha. . . . . 72
- 5.3 Gráficos de  $\rho$  correspondentes aos valores máximos de  $\overline{nM}$ . À esquerda: Dilema do Prisioneiro, redes de mundo-pequeno com  $\phi = 0.01$  e regra PG com  $K \rightarrow 0$  (regra o-melhor-vence); À direita: Snowdrift, redes regulares e regra PG com  $K \rightarrow 0$ . . . . . 75
- 5.4 Valores de  $sl_{max}$  e  $sl_{sinc}$  para o Dilema do Prisioneiro (à esquerda) e para o Snowdrift (à direita), obtidos, tanto para redes de Watts-Strogatz, como para redes de escala-livre com ganhos normalizados e ganhos acumulados. . . . . 76
- 5.5 Valores de  $\rho$  para o Dilema do Prisioneiro (à esquerda) e para o Snowdrift (à direita) jogados em redes de escala-livre com a regra PG e ganhos acumulados. Em cima: regra o-melhor-vence (regra PG com  $K \rightarrow 0$ ); Em baixo: regra PG com  $K = 1/2$ . Nos gráficos correspondentes à regra o-melhor-vence apenas mostramos algumas linhas de modo a facilitar a leitura dos gráficos. Ambos os jogos são fortemente sensíveis a pequenas variações de  $\alpha$ , sobretudo para valores mais elevados de  $b$  (Dilema do Prisioneiro) e  $r$  (Snowdrift) e especialmente na transição de  $\alpha = 1$  para  $\alpha = 0.9$ . . . . . 77
- 5.6 Dois exemplos da evolução temporal do valor de  $\rho$  para o Dilema do Prisioneiro ( $b = 1.8$ ) jogado em redes de escala-livre com a regra PG ( $K = 1/2$ ) e ganhos acumulados para  $\alpha = 0.8$ . Para  $K \geq 1/100$  o valor de  $\rho$  varia consideravelmente durante o processo evolutivo podendo convergir para Tudo-C (à esquerda) ou Tudo-D (à direita). . . . . 79
- 5.7 Valores de  $\rho$  para o Dilema do Prisioneiro (à esquerda) e para o Snowdrift (à direita) jogados em redes de escala-livre com a regra de Fermi e ganhos acumulados. Em cima:  $K \rightarrow 0$ ; Em baixo:  $K = 0.1$  para o Dilema do Prisioneiro e  $K = 1$  para o Snowdrift. A regra de Fermi é pouco sensível a  $\alpha$  quando os jogos são jogados em redes de escala-livre com ganhos acumulados, embora se verifique um ligeiro aumento de  $\rho$  quando se diminui o valor de  $\alpha$ . Nestas condições esta regra é também pouco sensível ao valor do ruído,  $K$ . Os desvios-padrão são elevados. De modo a facilitar a leitura dos gráficos apresentamos os desvios-padrão apenas para um linha. . . . . 81

- 5.8 Valores de  $\rho$  obtidos com a regra PG, original (em cima) e monótona (em baixo), com  $K = 1$  quando o Dilema do Prisioneiro (à esquerda) e o Snowdrift (à direita) são jogados em redes de mundo-pequeno com  $\phi = 0.1$ . Ambos os jogos são menos sensíveis à taxa de sincronismo quando se utiliza a versão monótona da regra de transição. . . . . 83
- 5.9 Como na Figura 5.8 mas para a regra de Fermi. Tal como no caso da regra PG, ambos os jogos são menos sensíveis à taxa de sincronismo quando se utiliza a versão monótona da regra de transição. 84
- 6.1 Número de trocas de estratégia em função do valor de  $\alpha$ , quando o Dilema do Prisioneiro (à esquerda) e o Snowdrift (à direita) são jogados em redes de mundo-pequeno ( $\phi = 0.1$ ) com a regra PG. Em cima:  $K \rightarrow 0$ ; Em baixo:  $K = 1$ . O número de estratégias diminui quando  $\alpha$  diminui e é menor para  $K \rightarrow 0$  do que para  $K = 1$ . 88
- 6.2 Valor de  $\rho$  em função de  $p$  quando o Dilema do Prisioneiro (à esquerda) e o Snowdrift (à direita) são jogados em redes regulares. Em cima: regra PG com  $K = 1$ ; Em baixo: regra de replicação. Nos gráficos, os valores de  $p$  são diferentes no Snowdrift e no Dilema do Prisioneiro porque este é muito mais sensível ao valor de  $p$ . No caso do Dilema do Prisioneiro, os valores de  $p$  são também diferentes para as duas regras de transição pela mesma razão. . . 91
- 6.3 Padrões espaciais típicos formados quando o Dilema do Prisioneiro é jogado em redes regulares. Em cima: regra PG com  $K = 1$  e  $b = 1.2$ , (a)  $p = 0$ , (b)  $p = 0.05$ ; Em baixo: regra de replicação e  $b = 1.1$ , (c)  $p = 0$ , (d)  $p = 0.005$ . Cores: preto para agentes cooperantes e branco para agentes não-cooperantes. . . . . 92
- 6.4 Padrões espaciais típicos formados quando o Snowdrift é jogado em redes regulares. Em cima: regra PG com  $K = 1$  e  $r = 0.6$ ; Em baixo: regra de replicação e  $r = 0.4$ . As imagens à esquerda correspondem a  $p = 0$  e as da direita a  $p = 0.9$ . Cores: preto para agentes cooperantes e branco para agentes não-cooperantes. . . . 93
- 7.1 Frequência de mudanças de estratégia,  $\mu$ , em função de  $\alpha$  para o Dilema do Prisioneiro (a) e para o Snowdrift (b) jogados em redes de mundo-pequeno com  $\phi = 0.1$  e com a regra PG com  $K \rightarrow 0$  (regra o-melhor-vence). . . . . 97

- 7.2 Frequência de mudanças de estratégia,  $\mu$ , em função de  $\rho$  para diferentes valores de  $K$  quando o Dilema do Prisioneiro é jogado em redes de mundo-pequeno com  $\phi = 0.1$  com a regra PG. Nos gráficos correspondentes a  $K \leq 1/10$  podemos observar que alguns pontos se organizam em formas lineares. Cada “linha” corresponde ao valor de  $\mu$  obtido para um determinado valor de  $b$ . As setas apontam no sentido de valores decrescentes de  $\alpha$ . Note-se que o gráfico para  $K \rightarrow 0$  (regra o-melhor-vence), corresponde à situação da Figura 7.1(a). . . . . 98
- 7.3 Como na Figura 7.2 mas para o Snowdrift. O gráfico para  $K \rightarrow 0$  (regra o-melhor-vence), corresponde à situação da Figura 7.1(b). . . . . 99
- 7.4 Média da proporção de ligações C-D por agente em função da proporção de agentes cooperantes na população. A forma da curva é exactamente a mesma para todas as redes. . . . . 100
- 7.5 Valor de  $\mu$  em função de  $\rho$  para o Dilema do Prisioneiro jogado em redes de escala-livre com  $m = 2$  (a) e  $m = 4$  (b) com a regra PG com  $K = 1$ . Lembramos que, quanto maior o valor de  $m$ , maior o número de ligações entre os agentes. Mais especificamente,  $\bar{k} = 2m$ . 102
- 7.6 Valor de  $\mu$  em função de  $\rho$  quando o Dilema do Prisioneiro (esquerda) e o Snowdrift (direita) são jogados em redes de mundo-pequeno ( $\phi = 0.1$ ) com a regra de Fermi. Em cima:  $K \rightarrow 0$ ; Em baixo:  $K = 0.1$  para o Dilema do Prisioneiro e  $K = 1$  para o Snowdrift. . . . . 103
- 7.7 Valor de  $\mu$  em função de  $\rho$  quando o Dilema do Prisioneiro (a) e o Snowdrift (b) são jogados em redes de mundo-pequeno ( $\phi = 0.1$ ) com a regra de replicação. . . . . 104
- 7.8 Estado em equilíbrio quando o Snowdrift, com  $r = 0$ , é jogado em grelhas regulares com a regra de replicação. . . . . 105



# Lista de Tabelas

2.1	Bi-matriz de ganhos de um jogo de dois jogadores. . . . .	24
5.1	Valores de $\overline{nM}$ para o Dilema do Prisioneiro jogado em redes de Watts-Strogatz com a regra PG (desvio padrão a cinzento). $\overline{nM} = 0$ para a maioria dos casos e, em geral, o valor de $\overline{nM}$ desce à medida que $K$ aumenta. . . . .	73
5.2	Valores de $\overline{nM}$ para o Snowdrift jogado em redes de Watts-Strogatz com a regra PG (desvio padrão a cinzento). $\overline{nM} = 0$ para a maioria dos casos e o valor de $\overline{nM}$ desce à medida que tanto $\phi$ como $K$ aumentam. . . . .	74



# Capítulo 1

## Introdução

Porque existem comportamentos de cooperação na natureza? Como podemos promover este tipo de comportamentos na sociedade humana ou em sociedades de agentes artificiais? Estas são, porventura, as perguntas mais relevantes que podem ser colocadas no âmbito da área de investigação que é comum designar por *evolução da cooperação*. À luz da teoria da evolução, parece haver uma contradição entre a existência de comportamentos altruístas na natureza e o facto de estes serem aparentemente menos vantajosos do ponto de vista evolutivo (Nowak, 2006), daí a primeira questão. Já a segunda questão coloca-se mais nas ciências sociais ou na Informática, por exemplo. Nestes casos, além de conseguir explicar os fenómenos observados, pretende-se identificar os mecanismos que permitam promover a emergência e a manutenção de comportamentos de cooperação. Nestas áreas, muitos sistemas funcionam de forma descentralizada, isto é, sem o controlo de uma autoridade central. Na Informática, em particular, o crescimento de tecnologias como as redes ad hoc, as redes de sensores, a robótica distribuída, incluindo, claro, a Internet, faz prever um forte aumento do número de sistemas em que existem tarefas que são delegadas em agentes artificiais autónomos. Estes agentes podem interagir entre si, formando o que podemos designar por ecossistemas ou sociedades artificiais. Em alguns casos, os agentes podem agir todos em prol do bem comum. Noutros casos, cada agente pode agir apenas no sentido de satisfazer os seus próprios interesses, os quais podem estar em conflito com os de outros agentes. Além disso, é possível que elementos maliciosos ponham em causa o funcionamento de todo o sistema.

Numa população de agentes, estes decidem alterar, de vez em quando, a forma como agem nas interações em que participam. Esta alteração pode resultar, por

exemplo, da imitação de agentes que conheçam ou de outros processos de aprendizagem. Já na natureza, a evolução fenotípica depende da selecção natural e dos processos reprodutivos. Tanto os processos de decisão como os de reprodução, que denominaremos simplesmente por processos de actualização, podem ser mais concentrados ou mais distribuídos no tempo. Por exemplo, o acasalamento em algumas espécies animais concentra-se num pequeno período do ano, ao passo que noutras não é privilegiado nenhum período em particular. Potencialmente, a relação temporal entre os processos de actualização que ocorrem numa população de indivíduos pode influenciar o seu resultado uma vez que condiciona a informação disponível da qual dependem. A relação temporal entre este tipo de processos estabelece uma dinâmica que denominamos por *dinâmica de actualização*. Neste trabalho pretendemos verificar se a dinâmica de actualização de uma população de agentes, em que não existe uma entidade central que regule os momentos em que os processos de actualização ocorrem, tem alguma influência na proliferação de comportamentos cooperativos e, se sim, que influência é essa e como é que se caracteriza.

## 1.1 Assincronismo e Sistemas Auto-Organizados

De especial relevância para o estudo da evolução da cooperação são os mecanismos que permitem que este tipo de comportamentos se fixem a partir de processos de auto-organização. Esta relevância advém, por um lado, do facto de os sistemas auto-organizados serem ubíquos na natureza (Camazine et al., 2001): Podemos encontrar processos auto-organizados em fenómenos de convecção, em colónias de insectos ou no tráfego pedestre, entre inúmeros outros exemplos. Por outro lado, os sistemas auto-organizados são mais robustos a perturbações externas e, além disso, os mecanismos envolvidos em processos de auto-organização são geralmente mais fáceis de escalar à medida que o tamanho do sistema aumenta (Floreano & Matussi, 2008). Estes aspectos podem explicar os esforços realizados para explorar a auto-organização em áreas como as redes móveis (Bettstetter et al., 2000), a gestão de tráfego automóvel (Serugendo et al., 2006) ou a gestão de processos industriais (Serugendo et al., 2008; Frei et al., 2008). Informalmente, um sistema auto-organizado é composto por um conjunto de elementos que interagem entre si e que, de forma autónoma, modificam a sua estrutura ao longo do tempo de modo a apresentar comportamentos globalmente mais coerentes. Embora não exista, tanto quanto sabemos, uma definição formal geralmente aceite

do que é um sistema auto-organizado, vários autores têm procurado identificar as suas propriedades fundamentais. Para além da inexistência de controlo externo, o aumento de ordem com o tempo e a capacidade de adaptação, entre outras, o assincronismo é uma das propriedades propostas (Correia, 2006). Um sistema diz-se assíncrono se os elementos que o constituem podem agir ou ser actualizados em momentos não correlacionados e não necessariamente em simultâneo. Inversamente, um sistema diz-se síncrono se os momentos em que os elementos agem ou são actualizados estão fortemente correlacionados.

O sincronismo perfeito é uma abstracção que pressupõe a existência de um relógio global cujo sinal os elementos de um sistema usam para definir os momentos de acção ou actualização. Na natureza, este papel pode ser desempenhado pelas estações do ano ou pelo sol, por exemplo. Por outro lado, os sistemas desenvolvidos pelo homem, incluindo sistemas sociais, são também frequentemente desenhados para trabalhar de forma síncrona, por vezes, com um custo considerável. Por exemplo, uma parte significativa da energia consumida pelos computadores deve-se ao esforço despendido para manter os circuitos sincronizados de acordo com o relógio. Este facto tem levado à tentativa de desenvolver circuitos capazes de funcionar de forma assíncrona (Branover et al., 2004; Simlastik & Stopjakova, 2009). O ensino tradicional, em que a transmissão de conhecimento acontece apenas com a presença simultânea de professores e alunos, é outro dos muitos exemplos de sincronismo imposto na sociedade humana. Neste caso em particular, existem também autores que defendem o assincronismo na aprendizagem, o qual se traduz, por exemplo, na utilização de plataformas de educação à distância (Facemyer, 1997; Spiceland & Hawkins, 2002). Estes e outros exemplos de sistemas síncronos não podem, no entanto, ser considerados sistemas auto-organizados uma vez que a dinâmica síncrona depende de uma entidade externa que fornece o sinal de sincronização.

Existem também situações em que os elementos do sistema se auto-sincronizam sem a presença de um relógio global externo. Por exemplo, é bem conhecido o caso dos pirilampos da espécie *Pteroptyx malaccae*, que são capazes de se sincronizar de modo a piscarem aproximadamente ao mesmo tempo (Winfrey, 2001). Inclusive, existem muitos sistemas cujo funcionamento depende da capacidade de sincronização dos seus elementos constituintes. Isso acontece, por exemplo, em sistemas cardíacos, sistemas respiratórios, sistemas laser, sistemas de comunicações e outros, existindo bastante trabalho no sentido de entender os processos de auto-sincronização (Kuramoto, 1984; Winfree, 2001; Boccaletti et al., 2002).

No entanto, o facto de os momentos estarem fortemente correlacionados não significa uma correlação total. Aspectos como variações no tempo de transmissão e de percepção ou processamento da informação impedem que em sistemas reais a sincronização seja perfeita. Ou seja, em sistemas auto-organizados é razoável considerar que o sincronismo perfeito não existe, isto é, que existe sempre algum grau de assincronismo envolvido.

## 1.2 Sistemas Dinâmicos Discretos e a Dinâmica de Actualização

O que distingue os *sistemas dinâmicos discretos* (Martelli, 1999) dos seus correspondentes contínuos é o facto de o tempo ser discreto. Numa subclasse importante destes sistemas, procede-se também a uma discretização do espaço ou à representação explícita e granular dos elementos, ou de agregados de elementos, envolvidos no fenómeno a modelar. São disso exemplo sistemas como os autómatos celulares, as redes de mapas acoplados, as redes booleanas aleatórias, as redes neuronais, os algoritmos evolucionários ou os enxames de partículas. Estes sistemas são utilizados para modelar fenómenos reais em áreas científicas tão diversas como a Física, a Biologia, a Ecologia, a Sociologia, a Economia, ou a Informática e, dependendo da semântica associada ou da área em que são utilizados, são também designados por *sistemas baseados em populações* ou *sistemas multi-agente*, existindo ainda outras designações.

A discretização do tempo traduz-se na sua divisão em unidades que é costume designar por *iterações* ou *passos*. Em cada iteração, o estado de cada elemento é actualizado tendo em conta não só o seu próprio estado mas também o de outros elementos. Tipicamente, cada elemento interage apenas com um subconjunto da *população* de elementos do sistema. As interacções que podem ocorrer podem ser representadas por um grafo que reflecte, por exemplo, a relação espacial entre os elementos ou a estrutura social da população. A iteração do sistema pode levar ao aparecimento de propriedades globais que são classificadas como emergentes por resultarem da interacção local entre os elementos do sistema e por serem difíceis de prever apenas com base na descrição dessas interacções (Bonabeau, 2002; De Wolf & Holvoet, 2005; Serugendo et al., 2006). Repare-se que a utilização deste tipo de sistemas contrasta com a prática clássica de modelar o comportamento global de sistemas reais assumindo que a dinâmica colectiva dos seus elementos pode

ser modelada por equações diferenciais, mesmo quando o sistema a estudar é constituído por entidades (em número finito e distribuídas no espaço) e eventos discretos (Shnerb et al., 2000).

Um dos aspectos que faz parte da definição de qualquer sistema dinâmico discreto baseado na representação explícita dos elementos é a *dinâmica de actualização*, a qual define a relação temporal entre os momentos em que esses elementos são actualizados. Utilizamos uma *actualização síncrona* se, em cada iteração, os elementos são actualizados como se esse processo ocorresse em simultâneo para todos eles. Isto é, o processo de actualização de cada elemento tem em conta o estado em que os elementos do sistema estavam na iteração anterior. Em oposição à actualização síncrona, a dinâmica de actualização diz-se assíncrona se nem todos os elementos são necessariamente actualizados em cada iteração. Repare-se que esta definição de sincronismo e assincronismo é mais restrita do que a que demos na secção anterior uma vez que tem em conta apenas a simultaneidade das actualizações e não a correlação entre os momentos de actualização. Ao longo desta tese adoptamos esta definição por ser a mais comum em estudos sobre a influência da dinâmica de actualização em sistemas dinâmicos discretos.

A definição original dos exemplos de sistemas dinâmicos discretos que referimos acima, salvo raras excepções, como no caso das redes (neurais) de Hopfield (Hopfield, 1982), prevê uma actualização síncrona, sendo este, de facto, o tipo de dinâmica de actualização que é geralmente utilizado. Esta prática tem sido largamente questionada com base no facto de o sincronismo perfeito não existir em sistemas reais, mesmo naqueles onde ocorrem processos de sincronização (Huberman & Glance, 1993; Hogeweg, 1988; Stark & Hughes, 2000; Ghosh, 2002; Cornforth et al., 2002, 2005). Além disso, a actualização síncrona está em clara contradição com o carácter local deste tipo de modelos e a consequente ausência de um relógio global (Hogeweg, 1988). Estas críticas são reforçadas por diversos estudos que mostram que o comportamento destes sistemas pode ser significativamente afectado pelo tipo de dinâmica de actualização utilizado (estes estudos serão descritos com mais pormenor no Capítulo 2). Por exemplo, alguns autómatos celulares, quando sujeitos a uma actualização síncrona, geram dinâmicas cíclicas ou no limiar do caos (Langton, 1990), consideradas interessantes por serem comparáveis às que se observam em alguns sistemas reais auto-organizados. No entanto, é frequente estes comportamentos desaparecerem quando se passa de uma actualização síncrona para uma actualização assíncrona, o que leva alguns autores a classificá-los como artefactos que resultam da actualização síncrona

(Ingerson & Buvel, 1984; Lumer & Nicolis, 1994). Embora os comportamentos observados possam constituir um objecto de estudo com interesse próprio, a sua obtenção a partir de condições artificiais impede que nos possamos basear nelas para explicar o que observamos em sistemas auto-organizados. Este facto explica a tentativa de reproduzir determinados tipos de comportamento com uma actualização assíncrona (Sipper et al., 1997; Nehaniv, 2003; Suzudo, 2004; Abbas et al., 2005).

A alternativa mais comum à actualização síncrona é a *actualização sequencial*, que é um caso extremo de assincronismo: em cada iteração é actualizado apenas um elemento do sistema. Isto significa que, uma vez actualizado, o novo estado de um elemento fica imediatamente acessível a outros elementos. Este tipo de actualização modela uma situação em que os processos de actualização nunca se sobrepõem no tempo e em que os intervalos entre estes processos são sempre maiores do que o tempo que a informação que deles resulta demora a ser transmitida ou percebida pelos outros elementos e, logo, a afectar o seu processo de actualização.

A realidade parece, no entanto, estar algures entre uma dinâmica síncrona e uma dinâmica sequencial, pelo que podemos considerar os dois tipos de dinâmica como igualmente artificiais. Numa população, podem decorrer muitos processos de actualização em simultâneo. No entanto, estes processos, quando ocorrem, não têm que envolver necessariamente toda a população. Se fossem fenómenos instantâneos, poderíamos modelar a dinâmica dos processos de actualização como se estes ocorressem uns a seguir aos outros. No entanto, este não é geralmente o caso, sobretudo em sistemas biológicos e sociais. Estes processos podem demorar algum tempo, o que significa que o seu resultado não pode ser tido em conta por outros processos que estejam a decorrer em simultâneo. Mesmo que os considerássemos como instantâneos, o tempo que a informação demora a ser transmitida ou percebida implica que o resultado desses processos não fica imediatamente acessível a outros elementos. Este facto explica a existência de trabalhos onde são explorados graus intermédios de assincronismo em que o número de elementos actualizados em cada iteração é maior do que um mas menor do que o tamanho da população (Lumer & Nicolis, 1994; Axtell, 2000; Fatès & Morvan, 2005; Campbell & Wu, 2009).

## 1.3 Objectivos e Contribuições

O objectivo geral deste trabalho consiste em estudar a influência da dinâmica de actualização na evolução da cooperação utilizando, como plataforma de trabalho, a Teoria dos Jogos Evolucionária (TJE) (Weibull, 1997), que é uma extensão da Teoria dos Jogos (Neumann & Morgenstern, 1953; Fudenberg & Tirole, 1991) e que tem fortes pontos de contacto com a área dos Sistemas Multi-Agente (Weiss, 1999; Shoham & Leyton-Brown, 2009). A TJE tem constituído uma das principais plataformas utilizadas para estudar a evolução da cooperação em diversas áreas de investigação, incluindo a Biologia, a Sociologia, a Economia ou a Informática. Na Informática, tem sido aplicada, por exemplo, a problemas relacionados com a alocação de recursos (Hogg, 1995; Tembine et al., 2007), a pesquisa de informação na Internet (Oh, 2001) e à promoção e manutenção da cooperação em redes ad hoc (Urpi et al., 2003), redes de sensores (Crosby & Pissinou, 2007) e em sistemas de partilha de ficheiros (Hales, 2004; Ellis & Yao, 2007).

A TJE utiliza como ferramenta de estudo os chamados *jogos evolucionários* que são sistemas dinâmicos em que a interacção entre os elementos de uma população - os agentes - é modelada através de um *jogo*. Considera-se que, em cada momento, cada agente utiliza apenas uma estratégia para jogar o jogo. As proporções das diferentes estratégias presentes na população podem mudar com o tempo, fruto do processo de actualização dos agentes. Este processo pode reflectir, por exemplo, o facto de em sistemas reais cada indivíduo tender a adaptar o seu comportamento ao ambiente em que vive imitando os indivíduos mais bem sucedidos que conhece. Por exemplo, um indivíduo cooperante pode decidir não cooperar nos próximos jogos que realizar porque verificou que os indivíduos não-cooperantes que conhece são os mais bem sucedidos nas interacções em que participam. Este processo pode também ser interpretado como um processo de selecção natural num sistema biológico em que os comportamentos menos bem sucedidos em termos reprodutivos tendem a ser substituídos por comportamentos mais bem sucedidos.

Quando se utilizam jogos evolucionários para estudar a evolução da cooperação, o objectivo principal consiste em verificar, analiticamente ou através de simulações computacionais, quais as condições que levam à promoção e manutenção de comportamentos cooperativos, e como é que essas condições influenciam as características dinâmicas da população de agentes. No caso concreto deste trabalho, o estudo da influência da dinâmica de actualização traduz-se em tentar

responder às seguintes questões:

- *A dinâmica de actualização influencia a evolução da cooperação?* Esta questão é relevante na medida em que uma resposta afirmativa significa que, caso seja possível, a dinâmica de actualização pode ser utilizada como um mecanismo para promover a emergência de comportamentos cooperativos numa população de agentes. Por outro lado, podemos querer que o sistema a estudar seja robusto a variações na dinâmica de actualização. Nesse caso, é importante saber quais os aspectos que podem tornar um sistema sensível a alterações na dinâmica de actualização. Esta questão é relevante também porque a resposta nos diz até que ponto podemos confiar nos resultados obtidos com um determinado tipo de actualização quando utilizamos jogos evolucionários para estudar a evolução da cooperação.
- *É possível a evolução da cooperação num jogo evolucionário assíncrono?* Tendo em conta que a maior parte dos sistemas reais são assíncronos, a utilização dos jogos evolucionários para estudar a evolução da cooperação faz sentido apenas se estes sistemas permitirem a evolução deste tipo de comportamentos quando sujeitos a uma actualização assíncrona. Além disso, neste caso, a evolução da cooperação deve ser uma realidade sob um variado número de condições (por exemplo, diferentes tipos de estrutura da população, diferentes formas de os agentes tomarem decisões, etc.), dado que são inúmeras e bastante diversificadas as condições em que se observam comportamentos de cooperação em sistemas reais.
- *O assincronismo é benéfico ou prejudicial à evolução da cooperação?* Posto de outro modo, pretendemos verificar se existe uma tendência geral para a influência da dinâmica de actualização. A resposta a esta questão é necessária se quisermos utilizar a dinâmica de utilização como um possível mecanismo de promoção da cooperação. Tendo em conta que é possível que a resposta varie conforme os parâmetros do sistema, esta questão implica verificar como varia a influência da dinâmica de actualização em função desses parâmetros e tentar explicar o porquê dessa variação.
- *É suficiente utilizar as actualizações síncrona e sequencial?* A exploração de graus intermédios de assincronismo permite-nos verificar até que ponto podemos confiar nos resultados obtidos com estes dois casos extremos de actualização. Por exemplo, permite-nos verificar se o nível de cooperação

varia de forma monótona com o grau de assincronismo e, logo, se a influência máxima da dinâmica de actualização pode ser medida com base nos resultados obtidos com as actualizações síncrona e sequencial. Mesmo que isso aconteça, a exploração de graus intermédios de assincronismo permite-nos verificar também se os resultados variam de forma gradual à medida que nos afastamos da dinâmica síncrona e nos aproximamos da dinâmica sequencial, isto é, se existem situações em que uma pequena variação no grau de assincronismo leva a uma forte variação do nível de cooperação. Esta verificação parece-nos particularmente relevante quando passamos de uma actualização síncrona perfeita para uma actualização quase síncrona, uma vez que dificilmente encontramos sincronismo perfeito em sistemas reais.

O trabalho que aqui apresentamos não é o primeiro a tentar responder às três primeiras questões. Mais concretamente, existem trabalhos que mostram que, dependendo das condições em que são realizadas as simulações, o nível de cooperação pode aumentar, diminuir ou manter-se sensivelmente o mesmo quando se altera a dinâmica de actualização. No entanto, não existe uma resposta quanto à existência de uma tendência geral, nem uma caracterização da forma como os parâmetros do sistema influenciam a reacção a essas alterações. Esta é uma das contribuições deste trabalho. Além disso, propomos um conjunto de explicações para a forma como a influência da dinâmica de actualização se faz sentir.

Quanto à última questão, este trabalho é, tanto quanto sabemos, o primeiro onde são explorados graus intermédios de assincronismo no estudo da evolução da cooperação e identificadas as situações em que esta prática enriquece as conclusões. Nomeadamente, são identificados casos em que os resultados obtidos com uma actualização síncrona são consideravelmente diferentes dos que são obtidos com uma actualização quase síncrona.

Numa perspectiva mais abrangente, a contribuição principal deste trabalho reside na proposta de um mecanismo de promoção e manutenção da cooperação em populações de agentes autónomos: a dinâmica de actualização. Sistemas sociais, sistemas de partilha de ficheiros ponto a ponto, redes ad hoc, redes de sensores, sistemas de computação em grelha ou enxames de robôs, constituem exemplos de sistemas onde os resultados deste trabalho podem ser úteis, guiando a acção de quem deve desenvolver ou gerir o sistema. Esta acção pode consistir no aumento ou na diminuição directa do grau de assincronismo, o que pode ser conseguido, por exemplo, de forma centralizada (ou imposta) ou através do

controlo de mecanismos de acoplamento entre os agentes. Em casos em que este tipo de intervenção não seja possível e em que a dinâmica de actualização seja desconhecida ou possa mudar consideravelmente ao longo do tempo, a identificação dos aspectos que podem tornar o sistema robusto a essas alterações constitui também uma contribuição. Finalmente, a caracterização e explicação da forma como a influência da dinâmica de actualização varia em função das condições do sistema permite que se actue sobre o grau de assincronismo de modo a criar um ambiente mais favorável à proliferação de comportamentos cooperativos.

## 1.4 Metodologia

O trabalho realizado tem um carácter essencialmente empírico. Seguindo a terminologia adoptada em Cohen (1995), podemos dividir o trabalho desenvolvido em estudos exploratórios e experiências de manipulação. Os estudos exploratórios têm como finalidade produzir um conjunto de resultados que, além de possuírem interesse por si só, nos permitem formular hipóteses sobre os factores responsáveis pelos comportamentos observados. Este tipo de estudos implica a realização de um grande conjunto de simulações cujos resultados são analisados de modo a caracterizar a influência dos parâmetros de entrada. No nosso caso, daremos especial atenção à influência da dinâmica de actualização. A análise realizada permite também a identificação de padrões que permitem então a formulação de hipóteses.

As experiências de manipulação consistem na realização de simulações com versões modificadas do modelo utilizado nos estudos exploratórios. Os resultados destas simulações permitem-nos verificar se existe uma relação causa-efeito entre os factores modificados e o comportamento do modelo e, assim, confirmar, ou não, as hipóteses colocadas.

## 1.5 Estrutura da Tese

Terminamos esta introdução com uma breve descrição dos restantes capítulos da tese. No Capítulo 2 descrevemos matéria relacionada com o trabalho apresentado, bem como grande parte da nomenclatura associada. Mais concretamente, começamos por descrever os métodos de actualização que é mais comum utilizar

em sistemas dinâmicos discretos. Descrevemos depois os principais resultados obtidos em estudos sobre a influência da dinâmica de actualização, com relevo especial para os estudos que envolvem jogos evolucionários. Os restantes capítulos são dedicados ao trabalho desenvolvido no âmbito desta tese.

No Capítulo 3, além de uma descrição do modelo utilizado e das condições utilizadas nas simulações, descrevemos os resultados obtidos com uma dinâmica síncrona e uma dinâmica assíncrona sequencial para uma gama alargada de jogos. Baseando-nos nestes resultados, procuramos identificar as características da estrutura da população responsáveis pelos resultados observados. O Capítulo 4 explora o papel que o ruído presente no processo de actualização de estratégias tem na influência da dinâmica de actualização. Estes dois capítulos permitem uma caracterização da influência da dinâmica em função das condições do sistema, nomeadamente, a estrutura da população e o ruído.

O Capítulo 5 explora a utilização de graus intermédios de assincronismo de modo a verificar até que ponto nos podemos basear nos resultados obtidos com a dinâmica síncrona e a dinâmica sequencial. Para isso, verificamos se a proporção de agentes cooperantes na população varia de forma monótona com o grau de assincronismo do sistema e se é robusta a pequenas mudanças deste. Na parte final do capítulo identificamos as características das regras de transição responsáveis pela sensibilidade dos jogos evolucionários à dinâmica de actualização.

No Capítulo 6 verificamos a ideia apresentada em Tomassini et al. (2006) de que o efeito benéfico da actualização assíncrona sequencial sobre a cooperação, quando existe ruído no processo de actualização de estratégias, se deve à não ocorrência de trocas de estratégia entre os agentes. Começamos por verificar como varia o número de trocas de estratégia em função do grau de assincronismo do sistema. Confirmando-se que o número de trocas de estratégia diminui com o grau de assincronismo, verificamos depois se existe uma relação causa-efeito entre o número de trocas de estratégia e o nível de cooperação. Terminamos com uma explicação para o facto de as trocas de estratégia serem prejudiciais à cooperação.

No Capítulo 7, analisamos a influência da dinâmica de actualização sobre a frequência com que os agentes mudam de estratégia. Além de nos ajudar a caracterizar o comportamento dinâmico do sistema, esta análise é relevante na medida em que a frequência com que os agentes mudam de estratégia pode ser vista como um medida da insatisfação da população.

Finalmente, no Capítulo 8 resumimos e comentamos os principais resultados e contribuições do trabalho realizado e apresentamos algumas direcções possíveis

para trabalho futuro. O Apêndice A contém um breve resumo dos artigos que foram publicados no âmbito do trabalho realizado na tese.

# Capítulo 2

## Matéria Relacionada

Neste capítulo descrevemos os conceitos necessários à compreensão do trabalho desenvolvido bem como trabalho relacionado. Começamos por descrever os métodos de actualização mais frequentemente utilizados para modelar a dinâmica de actualização e as principais conclusões de estudos sobre a influência da dinâmica de actualização em diferentes tipos de sistemas dinâmicos discretos. Descrevemos depois os conceitos relacionados com os jogos evolucionários e os resultados de estudos sobre a influência da dinâmica de actualização na evolução da cooperação.

### 2.1 Métodos de Actualização

Como referimos no primeiro capítulo, a actualização síncrona é o método de actualização mais utilizado em sistemas dinâmicos discretos. Com este método, *todos* os elementos da população são actualizados *simultaneamente* em cada iteração. Os métodos assíncronos podem ser divididos em métodos baseados em tempo discreto e em métodos baseados em tempo contínuo. Nos métodos baseados em tempo discreto, o tempo não é representado de forma explícita, sendo definida uma função que determina os elementos a serem actualizados em cada iteração. Nos métodos baseados em tempo contínuo é utilizada uma função que atribui explicitamente um ponto no tempo para a próxima actualização de cada elemento. Para um estudo pormenorizado das características estatísticas de diferentes métodos de actualização, consultar Schönfisch & de Roos (1999).

## 2.1.1 Tempo Discreto

### 2.1.1.1 Actualização Sequencial

A actualização sequencial é a forma mais comum de actualização assíncrona e consiste em actualizar um e um só agente em cada iteração. Neste tipo de actualização, é comum distinguir entre a actualização de um único elemento e a actualização sucessiva de  $n$  elementos, onde  $n$  representa o tamanho da população. A designação de cada um dos casos varia de estudo para estudo. Neste trabalho utilizaremos a expressão *passo* para designar a actualização de um elemento e *época* para designar a actualização de  $n$  elementos. Tendo em conta que existem métodos de actualização assíncrona que permitem a actualização de mais do que um elemento de cada vez, quando não estiver em causa a distinção entre passo e época, utilizaremos a expressão *iteração* para designar uma iteração do sistema em que podem ser actualizados em simultâneo um conjunto  $0 \leq a \leq n$  de elementos.

Existem várias formas de escolher o próximo elemento a ser actualizado. De seguida descrevemos os métodos mais comuns de realizar esta escolha, bem como as expressões do valor esperado  $E(X)$  e variância  $V(X)$  do número  $X$  de passos entre duas actualizações do mesmo elemento, calculadas em Schönfish & de Roos (1999) para alguns métodos sequenciais.

- *Varrimento direccional fixo*: Os elementos são actualizados por uma ordem fixa que depende da sua posição na população. Por exemplo, em populações localizadas em grelhas bidimensionais os elementos podem ser actualizados da esquerda para a direita, de cima para baixo. Com este método, cada elemento é actualizado exactamente uma vez em cada época e temos  $E(X) = n$  e  $V(X) = 0$ .
- *Varrimento aleatório fixo*: Inicialmente, é gerada uma sequência aleatória com todos os elementos, em que cada elemento aparece uma e uma só vez. Esta sequência é repetida para todas as épocas. Cada elemento é actualizado exactamente uma vez em cada época. Tal como para o método anterior, temos  $E(X) = n$  e  $V(X) = 0$ . Repare-se que o varrimento direccional fixo é um caso especial deste tipo de actualização.
- *Varrimento aleatório renovado*: Tal como no caso anterior, é gerada uma sequência aleatória com todos os elementos, em que cada elemento aparece uma e uma só vez. No entanto, após cada época, é gerada uma nova

sequência aleatória. Tal como nos dois métodos anteriores, cada elemento é actualizado exactamente uma vez em cada época. Neste caso, temos  $E(X) = n$  e  $V(X) = 1/(6n^2 - 1)$ .

- *Escolha uniforme*: Em cada passo, o elemento a ser actualizado é escolhido aleatoriamente com reposição. Neste caso, em cada época pode acontecer que alguns elementos sejam actualizados mais do que uma vez enquanto outros não o são de todo. Neste caso, temos  $E(X) = n$  e  $V(X) = n(n - 1)$ .

As actualizações por varrimento fixo são as únicas a impor uma ordem fixa na actualização dos elementos da população. Esta característica pode levar à introdução de efeitos indesejáveis ou artefactos que se traduzem numa forte correlação no comportamento de elementos vizinhos, que não existiria caso esta ordem não fosse imposta. Isto é, a correlação, a existir, pode dever-se mais à ordem por que são actualizados os elementos e não tanto às regras que são utilizadas para actualizar o estado de cada agente (Axtell, 2000).

### 2.1.1.2 Assincronismo Intermédio

A *dinâmica assíncrona estocástica* (Fatès & Morvan, 2005) é o método mais comum de modelar graus intermédios de assincronismo. Este método pode ser considerado uma generalização do método da escolha uniforme: Em cada iteração, cada elemento é seleccionado com probabilidade  $\alpha$ ; os elementos seleccionados são depois actualizados de forma síncrona. O parâmetro  $\alpha$  representa a *taxa de sincronismo* do sistema e é igual para todos os elementos. A utilização de um valor de  $\alpha$  comum a todos os elementos modela uma situação em que estes são todos do mesmo tipo ou espécie. Quando  $\alpha = 1$ , temos uma dinâmica síncrona. À medida que  $\alpha \rightarrow \frac{1}{n}$ , a dinâmica de actualização aproxima-se de uma dinâmica sequencial. Valores intermédios de  $\alpha$  permitem modelar graus intermédios de assincronismo.

Quando se utiliza este método, o número de elementos actualizados em cada iteração segue uma distribuição binomial. Se definirmos  $\alpha = \frac{a}{n}$ ,  $1 \leq a \leq n$ , o número esperado de elementos activos em cada iteração é igual  $a = \alpha n$  com uma variância correspondente igual  $a(1 - \frac{a}{n}) = n\alpha(1 - \alpha)$ . A probabilidade de um elemento  $x$  ser seleccionado  $k$  vezes em  $v$  iterações segue também uma distribuição binomial, i.e.

$$P_x(k, v) = \binom{v}{k} \left(\frac{a}{n}\right)^k \left(1 - \frac{a}{n}\right)^{v-k} = \binom{v}{k} (\alpha)^k (1 - \alpha)^{v-k}. \quad (2.1)$$

As expressões de  $E(X)$  e  $V(X)$  podem ser aproximadas para a dinâmica assíncrona estocástica se considerarmos que o número de elementos a serem actualizados em cada iteração é fixo e igual a  $a = \alpha n$ . Tal como para o caso sequencial, as expressões para  $X$  são as mesmas que para o número  $Z$  de passos entre a actualização de um agente  $x$  e a actualização de um seu vizinho:

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} i \frac{a}{n} \left(1 - \frac{a}{n}\right)^{i-1} = \frac{n}{a} = \frac{1}{\alpha}, \quad (2.2)$$

$$V(X) = \sum_{k=1}^{\infty} [i - E(X)]^2 \frac{a}{n} \left(1 - \frac{a}{n}\right)^{i-1} = \frac{n}{a} \left(\frac{n}{a} - 1\right) = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right). \quad (2.3)$$

Além da dinâmica assíncrona estocástica, existem outras formas de modelar graus intermédios de assincronismo. Por exemplo, a *actualização periódica* (Low & Lapsley, 1999) consiste em atribuir a cada elemento um período  $p$  entre actualizações, que pode ou não ser igual para todos os elementos, e uma fase  $f < p$  gerada aleatoriamente. A primeira actualização de cada elemento  $x$  é realizada na iteração  $f_x < p_x$  e, a partir daí,  $x$  é actualizado de  $p_x$  em  $p_x$  iterações. Repare-se que pode ocorrer a actualização de mais do que um elemento em cada iteração, o que significa que este método não pode ser considerado um método sequencial. Este método tem, em relação à dinâmica assíncrona estocástica, a desvantagem de ser mais limitado nos graus de assincronismo que consegue modelar. Finalmente, outro método consiste em dividir a população em blocos dentro dos quais a actualização é realizada de forma síncrona; a actualização dos blocos é realizada de forma sequencial (Sipper et al., 1997). Este método é também mais limitado do que a dinâmica assíncrona estocástica nos graus de assincronismo que consegue modelar.

## 2.2 Tempo Contínuo

Os métodos de actualização baseados em tempo contínuo representam o tempo de forma explícita. Os momentos de actualização de cada elemento da população são controlados por um processo que é independente dos outros elementos. Mais precisamente, depois de uma actualização de um elemento, o tempo até à sua próxima actualização é gerado com base numa determinada distribuição de probabilidades. Geralmente, é utilizada uma distribuição exponencial, que

determina que a probabilidade de a actualização ocorrer no tempo  $t \in \mathfrak{R}, t \geq 0$  segue  $e^{-t}$ . Se considerarmos que  $n$  actualizações individuais (passos) constituem uma unidade de tempo, neste caso, temos  $E(X) = V(X) = 1$ .

O próximo elemento  $x$  a ser actualizado é sempre aquele cujo próximo momento de actualização  $t_x$  é menor. Uma vez actualizado  $x$ , o momento da sua próxima actualização é igual a  $t_x = t_x + \bar{t}_x$ , em que  $\bar{t}_x$  é gerado com base na referida distribuição de probabilidades. Repare-se que, na prática, e tendo em conta que  $t \in \mathfrak{R}, t \geq 0$ , este método gera uma dinâmica sequencial, caso não se tenham em conta o tempo que demoram os processos de actualização e o tempo de transmissão/percepção de informação. Além da ordem concreta por que os elementos são actualizados, a diferença principal entre este método e a escolha uniforme é o facto de os intervalos de tempo entre as actualizações dos elementos do sistema variarem no primeiro e serem regulares no segundo. No entanto, este aspecto é relevante apenas em casos em que o modelo a ser estudado implique uma representação explícita do tempo como, por exemplo, em situações em que o tempo de vida dos elementos deva ser tida em conta (Schönfisch & de Roos, 1999).

## 2.3 A Influência da Dinâmica de Actualização

Nesta secção daremos uma perspectiva geral do estudo da influência da dinâmica de actualização em alguns tipos de sistemas dinâmicos discretos baseados na discretização do espaço ou na representação individual dos elementos. O objectivo de abordarmos diferentes tipos de sistemas é não só mostrar que a influência da dinâmica de actualização é objecto de estudo em diferentes áreas, mas também mostrar que a esse respeito há aspectos comuns, bem como aspectos particulares de cada tipo de sistema. De modo a não estender demasiado a exposição, concentramo-nos em sistemas que partilham maiores semelhanças com os jogos evolucionários, a saber, os autómatos celulares, as redes booleanas aleatórias e alguns sistemas multi-agente. O estudo da influência da dinâmica de actualização tem, no entanto, tido expressão noutros sistemas como sejam os mapas acoplados (Lumer & Nicolis, 1994; Abramson & Zanette, 1998; Rolf et al., 1998; Marcq et al., 2006), as redes neuronais (Grondin et al., 1983; Cheung et al., 1987; Liebovitch & Sochowski, 1998; Shrimali et al., 2007) ou os algoritmos evolucionários (Goldberg & Deb, 1990; Syswerda, 1991; De Jong & Sarma, 1993; Rogers & Prügel-Bennett, 1999; Alba et al., 2002; Giacobini et al., 2005, 2004, 2005).

### 2.3.1 Autómatos Celulares

Os *autómatos celulares* (Smith III, 1976; Wolfram, 1994) são utilizados, não só como dispositivos computacionais mas, também, como modelos para estudar fenómenos de auto-organização em sistemas complexos, como sejam o crescimento de organismos biológicos, cristais e flocos de neve ou a dinâmica de fluídos. Estes sistemas são constituídos por um conjunto de células, ligadas entre si por uma determinada topologia de interacção, geralmente uma grelha regular. Cada célula pode estar em um de um conjunto discreto de estados, geralmente  $\{0, 1\}$ . A actualização do estado de uma célula é realizada por uma *regra de transição*, comum a todas as células, que tem em conta o seu estado actual e o das células às quais está ligada. A dinâmica do sistema é gerada pela aplicação repetida da regra de transição a todas as células. Geralmente, é utilizada uma actualização síncrona, o que significa que o sistema não é auto-organizado.

Apesar de simples na sua definição, os autómatos celulares podem gerar padrões espacio-temporais complexos ou cíclicos, semelhantes aos que são observados em alguns fenómenos reais. No entanto, como foi já mencionado, vários autores (Ingerson & Buvel, 1984; Bersini & Detours, 1994; Schönfisch & de Roos, 1999; Ruxton & Saravia, 1998; Blok & Bergersen, 1999; Fatès & Morvan, 2005) referem que os padrões produzidos, apesar de interessantes, são um artefacto resultante da actualização síncrona utilizada. Para além do facto de raramente se justificar do ponto de vista da modelação de fenómenos reais, a utilização exclusiva deste tipo de actualização é questionável também pelo facto de o comportamento destes sistemas poder mudar drasticamente quando se passa para uma actualização assíncrona. De facto, para muitas regras de transição, estes padrões desaparecem quando se introduz uma actualização assíncrona.

Por outro lado, em Ingerson & Buvel (1984) é descrito o caso de uma regra em que a passagem para uma dinâmica assíncrona leva ao aparecimento de padrões semelhantes aos que ocorrem na formação de cristais, o que leva os autores a concluir que a actualização síncrona, além de não ser essencial para o estudo dos autómatos celulares, pode impedir o aparecimento de comportamentos interessantes do ponto de vista da modelação de fenómenos reais. Para além deste caso, em Kanada (1994) são também identificadas algumas regras que levam à emergência de padrões no limiar do caos quando se introduz uma dinâmica assíncrona.

É de referir que nem todas as regras de transição levam ao aparecimento de padrões complexos ou cíclicos. Por exemplo, algumas regras levam à convergência do sistema para *pontos fixos*, isto é, configurações estáveis que não são

alteradas pela aplicação da regra de transição. Para a maioria das regras em que isto se verifica, a alteração para uma actualização assíncrona não altera o comportamento do sistema, embora os pontos fixos atingidos possam variar com a dinâmica de actualização utilizada (Ingerson & Buvel, 1984). Ou seja, partindo da mesma configuração inicial, diferentes métodos de actualização podem levar à convergência para pontos fixos diferentes. Isto significa que a bacia de atracção destes pontos varia conforme a dinâmica de actualização utilizada (Schönfisch & de Roos, 1999).

A maioria dos trabalhos onde é utilizada uma dinâmica assíncrona utiliza de facto uma dinâmica sequencial. Em Schönfisch & de Roos (1999), para além do cálculo já referido das expressões de  $E(X)$  e  $V(X)$  para alguns métodos sequenciais, é também comparado o comportamento de vários autómatos celulares quando são utilizados os métodos de actualização por varrimento, a escolha uniforme e a actualização baseada em tempo contínuo. Verifica-se que a ordem por que os elementos são actualizados influencia o comportamento dos autómatos. As principais diferenças verificam-se entre o varrimento direcional fixo e os varrimentos aleatórios e entre estes e os métodos da escolha uniforme e a actualização baseada em tempo contínuo. Ou seja, os varrimentos aleatórios dão resultados qualitativamente semelhantes o mesmo acontecendo entre a escolha uniforme e a actualização baseada em tempo contínuo. Os autores argumentam que, do ponto de vista teórico, estes dois últimos métodos são os mais adequados para modelar a dinâmica de actualização de sistemas reais, uma vez que não introduzem regularidades no comportamento do sistema. Finalmente, conclui-se que os métodos com uma forte componente aleatória produzem padrões de comportamento que são mais robustos a mudanças no método concreto utilizado.

Em Fatès & Morvan (2005) é estudada a robustez dos autómatos celulares de uma dimensão a mudanças na taxa de sincronismo quando se utiliza a dinâmica assíncrona estocástica, descrita na secção anterior. A robustez é avaliada utilizando um protocolo que considera dois indicadores baseados na densidade de 1s, isto é, a média do número de células com o estado 1 depois de o sistema atingir a fase de equilíbrio. O indicador  $r_a$  consiste na diferença da densidade obtida com uma dinâmica síncrona ( $\alpha = 1$ ) e uma dinâmica quase síncrona ( $\alpha = 0.9$ ); O indicador  $r_b$  consiste na maior diferença na densidade obtida com dois intervalos consecutivos de  $\alpha$  (são utilizados intervalos de 0.1). Para cada indicador, um autómato é considerado robusto se o seu valor for menor do que 0.1. Os autómatos são classificados com base na sua robustez em ambos os indicadores,

apenas um deles ou em nenhum. Os autores argumentam que os autómatos que são robustos nos dois indicadores são os mais adequados para modelar fenómenos reais e que nesta classe se incluem autómatos com um conjunto diversificado de comportamentos, incluindo a convergência para pontos fixos, dinâmicas cíclicas e caóticas. Por outro lado, argumentam que na classe de autómatos não robustos à modificação de uma dinâmica síncrona para uma dinâmica quase síncrona (sensibilidade segundo o indicador  $r_a$ ) não se deve ter em conta a versão síncrona. Nos casos de maior sensibilidade a  $\alpha$  verifica-se a ocorrência de transições de fase em algumas regras (Fatès, 2009), o mesmo acontecendo com o jogo da vida (Blok & Bergersen, 1999). Finalmente, verifica-se também que a densidade de 1s não varia de forma monótona com  $\alpha$  para algumas regras, formando superfícies em forma de U e que a remoção de um pequeno número de ligações entre as células tornam o jogo da vida mais robusto a modificações na taxa de sincronismo (Fatès & Morvan, 2004).

### 2.3.2 Redes Booleanas Aleatórias

As *redes booleanas aleatórias* foram originalmente criadas por Kauffman (1969) como modelos de redes de regulação genética. O modelo original consiste numa rede de  $n$  vértices gerada aleatoriamente em que qualquer vértice está ligado a  $k$  vértices. Em cada iteração, cada vértice pode estar em dois estados possíveis (1 ou 0), sendo que o estado de um vértice depende do estado dos vértices a que está ligado. Mais concretamente, o próximo estado de um vértice é determinado por uma função lógica definida por uma tabela de verdade gerada aleatoriamente para cada vértice. Os argumentos de entrada da função lógica são o estado do próprio vértice e os estados dos vértices a que está ligado. Repare-se que os autómatos celulares podem ser considerados um caso particular destes sistemas em que as células estão dispostas numa grelha regular e em que a função (regra de transição) que determina o estado das células é a mesma para toda a população. Tal como nos autómatos celulares, em geral, nas redes booleanas aleatórias é utilizada uma actualização síncrona.

Uma das consequências de se passar de uma actualização síncrona para uma actualização sequencial estocástica como, por exemplo, a escolha uniforme, é o facto de desaparecerem os atractores estritamente cíclicos (Harvey & Bossomaier, 1997; Mesot & Teuscher, 2003). Por outro lado, existe uma maior tendência para a convergência para pontos fixos, o que sugere que este tipo de atractores

tem uma maior bacia de atracção quando se utiliza uma actualização assíncrona. Para além dos pontos fixos, verifica-se por vezes a convergência para atractores fracos<sup>1</sup>, que é um sub-conjunto de estados do qual o sistema não consegue escapar depois de entrar. Em Florian & Drossel (2005) concluí-se também que com a actualização por escolha uniforme o número de atractores cresce com o tamanho do sistema segundo uma lei de potências, ao passo que com uma dinâmica síncrona o crescimento é mais rápido.

Os resultados descritos no parágrafo anterior levantam a seguinte questão: O facto de a actualização assíncrona estocástica não levar à convergência para atractores cíclicos significa que as redes booleanas aleatórias são uma má escolha quando se pretende modelar fenómenos periódicos? Repare-se que esta é uma questão que também se aplica, por exemplo, aos autómatos celulares e outros sistemas. De modo a responder a esta questão, em Paolo (2000, 2001); Rohlfshagen & Paolo (2004) são definidas medidas de *pseudo-periodicidade* que medem a correlação entre estados que ocorrem em pontos diferentes da evolução do sistema. Estas medidas são depois utilizadas para guiar um algoritmo genético na procura de exemplos de redes que apresentam comportamentos pseudo-periódicos. O facto de se terem encontrado vários exemplos com este comportamento leva os autores a argumentar que as redes booleanas aleatórias podem de facto ser utilizadas para modelar fenómenos periódicos.

Em Gershenson (2002, 2004a,b) são utilizados métodos de actualização assíncronos deterministas como, por exemplo o método periódico (ver Secção 2.1), além de métodos estocásticos. O autor conclui que os atractores de pontos fixos com um actualização síncrona e assíncrona são os mesmos. No entanto, as bacias de atracção podem ser muito diferentes. Finalmente, verifica-se que as principais diferenças se devem sobretudo ao não determinismo dos métodos estocásticos, mais do que ao assincronismo.

### 2.3.3 Sistemas Multi-Agente

A área dos Sistemas Multi-Agente (Weiss, 1999; Shoham & Leyton-Brown, 2009) é a área da Inteligência Artificial (Russel & Norvig, 2009) que se dedica ao estudo da interacção entre agentes, envolvendo, nomeadamente, o desenvolvimento de algoritmos de aprendizagem e de raciocínio e a descrição formal deste tipo de

---

<sup>1</sup>Do Inglês *loose attractors*.

sistemas. No que diz respeito a este último aspecto, algum do trabalho desenvolvido está relacionado com a separação da descrição das acções dos agentes e da dinâmica de actualização. Uma das primeiras propostas neste sentido é descrita em Ferber & Müller (1996), embora o modelo proposto apenas suporte uma actualização síncrona dos agentes. Em Weyns & Holvoet (2004) é proposto um modelo que suporta também uma actualização assíncrona.

A influência da dinâmica de actualização tem sido estudada em diferentes tipos de sistemas multi-agente, nomeadamente em modelos de populações de térmitas (Caron-Lormier et al., 2008; Fatès & Chevrier, 2010) ou em modelos de formação de empresas (Axtell, 2000). Em Axtell (2000), por exemplo, os resultados mostram que a actualização por escolha uniforme produz resultados que estão de acordo com o que se observa na realidade, o que não acontece com a actualização por varrimento direccionado fixo.

Em Campbell & Wu (2009) é estudada a influência da taxa de sincronismo num sistema em que se pretende a convergência para uma distribuição equitativa de um conjunto de tarefas (estados) pelos agentes da população. Os resultados mostram que, à medida que se aumenta a taxa de sincronismo, é menos frequente a convergência para uma distribuição equitativa das tarefas e também que a população se torna mais instável, com os agentes a mudarem frequentemente de tarefa. Além disso, para uma das regras utilizadas para modelar o processo de decisão dos elementos, a frequência com que se atinge uma distribuição equitativa das tarefas não varia de forma linear com a taxa de sincronismo. Neste caso, apenas para valores de  $\alpha$  próximos de 1 (sincronismo) deixa de se conseguir essa distribuição.

## 2.4 Teoria dos Jogos

A Teoria dos Jogos (Neumann & Morgenstern, 1953; Fudenberg & Tirole, 1991), consiste num conjunto de modelos matemáticos utilizados para estudar o comportamento estratégico de agentes que procuram tomar decisões óptimas. Embora possam também ser consideradas situações que envolvam apenas um agente, a teoria dos jogos é utilizada sobretudo no estudo de situações que envolvem a interacção entre dois ou mais agentes com interesses que podem ser conflituosos entre si e cujas acções podem afectar, não só o seu próprio bem estar, mas também o dos agentes com quem interage. A interacção entre os agentes é modelada através de um *jogo*. Cada agente joga o jogo adoptando uma estratégia, que escolhe

de entre um conjunto de estratégias possíveis. Considera-se que os agentes têm preferências bem definidas e consistentes em relação ao resultado do jogo, o qual é determinado pela combinação de estratégias utilizadas pelos diferentes agentes, e que estas preferências podem ser descritas por uma *função ganho* que atribui um valor numérico a cada situação de jogo, designado por *ganho*. Uma vez terminado o jogo, cada jogador recebe o ganho determinado pela sua função ganho. O objectivo principal da teoria dos jogos consiste em prever o resultado do jogo, isto é, qual a estratégia que cada agente irá adoptar. Para isso, a teoria dos jogos clássica assume que os agentes são racionais, isto é, que escolhem a acção que permite maximizar o seu ganho. A análise é realizada exclusivamente do ponto de vista racional, ignorando aspectos psicológicos e sociológicos.

### 2.4.1 Jogos e Equilíbrio de Nash

Na denominada *forma normal*, um jogo consiste num conjunto de jogadores, um conjunto de estratégias e uma função utilidade para cada jogador. Formalmente, seja  $I = \{1, 2, \dots, n\}$  o conjunto de jogadores; seja  $S_i = \{s_{1_i}, s_{2_i}, \dots, s_{q_i}\}$ ,  $q \geq 2$ , o conjunto de *estratégias puras* (ou discretas) do jogador  $i$  e  $s_i \in S_i$  a estratégia escolhida pelo jogador  $i$  para jogar o jogo. O vector  $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ , formado pelas estratégias utilizadas pelos jogadores num jogo, designa-se por *perfil de estratégias*. O conjunto de perfis de estratégia do jogo, também designado por *espaço de estratégias puras do jogo* é dado pelo produto  $S = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$ . Cada jogo resulta num *ganho*  $\pi_i(s) \in R$  para cada jogador  $i$ , dado pela sua *função ganho*  $\pi_i : S \rightarrow R$ . Em contextos sócio-económicos o ganho de um jogador é interpretado como a utilidade obtida e pode corresponder, por exemplo, ao lucro obtido como resultado da interacção. Em contextos biológicos o ganho representa, geralmente, o sucesso reprodutivo de um indivíduo.

Existem situações em que os jogadores podem utilizar estratégias mistas. Uma *estratégia mista* é definida por uma distribuição de probabilidades sobre  $S_i$  e representa-se por um vector  $\sigma_i = (p_{1_i}, \dots, p_{q_i})$ , onde  $p_{k_i}$  representa a probabilidade de o jogador  $i$  jogar a estratégia  $s_{k_i}$ . Neste caso, o perfil de estratégias é definido pelo vector  $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ .

Um dos conceitos fundamentais da teoria dos jogos é o do *equilíbrio de Nash* (Nash, 1950). Um perfil de estratégias mistas  $\sigma^* = (\sigma_1^*, \dots, \sigma_i^*, \dots, \sigma_n^*)$  é um equilíbrio de Nash *sse*

$$\pi_i(\sigma_1^*, \dots, \sigma_i^*, \dots, \sigma_n^*) \geq \pi_i(\sigma_1^*, \dots, \sigma_i, \dots, \sigma_n^*), \quad \forall i, \forall \sigma_i \neq \sigma_i^*. \quad (2.4)$$

Esta condição diz-nos que a estratégia  $\sigma_i^*$  de cada jogador é a melhor resposta às estratégias dos outros jogadores. Ou seja, se um determinado equilíbrio  $\sigma^*$  ocorrer, nenhum jogador tem qualquer incentivo para mudar unilateralmente de estratégia. Um dos resultados mais importantes desta área é o *Teorema de Nash* que diz que todos os jogos com um número finito de jogadores e um número finito de estratégias têm pelo menos um equilíbrio de Nash. Este resultado parte do princípio de que os jogadores são racionais, isto é, que têm conhecimento das estratégias e funções ganho de todos os jogadores envolvidos e que todos procuram otimizar os seus ganhos. Além disso, cada jogador sabe que os outros jogadores sabem, que os outros jogadores sabem, etc., que todos são racionais. A importância do equilíbrio de Nash e do teorema que lhe está associado é a de que permite determinar os equilíbrios existentes no jogo. Note-se, no entanto, que a análise é estática, o que significa que, quando há mais do que um equilíbrio, não é dada resposta à questão de saber qual dos equilíbrios irá ocorrer.

## 2.4.2 Jogos Simétricos de 2 Jogadores e 2 Estratégias

Quando existem apenas dois jogadores, é comum descrever-se o jogo através de uma *bi-matriz*  $G = \{A, B^T\}$ , que pode ser representada tal como mostra a Tabela 2.1. Esta matriz mostra as estratégias puras que os jogadores podem utilizar e os ganhos  $A_{hk} = \pi_1(s_h, s_k)$  e  $B_{hk}^T = \pi_2(s_h, s_k)$ , respectivamente do jogador 1 e 2, para cada perfil de estratégias  $(s_h, s_k)$ ,  $s_h \in S_1$ ,  $s_k \in S_2$ .

		Jogador 2		
		$s_{1_2}$	$\dots$	$s_{r_2}$
$s_{1_1}$		$(A_{1,1}, B_{1,1}^T)$	$\dots$	$(A_{1,r}, B_{1,r}^T)$
Jogador 1	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$s_{q_1}$		$(A_{q,1}, B_{q,1}^T)$	$\dots$	$(A_{q,r}, B_{q,r}^T)$

Tabela 2.1: Bi-matriz de ganhos de um jogo de dois jogadores.

Os jogos simétricos de dois jogadores e duas estratégias estão entre os jogos mais estudados na teoria dos jogos e na teoria dos jogos evolucionária (ver Secção 2.5), sendo os que são utilizados como caso de estudo neste trabalho. Num *jogo simétrico* o papel dos jogadores é indistinguível. Isto significa que o conjunto de estratégias disponíveis e as funções de ganho são iguais para os dois jogadores,

ou seja,  $S_1 = S_2 = \{s_1, \dots, s_q\}$  e  $A = B$ . Estes jogos podem ser representados através de uma matriz de ganhos simples como definido na Equação 2.5 para um jogo com duas estratégias. Nesta matriz o valor de cada célula representa o ganho do jogador que realiza a acção equivalente às linhas da matriz.

$$\begin{array}{c} s_1 \quad s_2 \\ s_1 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ s_2 \end{array} \quad (2.5)$$

Os jogos simétricos de dois jogadores e duas estratégias podem ser classificados quanto aos equilíbrios de Nash nas três classes seguintes (Szabó & Fáth, 2007):

- *Jogos de dominância pura* [ $(a - c)(d - b) \leq 0$ ]: Neste caso, uma das estratégias é estritamente dominada pela outra. Se  $a - c > 0$  e  $d - b < 0$ , o *equilíbrio de Nash* consiste no perfil  $(s_1, s_1)$ . Se  $a - c < 0$  e  $d - b > 0$ , o equilíbrio de Nash consiste no perfil  $(s_2, s_2)$ .
- *Jogos de anti-coordenação* [ $a - c < 0, d - b > 0$ ]: Existem dois equilíbrios de Nash constituídos por estratégias puras e outro constituído por estratégias mistas. Os dois primeiros são  $(s_1, s_2)$  e  $(s_2, s_1)$ . Se  $p$  e  $q$  forem, respectivamente, a probabilidade de os jogadores 1 e 2 jogarem  $s_1$ , o equilíbrio de Nash misto é igual a  $(p = r, q = r)$ , em que

$$r = \frac{1}{1 + \frac{a-c}{d-b}}. \quad (2.6)$$

- *Jogos de coordenação* [ $a - c > 0, d - b < 0$ ]: Existem dois equilíbrios de Nash constituídos por estratégias puras e outro constituído por estratégias mistas. Os dois primeiros são  $(s_1, s_1)$  e  $(s_2, s_2)$ . O equilíbrio de Nash misto é igual a  $(p = r, q = r)$ , com  $r$  definido como na Equação 2.6, tal como para os jogos de anti-coordenação.

No caso em que cada jogador tem à sua disposição as acções *Cooperar* (C) e *Não Cooperar* (D)<sup>2</sup>, a matriz de ganhos é geralmente definida como na Equação 2.7, onde  $R, S, T$  e  $P$  são, respectivamente, abreviaturas dos termos *Reward, Sucker, Temptation* e *Penalty*, usados na língua inglesa.

$$\begin{array}{c} C \quad D \\ C \begin{pmatrix} R & S \\ T & P \end{pmatrix} \\ D \end{array} \quad (2.7)$$

---

<sup>2</sup>Do inglês *Defect*.

Como é prática comum, vamos considerar  $R = 1$  e  $P = 0$  e restringir  $S$  e  $T$  aos intervalos  $-1 < S < 1$ ,  $0 < T < 2$  (Hauert, 2002; Roca et al., 2009a). A região  $S > 0$ ,  $T < 1$  corresponde ao jogo da *Harmonia* em que a estratégia racional consiste em jogar C. Este jogo não constitui um dilema social uma vez que é sempre melhor cooperar. O famoso jogo *Dilema do Prisioneiro* (Axelrod, 1984) corresponde à região  $S < 0$ ,  $T > 1$ . De forma mais genérica, este é um jogo onde se verificam as condições  $T > R > P > S$ . Repare-se que existe uma forte tentação de jogar D pois isso pode resultar no ganho máximo  $T$ . Esta é a decisão racional, o que leva a que o equilíbrio de Nash deste jogo seja (D, D). No entanto, se ambos os jogadores jogarem D, terão um ganho inferior ( $P$ ) ao que obteriam se ambos jogassem C ( $R$ ), daí o dilema. Tanto o jogo da Harmonia como o Dilema do Prisioneiro são jogos de dominância pura. A região  $S > 0$ ,  $T > 1$  corresponde ao jogo *Snowdrift*. Neste jogo a melhor acção a realizar depende da acção do adversário: deve realizar-se a acção oposta do outro jogador, sendo este, portanto, um jogo de anti-coordenação. Este jogo é também conhecido por *Falcão-Pomba* e por jogo da *Galinha*. Os diferentes nomes por que é conhecido reflectem a variedade de situações reais que pode modelar (Hauert & Doebeli, 2004). Finalmente, a região  $S < 0$ ,  $T < 1$  corresponde ao jogo *Caça ao Veado*. Neste jogo existe um dilema entre jogar a acção C, potencialmente mais proveitosa mas mais arriscada, e a acção D, menos proveitosa mas menos arriscada. A Figura 2.1 mostra o denominado plano  $ST$  que permite representar a região a que corresponde cada um destes jogos, em função de  $S$  e de  $T$ .

Para além do plano  $ST$ , é também muito comum a utilização de versões do Dilema do Prisioneiro e do Snowdrift que podem ser descritas por apenas um parâmetro. No primeiro caso, é costume utilizar-se os valores  $R = 1$ ,  $P = S = 0$ ,  $T = b > 1$ , onde  $b$  reflecte a dificuldade do jogo para os agentes cooperantes. Esta parametrização foi utilizada pela primeira vez em Nowak & May (1992). Na Figura 2.1 este jogo corresponde à linha vermelha, estando portanto no limite entre um jogo do tipo Dilema do Prisioneiro e um jogo do tipo Snowdrift. No caso do Snowdrift, é muito comum a parametrização  $R = 1$ ,  $P = 0$ ,  $S = r - 1$ ,  $T = r + 1$ , onde  $0 \leq r \leq 1$  representa o rácio custo-benefício de cooperação mútua. A dificuldade do jogo para os agentes cooperantes aumenta com o valor de  $r$ . Esta versão do jogo pode ser descrita do seguinte modo: Existe uma tarefa cuja execução implica um custo  $c$  a ser dividido pelos jogadores que participarem na sua execução e um benefício  $b > c$  para ambos os jogadores, independentemente da sua participação. Se ambos os jogadores cooperarem na execução da tarefa,

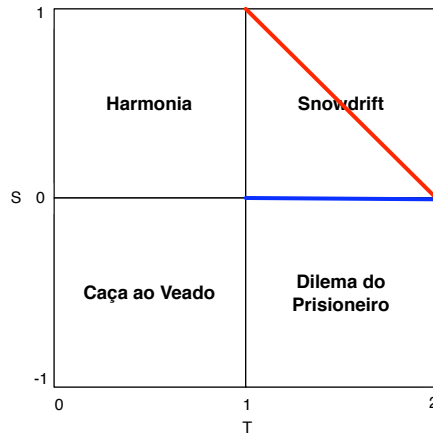


Figura 2.1: Representação do plano  $ST$ , correspondente aos jogos simétricos de dois jogadores e duas estratégias onde  $R = 1$ ,  $P = 0$ ,  $-1 < S < 1$ ,  $0 < T < 2$ . Cada quadrante deste plano corresponde a um jogo, sendo o Dilema do Prisioneiro, o Snowdrift e o Caça ao Veado os jogos mais utilizados no estudo da evolução da cooperação.

recebem cada um o ganho  $b - c/2$ ; Se apenas um jogador cooperar, este recebe  $b - c$ , enquanto o jogador não-cooperante recebe por inteiro o benefício  $b$ ; Se ambos se abstiverem de cooperar, cada um recebe o ganho 0. Se utilizarmos  $c = 1$ , então  $r = 1/(2b - 1)$ ,  $0 \leq r \leq 1$ , o que equivale à parametrização descrita acima. A seguir apresentamos as matrizes de ganhos correspondentes às versões de um parâmetro do Dilema do Prisioneiro (à esquerda) e do Snowdrift (à direita).

$$\begin{array}{cc}
 C & D \\
 C \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} & C \begin{pmatrix} 1 & 1-r \\ 1+r & 0 \end{pmatrix} \\
 D & D
 \end{array} \quad (2.8)$$

Como referimos acima, os jogos simétricos de dois jogadores e duas estratégias encontram-se entre os mais estudados na teoria dos jogos e na teoria dos jogos evolucionária (ver próxima secção). Existem, no entanto, outros jogos também frequentemente utilizados como sejam os jogos *Ultimato*, *Investimento* e *Cento-peia* que são jogos de dois jogadores que envolvem a transferência de dinheiro. Exemplos de jogos com um número arbitrário de jogadores são, por exemplo, o *Dilema do Lenhador* e o jogo do *Bem Comum*. Este dois jogos modelam uma situação que é comum designar por *Tragédia dos Comuns* onde existe um recurso

cuja exploração deve ser gerida por vários agentes. Uma descrição destes e outros jogos pode ser encontrada em Gintis (2000) e em Mariano (2006).

## 2.5 Teoria dos Jogos Evolucionária

A Teoria dos Jogos Evolucionária (Smith, 1982; Weibull, 1997; Hofbauer & Sigmund, 1998; Gintis, 2000) é uma extensão da teoria dos jogos, divergindo desta, nomeadamente, no facto de não se assumir que os agentes são racionais. Além disso, a ênfase é colocada no estudo das estratégias que são estáveis quando uma população de agentes que interagem através de um jogo é sujeita a uma dinâmica evolucionária e na forma como os estados de equilíbrio são atingidos. A teoria dos jogos evolucionária tem sido aplicada em diversas áreas científicas, apesar de as ideias que lhe estão subjacentes terem as suas origens na área da Biologia, nomeadamente o facto de as estratégias mais bem sucedidas tenderem a reproduzirem-se mais do que as menos bem sucedidas e o facto de a adaptabilidade dos indivíduos depender da proporção relativa das diversas estratégias presentes na população (Nowak, 2006).

Na teoria dos jogos evolucionária existem tipicamente duas abordagens que se complementam. Uma dessas abordagens faz uso da noção de *estratégia evolucionariamente estável* (EEE) (Smith, 1982): uma estratégia  $\sigma$  diz-se EEE se uma população constituída por agentes que utilizem essa estratégia, é capaz de resistir à invasão de uma estratégia mutante  $\mu$ . Formalmente, seja  $\pi(s_i, s_j)$  o ganho da estratégia  $s_i$  quando joga contra a estratégia  $s_j$ , seja  $(1 - \epsilon)$  a proporção de agentes com a estratégia  $\sigma$  na população e  $\epsilon$  a proporção de agentes com a estratégia  $\mu$ , com  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeno, então  $\sigma$  é uma EEE se uma das duas condições seguintes se verificar

$$\pi(\sigma, \sigma) \geq \pi(\sigma, \mu)$$

$$\pi(\sigma, \sigma) = \pi(\sigma, \mu) \quad \text{e} \quad \pi(\sigma, \mu) > \pi(\mu, \mu).$$

O conceito de EEE está relacionado com o de equilíbrio de Nash na medida em que uma EEE é um equilíbrio de Nash. Existem outras relações entre refinamentos dos conceitos de equilíbrio de Nash e EEEs, explicados, por exemplo, em Weibull (1997); Hofbauer & Sigmund (1998); Gintis (2000).

A outra abordagem consiste em modelar a dinâmica da população de forma explícita. Neste caso, o objectivo consiste em identificar os equilíbrios atingidos,

isto é, a proporção em que as diferentes estratégias sobrevivem e a forma como esses equilíbrios são atingidos. Na próxima secção descrevemos a equação de replicação, que é a plataforma clássica utilizada no estudo da competição entre comportamentos de cooperação e de não-cooperação em populações sujeitas a uma dinâmica evolucionária.

## 2.6 A Equação de Replicação

Na abordagem clássica da teoria dos jogos evolucionária assume-se que a população de agentes é infinita e não estruturada (também denominada “bem misturada”). Uma população diz-se não estruturada se todos os agentes podem interagir entre si. A dinâmica é dada pela *equação de replicação* (Hofbauer & Sigmund, 1998): Seja  $A_{q \times q} = [a_{ij}]$  a matriz de ganhos do jogo com  $q$  estratégias e  $\rho_i$  a proporção de agentes com a estratégia  $i$  na população. O ganho esperado de um agente com a estratégia  $i$  é dado por  $f_i = \sum_{j=1}^q \rho_j a_{ij}$ . O ganho médio da população é dado por  $\bar{f} = \sum_{i=1}^q \rho_i f_i$ . De acordo com a equação de replicação, a variação  $\dot{\rho}_i = d\rho_i/dt$  é dada por

$$\dot{\rho}_i = \rho_i(f_i - \bar{f}). \quad (2.9)$$

No caso dos jogos simétricos de dois jogadores em que os agentes podem utilizar apenas as estratégias C e D, é costume representar a proporção de agentes cooperantes na população por  $\rho$ , sendo a proporção de agentes não-cooperantes dada por  $1 - \rho$ . Nestas condições, a proporção assintótica de agentes cooperantes na população,  $\rho^*$ , é 0 para o Dilema do Prisioneiro e 1 para o jogo da Harmonia. Para o Snowdrift,  $\rho^* = \rho_e$ , onde  $\rho_e = S/(S + T - 1)$ . Para o Caça ao Veado,  $\rho^* = 0$  se  $\rho^0 < \rho_e$  e  $\rho^* = 1$  se  $\rho^0 > \rho_e$ , onde  $\rho^0$  representa a proporção inicial de agentes cooperantes na população. O equilíbrio  $\rho_e$  diz-se estável no caso do Snowdrift e instável no caso do Caça ao Veado. Os equilíbrios que são atingidos no caso do Caça ao Veado dizem-se bi-estáveis, ao passo que os que são atingidos nos outros três jogos se dizem estáveis.

## 2.7 Jogos Evolucionários Discretos

A teoria dos jogos evolucionária tem progredido ao longo dos anos no sentido de um maior realismo nos modelos utilizados. Um dos passos mais importantes

neste sentido foi dado por Nowak & May (1992), que introduziram o que denominamos por *jogos evolucionários discretos*. Estes autores mostraram que os comportamentos de cooperação podem ser mantidos, ao contrário do que acontece em populações não estruturadas e infinitas, quando o Dilema do Prisioneiro (versão de um parâmetro descrita na Secção 2.4.2) é jogado por uma população de agentes sem memória, isto é, incapazes de se lembrar do que aconteceu em interacções anteriores, que só podem interagir com os agentes mais próximos em termos geográficos.

Num jogo evolucionário discreto, os agentes pertencentes a uma população estruturada interagem entre si durante muitas iterações. Cada iteração é dividida em duas fases. Na primeira fase, os agentes interagem entre si através de um jogo que é usado como uma metáfora do tipo de interacção que se pretende estudar, daí resultando um ganho para cada um que se denomina por *ganho agregado*. A estrutura subjacente que define quem é que interage com quem denomina-se por *topologia de interacção*, *rede de contactos* ou, simplesmente, *rede*. Os agentes aos quais um agente está ligado são os seus *vizinhos*. Na segunda fase, alguns ou todos os agentes, dependendo da *dinâmica de actualização* utilizada, têm a possibilidade de alterar a sua estratégia. O processo de actualização da estratégia é modelado utilizando uma *regra de transição* que, como referimos no Capítulo 1, pode modelar um processo de adaptação num contexto sócio-económico ou um processo de selecção natural num sistema biológico. Neste último caso, os ganhos são interpretados como a adaptabilidade dos agentes ao ambiente, a qual tem reflexo no seu sucesso reprodutivo. Note-se que a dinâmica de actualização define a relação temporal do processo de actualização de estratégias dos agentes, modelando, por isso, a dinâmica a nível global. Por seu lado, a regra de transição modela o processo de decisão/reprodução de cada agente definindo, assim, a dinâmica a nível local. Outro aspecto a ter em conta é o facto de, em geral, se assumir que as interacções - os jogos - acontecem numa escala temporal consideravelmente mais rápida do que as actualizações de estratégia.

## 2.8 Espaço

A rede de contactos utilizada em Nowak & May (1992) é uma grelha regular bidimensional. As grelhas regulares reflectem o facto de na natureza as interacções serem condicionadas pela distância espacial, verificando-se frequentemente

a adopção do mesmo tipo de comportamento dentro de grupos de indivíduos próximos geograficamente, seja devido a herança genética, seja devido a herança cultural (Eshel & Cavalli-Sforza, 1982). No modelo estudado em Nowak & May (1992) verifica-se a formação de grupos de agentes cooperantes que, deste modo, conseguem interagir sobretudo entre si diminuindo o contacto e a consequente exploração por parte dos agentes não-cooperantes.

Depois do estudo de Nowak & May muitos outros se seguiram sobre o estudo da influência do espaço na emergência da cooperação não só com o Dilema do Prisioneiro mas também com outros jogos e com outro tipo de redes regulares como, por exemplo, redes uni-dimensionais circulares (Eshel et al., 1999). Em Killingback & Doebeli (1996) é reportado que quando o jogo Falcão-Pomba, matematicamente equivalente ao Snowdrift, é jogado em grelhas bidimensionais, a cooperação é favorecida em relação ao que acontece em populações não estruturadas. No entanto, em Hauert & Doebeli (2004) é reportado o resultado oposto para o mesmo jogo. A diferença nos resultados deve-se às diferentes regras de transição utilizadas para modelar a actualização de estratégias. No primeiro estudo, tal como em Nowak & May (1992), é utilizada a *regra o-melhor-vence*, em que cada agente  $x$  imita sempre a estratégia do seu vizinho mais bem sucedido  $y$ , desde que os ganhos de  $y$  não ultrapassem os de  $x$ . No segundo estudo é utilizada uma regra que procura manter o máximo de consistência com a equação de replicação utilizada em populações infinitas e tempo contínuo, que descreveremos na próxima secção. O Caça ao Veado foi também alvo de estudo em Skyrms (2004), verificando-se, neste caso, um aumento da bacia de atracção do estado em que apenas agentes cooperantes sobrevivem quando o jogo é jogado sobre uma grelha bidimensional.

O efeito do espaço nos quatro jogos correspondentes ao plano  $ST$  foi estudado em Hauert (2002, 2006) e em Roca et al. (2009a). Nestes estudos foram utilizadas várias regras de transição e a conclusão comum é a de que, neste contexto mais geral, o efeito do espaço depende fortemente do tipo de regra de transição que é utilizado. Esta dependência faz-se sentir sobretudo no Snowdrift, o que também é confirmado em Tomassini et al. (2006) para a versão de um parâmetro deste jogo. Quanto ao Dilema do Prisioneiro, verifica-se que o favorecimento da cooperação se resume a uma pequena zona do espaço com excepção da regra o-melhor-vence, caso em que é visível um forte aumento da cooperação. Finalmente, para o Caça ao Veado verifica-se um considerável aumento da cooperação para todas as regras testadas. De salientar também os artigos Hauert (2001); Schweitzer et al.

(2002) onde são estudadas as configurações locais de grupos de agentes com uma determinada estratégia que permitem que estes invadam a população.

Para além destes estudos, muito outros existem sobre a influência do espaço na evolução da cooperação onde são explorados também aspectos como sejam: a memória dos agentes (Lindgren & Nordahl, 1994; Brauchli et al., 1999; Kirchkamp, 2000); a participação voluntária dos agentes nos jogos (Szabó & Hauert, 2002) onde, para além das estratégias C e D, se considera uma terceira em que os agentes se abstêm de interagir com os seus vizinhos; o ruído presente no processo de actualização de estratégias (Szabó & Tóke, 1998); a existência de vértices da rede não ocupados por agentes (Vainstein & Arenzon, 2001); versões contínuas dos jogos (Nowak & Sigmund, 1999a,b; Ifti et al., 2004) ou outros jogos como o Ultimato (Page et al., 2000) e o jogo do Bem Comum (Hauert & Szabó, 2003). Uma perspectiva geral do trabalho realizado sobre a influência do espaço na emergência da cooperação é apresentada em Szabó & Fáth (2007) e em Roca et al. (2009a). O artigo Doebeli & Hauert (2005) faz também uma revisão do trabalho realizado com o Dilema do Prisioneiro e com o Snowdrift jogados em redes regulares, entre outras extensões, como a memória dos agentes, a utilização de etiquetas e a reputação dos agentes.

## 2.9 Redes Complexas

Apesar de os resultados obtidos por Nowak & May (1992) e os dos estudos que se lhe seguiram serem bastante relevantes, as grelhas regulares não dão conta do facto de, especialmente na sociedade humana, existirem ligações entre indivíduos bastante separados geograficamente. Estas ligações têm como consequência uma forte redução da distância social entre indivíduos que, de outro modo, estariam (socialmente) bastante separados. Neste contexto, a *distância social* define-se como o menor número de ligações que separa dois indivíduos. As *redes de mundo-pequeno* foram propostas por Watts & Strogatz (1998) para modelar este fenómeno e o facto de as redes sociais reais terem geralmente uma forte estrutura local no sentido em que dois indivíduos que tenham um vizinho comum se conhecerem também com grande probabilidade. Esta propriedade pode ser medida pelo *coeficiente de agregação* que nos dá a probabilidade de, numa rede de contactos, dois vizinhos de um determinado indivíduo serem também vizinhos um do outro. Os trabalhos onde foram utilizadas redes deste tipo como, por exemplo

Abramson & Kuperman (2001); Masuda & Aiharaa (2003); Tomochi (2004); Casar (2007); Tomassini et al. (2006); Vukov et al. (2008), indicam que, em relação às redes regulares, as redes de mundo-pequeno podem favorecer ou prejudicar a manutenção de comportamentos de cooperação, dependendo da regra de transição utilizada e da dificuldade do jogo para os agentes cooperantes. Num artigo recente, Roca et al. (2009a) referem que as diferenças entre os resultados obtidos com grelhas regulares e redes de mundo-pequeno não são significativas e concluem que a distância social não desempenha um papel determinante na influência do espaço sobre a cooperação, sugerindo que o papel fundamental é desempenhado pelo coeficiente de agregação. Por outro lado, estes e outros autores como, por exemplo Masuda & Aiharaa (2003), referem que a evolução é mais rápida quando se utilizam redes de mundo-pequeno e sugerem que isso se deve à diminuição da distância social média.

Em sistemas reais é também comum o facto de o número de ligações ou vizinhos variar fortemente entre os indivíduos de uma população, configurando uma distribuição de conectividades que obedece a uma lei de potências (Faloutsos et al., 1999; Amaral et al., 2000; Newmann, 2001; Jeong et al., 2001). A Internet e a World Wide Web são exemplos de redes reais em que isso acontece. O modelo das *redes de escala-livre* de Barabási & Albert (1999) foi proposto para dar conta desta propriedade. Este tipo de redes, tal como as redes de mundo-pequeno, incluem-se no que é comum designar por *redes complexas* (Albert & Barabási, 2002; Newman, 2003; Boccaletti et al., 2005). O estudo da emergência da cooperação nas redes de escala-livre foi iniciado por Pacheco & Santos que, num conjunto de artigos (Pacheco & Santos, 2005; Santos et al., 2005; Santos & Pacheco, 2005, 2006; Santos et al., 2006), mostram que nestas redes a cooperação é fortemente estimulada em comparação com o que acontece com redes regulares e redes de mundo-pequeno. Estes autores mostraram também que nestas redes a dinâmica da população é fortemente influenciada pelo que acontece nos *hubs*, isto é, os nós da rede com mais ligações (que no modelo de Barabási & Albert estão ligados entre si), e que estes são ocupados por agentes cooperantes. Além disso, verifica-se também que um agente não-cooperante, colocado num hub de uma população de agentes cooperantes é incapaz de propagar a sua estratégia de modo a que esta se torne dominante na população. Para uma descrição pormenorizada dos processos locais que levam ao domínio por parte dos agentes cooperantes, consultar também Gómez-Gardeñes et al. (2007, 2008); Floría et al. (2009).

As redes geradas com o modelo de Barabási & Albert apresentam um coefici-

ente de agregação muito baixo, o que não acontece geralmente em sistemas sociais. Vários modelos de redes de escala-livre foram entretanto propostos cuja redes apresentam um coeficiente de agregação consideravelmente maior (Dorogovtsev et al., 2001) ou que permitem controlar o valor desta característica (Klemm & Eguíluz, 2002; Davidsen et al., 2002; Holme & Kim, 2002). Alguns trabalhos mostram que a cooperação é fortemente beneficiada em redes de escala-livre com um coeficiente de agregação alto (Santos et al., 2005; Assenza et al., 2008) em relação ao que acontece no modelo de Barabási & Albert. Verifica-se também que a utilização de *ganhos normalizados*, em vez de *ganhos acumulados*, diminui a cooperação neste tipo de redes (Santos & Pacheco, 2006; Tomassini et al., 2007; Szolnoki et al., 2008b). Quando se utilizam ganhos acumulados, a regra de transição tem em conta a soma dos ganhos resultantes dos jogos realizados na fase de interacção. A forma mais comum de normalizar os ganhos consiste em dividir o ganho acumulado pelo número de vizinhos do agente, isto é, pelo número de jogos realizados. Os ganhos normalizados modelam o facto de que os agentes têm limitações no número de interacções que conseguem manter e também o facto de que as relações com outros agentes têm um custo associado (Tomassini et al., 2007; Szolnoki et al., 2008b).

A literatura é bastante variada no que diz respeito ao estudo dos diferentes aspectos que podem influenciar a emergência da cooperação em *redes complexas* e de como é que esta influência varia com o tipo de rede. Uma lista não exaustiva de tópicos inclui, a utilização de taxas de interacção e actualização diferentes (Szolnoki et al., 2008), redes de interacção e de actualização distintas (Ohtsuki et al., 2007), pressões de selecção reduzidas (Ohtsuki et al., 2006), memória dos agentes (Wang et al., 2006; Qin et al., 2008), ruído (Vukov et al., 2006), a supressão de nós em redes de escala-livre (Perc, 2009) ou a utilização de redes reais (Fu et al., 2007; Luthi et al., 2007).

É comum designar os mecanismos que permitem que os agentes cooperantes tirem partido da estrutura da rede de contactos por *reciprocidade espacial* ou, de forma mais genérica, *reciprocidade de rede*<sup>3</sup>. Para além destes mecanismos, outros são geralmente reconhecidos como promotores de comportamentos de cooperação como sejam: o grau de parentesco entre indivíduos (Hamilton, 1964a,b); a reciprocidade directa (Axelrod, 1984), que permite que um indivíduo decida o seu comportamento em função do resultado de interacções anteriores e que está aliada a factores como a repetição das interacções, capacidade de memória

---

<sup>3</sup>Do inglês *network reciprocity*.

e reconhecimento de indivíduos; reciprocidade indirecta ou reputação (Nowak & Sigmund, 1998, 2005); a participação voluntária nas interações (Szabó & Hauert, 2002; Hauert & Szabó, 2003) ou a diversidade social (Santos et al., 2008; Perc & Szolnoki, 2008).

Finalmente, é de referir que os efeitos do espaço, reportados no âmbito da teoria dos jogos evolucionária, foram demonstrados na dinâmica evolucionária de três variedades da bactéria *Escherichia coli* (Kerr et al., 2002) e que a influência da estrutura da rede de contactos tem sido estudada em outras áreas como sejam, por exemplo, a epidemiologia (Keeling, 1999; May et al., 2001; Verdasca et al., 2005), a difusão de inovações, formação de opiniões e a formação de equipas (Gaston & desJardins, 2008), a robótica móvel (Campbell et al., 2006), o encaminhamento de pacotes na Internet (Echenique et al., 2004), algoritmos genéticos (Dorrnsoro et al., 2004; Giacobini et al., 2005; Mitchell et al., 2006) e autómatos celulares (Fatès & Morvan, 2004; Tomassini et al., 2005).

## 2.10 A Dinâmica de Actualização e a Evolução da Cooperação

A discussão acerca do tipo de dinâmica de actualização a utilizar em jogos evolucionários iniciou-se com o artigo de Huberman & Glance (1993), onde se contestam os resultados obtidos em Nowak & May (1992) (ver secção anterior) devido à dinâmica síncrona aí utilizada. Desde a sua publicação, este artigo tornou-se um dos exemplos mais citados do estudo da influência da dinâmica de actualização em sistemas dinâmicos discretos. Huberman & Glance apresentam resultados, aparentemente para apenas uma matriz de ganhos, onde a cooperação não é suportada quando se utiliza a escolha uniforme como método de actualização. Lembramos que este método modela uma dinâmica sequencial em que o agente a ser actualizado é escolhido aleatoriamente com reposição.

Nowak et al. (1994) testaram novamente o seu modelo sob variadas condições, incluindo as dinâmicas síncrona e sequencial, e mostraram que a cooperação pode ser mantida para diversas condições, incluindo o assincronismo. Neste artigo foi utilizada uma regra de transição matematicamente equivalente à regra que denominamos por *regra proporcional generalizada* (PG): Seja  $G_x$  o ganho agregado de um agente  $x$  na iteração actual; Seja  $N_x^* = N_x \cup x$ , onde  $N_x$  representa o

conjunto de vizinhos de  $x$ , com  $k_x = |N_x|$ ; De acordo com esta regra, a probabilidade  $p(s_x \rightarrow s_y)$  de que o agente  $x$ , com a estratégia  $s_x$ , imite o agente  $y$ , com a estratégia  $s_y$ , é igual a

$$p(s_x \rightarrow s_y) = \frac{(G_y - \Psi)^{\frac{1}{K}}}{\sum_i (G_i - \Psi)^{\frac{1}{K}}}, \quad y, i \in N_x^*, \quad (2.10)$$

onde  $K > 0$  representa o ruído presente no processo de actualização de estratégias. Note-se que podemos também interpretar  $1/K$  como a intensidade de selecção deste processo.  $K \rightarrow 0$  corresponde à regra o-melhor-vence descrita na Secção 2.8. À medida que  $K$  cresce, a probabilidade de os agentes adoptarem estratégias que não a utilizada pelo seu vizinho mais bem sucedido aumenta, bem como a probabilidade de os agentes imitarem vizinhos menos bem sucedidos que eles mesmos. Quando  $K = 1$  temos uma *regra proporcional linear*, também conhecida por *regra de Moran*. Finalmente, para  $K \rightarrow +\infty$ , os ganhos deixam de desempenhar qualquer papel no processo de actualização de estratégias. A constante  $\Psi$  é subtraída do ganho agregado porque os ganhos nos jogos Caça ao Veado e Dilema do Prisioneiro podem ser negativos. Se o ganho agregado acumulado  $G_x$  for igual aos ganhos acumulados pelo agente  $x$  nos jogos jogados na iteração actual, temos  $\Psi = \max_{i \in N_x^*} (k_i) \min(0, S)$ . Se, em vez disso, considerarmos ganhos normalizados, temos  $\Psi = \min(0, S)$ .

Nowak et al. (1994) concluem que, quando  $K \rightarrow 0$ , a dinâmica sequencial suporta menos cooperação que a dinâmica assíncrona. No entanto, referem também que, quando  $K = 1$ , sobrevivem mais agentes cooperantes quando é utilizada uma dinâmica sequencial do que quando é utilizada uma dinâmica síncrona. Recentemente, Newth & Cornforth (2009) estudaram o mesmo modelo com a regra o-melhor-vence (regra PG com  $K \rightarrow 0$ ) e confirmaram os resultados descritos por Nowak et al. (1994). Estes autores exploraram também diferentes tipos de dinâmicas de actualização assíncronas e concluíram que estes tipos de dinâmica podem levar ao aparecimento de padrões como, por exemplo, os chamados *random walking gliders*, não observados no caso síncrono.

A influência da dinâmica de actualização foi também estudada no jogo Snow-drift de um parâmetro jogado sobre grelhas regulares (Hauert & Doebeli, 2004, ver também o Material Suplementar do artigo) e redes de mundo-pequeno (Tomasini et al., 2006). Os resultados, obtidos com as regras o-melhor-vence e Moran, são qualitativamente semelhantes aos que são descritos nos trabalhos onde foi estudado o Dilema do Prisioneiro. No entanto, verifica-se uma influência menos

intensa da dinâmica de actualização no caso do Snowdrift. Em Tomassini et al. (2006) é também proposta uma explicação intuitiva para o facto de se conseguir mais cooperação com uma dinâmica sequencial do que com uma dinâmica síncrona quando se utiliza a regra de Moran. O Capítulo 6 desta tese é dedicado à verificação desta ideia. Ambos os estudos referidos utilizaram também a *regra de replicação*, que é uma adaptação da equação de replicação para populações finitas e tempo discreto (Helbing, 1992; Schlag, 1998), que descreveremos a seguir. Com esta regra, o nível de cooperação não é afectado pelo tipo de dinâmica de actualização utilizada, tendo o mesmo resultado sido reportado quando o Dilema do Prisioneiro e o Snowdrift são jogados em redes de escala-livre (Santos et al., 2005).

Segundo a regra de replicação, a probabilidade de um agente  $x$  imitar um vizinho  $y$ , escolhido aleatoriamente, é igual a

$$p(s_x \rightarrow s_y) = \begin{cases} \frac{G_y - G_x}{\Phi} & \text{se } G_y - G_x > 0 \\ 0 & \text{em caso contrário,} \end{cases} \quad (2.11)$$

onde a constante  $\Phi$  assegura que  $p(s_x \rightarrow s_y) \in [0, 1]$ . Se o ganho agregado for igual aos ganhos acumulados, então  $\Phi = \max(k_x, k_y) \max(1, T - \min(0, S))$ . Se forem utilizados ganhos normalizados, então  $\Phi = \max(1, T - \min(0, S))$ . Note-se que com esta regra os agentes nunca imitam vizinhos com um ganho agregado inferior ao seu. As regras com esta propriedade dizem-se *monótonas em relação ao ganho* ou, simplesmente, *monótonas* (Szabó & Fáth, 2007). Note-se também que, ao contrário das regras que vimos até aqui, esta regra modela uma monitorização parcial da vizinhança uma vez que tem em conta o ganho e a estratégia de apenas um vizinho.

Num artigo recente, Roca et al. (2009a) estudaram a influência da dinâmica de actualização no plano  $ST$ , cobrindo os quatro jogos descritos na Secção 2.4.2 e usando grelhas regulares, redes de mundo-pequeno e diferentes regras de transição, entre as quais, a regra o-melhor-vence, a regra de Moran e a regra de replicação. Os resultados são consistentes com os que são reportados nos trabalhos já descritos mas os autores concluem que, neste contexto mais geral, a influência da dinâmica de actualização é a excepção e não a regra e que esta influência depende muito da regra de transição utilizada. Mais especificamente, estes autores reportaram que, para a regra de replicação, os resultados obtidos com as dinâmicas síncrona e sequencial são muito semelhantes e que as diferenças observadas para as regras o-melhor-vence e Moran se limitam a uma pequena

parte do plano  $ST$ . Roca et al. verificaram também que a evolução da proporção de agentes cooperantes na população é semelhante para os dois tipos de dinâmica de actualização (quando a proporção em equilíbrio é semelhante), existindo, no entanto, algumas diferenças no caso do Snowdrift. Num outro artigo, Roca et al. (2009b), os mesmos autores concluem que existe uma grande diferença entre os resultados obtidos com uma dinâmica síncrona e uma dinâmica sequencial no limite de baixo ruído quando são utilizadas redes de escala-livre. Neste caso, a dinâmica sequencial favorece a cooperação, o que constitui um resultado contrário ao que é observado em redes regulares e redes de mundo-pequeno com a regra o-melhor-vence.

Em suma, a partir dos trabalhos já realizados, podemos concluir que, no que diz respeito à influência da dinâmica de actualização, se obtêm resultados diferentes com regras de transição e redes de contacto distintas. Isto mostra que não existe até à data um conhecimento global acerca do papel da dinâmica de actualização na evolução da cooperação. Por exemplo, dado que as regras de transição que é comum utilizar correspondem a níveis de ruído muito diferentes, não sabemos se existe uma tendência geral para a forma como a dinâmica de actualização afecta a proliferação de comportamentos cooperativos. Isto diz-nos que devemos explorar níveis intermédios de ruído conjuntamente com diferentes redes de contactos de modo a verificar se existe uma tendência geral para essa influência e quais os aspectos que desempenham um papel relevante na forma como essa influência se faz sentir. Este é o tema deste trabalho.

## Capítulo 3

# Dinâmicas Síncrona e Sequencial no Plano $ST$

Como primeira abordagem ao estudo da influência da dinâmica de actualização na evolução da cooperação, começamos por analisar a diferença nos resultados obtidos com uma dinâmica síncrona e uma dinâmica sequencial quando os jogos definidos pelo plano  $ST$  são jogados em grelhas regulares, redes de mundo-pequeno e redes de escala-livre utilizando algumas das regras de transição mais comuns: a regra de replicação, a regra o-melhor-vence e a regra de Moran. Os resultados confirmam os que foram descritos em trabalhos anteriores, onde as condições coincidem, e estendem esses resultados para condições ainda não testadas no plano  $ST$ , como é o caso das redes de mundo-pequeno e de escala-livre. Os resultados mostram que, quando a dinâmica de actualização tem alguma influência, a actualização sequencial é quase sempre benéfica para a cooperação excepto em redes fortemente regulares e com a regra o-melhor-vence. No final do capítulo analisamos as propriedades das redes que são responsáveis por esta diferença.

### 3.1 O Modelo

#### 3.1.1 População e Rede de Contactos

A população e a respectiva rede de contactos são modeladas através de um grafo  $G(V, E)$ , em que cada *vértice*  $v_i \in V, i = 1, 2, \dots, n$ , corresponde a um agente da população. Cada *aresta* do grafo  $e_{ij} \in E, e_{ij} \equiv e_{ji}$ , representa uma relação de

vizinhança entre dois agentes  $i$  e  $j$ . Dado um agente  $i$ , a sua *vizinhança* designa-se por  $N_i = \{v_j : e_{ij} \in E\}$  e o número de vizinhos, ou *grau*, por  $k_i$ . O grau médio da rede denomina-se por  $\bar{k}$ . Dois agentes vizinhos podem interagir um com o outro através do jogo e conseguem perceber a estratégia utilizada e os ganhos obtidos pelo vizinho. Além de  $\bar{k}$ , é comum caracterizar as redes através da *distância média*  $L$  e do *coeficiente de agregação*  $C$ .  $L$  é igual à média do caminho mais curto entre todos os pares de vértices da rede. O coeficiente de agregação de um vértice  $v_i$  é dado por  $C_i = 2|\{e_{ab}\}|/k_i(k_i - 1) : v_a, v_b \in N_i, e_{ab} \in E$ , ou seja, o número de arestas existentes entre os vizinhos de  $v_i$  sobre o número máximo de arestas que poderiam existir entre eles. O valor de  $C_i$  reflecte até que ponto os vizinhos de um vértice  $v_i$  são também vizinhos uns dos outros. O coeficiente de agregação de toda a rede é dado pela média dos coeficientes de agregação de todos os vértices.

Começaremos por utilizar dois modelos de geração de redes de contactos: os modelos de Watts & Strogatz (1998) e Barabási & Albert (1999) que permitem gerar *redes de mundo-pequeno* e *redes de escala-livre*, respectivamente.

### 3.1.1.1 Redes de Mundo-Pequeno

No modelo de construção de redes de mundo-pequeno de Watts & Strogatz (1998) começa-se por criar uma rede regular unidimensional em que todos os nós têm o mesmo grau  $k$ . Depois, com probabilidade  $\phi$ , cada aresta é modificada substituindo um dos vértices por outro escolhido aleatoriamente. Neste processo, exclui-se a criação de ciclos unitários, em que um vértice está ligado a si próprio, arestas múltiplas, em que pode existir mais do que uma aresta entre dois vértices, bem como grafos desconexos, em que podem existir dois ou mais sub-grafos entre os quais não existe qualquer aresta. Quando  $\phi = 0$ , a rede regular original mantém-se e temos  $L \sim n/2k$  e  $C \sim (3k - 6)/(4k - 4)$ . Quando  $\phi = 1$ , é criada uma rede semelhante a uma rede aleatória em que  $L \sim \ln(n)/\ln(k)$  e  $C \sim k/n$ . Ou seja, as redes regulares possuem um  $C$  alto<sup>1</sup> mas não apresentam o efeito de mundo-pequeno, isto é,  $L$  pequeno. Por outro lado, nas redes criadas com  $\phi = 1$ ,  $L$  e  $C$  apresentam valores muito pequenos. Watts & Strogatz demonstraram que entre estes dois extremos existe uma gama de valores de  $\phi \approx [0.01, 0.1]$  que permite criar redes, que denominam por redes de mundo-pequeno, com um

<sup>1</sup>Referi-mo-nos às redes regulares unidimensionais utilizadas em Watts & Strogatz (1998). Como veremos mais à frente, existem redes regulares com  $C = 0$ .

grau de agregação entre os vértices alto, tal como as redes regulares, e uma pequena distância média entre vértices, característica das redes aleatórias. Ambas as propriedades ocorrem frequentemente em redes biológicas, sociais e tecnológicas como sejam, por exemplo, redes neuronais (*Caenorhabditis elegans*), redes de colaboração, redes de actores e redes energéticas (Watts & Strogatz, 1998).

Neste trabalho é utilizado um modelo descrito em Tomassini et al. (2006) que difere em dois aspectos do modelo original de Watts & Strogatz. Em primeiro lugar, é utilizada uma grelha regular toroidal de duas dimensões em vez de uma rede unidimensional circular. Esta opção justifica-se pelo facto de uma rede bidimensional ser mais apropriada para modelar redes sociais e biológicas, nomeadamente, a distância espacial entre os agentes. Repare-se, no entanto, que à medida que  $\phi$  aumenta, a forma do grafo inicial deixa progressivamente de ter influência no resultado final. Para construir a grelha inicial começámos por utilizar um tipo de vizinhança conhecido por *vizinhança de More*, em que cada vértice se encontra ligado aos 8 vértices mais próximos localizados nos 8 pontos cardeais principais.

A segunda diferença reside na forma como são alteradas as arestas: com probabilidade  $\phi$ , cada aresta é alterada por outra que liga dois vértices escolhidos aleatoriamente, excluindo, tal como no modelo original, ciclos unitários, arestas múltiplas e grafos desconexos. Esta modificação tem a vantagem de, para  $\phi \rightarrow 1$ , a rede se aproximar de uma rede aleatória clássica de Erdős-Rényi, o que não acontece com o modelo original. Ambas as modificações mantêm as características essenciais do modelo de Watts & Strogatz (1998) no que diz respeito aos valores de  $L$  e  $C$ . Apesar destas diferenças, por simplicidade, utilizaremos a designação de redes de Watts-Strogatz sempre que nos quisermos referir em conjunto às redes regulares, redes de mundo-pequeno e redes aleatórias.

### 3.1.1.2 Redes de Escala-Livre de Barabási-Albert

O modelo de construção de redes de escala-livre de Barabási & Albert (1999) envolve dois processos distintos: *crescimento* e *ligação preferencial*. O crescimento significa que os vértices são acrescentados à rede de forma progressiva, tal como acontece em redes reais. Mais concretamente, partindo de um conjunto inicial de vértices  $m_0$ , em cada iteração é acrescentado um vértice à rede criando-se  $m \leq m_0$  arestas que ligam esse vértice a  $m$  vértices já existentes. A ligação preferencial significa que a probabilidade de se criar uma aresta que ligue o novo

vértice a um vértice  $i$  já existente é  $k_i / \sum_j k_j$ . Ou seja, quantos mais vizinhos um vértice possuir, maior a probabilidade de se criarem ligações a esse vértice. Este método tem como consequência a existência de uma pequena proporção de vértices com um grau muito grande e uma grande proporção de vértices com um grau muito baixo. Mais concretamente, este modelo gera redes com uma distribuição de graus  $P(k) \sim k^{-\gamma}$ <sup>2</sup>. Após  $t$  iterações, este processo cria uma rede com  $m_0 + t$  vértices e  $mt$  arestas, mais as arestas do conjunto inicial de vértices. Como é prática comum, neste trabalho utilizamos  $m = m_0$  e uma rede inicial completa em que os vértices estão todos ligados entre si. O expoente  $\gamma$  resultante é aproximadamente 2.9 e é independente de  $m$  para redes de grandes dimensões. As redes construídas com este modelo apresentam um valor de  $C$  pequeno, semelhante ao que é apresentado pelas redes aleatórias e um valor de  $L \sim \ln(n)/\ln(\ln(n))$ , o que significa que, também nestas redes, a distância média entre vértices é muito pequena. Na Secção 3.5 descreveremos outro modelo de geração de redes de escala-livre que permite controlar o valor de  $C$ .

### 3.1.2 Interação, Desempenho e Dinâmica

Uma vez criada a população inicial de agentes e a respectiva rede de contactos, o sistema é iterado durante um determinado número de iterações. No modelo síncrono, em cada iteração todos os agentes da população jogam o jogo com todos os seus vizinhos, recebendo os ganhos resultantes. A seguir, todos eles actualizam simultaneamente as suas estratégias utilizando a regra de transição. No modelo sequencial, em cada iteração é escolhido aleatoriamente um agente  $x$ ;  $x$  e os seus vizinhos jogam então o jogo com os seus vizinhos e, depois disso,  $x$  actualiza a sua estratégia. Utilizamos, portanto, o método de actualização por escolha uniforme.

Nas simulações realizadas foram utilizados ganhos acumulados, bem como ganhos normalizados. Quando os jogos são jogados em redes de Watts-Strogatz, os resultados obtidos com as duas abordagens são semelhantes uma vez que neste caso os agentes têm aproximadamente o mesmo  $k$  (quando  $\phi = 0$  todos os agentes têm exactamente o mesmo  $k$ ). O mesmo não acontece, no entanto, em redes de escala-livre devido à grande heterogeneidade no valor de  $k$ .

Neste trabalho são utilizados agentes que podem utilizar apenas as estratégias puras C e D. Isto é, os agentes não têm em conta as acções anteriores dos seus

---

<sup>2</sup> $P(k)$  é a probabilidade de se encontrar um vértice com grau  $k$ .

vizinhos para decidir qual a acção a realizar. As razões para se utilizarem agentes com estas características são várias. A primeira é o facto de que, à excepção dos seres humanos e algumas espécies de animais (peixes, aves, macacos e morcegos) (Nowak & May, 1992), em que existem evidências da utilização de estratégias com memória como o Tit-For-Tat (Axelrod, 1984), na natureza a maior parte dos organismos não são capazes de se lembrar de interacções anteriores. Por outro lado, entre os seres humanos muitas interacções ocorrem apenas uma vez. Já em sociedades artificiais, coloca-se o problema de a utilização de agentes com memória exigir mais recursos computacionais, seja pelo espaço necessário para guardar informação sobre interacções anteriores, seja porque os algoritmos necessários para lidar com essa informação terem que ser necessariamente mais complexos e morosos. Acresce também que neste tipo de sociedades pode acontecer ser difícil ou impossível reconhecer agentes com quem se interagiu no passado.

Outra razão deve-se ao facto de a memória ser reconhecidamente um factor que potencia a cooperação (Axelrod, 1984; Nowak, 2006) pois permite que os agentes possam, por um lado castigar acções anteriores de não cooperação por parte dos seus interlocutores e, por outro, reciprocamente comportamentos anteriores de cooperação. Ou seja, a utilização de agentes sem memória significa que estamos à procura das condições mínimas que permitem a evolução da cooperação. Finalmente, a apresentação destas razões não constitui de modo algum uma defesa da não investigação de modelos onde sejam utilizados agentes com memória. Em muitas situações reais, seja em sociedades animais, humanas ou artificiais, a memória desempenha ou pode desempenhar um papel determinante na interacção entre os agentes. No entanto, por uma questão de metodologia, julgamos que devemos tentar entender primeiro o que é aparentemente mais simples, isto é, modelos que utilizem agentes sem memória, e só depois o que é aparentemente mais complexo.

Tal como é prática comum, consideramos que cada jogo acontece como se os agentes realizassem as suas acções (jogadas) em simultâneo. Esta opção justifica-se pelo facto de se utilizarem agentes com estratégias puras. Em situações em que se modelam jogos iterados - em que os agentes interagem repetidamente, são capazes de reconhecer os seus interlocutores e de se lembrarem das suas acções anteriores - pode fazer sentido considerar que também a interacção é assíncrona. Nestes casos, e como demonstram os resultados descritos em vários estudos (Nowak & Sigmund, 1994; Frean, 1994; Hauert & Schuster, 1998; Kun et al., 2006; Newth, 2009), a dinâmica da população e a sua constituição em equi-

líbrio, isto é, as estratégias que sobrevivem e a sua proporção relativa, é diferente da que é obtida com interacções simultâneas.

## 3.2 Configuração Geral das Simulações

As simulações foram realizadas com populações de  $n = 10^4$  agentes. No início de cada simulação é gerada uma nova rede de contactos que se mantém fixa durante todo o processo evolutivo. A população inicial é criada de modo a que cada agente tenha a mesma probabilidade de ser um C ou um D. Ou seja, em média, a população inicial é composta por 50% de agentes de cada estratégia. O sistema é iterado durante  $n = 10^4$  iterações quando se utiliza uma actualização síncrona e durante  $10^4 \times n$  quando se utiliza uma actualização sequencial. Estes valores foram escolhidos após confirmação de que são suficientes para a população convergir para configurações homogêneas de agentes cooperantes ou não-cooperantes ou para que a proporção de agentes cooperantes,  $\rho$ , estabilize à volta de um determinado valor. O valor de  $\rho$  é calculado como a proporção média de agentes cooperantes na população nas últimas  $10^3$  iterações para o modelo síncrono e nas últimas  $10^3 \times n$  para o modelo sequencial. Cada ponto nos gráficos apresentados resulta da média do valor de  $\rho$  obtido em 50 simulações independentes. A menos que seja referido o contrário, todas as redes utilizadas têm um grau médio de  $\bar{k} = 8$  (equivalente a  $m = 4$  nas redes de escala-livre). Para as redes de mundo-pequeno foram utilizados valores de  $\phi \in \{0.01, 0.05, 0.1\}$ . Lembramos que as redes regulares correspondem a  $\phi = 0$  e que as redes aleatórias correspondem a  $\phi = 1$ .

Finalmente, o número de condições testadas neste trabalho resulta numa grande quantidade de gráficos. Por esta razão, no texto principal apresentamos apenas os gráficos necessários para ilustrar as conclusões. A totalidade dos gráficos é apresentada nos Anexos A-H que constam do CD que acompanha a tese.

## 3.3 Redes de Watts-Strogatz

A Figura 3.1 mostra os resultados obtidos com grelhas regulares para a regra de replicação, a regra o-melhor-vence e a regra de Moran com actualização síncrona e sequencial. Tal como em Roca et al. (2009a), para além de procedermos à

análise dos gráficos, utilizamos como medida global da cooperação obtida com um determinado jogo a média dos valores de  $\rho$  para o quadrante correspondente a esse jogo. O valor da média é apresentado nos gráficos junto ao quadrante de cada jogo.

Os resultados obtidos com grelhas regulares confirmam os de trabalhos anteriores: Não há diferenças relevantes entre a actualização síncrona e a actualização sequencial para a regra de replicação; A actualização sequencial suporta menos cooperação com a regra o-melhor-vence, excepto no caso do Caça ao Veado; A actualização sequencial suporta mais cooperação com a regra de Moran.

Com a regra o-melhor-vence, as maiores diferenças ocorrem no Snowdrift, não existindo grandes diferenças no Dilema do Prisioneiro e no Caça ao Veado. As principais diferenças ocorrem com a regra de Moran, especialmente no Snowdrift e no Caça ao Veado. Para esta regra, a influência no Dilema do Prisioneiro limita-se a uma pequena região. No entanto, nesta região, a actualização síncrona leva a população a convergir para estados uniformes de agentes não-cooperantes (Tudo-D), enquanto que a actualização sequencial leva a população a convergir para estados fortemente dominados por agentes cooperantes ou mesmo estados uniformes de agentes cooperantes (Tudo-C). Isto acontece também no Caça ao Veado e no Snowdrift para uma porção do espaço assinalável. Esta diferença é natural no caso do Caça ao Veado dada a sua natureza bi-estável. No entanto, esse não é o caso do Dilema do Prisioneiro e do Snowdrift, o que torna esta influência mais relevante.

As maiores diferenças entre os resultados obtidos com grelhas regulares e redes de mundo-pequeno ocorrem para a regra o-melhor-vence: No Dilema do Prisioneiro e no Snowdrift, a actualização sequencial torna-se progressivamente benéfica para a cooperação à medida que  $\phi$  aumenta. Para  $\phi = 0.05$ , a actualização sequencial suporta já mais cooperação em média do que a actualização síncrona quando a regra o-melhor-vence é utilizada (Figura 3.2). No caso do Caça ao Veado, a actualização sequencial é, no entanto, sempre benéfica, independentemente do valor de  $\phi$ . Para a regra de Moran os resultados são semelhantes aos que são obtidos com redes regulares. Tal como acontece com as grelhas regulares, não existem diferenças assinaláveis entre os dois tipos de actualização quando se utiliza a regra de replicação. Este comportamento é, aliás, comum a todas as redes utilizadas pelo que não voltaremos a mostrar gráficos para esta regra neste e no próximo capítulo.

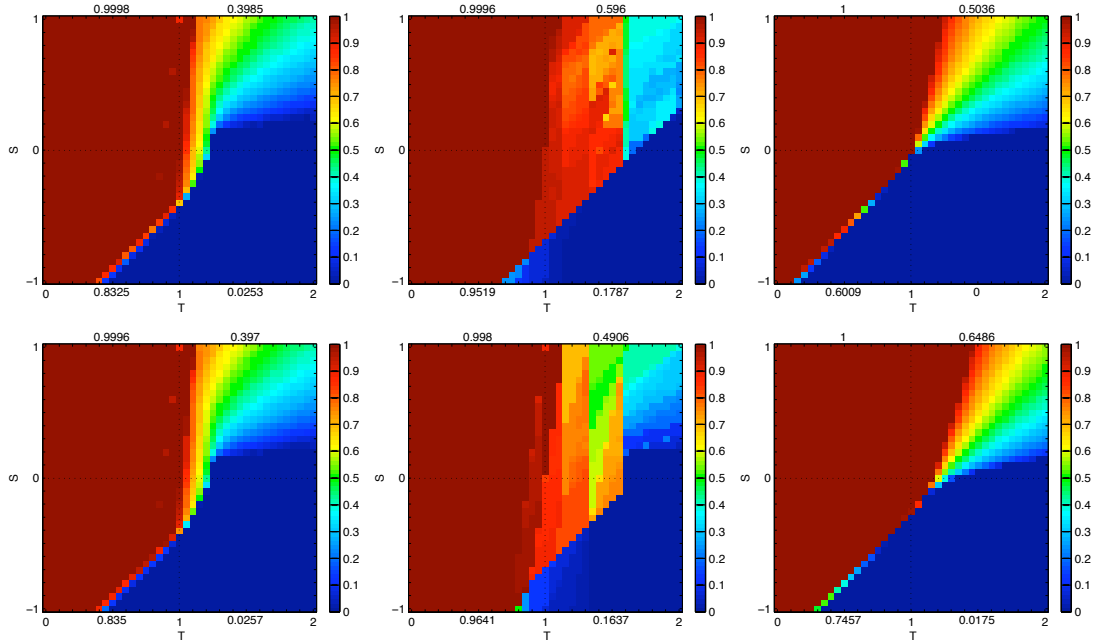


Figura 3.1: Proporção de agentes cooperantes,  $\rho$ , em grelhas regulares ( $\phi = 0$ ), com actualização síncrona (em cima) e actualização sequencial (em baixo). Regras de transição: regra de replicação (à esquerda), regra o-melhor-vence (ao centro) e a regra de Moran (à direita). Os valores nos eixos acima do jogo da Harmonia e do Snowdrift e abaixo do Caça ao Veado e do Dilema do Prisioneiro, são a média dos valores de  $\rho$  para o respectivo quadrante. Os parâmetros  $S$  e  $T$  variam em intervalos de 0.05. Não existem diferenças relevantes entre a actualização síncrona e sequencial para a regra de replicação. As principais diferenças ocorrem para a regra o-melhor-vence e, sobretudo, para a regra de Moran (ver detalhes no texto principal).

### 3.4 Redes de Escala-Livre

No que diz respeito às redes de escala-livre, verificam-se diferenças relevantes entre a actualização síncrona e a actualização sequencial, sendo que estas são maiores quando se utilizam ganhos acumulados (Figura 3.3) do que quando se utilizam ganhos normalizados (Figura 3.4). No primeiro caso, e para a regra o-melhor-vence, os agentes cooperantes dominam completamente para todo o quadrante correspondente ao Snowdrift quando é utilizada uma actualização sequencial. Para o Caça ao Veado e para o Dilema do Prisioneiro a actualização sequencial leva a um grande incremento da cooperação numa região significativa do espaço.

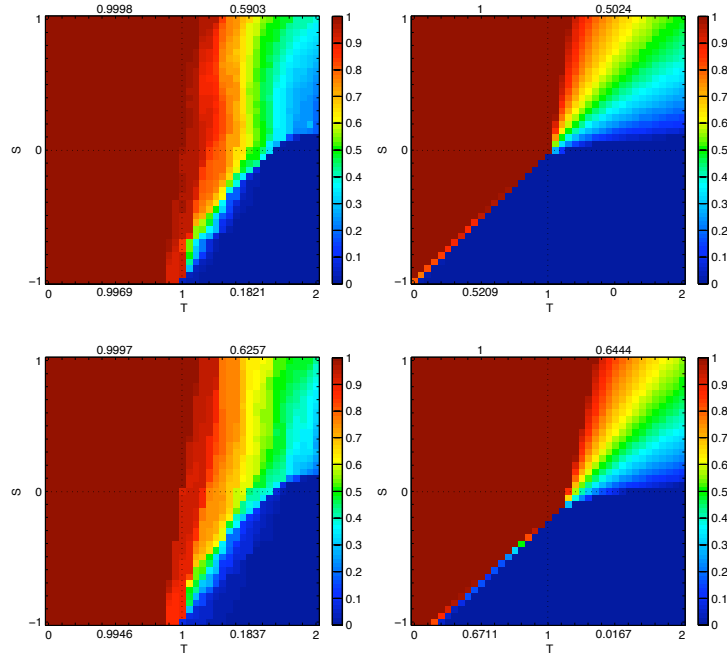


Figura 3.2: Proporção de agentes cooperantes,  $\rho$ , em redes de mundo-pequeno ( $\phi = 0.05$ ) com a regra o-melhor-vence (à esquerda) e com a regra de Moran (à direita). Em cima: actualização síncrona; Em baixo: actualização sequencial. No Snowdrift e no Dilema do Prisioneiro a actualização sequencial torna-se progressivamente benéfica para a cooperação à medida que  $\phi$  aumenta. Para  $\phi = 0.05$  a actualização sequencial suporta já mais cooperação do que a actualização síncrona quando a regra o-melhor-vence é utilizada. Não existem diferenças relevantes entre os resultados obtidos com grelhas regulares e redes de mundo-pequeno para a regra de Moran. Os gráficos para os restantes valores de  $\phi$  podem ser consultados no Anexo A.

Salientamos que, com estas redes, quando a dinâmica de actualização tem alguma influência sobre o valor de  $\rho$ , a actualização sequencial é sempre benéfica para a cooperação quando são utilizados ganhos acumulados, existindo apenas algumas excepções quando se utilizam ganhos normalizados e a regra o-melhor-vence.

Os resultados descritos nesta e na secção anterior sugerem que a actualização assíncrona é mais frequentemente benéfica para a cooperação do que prejudicial. Mais especificamente, sugerem que o assincronismo é prejudicial apenas para redes com um grau elevado de regularidade nas ligações e para valores baixos de ruído. O papel do ruído na influência da dinâmica de actualização será objecto de análise no próximo capítulo. O papel da rede de contactos será tratado na

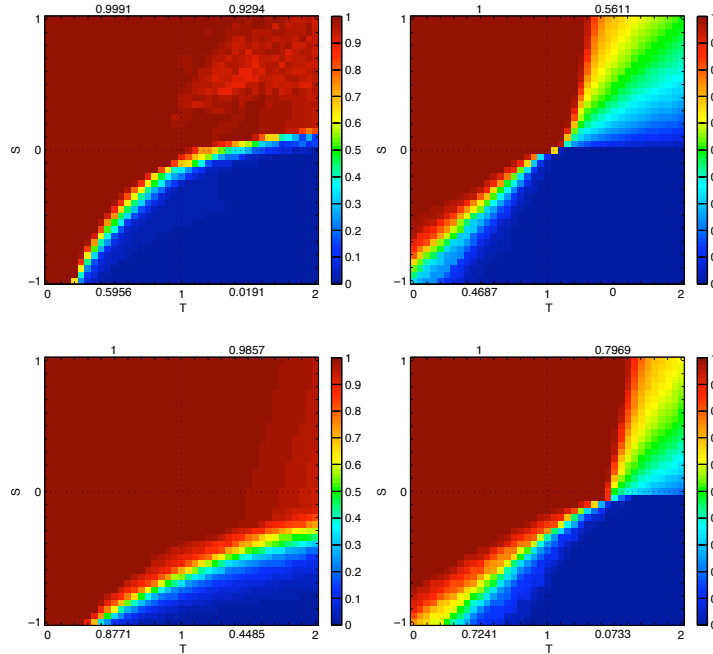


Figura 3.3: Proporção de agentes cooperantes,  $\rho$ , em redes de escala-livre ( $m = 4$ ), com actualização síncrona (em cima) e actualização sequencial (em baixo) utilizando ganhos acumulados. À esquerda: regra o-melhor-vence; À direita: regra de Moran. Existem diferenças significativas entre as actualizações síncrona e sequencial para ambas as regras. A actualização sequencial nunca suporta menos cooperação do que a actualização síncrona.

próxima secção.

### 3.5 O Papel da Rede de Contactos

Os resultados apresentados na secção anterior mostram que a influência da dinâmica de actualização depende da rede de contactos sobretudo quando se utiliza a regra o-melhor-vence. As características das redes utilizadas permitem-nos retirar algumas conclusões relativamente às propriedades das redes que podem ou não determinar esta influência. Por exemplo, nas redes de mundo-pequeno não existe uma grande heterogeneidade de graus, ao contrário do que acontece nas redes de escala-livre. No entanto, na secção anterior vimos que a actualização sequencial se torna benéfica para a cooperação acima de um determinado valor de  $\phi$  nas redes de mundo pequeno. Isto significa que não é necessária uma elevada

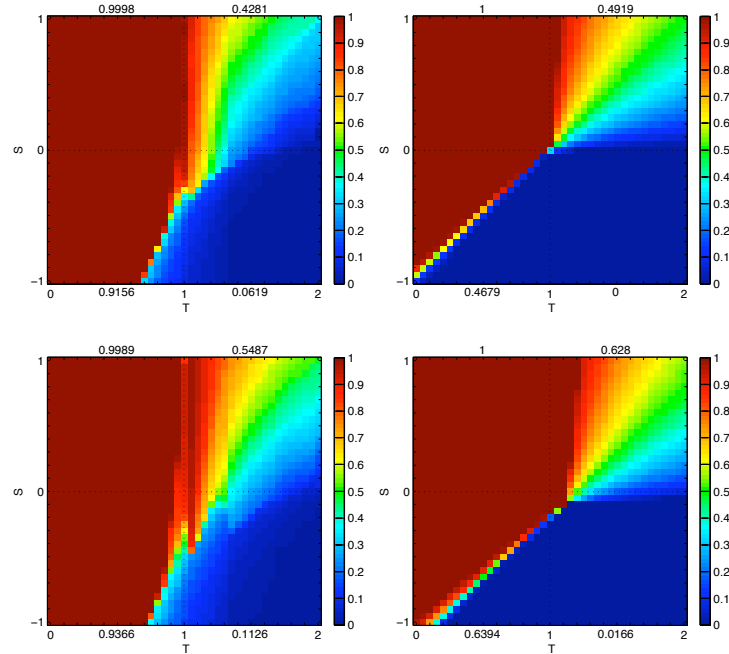


Figura 3.4: Como na Figura 3.3 mas com ganhos normalizados. As diferenças não são tão significativas como quando se utilizam ganhos acumulados. No entanto, em muitas situações a mudança de uma actualização síncrona para uma actualização sequencial faz a diferença entre, respectivamente, a convergência para um equilíbrio onde coexistem os dois tipos de agentes e estados Tudo-C. É de salientar também que, à excepção de alguns casos, a actualização sequencial não é prejudicial à cooperação.

heterogeneidade de graus para que a actualização sequencial se torne benéfica à cooperação, embora esta característica possa potenciar esse efeito.

O facto de a actualização sequencial ser prejudicial à cooperação tanto para grelhas regulares como para redes de mundo pequeno com  $\phi = 0.01$  indicia que a distância média entre agentes  $L$  não desempenha também um papel determinante. Esta conclusão deriva do facto de o valor de  $L$  baixar bastante quando se passa de uma rede regular para uma rede de mundo-pequeno com  $\phi = 0.01$ .

No que diz respeito ao coeficiente de agregação, a grelha regular com vizinhança de More tem um valor de  $C$  alto ( $C \approx 0.428$ ) ao passo que as redes de escala-livre construídas com o modelo de Barabási-Albert têm um valor de  $C$  muito baixo. Tendo em conta que a influência da dinâmica de actualização é distinta para redes regulares e redes de escala-livre quando se utiliza a regra

o-melhor-vence, nada podemos concluir acerca do papel desta propriedade com base nos resultados obtidos com estes dois tipos de rede. Repare-se que o facto de a actualização sequencial ser prejudicial à cooperação para  $\phi < 0.05$  e benéfica para  $\phi \geq 0.05$  nas redes de mundo pequeno indicia que esta propriedade, tal como as duas anteriores, não desempenha um papel determinante no facto de o assincronismo ser benéfico ou prejudicial à cooperação. De modo a termos uma maior certeza relativamente a este aspecto, realizámos simulações com redes regulares com  $C = 0$  e com redes de escala-livre construídas com o modelo de Holme & Kim (2002), o qual permite controlar o valor de  $C$ . Estas simulações cingiram-se à regra o-melhor-vence uma vez que os resultados obtidos com a regra de Moran são coerentes para todas as redes de contactos.

Para construir grelhas regulares com  $C = 0$ , utilizámos a chamada vizinhança de von Neumann, em que cada agente tem como vizinhos os agentes mais próximos localizados nos quatro pontos cardeais principais. Repare-se que, com este tipo de vizinhança, os vizinhos de um agente não estão ligados entre si.

A construção de redes de escala-livre segundo o modelo de Holme-Kim, faz-se do seguinte modo: Começa-se por construir uma rede inicial com  $m_0$  vértices. Depois, até a rede ter o tamanho desejado, acrescenta-se um vértice  $v$  de cada vez. A primeira aresta entre  $v$  e um vértice  $w$  já existente na rede é realizada utilizando a processo de ligação preferencial, tal como no modelo de Barabási-Albert. As restantes  $m - 1$  arestas são criadas utilizando dois processos diferentes: (i) com probabilidade  $p$  é criada uma aresta entre  $v$  e um vizinho de  $w$  escolhido aleatoriamente e (ii) com probabilidade  $1 - p$  é utilizado o processo de ligação preferencial. Este modelo permite criar redes de escala-livre com  $P(k) \sim k^{-3}$  e com um coeficiente de agregação que depende do parâmetro  $p$ . Quando  $p = 0$ , recuperamos o modelo de Barabási-Albert, onde  $C \rightarrow 0$  à medida que  $n$  tende para infinito. Para  $p > 0$ ,  $C$  cresce com o valor de  $p$ . Em Assenza et al. (2008), onde é utilizada a regra de replicação, é reportado que valores elevados de  $C$  neste tipo de redes beneficiam a cooperação, por um lado, mas que diminuem as possibilidades de os agentes cooperantes sobreviverem em proporções reduzidas.

Tendo em conta que  $\bar{k} = 4$  para a grelha regular com vizinhança de von Neumann, as simulações com as redes de escala-livre de Holme-Kim foram realizadas utilizando  $\bar{k} = 4$  e  $\bar{k} = 8$ , equivalendo a  $m = 2$  e  $m = 4$ , respectivamente. Os resultados são qualitativamente semelhantes pelo que só apresentamos gráficos para  $\bar{k} = 8$ . (os gráficos para  $\bar{k} = 4$  podem ser consultados no Anexo A). Os valores de  $p$  utilizados para redes com  $\bar{k} = 8$  e  $\bar{k} = 4$  foram, respectivamente,  $p = 0.871$  e

$p = 0.582$ . Ambos os valores levam à construção de redes com  $C \approx 0.428$  (valor de  $C$  para as grelhas regulares com vizinhança de More).

A Figura 3.5 mostra que, no que diz respeito à influência da dinâmica de actualização, os resultados obtidos com as redes de escala-livre de Holme-Kim são qualitativamente semelhantes aos que são obtidos com redes de escala-livre de Barabási-Albert. Ou seja, independentemente do valor de  $C$ , a actualização sequencial beneficia a cooperação em redes de escala-livre. Este resultado confirma que, quando os jogos são jogados neste tipo de redes, o coeficiente de agregação não é determinante no que respeita à influência da dinâmica de actualização.

A Figura 3.5 mostra também que, nas grelhas regulares, os resultados obtidos com a vizinhança de von Neumann coincidem qualitativamente com os que são obtidos com a vizinhança de More no caso do Caça ao Veado e do Dilema do Prisioneiro mas que diferem para o Snowdrift: Neste caso, em média, a actualização sequencial é benéfica com a vizinhança de von Neumann mas prejudicial com a vizinhança de More. Este resultado deixa algumas dúvidas quanto ao papel do coeficiente de agregação na influência da dinâmica de actualização em grelhas regulares. No entanto, como veremos a seguir, o papel determinante parece caber à regularidade das ligações e não ao coeficiente de agregação.

O aspecto que sugere que a regularidade das ligações desempenha um papel relevante na influência da dinâmica de actualização é o facto de nestas redes os agentes formarem frequentemente grupos com fronteiras planas quando é utilizada uma regra de transição determinista, como é o caso da regra o melhor-vence. Em alguns casos, estas fronteiras são benéficas aos agentes cooperantes e qualquer mecanismo que as destrua prejudica este tipo de agentes. Isso pode acontecer, por exemplo, se utilizarmos uma regra de transição estocástica (Nowak et al., 1994; Roca et al., 2009b) ou se utilizarmos uma actualização assíncrona. Este tipo de situações acontece sobretudo em grelhas regulares com vizinhança de More. A Figura 3.6 mostra um exemplo para o Dilema do Prisioneiro em que o assincronismo destrói as fronteiras planas, levando à fragmentação dos grupos de agentes cooperantes e a uma redução da proporção deste tipo de agentes na população. A Figura 3.7 mostra um exemplo para o Snowdrift em que a actualização sequencial não permite sequer a formação de grupos compactos.

Existem, no entanto, situações em que a actualização assíncrona não impede a formação de fronteiras planas. Por outro lado, no caso da vizinhança de von Neumann existem muitas combinações de  $S$  e  $T$  em que as fronteiras planas de

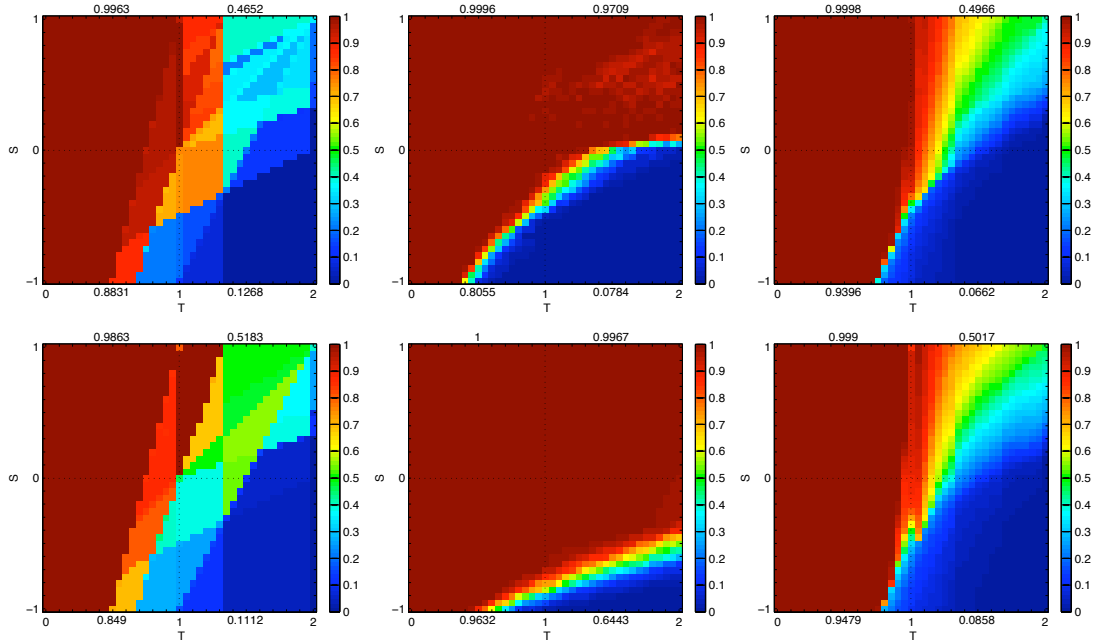


Figura 3.5: Proporção de agentes cooperantes,  $\rho$ , em grelhas regulares com vizinhança de von Neumann (à esquerda) e redes de escala-livre de Holme-Kim com ganhos acumulados (ao centro) e ganhos normalizados (à direita). Em cima: actualização síncrona; Em baixo: actualização sequencial. Os resultados obtidos com redes de Holme-Kim são qualitativamente semelhantes aos que são obtidos com redes de Barabási-Albert. No caso das grelhas regulares, os resultados obtidos com as vizinhanças de von Neumann e de More diferem apenas para o Snowdrift.

grupos de agentes cooperantes, uma vez formadas, mantêm-se fixas, a menos que outro grupo de agentes cooperantes “choque” com elas. Ou seja, ao contrário do que acontece com a vizinhança de More (Figura 3.6), com vizinhança de von Neumann os grupos crescem sobretudo através das suas fronteiras irregulares. Nestes casos, a influência da dinâmica de actualização depende da rapidez com que as fronteiras planas são formadas. As figuras 3.8 e 3.9 mostram configurações da população durante a fase de equilíbrio para o Dilema do Prisioneiro e para o Snowdrift, respectivamente, e permitem entender a relação entre a regularidade das fronteiras e a influência da dinâmica de actualização. As configurações à esquerda das figuras ilustram situações em que o assincronismo suporta mais cooperação. Nestes casos, com uma actualização síncrona, verifica-se uma dinâmica caótica em que os grupos de agentes cooperantes não conseguem manter-se estáveis. Com uma actualização sequencial, as fronteiras avançam lentamente e o crescimento

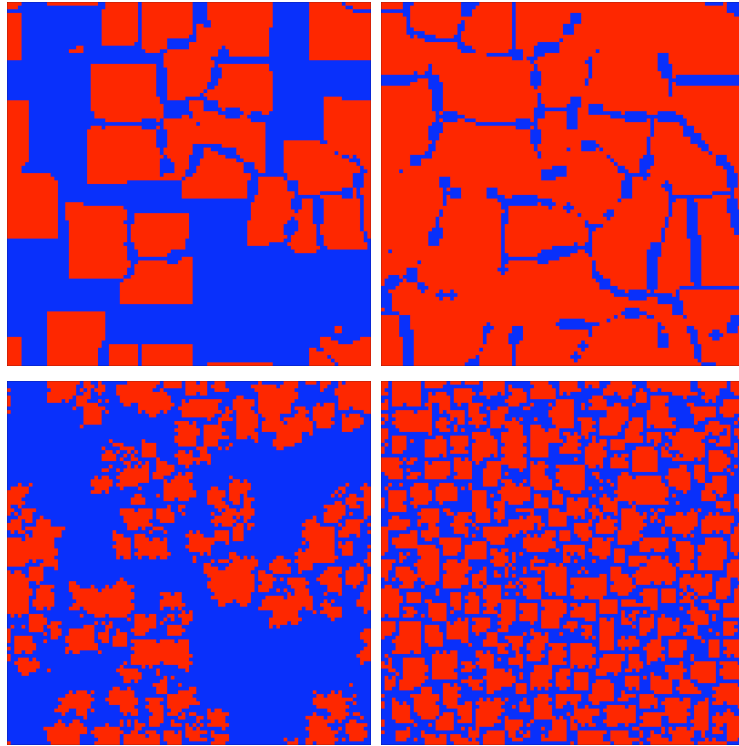


Figura 3.6: Configurações da população em grelhas regulares com vizinhança de More para o Dilema do Prisioneiro com  $S = -0.05$  e  $T = 1.35$  durante a fase transiente (à esquerda) e em equilíbrio (à direita). Em cima: actualização síncrona; Em baixo: actualização sequencial. Com actualização síncrona, durante a fase transiente formam-se grupos de agentes cooperantes (a vermelho) com fronteiras planas. Estes grupos crescem rapidamente até se juntarem num único grupo no meio do qual existem grupos em forma de filamento de agentes não-cooperantes. Com actualização sequencial, durante a fase transiente os grupos têm fronteiras irregulares e crescem lentamente. A população converge depois para um equilíbrio onde existem muitos grupos de agentes cooperantes que não conseguem juntar-se devido à presença de agentes não-cooperantes entre eles.

dos grupos de agentes cooperantes só é interrompido quando finalmente se formam fronteiras planas (diagonais), o que acontece quando os grupos já têm uma dimensão considerável. As configurações à direita das imagens ilustram a situação inversa. Nestes casos, com uma actualização síncrona, as fronteiras planas só se formam quando a população é dominada por um grande grupo de agentes cooperantes. Por outro lado, com uma actualização sequencial, as fronteiras pla-

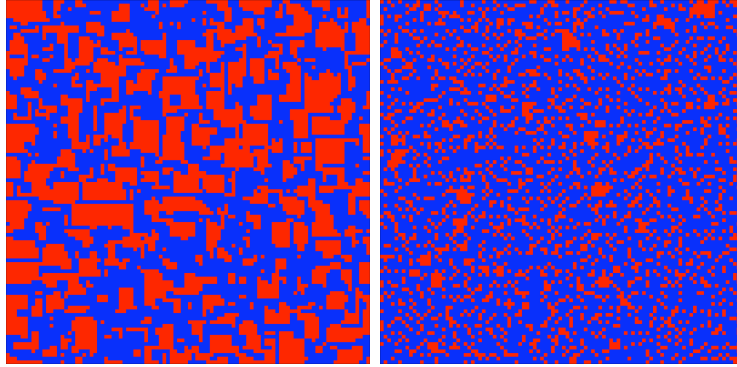


Figura 3.7: Configurações da população em grelhas regulares com vizinhança de More para o Snowdrift com  $S = 0.6$  e  $T = 1.6$  durante a fase de equilíbrio. À esquerda: actualização síncrona; À direita: actualização sequencial. Com actualização síncrona os agentes cooperantes formam grupos com fronteiras planas. Com actualização sequencial, os agentes cooperantes não conseguem formar grupos compactos.

nas formam-se numa fase precoce do processo evolutivo, impedindo os grupos de agentes cooperantes de crescer. Estes casos demonstram o papel da regularidade das ligações na influência da dinâmica de actualização e explicam o facto de a actualização assíncrona ser uma vez benéfica e outras vezes prejudicial à evolução da cooperação.

### 3.6 Resumo

Os resultados apresentados nesta secção mostram que, quando a dinâmica de actualização tem alguma influência sobre a cooperação, a actualização sequencial é sempre benéfica para a cooperação no caso do Caça ao Veado. Para o Dilema do Prisioneiro e para o Snowdrift a actualização sequencial é prejudicial apenas quando estes jogos são jogados em redes com um grau elevado de regularidade nas ligações e com a regra o-melhor-vence. Em redes de escala-livre verifica-se mesmo um aumento significativo da cooperação quando se passa a uma actualização sequencial, sobretudo quando se utilizam ganhos acumulados.

Uma análise dos resultados em função das propriedades das redes utilizadas indica que o factor que determina o tipo de influência da dinâmica de actualização é a regularidade das ligações. No entanto, mesmo nas redes regulares não

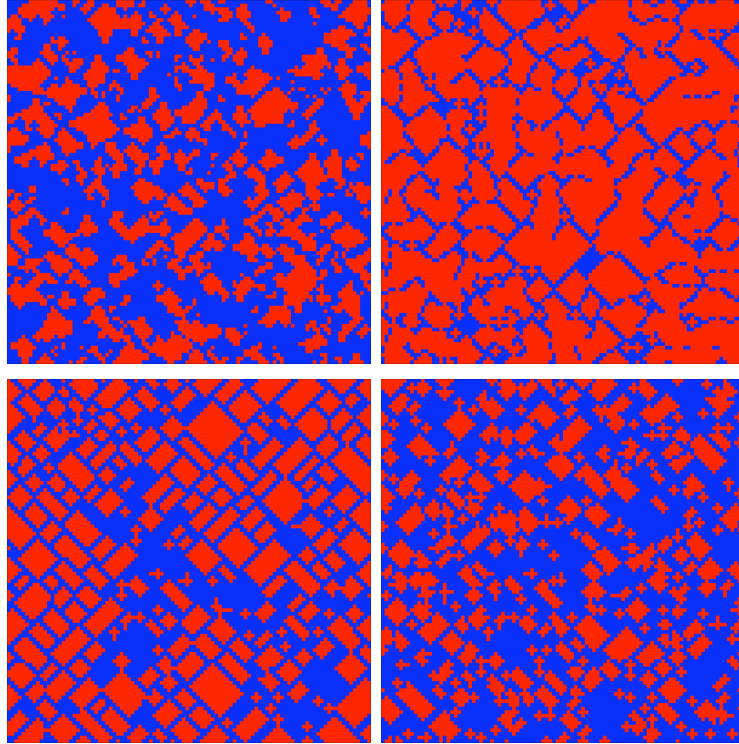


Figura 3.8: Configurações da população em grelhas regulares com vizinhança de von Neumann para o Dilema do Prisioneiro com  $S = -0.05$  e  $T = 1.4$  (à esquerda) e com  $S = -0.4$  e  $T = 1.15$  (à direita) durante a fase de equilíbrio. Em cima: actualização síncrona; Em baixo: actualização sequencial. As configurações da esquerda ilustram uma situação em que o assincronismo suporta mais cooperação e as da direita ilustram a situação contrária.

podemos falar de uma tendência geral uma vez que se obtêm resultados distintos com regras de transição diferentes: A actualização sequencial é prejudicial à cooperação quando se utiliza a regra o-melhor-vence mas benéfica quando se utiliza a regra de Moran. Tendo em conta que estas regras modelam, respectivamente, a ausência e a presença de ruído, e de modo a verificar se essa dependência existe, no próximo capítulo analisamos como varia a influência da dinâmica de actualização quando se utilizam regras de transição que permitem controlar o nível de ruído presente no processo de actualização.

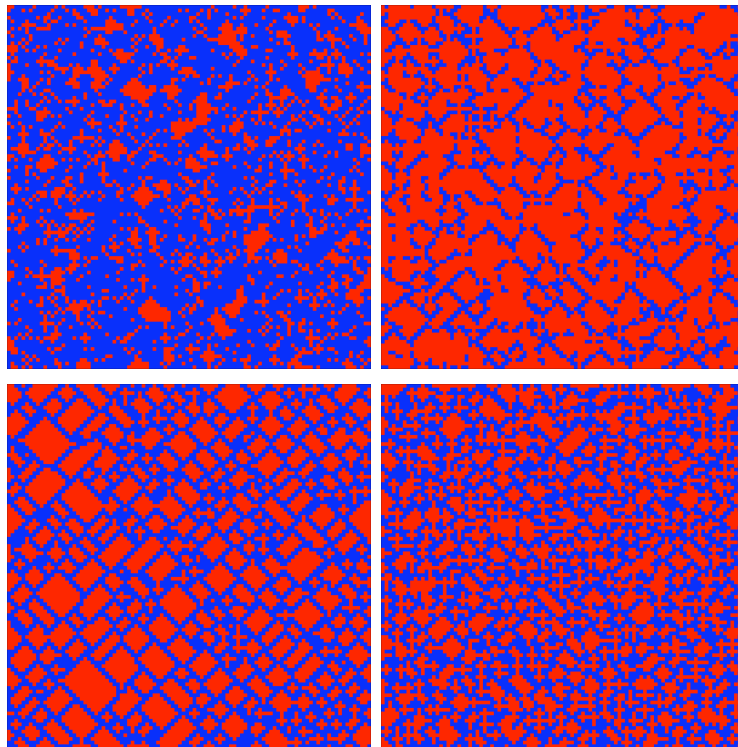


Figura 3.9: Configurações da população em grelhas regulares com vizinhança de von Neumann para o Snowdrift com  $S = 0.6$  e  $T = 1.7$  (à esquerda) e com  $S = 0.2$  e  $T = 1.2$  (à direita) durante a fase de equilíbrio. Em cima: actualização síncrona; Em baixo: actualização sequencial. As configurações da esquerda ilustram uma situação em que o assincronismo suporta mais cooperação e as da direita ilustram a situação contrária.

# Capítulo 4

## O Papel do Ruído

Neste capítulo, verificamos como varia a influência da dinâmica de actualização em função do ruído presente no processo de actualização de estratégias. Esta verificação torna-se necessária uma vez que vimos no capítulo anterior que se obtêm resultados distintos dependendo do nível de ruído modelado pela regra de transição, sobretudo em redes fortemente regulares. O objectivo deste capítulo é, assim, o de verificar se existe uma tendência geral na forma como a dinâmica de actualização influencia a emergência da cooperação quando se varia o ruído presente na regra de transição.

Na próxima secção começamos por descrever as regras de transição e os jogos utilizados, bem como os respectivos parâmetros. Veremos depois nas secções 4.2 e 4.3, respectivamente, como varia a influência da dinâmica de actualização em função do ruído e qual a influência directa deste sobre a proporção de agentes cooperantes na população. A Secção 4.3 complementa, de algum modo, a Secção 4.2, uma vez que nos permite perceber melhor os resultados nesta apresentados. Terminamos este capítulo com alguns comentários finais aos resultados na Secção 4.4.

### 4.1 Regras de Transição e Jogos Utilizados

De modo a explorar níveis intermédios de ruído no processo de actualização de estratégias, utilizamos duas regras de transição: a regra proporcional generalizada (regra PG), descrita no Capítulo 2 (Equação 2.10) e a regra de *Fermi* (Szabó

& Fáth, 2007). O grau de monitorização da vizinhança é diferente nas duas regras: Enquanto a regra PG tem em conta os ganhos de todos os vizinhos de um agente, a regra de Fermi avalia apenas o ganho de um vizinho. De acordo com a regra de Fermi, a probabilidade de um agente  $x$  imitar um vizinho  $y$ , escolhido aleatoriamente, é igual a

$$p(s_x \rightarrow s_y) = \frac{1}{1 + \exp[-(G_y - G_x)/K]}, \quad (4.1)$$

onde  $K > 0$  representa o ruído presente no processo de actualização de estratégias. Tal como na regra PG, à medida que  $K$  aumenta, a probabilidade de que os agentes imitem vizinhos menos bem sucedidos aumenta. Quando  $K \rightarrow 0$ ,  $y$  é sempre imitado se o seu ganho for superior ao de  $x$ . No entanto, ao contrário da regra PG,  $K \rightarrow 0$  não implica a imitação do vizinho mais bem sucedido uma vez que  $y$  é escolhido aleatoriamente. Isto é, quando  $K \rightarrow 0$  a regra de Fermi modela uma intensidade de selecção menor do que a regra PG.

Nas simulações realizadas utilizámos  $K \in \{0, 1/100, 1/10, 1/8, 1/6, 1/4, 1/2, 1\}$  para a regra PG. Estes valores foram seleccionados com base nos que são utilizados em Nowak et al. (1994) e após um conjunto preliminar de simulações onde tentámos perceber para que valores de  $K$  ocorriam maiores alterações no comportamento do modelo. Para a regra de Fermi utilizámos  $K \in [0, 0.1]$  em intervalos de 0.01 para o Dilema do Prisioneiro e  $K \in [0, 1]$  em intervalos de 0.1 para o Snowdrift. O intervalo utilizado com o Snowdrift é maior uma vez que este jogo é bastante menos sensível ao ruído do que o Dilema do Prisioneiro.

Neste capítulo e no resto desta tese utilizamos as versões de um parâmetro do Dilema do Prisioneiro e do Snowdrift frequentemente utilizadas na literatura:  $R = 1$ ,  $T = b \in [1, 2]$ ,  $S = P = 0$  para o Dilema do Prisioneiro e  $R = 1$ ,  $S = 1 - r$ ,  $T = 1 + r$ ,  $P = 0$ , com  $r \in [0, 1]$  para o Snowdrift. Estas versões são utilizadas porque permitem a comparação com os resultados de trabalhos anteriores e porque as conclusões que podem ser retiradas com estes subconjuntos, com as regras de transição utilizadas no capítulo anterior, são representativas das que podem ser retiradas para o respectivo quadrante no plano  $ST$ . Isto é, quando a actualização assíncrona é prejudicial nos quadrantes correspondentes ao Snowdrift e ao Dilema do Prisioneiro no plano  $ST$  é-o também para a versão de um parâmetro e vice-versa.

Neste e nos restantes capítulos, concentrar-nos-emos nestes dois jogos uma vez que os resultados do capítulo anterior mostram que o Caça ao Veado responde sempre da mesma forma à mudança de uma actualização síncrona para

uma actualização assíncrona: Quando esta mudança tem uma influência significativa, a actualização assíncrona beneficia a cooperação, independentemente da rede de contactos e regra de transição utilizadas. Em Grilo & Correia (2009a) apresentamos resultados para uma versão de um parâmetro deste jogo com  $R = 1$ ,  $0 < T = P = h < 1$ ,  $S = 0$ , além das versões de um parâmetro do Dilema do Prisioneiro e do Snowdrift. Esta parametrização do Caça ao Veado, embora esteja mais próxima da descrição de Rousseau (Skyrms, 2004) que deu origem ao nome do jogo, não pertence ao plano  $ST$ . No entanto, os resultados são totalmente coerentes com os que foram descritos no capítulo anterior.

Neste capítulo concentrar-nos-emos também nas redes de Watts-Strogatz e nas redes de escala-livre com ganhos normalizados por serem os casos onde o papel do ruído mais se faz sentir na influência da dinâmica de actualização. Quando os jogos são jogados em redes de escala-livre com ganhos acumulados e com a regra PG, confirma-se o resultado que vimos no capítulo anterior para as regras o-melhor-vence e de Moran: A actualização assíncrona suporta sempre mais cooperação do que a actualização síncrona. Por outro lado, nas mesmas condições mas com a regra de Fermi, a influência da dinâmica de actualização é reduzida embora se verifique uma ligeira tendência para a actualização assíncrona suportar mais cooperação do que a actualização síncrona. No próximo capítulo voltaremos a abordar a combinação (redes de escala-livre, ganhos acumulados).

Para medir a influência da dinâmica de actualização consideraremos a diferença  $\Delta\rho = \rho_{seq} - \rho_{sinc}$ , onde  $\rho_{seq}$  e  $\rho_{sinc}$  são, respectivamente, valores de  $\rho$  obtidos com uma actualização sequencial e com uma actualização síncrona para o mesmo conjunto de parâmetros (jogo, rede de contactos e ruído). Valores positivos ou negativos de  $\Delta\rho$  significam que a actualização sequencial suporta, respectivamente, mais ou menos cooperação que a actualização síncrona. Os gráficos de  $\Delta\rho$  e  $\rho$  podem ser todos consultados, respectivamente, nos anexos B e C.

## 4.2 Influência da Dinâmica de Actualização em Função do Ruído

A Figura 4.1 mostra os resultados para o Dilema do Prisioneiro e o Snowdrift jogados em grelhas regulares, de mundo-pequeno e escala-livre com a regra PG. Com esta regra, e para ambos os jogos,  $\Delta\rho < 0$  ocorre com mais frequência e maior intensidade em grelhas regulares e apenas para  $K \leq 1/10$ . À medida que se aumenta o valor de  $\phi$ , diminuem as situações em que  $\Delta\rho < 0$ , seja em quantidade seja em intensidade. Para redes aleatórias ( $\phi = 1$ ), praticamente não existem situações em que  $\Delta\rho < 0$  (ver Anexo B). Em redes de escala-livre,  $\Delta\rho < 0$  ocorre apenas quando são utilizados ganhos normalizados e para os casos extremos  $b = 1$  (Dilema do Prisioneiro) e  $r = 0$  (Snowdrift) quando  $K \rightarrow 0$ .

Os resultados obtidos com a regra de Fermi (Figura 4.2) são coerentes com os que são obtidos com a regra PG no que diz respeito à variação de  $\Delta\rho$  em função de  $K$ :  $\Delta\rho < 0$  ocorre apenas para valores mais baixos de ruído. Estas situações ocorrem sobretudo para o Snowdrift, sendo praticamente inexistentes no caso do Dilema do Prisioneiro. No entanto, a regra de Fermi é menos sensível à dinâmica de actualização. Isto é, em geral,  $|\Delta\rho|$  é menor para a regra de Fermi. No caso do Dilema do Prisioneiro verifica-se também que esta regra suporta menos cooperação do que a regra PG. Isso reflecte-se no facto de  $\Delta\rho = 0$  para a maior parte dos valores de  $b$ . Nestes casos,  $\rho = 0$  tanto para a actualização síncrona como para a actualização sequencial.

Existem diferenças na forma como a influência da dinâmica de actualização se faz sentir nos dois jogos: Em geral, quando esta influência tem algum significado, o Dilema do Prisioneiro é mais sensível do que o Snowdrift. No entanto,  $\Delta\rho \neq 0$  ocorre com mais frequência para o Snowdrift do que para o Dilema do Prisioneiro. Isto é, o número de situações (valores de  $r/b$ ) em que a influência da dinâmica de actualização se faz sentir é maior para o Snowdrift do que para o Dilema do Prisioneiro. Isto deve-se ao facto de no Dilema do Prisioneiro ser mais frequente a convergência para Tudo-C ou Tudo-D para os dois tipos de dinâmica de actualização.

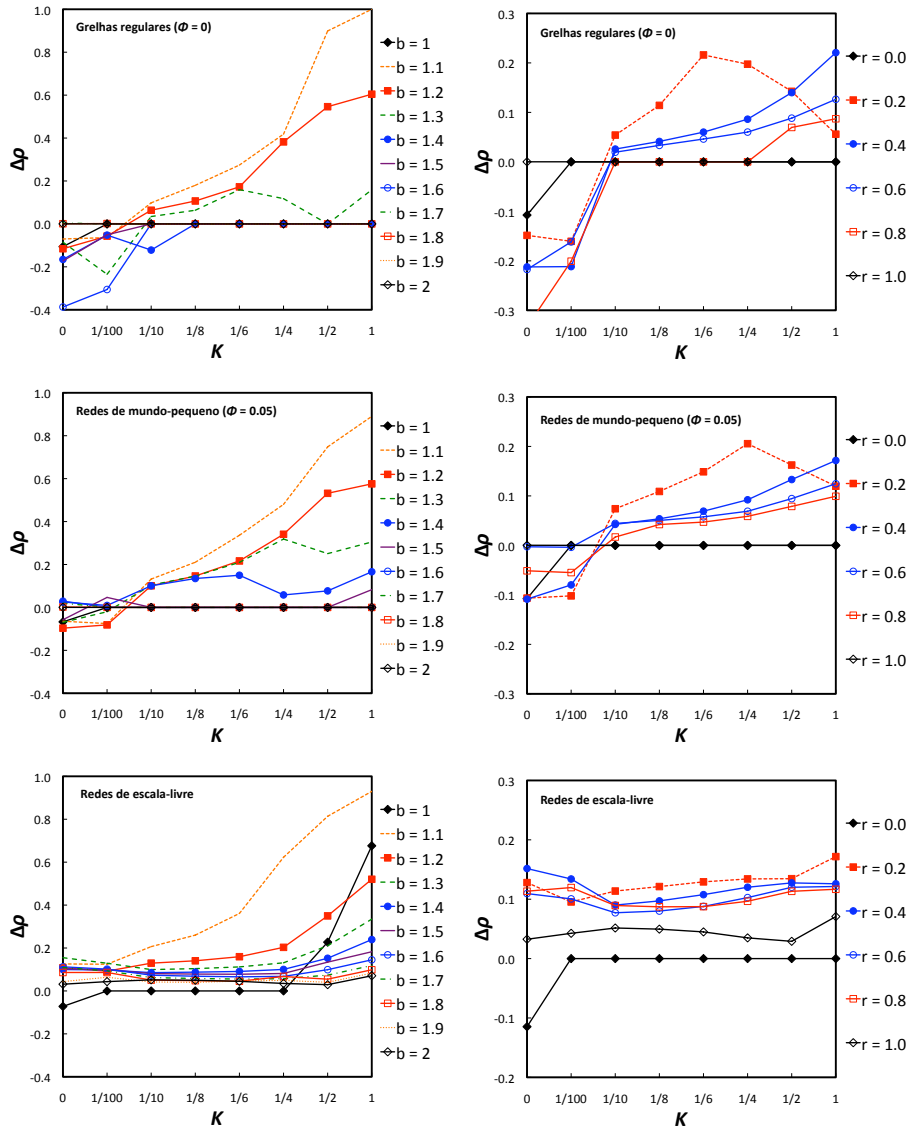


Figura 4.1: Valores de  $\Delta\rho$  obtidos com a regra PG quando o Dilema do Prisioneiro (à esquerda) e o Snowdrift (à direita) são jogados em grelhas regulares (em cima), em redes de mundo-pequeno com  $\phi = 0.05$  (a meio) e em redes de escala-livre de Barabási-Albert com ganhos normalizados (em baixo). Notem-se as escalas diferentes. Para o Snowdrift mostramos resultados apenas para valores pares de  $r$  de modo a facilitar a leitura dos gráficos. A actualização sequencial é prejudicial à cooperação sobretudo para redes regulares e apenas para valores baixos de ruído. Em redes de escala-livre com ganhos normalizados  $\Delta\rho < 0$  apenas para os casos extremos  $b = 1$  (Dilema do Prisioneiro) e  $r = 0$  (Snowdrift) e apenas para  $K \rightarrow 0$ .

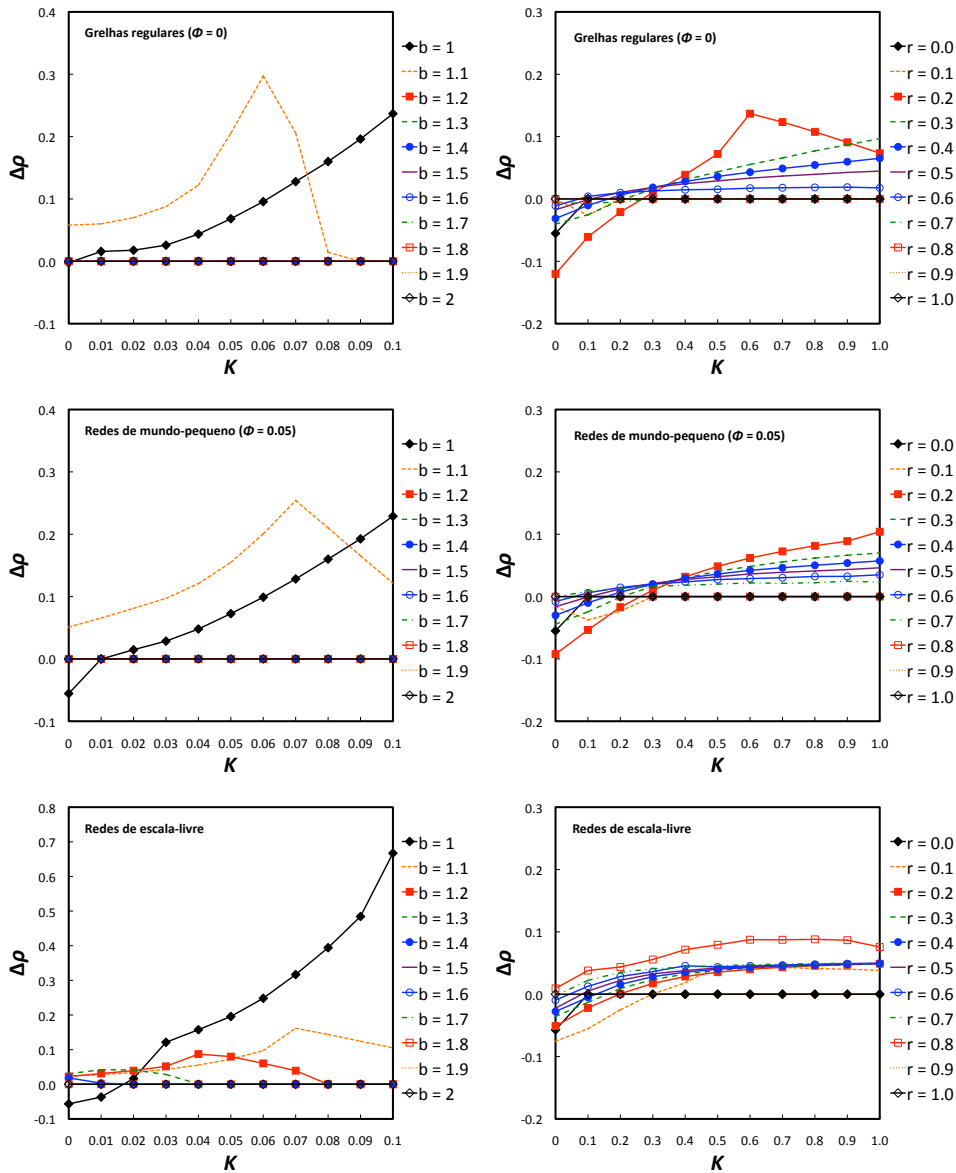


Figura 4.2: Como na Figura 4.1 mas para a regra de Fermi. A actualização sequencial é prejudicial apenas para valores baixos de ruído. Notem-se as escalas diferentes. Com o Dilema do Prisioneiro  $\Delta\rho < 0$  ocorre apenas para o caso extremo  $b = 1$ . A regra de Fermi é menos sensível à dinâmica de actualização do que a regra PG e, além disso, também suporta menos cooperação no caso do Dilema do Prisioneiro: a maior parte dos valores de  $\Delta\rho$  é igual a 0 porque  $\rho = 0$  tanto para a actualização síncrona como para a actualização sequencial.

Os resultados descritos nesta secção, obtidos com duas regras de transição diferentes, mostram que os casos em que a actualização assíncrona é prejudicial à emergência da cooperação ocorrem apenas para valores reduzidos de ruído. Estes resultados são totalmente coerentes com os que foram obtidos em trabalhos anteriores, nomeadamente com a regra o-melhor-vence (regra PG com  $K \rightarrow 0$ ) e com a regra de Moran (regra PG com  $K = 1$ ). Lembramos que trabalhos anteriores mostram que a actualização sequencial suporta, menos ou mais agentes cooperantes conforme seja utilizada, respectivamente, a regra o-melhor-vence (Huberman & Glance, 1993; Nowak et al., 1994; Newth & Cornforth, 2007) ou a regra de Moran (Nowak et al., 1994; Tomassini et al., 2006). No entanto, o facto de as regras PG e de Fermi permitirem a exploração de graus intermédios de ruído e de os resultados se verificarem para diferentes tipos de redes de contactos permitem-nos chegar a uma conclusão mais geral: o assincronismo é, em geral, benéfico à emergência da cooperação. Esta conclusão assume maior relevância se tivermos em conta que as únicas excepções se verificam para valores reduzidos de ruído e o facto de em sistemas reais existir normalmente algum ruído.

### 4.3 Influência do Ruído Sobre a Proporção de Agentes Cooperantes

Nas figuras 4.1 e 4.2 é visível que para alguns valores de  $b$  e  $r$ ,  $\Delta\rho$  diminui à medida que  $K$  aumenta acima de determinado valor. Isto acontece para ambas as regras e está relacionado com a influência directa de  $K$  sobre o valor de  $\rho$ . Como ilustra a Figura 4.3, nestes casos, à medida que  $K$  aumenta, o valor de  $\rho$  aproxima-se ou atinge 0 para a actualização síncrona (e, por vezes, também para a actualização sequencial). Como efeito colateral, a influência da dinâmica de actualização diminui para valores mais elevados de  $K$ . No entanto, salientamos que, mesmo nestes casos, o valor de  $\Delta\rho$  nunca se torna negativo.

Em geral, o aumento do nível de ruído no processo de actualização de estratégias é prejudicial à sobrevivência de agentes cooperantes no Dilema do Prisioneiro, tanto para a regra PG (Nowak et al., 1994) como para a regra de Fermi (Szabó et al., 2005) e para ambos os tipos de dinâmica de actualização (Figura 4.4). O facto de  $\Delta\rho$  aumentar à medida que se aumenta  $K$  (exceptuando as situações referidas no parágrafo anterior em que a população converge para Tudo-D a partir de determinado valor de  $K$ ), significa que o valor de  $\rho$  diminui mais lentamente

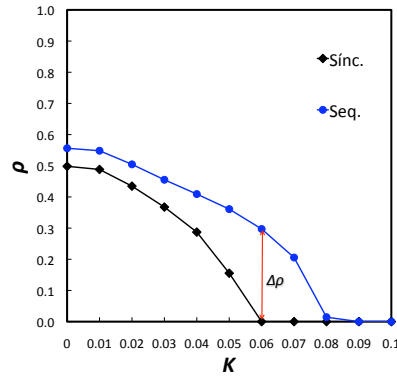


Figura 4.3: Valores de  $\rho$  para o Dilema do Prisioneiro, com  $b = 1.1$ , jogado em grelhas regulares com a regra de Fermi. O facto de a população convergir para Tudo-D para  $K \geq 0.06$  quando a actualização é síncrona, faz com que o valor de  $\Delta\rho$  diminua para  $K \geq 0.06$ . Para  $K \gtrsim 0.08$  a população converge para Tudo-D também para a actualização sequencial, resultando em  $\Delta\rho = 0$ .

com uma actualização sequencial do que com uma actualização síncrona. Existem duas excepções a este comportamento que ocorrem com a regra PG. A primeira verifica-se para  $b \leq 1.1$ . Neste caso, com uma actualização sequencial,  $\rho$  aumenta com  $K$  até atingir 1 (Tudo-C) enquanto que diminui com uma actualização síncrona para  $K > 1/100$ . Este comportamento tem como efeito um aumento do valor de  $\Delta\rho$  à medida que se aumenta  $K$ . A outra excepção verifica-se para  $K > 1/2$ . Neste caso, verifica-se também um aumento de  $\rho$  para alguns valores de  $b$  com uma actualização sequencial e uma diminuição com uma actualização síncrona, o que contribuiu também para que  $\Delta\rho$  aumente.

A influência do ruído no Snowdrift é menos clara. Com a regra de Fermi,  $\rho$  aumenta para  $r \leq 0.5$  e diminui para  $r > 0.5$  para os dois tipos de dinâmica de actualização (figuras 4.5 (a) e 4.5 (b)). O facto de a influência da dinâmica de actualização ser maior para valores mais baixos de  $r$  significa que nestes casos o valor de  $\rho$  aumenta mais rapidamente com  $K$  quando se utiliza uma dinâmica sequencial e que diminui de forma semelhante para os dois tipos de dinâmica de actualização para valores mais altos de  $r$ . Com a regra PG verifica-se uma variação não monótona de  $\rho$  com  $K$  quando se utiliza uma actualização síncrona (Figura 4.5 (d)): O valor de  $\rho$  é menor para valores intermédios de ruído. Com uma actualização sequencial, este comportamento verifica-se apenas para alguns valores intermédios de  $r$  ( $r = 0.3$  e  $r = 0.5$ ); Para os restantes valores de  $r$  o valor

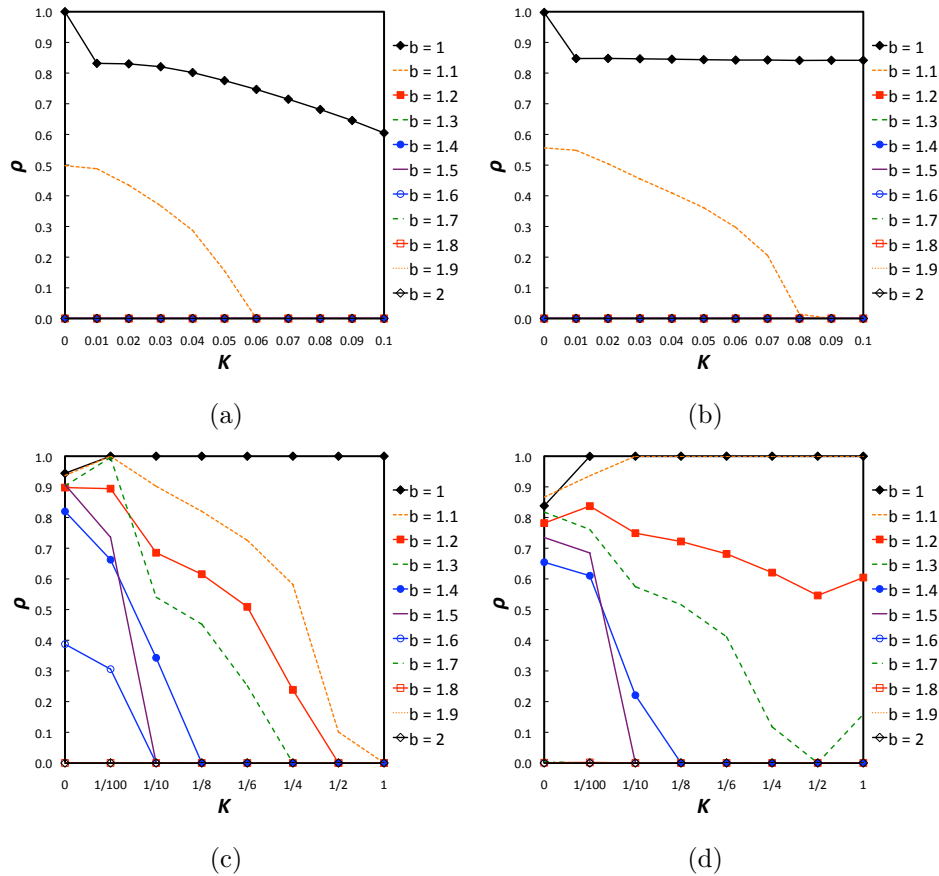


Figura 4.4: Valores de  $\rho$  em função de  $K$  para o Dilema do Prisioneiro jogado com a regra de Fermi (em cima) e a regra PG (em baixo) em grelhas regulares. À esquerda: actualização síncrona; À direita: actualização sequencial. Ver pormenores no texto principal.

de  $\rho$  aumenta sempre com  $K$  (Figura 4.5 (d)), o que resulta num aumento de  $\Delta\rho$  à medida que  $K$  aumenta.

## 4.4 Resumo e Comentários Finais

Os resultados descritos neste capítulo são claros quanto à influência da dinâmica de actualização na evolução da cooperação: Quando a dinâmica de actualização tem alguma influência, a actualização sequencial leva, em geral, ao aumento da proporção de agentes cooperantes na população. Este comportamento não se verifica apenas quando o nível de ruído presente na regra de transição é inexistente

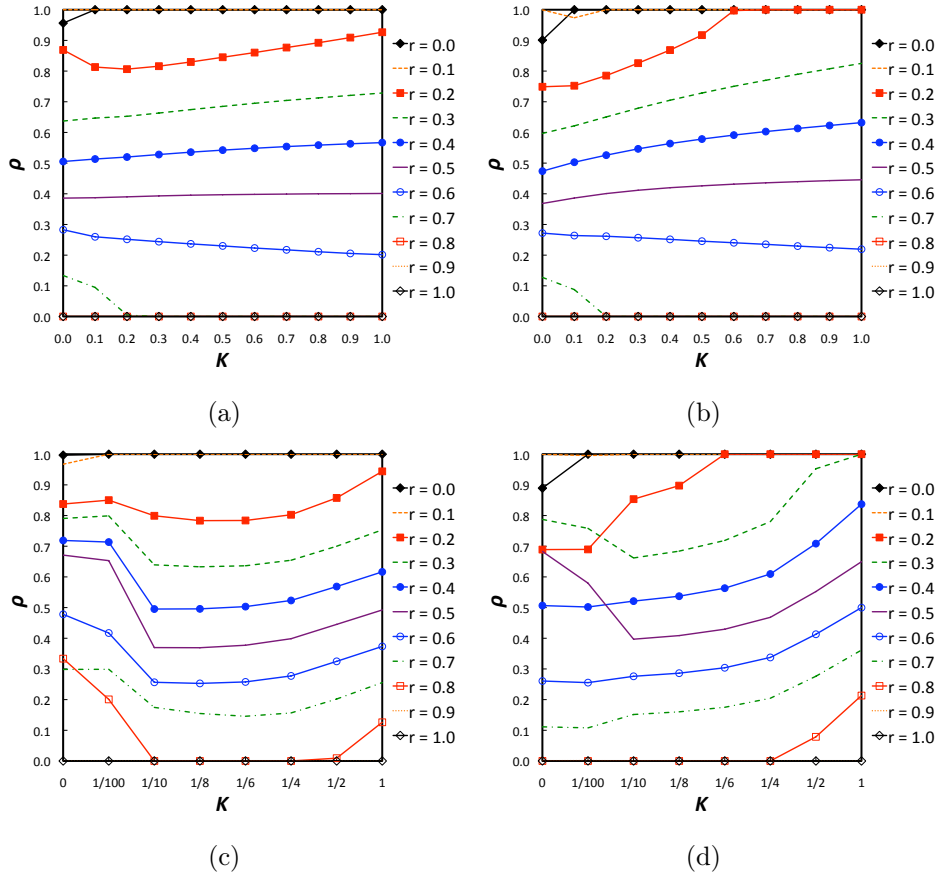


Figura 4.5: Valores de  $\rho$  em função de  $K$  para o Snowdrift jogado com a regra de Fermi (em cima) e a regra PG (em baixo) em grelhas regulares. À esquerda: actualização síncrona; À direita: actualização sequencial. Ver pormenores no texto principal.

ou muito baixo e sobretudo quando os jogos são jogados sobre redes de contactos com um elevado grau de regularidade. Estes resultados, obtidos com duas regras de transição diferentes, constituem uma contribuição em relação a trabalhos anteriores na medida em que nos permitem ter uma ideia geral consideravelmente mais precisa sobre a influência da dinâmica de actualização, consequência da exploração de um grande número de condições, nomeadamente em relação ao nível de ruído e à rede de contactos.

Estes resultados indicam que, em sistemas reais, onde normalmente existirá ruído no processo de actualização de estratégias, a cooperação pode ser promovida se a actualização for assíncrona. Isto pode ser conseguido evitando a utilização de mecanismos de acoplamento que levem os agentes a sincronizar os seus momentos

de actualização, ou abstendo-nos simplesmente de forçar os agentes a actualizar a sua estratégia apenas em momentos específicos comuns a toda a população.

Finalmente, e como foi já referido, muitos investigadores defendem que os sistemas reais são assíncronos na maioria dos casos. Tendo em conta este aspecto, julgamos que os resultados descritos neste capítulo contribuem também para o reconhecimento dos jogos evolucionários assíncronos como modelos adequados ao estudo dos mecanismos que levam à evolução da cooperação.



# Capítulo 5

## Assincronismo Intermédio

A actualização sequencial consiste num caso extremo de assincronismo, em que é actualizado apenas um agente em cada iteração. Este tipo de actualização modela uma situação em que o resultado de uma actualização individual, isto é, a informação sobre a estratégia adoptada por um agente, fica imediatamente acessível aos seus vizinhos, podendo ser utilizada por estes no seu próprio processo de actualização. Ou seja, a actualização sequencial modela uma situação em que o tempo de transmissão/percepção da informação é sempre menor do que o menor período entre cada duas actualizações. Embora este cenário seja admissível em alguns casos particulares como, por exemplo, o decaimento radioactivo (Lamarsh & Baratta, 2001), é menos plausível em sistemas biológicos e sociais (Axtell, 2000; Gershenson, 2002; Campbell & Wu, 2009). É, assim, necessário verificar o comportamento do sistema para graus intermédios de assincronismo. Para isso, utilizamos o método de actualização *dinâmica assíncrona estocástica* (Fatès & Morvan, 2005), já descrito no Capítulo 2, que depende de um parâmetro  $\alpha$  que representa a *taxa de sincronismo* do sistema.

Neste capítulo, começamos, na Secção 5.1, por descrever as modificações ao modelo descrito no Capítulo 3 e à configuração das simulações de modo a utilizarmos níveis intermédios de assincronismo. Na Secção 5.2, averiguamos se a proporção de agentes cooperantes na população muda de forma monótona com a taxa de sincronismo. Isto é, verificamos se o valor de  $\rho$  muda sempre no mesmo sentido à medida que alteramos o valor de  $\alpha$  num determinado sentido. Este estudo é importante na medida em que nos permite perceber até que ponto a avaliação da influência máxima da dinâmica de actualização pode ser baseada nos resultados obtidos com as actualizações síncrona e sequencial. Passamos

depois, na Secção 5.3, ao estudo da sensibilidade local da proporção de agentes cooperantes a pequenas mudanças no valor da taxa de sincronismo. Isto é, verificamos se o valor de  $\rho$  muda de forma gradual à medida que passamos de uma actualização síncrona para uma actualização sequencial ou se, pelo contrário, existem situações em que pequenas mudanças no valor de  $\alpha$  levam a grandes mudanças no valor de  $\rho$ .

Como pudemos constatar nos dois capítulos anteriores, a sensibilidade dos jogos evolucionários à dinâmica de actualização depende da regra de transição. De facto, embora esta sensibilidade possa variar também com as características da rede de contactos, a regra de transição pode anular por completo o papel dos outros parâmetros. Por exemplo, a regra de replicação é completamente insensível à dinâmica de actualização independentemente da rede de contactos e do jogo que é jogado (ver Capítulo 3). Importa, por isso, identificar as características das regras de transição responsáveis pela sensibilidade dos jogos evolucionários à dinâmica de actualização. Este é o tema da Secção 5.4. Terminamos o capítulo com alguns comentários finais aos resultados.

## 5.1 Dinâmica Assíncrona Estocástica

Quando se utiliza a dinâmica assíncrona estocástica para modelar a dinâmica de actualização, em cada iteração, cada agente é escolhido com probabilidade  $\alpha$ . Os agentes escolhidos e os respectivos vizinhos jogam o jogo com os seus vizinhos. A seguir, os agentes escolhidos actualizam de forma síncrona as suas estratégias utilizando a regra de transição. Este método permite cobrir todo o espaço entre a actualização síncrona e a actualização sequencial:  $\alpha = 1$  corresponde à actualização síncrona; à medida que  $\alpha \rightarrow \frac{1}{n}$ , onde  $n$  representa o tamanho da população, o modelo aproxima-se de uma actualização sequencial.

Tendo em conta que o número de actualizações individuais pode variar entre iterações quando  $\alpha \neq 1$ , nestes casos, o número de iterações foi definido de modo a que o número total de actualizações individuais seja aproximadamente o mesmo que para o caso  $\alpha = 1$ . Mais especificamente, cada simulação termina depois da primeira iteração em que o número de actualizações individuais excede  $n * 10^4$ , enquanto que a medição de  $\rho$  começa na primeira iteração em que o número de actualizações individuais excede  $n * 9 \times 10^3$ .

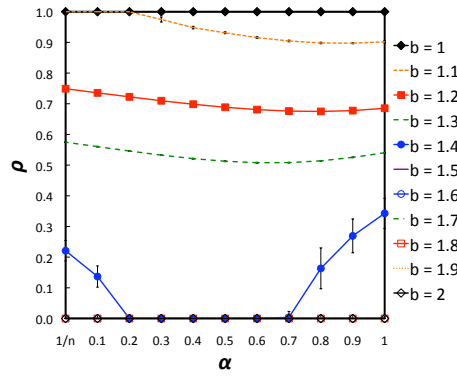


Figura 5.1: Gráfico de  $\rho$  em função de  $\alpha$ . Condições: Dilema do Prisioneiro, grelhas regulares e regra PG com  $K = 1/10$ .

Cada simulação depende agora de quatro factores: o jogo, a rede de contactos, a regra de transição e a taxa de sincronismo. Dado um jogo, para cada combinação de uma rede de contactos e de uma regra de transição construímos um gráfico como o da Figura 5.1, que mostra o valor de  $\rho$  em função de  $\alpha$ . Cada linha do gráfico corresponde a um valor de  $b$  ou  $r$ , conforme se trate do Dilema do Prisioneiro ou do Snowdrift. Ou seja, cada linha corresponde a uma combinação de uma rede de contactos, um regra de transição e um valor de  $b$  ou  $r$ . Por simplicidade no resto do capítulo referiremos este tipo de combinação simplesmente como *linha*.

## 5.2 Monotonia de $\rho$ em Relação a $\alpha$

De modo a avaliar o *grau de não-monotonia* de  $\rho$  em relação a  $\alpha$ , vamos considerar para cada linha a quantidade:

$$nM = \left[ \sum_{i=1}^{10} |\rho(0.1i) - \rho(0.1(i-1))| \right] - |\rho(1) - \rho(1/n)|, \quad (5.1)$$

onde  $\rho(\alpha)$  representa o valor de  $\rho$  obtido para um determinado valor de  $\alpha$ .<sup>1</sup> O primeiro termo consiste no somatório do módulo das diferenças dos valores de  $\rho$  obtidos com valores de  $\alpha$  consecutivos. O segundo termo consiste no módulo

<sup>1</sup>Nesta expressão, quando  $i = 0$  temos  $\rho(0.1(i-1)) = \rho(0)$  que deve entender-se como  $\rho(1/n)$ . Optámos por representar a fórmula deste modo para não complicar desnecessariamente a sua forma.

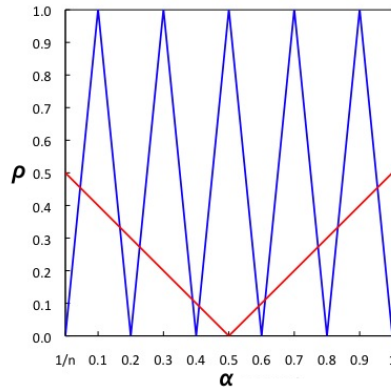


Figura 5.2: Duas situações hipotéticas de não-monotonia:  $nM = 10$  para a linha azul e  $nM = 1$  para a linha vermelha.

da diferença do valor de  $\rho$  obtido com valores extremos de  $\alpha$  (1 e  $1/n$ ). Se um linha é monótona, o valor do primeiro termo é sempre igual ao valor do segundo termo e, logo, o valor de  $nM$  é 0. Se uma linha é não monótona, o valor do primeiro termo é superior ao valor do segundo termo. Neste caso, o valor de  $nM$  é tanto maior quanto mais e/ou maiores são as flutuações do valor de  $\rho$ . Tendo em conta que são utilizados 11 valores de  $\alpha$ , o que corresponde a 10 intervalos entre valores consecutivos de  $\alpha$ , e que  $0 \leq \rho \leq 1$ , o valor máximo de  $nM$  é 10. A linha azul da Figura 5.2 mostra uma situação hipotética em que  $nM = 10$ . Na prática, este tipo de situações nunca ocorre e os valores obtidos são sempre menores do que 1. Repare-se, no entanto, que  $nM = 1$  corresponde já a um valor bastante significativo de não-monotonia como podemos ver na linha vermelha da Figura 5.2.

As tabelas 5.1 e 5.2 mostram a média  $\overline{nM}$  dos valores de  $nM$  para cada gráfico quando, respectivamente, o Dilema do Prisioneiro e o Snowdrift são jogados em redes de Watts-Strogatz com a regra PG (ver Anexo D para consultar todas as tabelas de  $\overline{nM}$ ). Estes são os casos onde existem mais linhas não monótonas e com maiores valores de  $nM$ . Apesar disso, podemos observar que, na maioria dos casos,  $\overline{nM}$  é igual ou está muito próximo de 0 e que os valores mais elevados ocorrem para valores menores de  $K$ . Ou seja, em geral, o valor de  $\overline{nM}$  diminui à medida que  $K$  aumenta. Para o Snowdrift verifica-se também que  $\overline{nM}$  diminui à medida que  $\phi$  aumenta. Para o Dilema do Prisioneiro esta diminuição verifica-se apenas para  $\phi > 0.05$ . A Figura 5.3 mostra, para cada um dos jogos, os gráficos de  $\rho$  para os quais o valor de  $\overline{nM}$  é maior.

As tabelas 5.1 e 5.2 mostram também que o desvio padrão é maior do que a média em grande parte das situações em que  $\overline{nM} \neq 0$ . Isto deve-se ao facto de que  $nM = 0$  para a maioria das linhas de cada gráfico, existindo apenas um pequeno número de linhas para os quais  $nM \neq 0$ . No entanto, o valor do desvio padrão é ainda assim sempre pequeno. Essencialmente, isto significa que, em geral, o valor de  $\rho$  para os dois jogos muda de forma monótona com  $\alpha$  quando se utiliza a regra PG.

No que diz respeito à regra de Fermi, verifica-se também que o valor de  $\rho$  varia quase sempre de forma monótona com  $\alpha$ , sendo que as situações de não-monotonia existentes são muito pouco significativas. O mesmo acontece quando os jogos são jogados em redes de escala-livre, independentemente da regra de transição utilizada. Estes resultados são relevantes na medida em que significa que a influência máxima da dinâmica de actualização no valor de  $\rho$  pode ser avaliada com base nos resultados obtidos com as actualizações síncrona e sequencial, tal como fizemos nos Capítulos 3 e 4.

		$\phi$				
		0	0.01	0.05	0.1	1
$K$	0	0.027 0.065	0.052 0.115	0.049 0.097	0.035 0.040	0.007 0.016
	1/100	0.026 0.045	0.034 0.062	0.051 0.070	0.038 0.045	0.003 0.010
	1/10	0.049 0.132	0.048 0.130	0.007 0.018	0.000 0.000	0.0000.000
	1/8	0.008 0.026	0.007 0.021	0.013 0.042	0.000 0.000	0.0000.000
	1/6	0.023 0.077	0.011 0.035	0.000 0.000	0.000 0.000	0.0000.000
	1/4	0.000 0.000	0.000 0.000	0.000 0.000	0.000 0.000	0.0000.000
	1/2	0.000 0.000	0.000 0.000	0.000 0.000	0.000 0.000	0.0000.000
	1	0.000 0.000	0.000 0.000	0.000 0.000	0.000 0.000	0.0000.000

Tabela 5.1: Valores de  $\overline{nM}$  para o Dilema do Prisioneiro jogado em redes de Watts-Strogatz com a regra PG (desvio padrão a cinzento).  $\overline{nM} = 0$  para a maioria dos casos e, em geral, o valor de  $\overline{nM}$  desce à medida que  $K$  aumenta.

O facto de os casos de não-monotonia ocorrerem sobretudo para redes com algum grau de regularidade e também o facto de a intensidade de selecção não ser tão elevada na regra de Fermi como é na regra PG quando  $K \rightarrow 0$ , sugere que a não-monotonia de  $\rho$  em relação a  $\alpha$  está associada à regularidade nas ligações,

		$\phi$				
		0	0.01	0.05	0.1	1
$K$	0	0.158 0.275	0.140 0.243	0.073 0.062	0.039 0.039	0.009 0.019
	1/100	0.134 0.240	0.096 0.155	0.066 0.058	0.043 0.059	0.004 0.011
	1/10	0.006 0.013	0.005 0.010	0.000 0.000	0.000 0.000	0.0000.000
	1/8	0.000 0.000	0.000 0.000	0.000 0.000	0.000 0.000	0.0000.000
	1/6	0.000 0.000	0.000 0.000	0.000 0.000	0.000 0.000	0.0000.000
	1/4	0.000 0.000	0.000 0.000	0.000 0.000	0.000 0.000	0.0000.000
	1/2	0.000 0.000	0.000 0.000	0.000 0.000	0.000 0.000	0.0000.000
	1	0.000 0.000	0.000 0.000	0.000 0.000	0.000 0.000	0.0000.000

Tabela 5.2: Valores de  $\overline{nM}$  para o Snowdrift jogado em redes de Watts-Strogatz com a regra PG (desvio padrão a cinzento).  $\overline{nM} = 0$  para a maioria dos casos e o valor de  $\overline{nM}$  desce à medida que tanto  $\phi$  como  $K$  aumentam.

e, sobretudo, a uma intensidade de selecção elevada. Este resultado mostra que nesses casos a exploração de graus intermédios de assincronismo enriquece as conclusões.

Através da análise dos gráficos de  $\rho$  podemos também verificar que, para ambos os jogos, na maior parte das situações de não-monotonia, existe uma gama de valores intermédios de  $\alpha$  para os quais o valor de  $\rho$  é menor do que os que são obtidos com valores extremos de  $\alpha$ . Em algumas situações, como a que é ilustrada no gráfico da Figura 5.3, correspondente ao Dilema do Prisioneiro quando  $b = 1.6$ , este efeito pode representar a diferença entre existirem ou não agentes cooperantes na população.

### 5.3 Sensibilidade Local à Taxa de Sincronismo

Como vimos na secção anterior, o facto de, em geral, o valor de  $\rho$  variar de forma monótona com  $\alpha$  significa que os valores obtidos com uma actualização síncrona e uma actualização sequencial nos permitem ter uma boa ideia da influência máxima da dinâmica de actualização sobre  $\rho$ . No entanto, uma breve análise aos gráficos de  $\rho$ , sobretudo os que correspondem à regra PG, mostra que o valor de

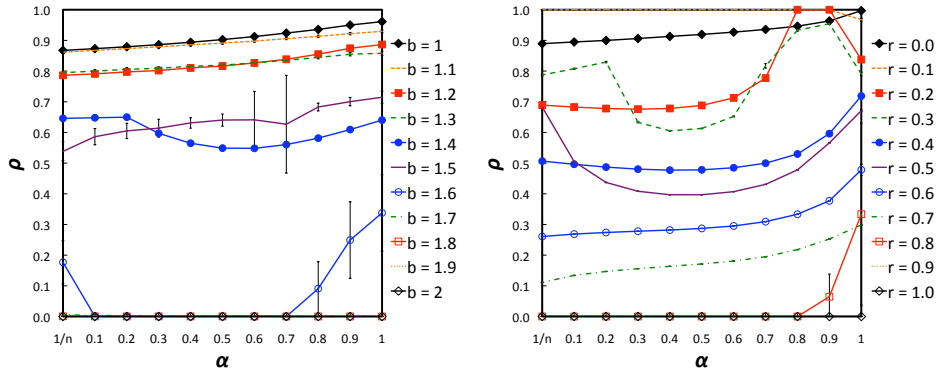


Figura 5.3: Gráficos de  $\rho$  correspondentes aos valores máximos de  $\overline{nM}$ . À esquerda: Dilema do Prisioneiro, redes de mundo-pequeno com  $\phi = 0.01$  e regra PG com  $K \rightarrow 0$  (regra o-melhor-vence); À direita: Snowdrift, redes regulares e regra PG com  $K \rightarrow 0$ .

$\rho$  nem sempre varia de forma gradual à medida que variamos  $\alpha$ . Isto mostra que é necessário analisarmos a sensibilidade de  $\rho$  a pequenas variações de  $\alpha$ . Para isso, seguimos uma metodologia semelhante à que é utilizada em Fatès & Morvan (2005) para autómatos celulares calculando, para cada linha, as quantidades:

$$sl_{max} = \max(|\rho(\alpha) - \rho(\alpha - 0.1)|), \alpha = 1, 0.9, \dots, 0.1 \quad (5.2)$$

e

$$sl_{sinc} = |\rho(1) - \rho(0.9)|, \quad (5.3)$$

onde, como na Equação 5.1,  $\rho(\alpha)$  representa o valor de  $\rho$  obtido para um determinado valor de  $\alpha$ .<sup>2</sup> A quantidade  $sl_{max}$  corresponde ao valor absoluto do maior salto no valor de  $\rho$  entre dois valores consecutivos de  $\alpha$  sendo, por isso, uma estimativa da sensibilidade local do modelo a  $\alpha$ . Por seu lado,  $sl_{sinc}$  corresponde ao módulo da diferença entre o valor de  $\rho$  obtido com  $\alpha = 1$  e  $\alpha = 0.9$ , dando-nos, assim, a sensibilidade do modelo quando se passa de uma dinâmica síncrona perfeita para uma dinâmica aproximadamente síncrona.

Nesta secção concentrar-nos-emos nos resultados obtidos com a regra PG uma vez que o valor de  $\rho$  varia de forma gradual com  $\alpha$  quando é utilizada a regra de Fermi. Os gráficos da Figura 5.4 mostram os valores obtidos com estas duas

<sup>2</sup>Na expressão de  $sl_{max}$ , quando  $\alpha = 0.1$  temos  $sl_{max} = \max(|\rho(0.1) - \rho(0)|)$ , que deve entender-se como  $sl_{max} = \max(|\rho(0.1) - \rho(1/n)|)$ . Tal como na Equação 5.1, optámos por representar a expressão deste modo para não complicar desnecessariamente a sua forma.

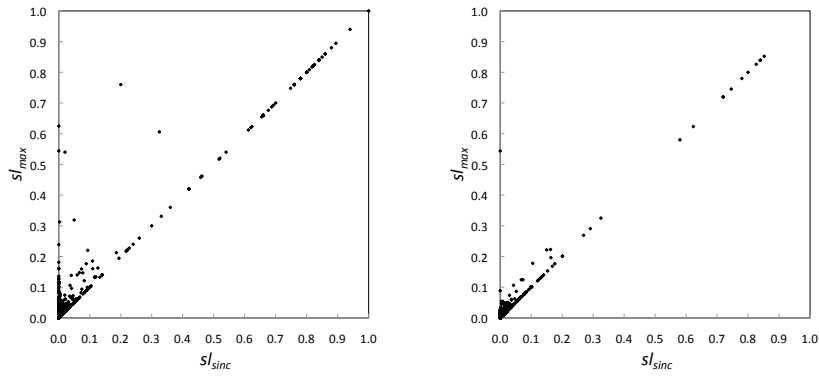


Figura 5.4: Valores de  $sl_{max}$  e  $sl_{sinc}$  para o Dilema do Prisioneiro (à esquerda) e para o Snowdrift (à direita), obtidos, tanto para redes de Watts-Strogatz, como para redes de escala-livre com ganhos normalizados e ganhos acumulados.

medidas para os dois jogos quando é utilizada a regra PG. A maioria dos valores de  $sl_{max}$  e  $sl_{sinc}$  estão abaixo de 0.1, pelo que podemos considerar que, em geral, os dois jogos são pouco sensíveis a pequenas mudanças de  $\alpha$ . No entanto, podemos ver que existem situações de grande sensibilidade. Para ambos os jogos, estas situações ocorrem sobretudo em redes de escala-livre quando são utilizados ganhos acumulados. Este caso será analisado com mais pormenor na próxima secção.

Na Figura 5.4 podemos também observar que, para ambos os jogos,  $sl_{max}$  e  $sl_{sinc}$  têm frequentemente o mesmo valor (valores situados na diagonal dos gráficos). Isto acontece para 27.3% e 45.8% dos pontos, respectivamente, para o Dilema do Prisioneiro e para o Snowdrift e significa que estes jogos são mais sensíveis quando passamos de uma dinâmica síncrona perfeita para uma dinâmica quase síncrona. Este comportamento indicia que é necessário ter algum cuidado na escolha da dinâmica de actualização a utilizar na modelação de sistemas reais, sobretudo aqueles em que estejam envolvidos processos de auto-sincronização. Nestes casos, a sincronização raramente é perfeita (quicá nunca o seja), o que significa que a actualização síncrona não é o método mais indicado para os modelar ou, pelo menos, que se devem também explorar taxas de sincronismo próximas mas diferentes de 1.

### 5.3.1 Redes de Escala-Livre e Ganhos Acumulados

Como referimos acima, os casos de maior sensibilidade a pequenas variações de  $\alpha$  ocorrem em redes de escala-livre quando são utilizados ganhos acumulados com

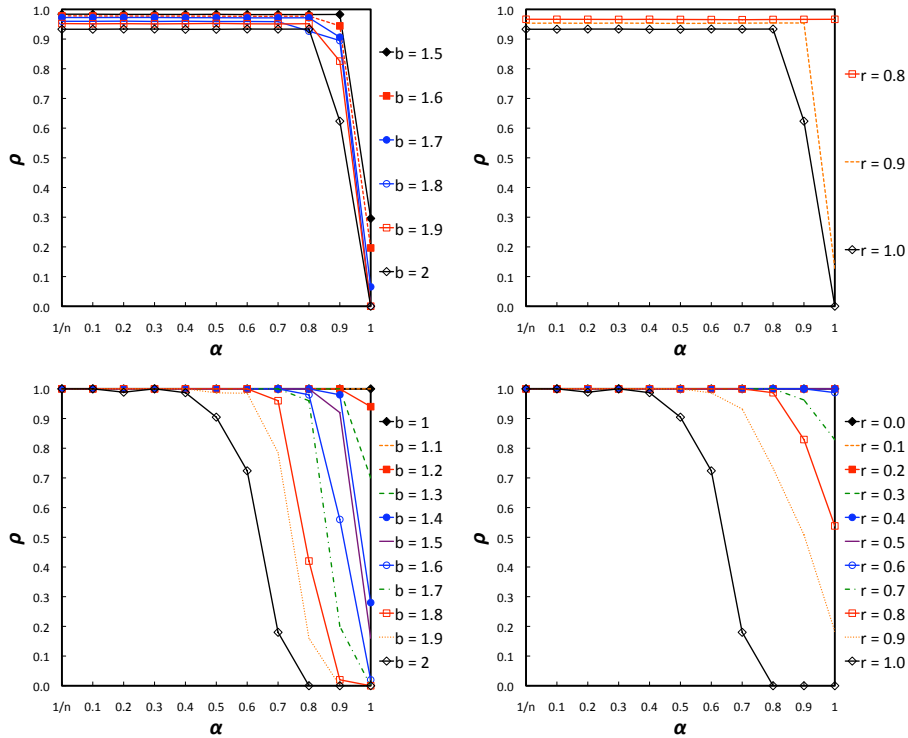


Figura 5.5: Valores de  $\rho$  para o Dilema do Prisioneiro (à esquerda) e para o Snowdrift (à direita) jogados em redes de escala-livre com a regra PG e ganhos acumulados. Em cima: regra o-melhor-vence (regra PG com  $K \rightarrow 0$ ); Em baixo: regra PG com  $K = 1/2$ . Nos gráficos correspondentes à regra o-melhor-vence apenas mostramos algumas linhas de modo a facilitar a leitura dos gráficos. Ambos os jogos são fortemente sensíveis a pequenas variações de  $\alpha$ , sobretudo para valores mais elevados de  $b$  (Dilema do Prisioneiro) e  $r$  (Snowdrift) e especialmente na transição de  $\alpha = 1$  para  $\alpha = 0.9$ .

a regra PG. Estes casos, como ilustra a Figura 5.5, ocorrem sobretudo quando se passa de uma dinâmica síncrona ( $\alpha = 1$ ) para uma dinâmica quase síncrona ( $\alpha = 0.9$ ) e para valores de ruído  $K \in [0, 1/2]$ , podendo prefigurar a ocorrência de transições de fase (Fatès, 2009). O facto de  $\rho$  ser bastante elevado ou mesmo igual a 1 para a maioria dos valores de  $\alpha$  indica que nestes casos o domínio dos agentes cooperantes é o resultado mais provável, o que mostra que a exploração de graus intermédios de assincronismo permite enriquecer as conclusões, mesmo quando  $\rho$  varia de forma monótona com  $\alpha$ .

No que diz respeito à dinâmica da população ao longo do processo evolutivo,

quando  $K \leq 1/100$ , a população converge para pontos fixos, onde não ocorrem mudanças de estratégia, ou para dinâmicas cíclicas, onde um pequeno conjunto de estados é ciclicamente visitado. Em ambos os casos, os valores de  $\rho$  em equilíbrio podem variar bastante entre simulações, resultando em desvios padrão elevados. Este é o comportamento para o sistema síncrono. Para  $\alpha \neq 1$ , a população converge para um determinado valor à volta do qual  $\rho$  sofre pequenas variações. Como já referimos, em muitos casos este valor é consideravelmente superior ao que é obtido com um dinâmica síncrona. Diminuir o valor de  $\alpha$  tem, assim, o efeito de impedir que a população fique “presa” em pontos fixos ou dinâmicas cíclicas com  $\rho$  pequeno.

Quando  $K > 1/100$  observa-se uma dinâmica que difere da que se verifica na maior parte dos casos, como sejam as redes de escala-livre com ganhos normalizados e as redes de Watts-Strogatz, tanto para a regra PG como para a regra de Fermi. Nestes casos, após alguma flutuação nas primeiras iterações, o valor de  $\rho$  converge, por vezes lentamente, para um determinado valor. Quando os jogos são jogados em redes de escala-livre com a regra PG e ganhos acumulados, verifica-se um comportamento diferente, ilustrado na Figura 5.6: a proporção de agentes cooperantes pode variar consideravelmente durante quase todo o processo evolutivo, com transições rápidas e constantes entre estados em que os agentes cooperantes dominam fortemente a população e estados em que estes se encontram em clara minoria, até finalmente convergir para os estados uniformes Tudo-C ou Tudo-D. Dado este tipo de dinâmica, é impressionante que uma pequena diminuição de  $\alpha$  faça frequentemente a diferença entre uma convergência sistemática para Tudo-C e uma convergência sistemática para Tudo-D.

Apresentamos agora uma possível explicação para este comportamento, baseada no facto bem conhecido de que a dinâmica dos jogos evolucionários jogados em redes de escala-livre é dominada pelo que acontece nos *hubs*, que são os vértices com mais ligações da rede, e que estes são ocupados sobretudo por agentes cooperantes (Santos & Pacheco, 2006). Consideremos um agente cooperante  $x$  que ocupa um hub na iteração  $t$ , rodeado de um número significativo de vizinhos cooperantes. Devido à presença de ruído, e apesar de  $x$  ter um ganho consideravelmente superior ao dos seus vizinhos, existe a possibilidade de que este se torne um agente não-cooperante na iteração  $t + 1$ . O agora agente não-cooperante  $x$  terá um ganho superior ao que tinha na iteração  $t$ , uma vez que está rodeado por muitos agentes cooperantes. Para valores mais elevados de  $\alpha$  é provável que na iteração  $t + 2$  uma significativa proporção de vizinhos de  $x$  se torne simulta-

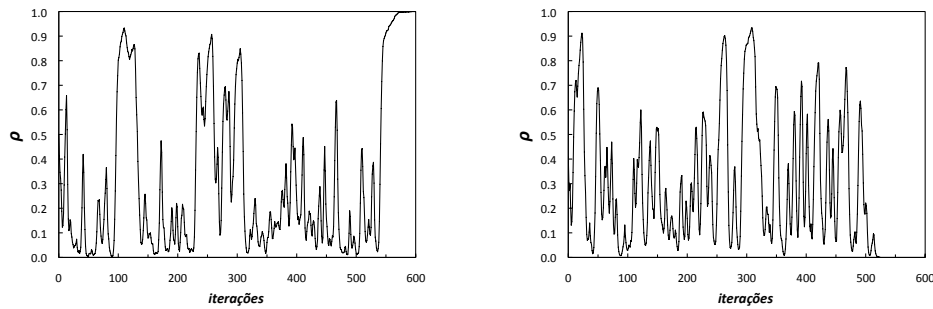


Figura 5.6: Dois exemplos da evolução temporal do valor de  $\rho$  para o Dilema do Prisioneiro ( $b = 1.8$ ) jogado em redes de escala-livre com a regra PG ( $K = 1/2$ ) e ganhos acumulados para  $\alpha = 0.8$ . Para  $K \geq 1/100$  o valor de  $\rho$  varia consideravelmente durante o processo evolutivo podendo convergir para Tudo-C (à esquerda) ou Tudo-D (à direita).

neamente não-cooperante, consequência de terem adoptado a estratégia do seu vizinho mais bem sucedido:  $x$ . Isto pode induzir uma avalanche de conversões de agentes cooperantes em não-cooperantes, reduzindo significativamente a proporção de agentes cooperantes na população, resultando eventualmente na sua extinção. Para valores mais baixos de  $\alpha$ , ocorrem menos actualizações por cada iteração, o que reduz o número de eventuais conversões de agentes cooperantes em agentes não-cooperantes que podem ocorrer na iteração  $t + 2$ . Em iterações posteriores, estas conversões reduzem o ganho de  $x$  de forma mais progressiva do que acontece com valores mais elevados de  $\alpha$ . Isto é,  $x$  perde progressivamente a capacidade de influenciar os seus vizinhos a tornarem-se não-cooperantes. Com alguma probabilidade,  $x$  tornar-se-á ele próprio num agente cooperante antes que uma grande proporção dos seus vizinhos se tornem também não-cooperantes sob a sua influência, interrompendo assim a proliferação de comportamentos de não-cooperação.

Apesar de nos parecer plausível, esta explicação está necessariamente incompleta uma vez que não explica a frequente alteração abrupta de  $\rho$  que se verifica quando se procede a pequenas alterações de  $\alpha$  e deverá, por isso, merecer uma análise mais aprofundada. Por outro lado, o facto de a regra de Fermi ser pouco sensível a  $\alpha$  quando os jogos são jogados em redes de escala-livre com ganhos acumulados (Figura 5.7), significa que, neste caso, o nível de monitorização da vizinhança desempenha um papel relevante e que deve ser tido em conta. Uma análise da dinâmica da população quando esta regra é utilizada mostra que as flu-

tuações de  $\rho$  são muito menores do que as que ocorrem com a regra PG. Tendo em conta que os hubs estão ligados entre si e que são ocupados sobretudo por agentes cooperantes, é baixa a probabilidade de estes agentes escolherem um vizinho não-cooperante (lembramos que a regra de Fermi escolhe um vizinho aleatoriamente). Mesmo que uma destas conversões ocorra, esta característica da regra de Fermi reduz também a probabilidade de que um grande número de vizinhos imite o novo agente não-cooperante mesmo quando a taxa de sincronismo é elevada e, logo, a possibilidade de ocorrerem conversões em massa de agentes cooperantes em agentes não-cooperantes.

## 5.4 Monotonia da Regra de Transição

Nesta secção concentramo-nos nas características das regras de transição que influenciam a sensibilidade dos jogos evolucionários à dinâmica de actualização. Começamos por lembrar que estes jogos são completamente insensíveis à dinâmica de actualização quando é utilizada a regra de replicação (ver Capítulo 3). Esta regra é monótona em relação aos ganhos, isto é, não permite a imitação de vizinhos menos bem sucedidos. Além disso, modela uma intensidade de selecção menor do que as regras PG e de Fermi quando  $K \rightarrow 0$ . Neste caso, estas duas regras, sendo também monótonas em relação aos ganhos, são, no entanto, mais sensíveis à dinâmica de actualização do que a regra de replicação. Por outro lado, a regra de Fermi é menos sensível do que a regra PG e modela uma intensidade de selecção menor de que a regra PG quando  $K \rightarrow 0$ . Isto sugere que a insensibilidade à dinâmica de actualização está associada à presença de dois factores: monotonia da regra de transição em relação aos ganhos e uma intensidade de selecção baixa.

Para verificar esta hipótese, modificámos a regra PG (Equação 2.10) e a regra de Fermi (Equação 4.1) de modo a que o vizinho  $y$ , escolhido conforme as regras originais, possa ser imitado pelo agente  $x$  apenas se tiver um ganho maior do que  $x$ . Ou seja, estas versões impedem os agentes de imitar vizinhos menos bem sucedidos, mesmo quando  $K > 0$ . Repare-se que, neste caso, aumentar  $K$  tem como efeito único a diminuição da intensidade de selecção.

As figuras 5.8 e 5.9 ilustram as diferenças entre os resultados obtidos, respectivamente, com a regra PG e a regra de Fermi e as versões monótonas correspondentes (os gráficos dos resultados obtidos com as versões monótonas destas

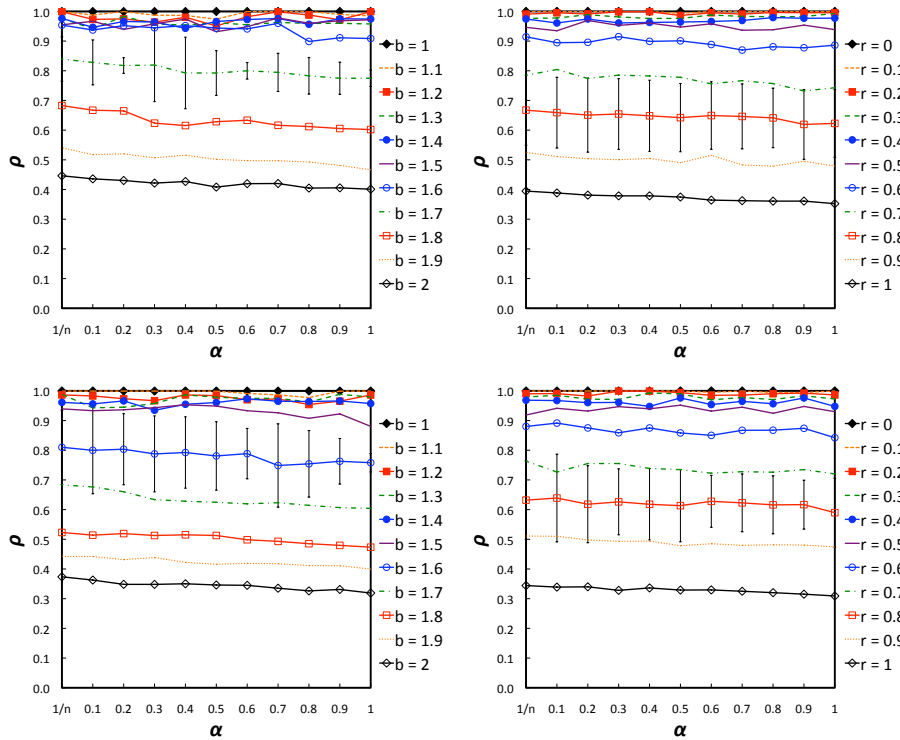


Figura 5.7: Valores de  $\rho$  para o Dilema do Prisioneiro (à esquerda) e para o Snowdrift (à direita) jogados em redes de escala-livre com a regra de Fermi e ganhos acumulados. Em cima:  $K \rightarrow 0$ ; Em baixo:  $K = 0.1$  para o Dilema do Prisioneiro e  $K = 1$  para o Snowdrift. A regra de Fermi é pouco sensível a  $\alpha$  quando os jogos são jogados em redes de escala-livre com ganhos acumulados, embora se verifique um ligeiro aumento de  $\rho$  quando se diminui o valor de  $\alpha$ . Nestas condições esta regra é também pouco sensível ao valor do ruído,  $K$ . Os desvios-padrão são elevados. De modo a facilitar a leitura dos gráficos apresentamos os desvios-padrão apenas para um linha.

regras podem ser todos consultados no Anexo E). Como se pode observar, para intensidades de selecção menores, ambos os jogos se tornam insensíveis à dinâmica de actualização quando se utiliza a versão monótona das regras. Este comportamento verifica-se para todas as condições que testámos e confirma que a monotonia da regra de transição e uma intensidade de selecção baixa, quando associadas, são propriedades relevantes no que diz respeito à (in)sensibilidade destes jogos à taxa de sincronismo  $\alpha$ . Por outro lado, o facto de a regra de Fermi ser muito pouco sensível quando se utilizam redes de escala-livre e ganhos

acumulados, mesmo para valores mais elevados de  $K$  (ver secção anterior), correspondentes a um menor intensidade de selecção, significa também que a associação destas duas propriedades pode não ser necessária para tornar os jogos insensíveis à dinâmica de actualização.

O facto de a regra de Fermi (original) ser menos sensível à dinâmica de actualização do que a regra PG sugere que o nível de monitorização da vizinhança desempenha também um papel importante no que diz respeito à sensibilidade dos jogos evolucionários à dinâmica de actualização (lembramos que a regra PG modela uma monitorização completa da vizinhança, enquanto a regra de Fermi modela uma monitorização parcial). No entanto, os resultados apresentados em Roca et al. (2009a) para a *regra de replicação múltipla*, que é uma versão da regra de replicação que modela uma monitorização completa da vizinhança, mostram que aquela é também totalmente insensível à dinâmica de actualização. Isto significa que, enquanto a monotonia em relação aos ganhos, associada a uma intensidade de selecção baixa, é suficiente para tornar os jogos evolucionários insensíveis à dinâmica de actualização, uma monitorização completa da vizinhança não é suficiente para os tornar sensíveis.

## 5.5 Resumo e Comentários Finais

O objectivo deste capítulo consistiu em verificar as consequências da exploração de graus intermédios de assincronismo. Começámos por verificar que, em geral, a proporção de agentes cooperantes na população varia de forma monótona com a taxa de sincronismo, existindo apenas alguns casos de não-monotonia com algum significado quando a intensidade de selecção é elevada e em redes com algum grau de regularidade. Isto significa que, em geral, a influência máxima da dinâmica de actualização pode ser avaliada com base nos resultados obtidos com as actualizações síncrona e sequencial.

Verificámos também que, embora a proporção de agentes cooperantes na população varie geralmente de forma gradual à medida que percorremos o espaço entre a actualização síncrona e a actualização sequencial, existe um número significativo de casos de forte sensibilidade a pequenas variações na taxa de sincronismo. A grande maioria destes casos, e os mais significativos, ocorre quando se passa de uma actualização síncrona para uma actualização quase síncrona. Inclusive, é comum o valor de  $\rho$  ser aproximadamente o mesmo para a maioria

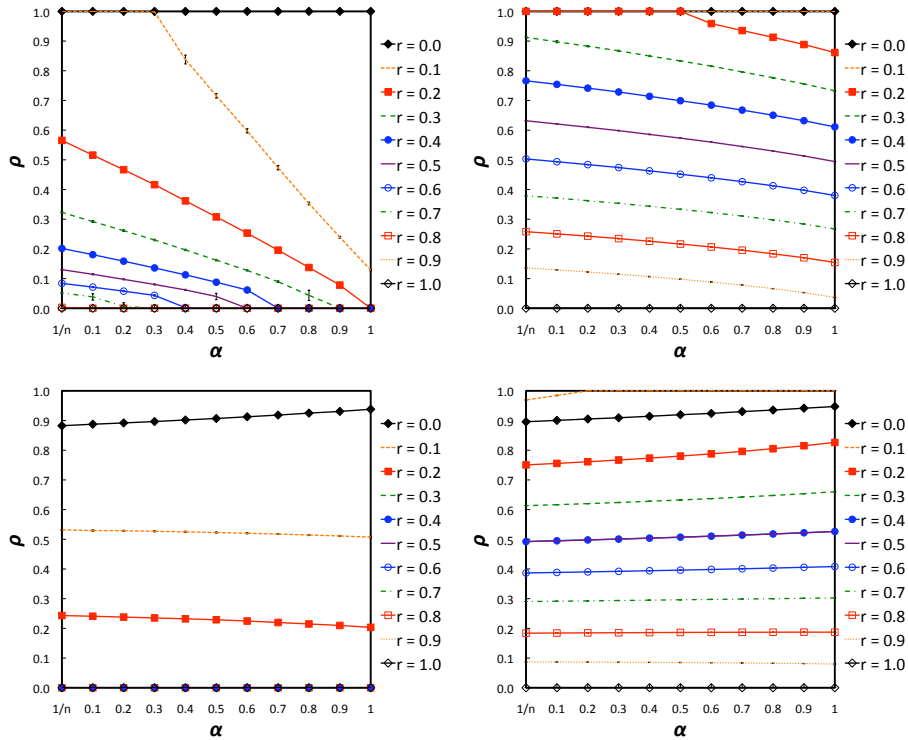


Figura 5.8: Valores de  $\rho$  obtidos com a regra PG, original (em cima) e monótona (em baixo), com  $K = 1$  quando o Dilema do Prisioneiro (à esquerda) e o Snowdrift (à direita) são jogados em redes de mundo-pequeno com  $\phi = 0.1$ . Ambos os jogos são menos sensíveis à taxa de sincronismo quando se utiliza a versão monótona da regra de transição.

dos valores de  $\alpha$ , alterando significativamente quando se passa de  $\alpha = 0.9$  para  $\alpha = 1$ . Isto significa que, mesmo quando se pretende modelar sistemas onde é conhecida a existência de processos de auto-sincronização, se devem explorar também dinâmicas de actualização próximas da dinâmica síncrona perfeita de modo a verificar a possível existência de artificialidades resultantes deste tipo de actualização.

Finalmente verificámos que a monotonia da regra de transição em relação aos ganhos desempenha um papel determinante na sensibilidade dos jogos evolucionários à dinâmica de actualização: quando associada a uma intensidade de selecção baixa, esta característica torna os jogos evolucionários insensíveis a alterações na taxa de sincronismo. O facto de o grau de monotonia da regra de transição ser apenas uma consequência do nível de ruído significa que este pode ser utilizado

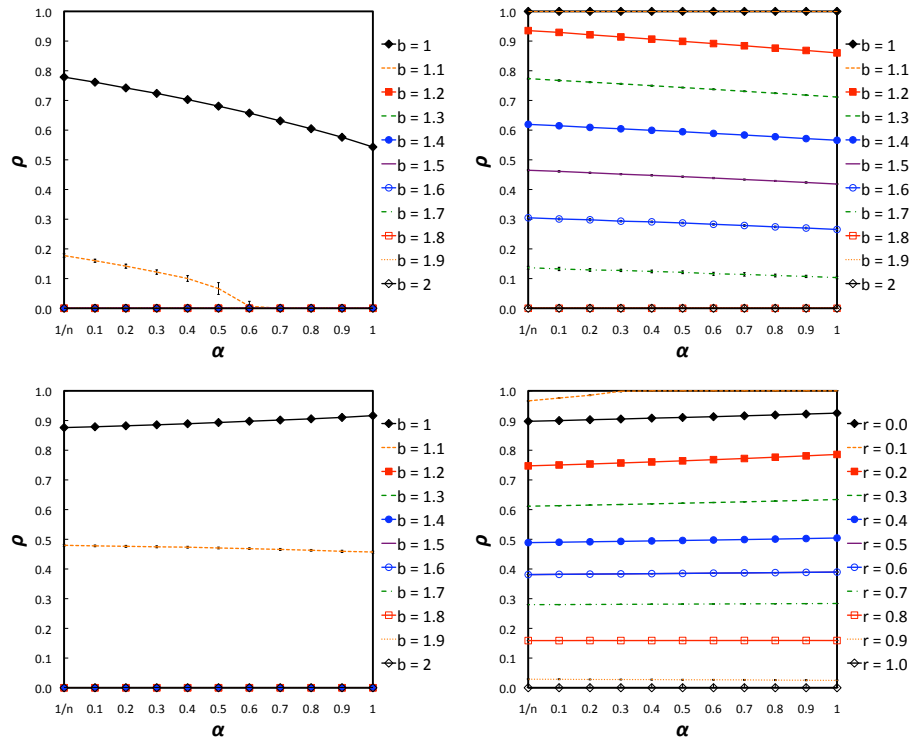


Figura 5.9: Como na Figura 5.8 mas para a regra de Fermi. Tal como no caso da regra PG, ambos os jogos são menos sensíveis à taxa de sincronismo quando se utiliza a versão monótona da regra de transição.

como mecanismo para controlar a sensibilidade a alterações na taxa de sincronismo de sistemas onde ocorram dilemas sociais. Mais concretamente, sugere que, para se construírem sociedades artificiais que não sejam sensíveis à dinâmica de actualização, se deve ter um cuidado especial na definição dos processos de decisão dos agentes e, em particular, nas suas capacidades de percepção, de modo a que a imitação de agentes menos bem sucedidos seja evitada ou, pelo menos, reduzida.

## Capítulo 6

# Trocas de Estratégia

De modo a percebermos porque é que o assincronismo é, em geral, benéfico à emergência da cooperação, partimos de um ideia de Tomassini et al. (2006) formulada no contexto do jogo Falcão-Pomba, que é matematicamente equivalente ao Snowdrift. Estes autores notaram que quando é utilizada a regra de Moran (regra PG com  $K = 1$ ), a proporção de agentes cooperantes é maior quando é utilizada uma actualização sequencial do que quando é utilizada uma actualização síncrona. Na sequência deste resultado os autores propõem uma explicação intuitiva para este facto:

... we notice that, for proportional dynamics [regra de Moran], asynchronous updating allows for better cooperation than its synchronous counterpart. The reason for this difference can be intuitively understood in the following manner: when updating asynchronously, let us suppose a player  $y$  has just imitated the strategy of one of its neighbors  $x$ . Another way of viewing this change, is to say that player  $x$  has “infected” individual  $y$  with its strategy. If  $x$  is a dove player [dove  $\equiv$  agente cooperante], making  $y$  a dove as well, not only does the percentage of doves increase in the population, but the next time either  $x$  or  $y$  is evaluated for an update, it will be able to take advantage of the other one’s presence to help increase its payoff. Hence, the two players mutually reinforce each other. Meanwhile, if  $y$  is infected by  $x$  and turns into a hawk [hawk  $\equiv$  agente não-cooperante], on the one hand  $x$  has successfully propagated his strategy thus increasing the overall amount of hawks in the population, but on the other hand this

propagation will cause him to have a lower payoff than he previously had. Not only is  $x$ 's payoff negatively affected, but  $x$ 's presence also harms  $y$ 's payoff.

The same reasoning cannot be held when updating synchronously. Indeed, a player  $x$  may change strategies at the same time it infects its neighbor  $y$ . So if  $x$ 's initial strategy was Dove, it might switch to Hawk as it infects its neighbor  $y$ , in which case  $x$  will no longer have a positive effect on  $y$ 's payoff contrary to what happens in asynchronous updating.

Esta ideia levanta algumas questões não respondidas pelos seus proponentes. A primeira diz respeito ao papel do ruído na influência da dinâmica de actualização. No Capítulo 4 vimos que uma actualização assíncrona leva a uma diminuição da proporção de agentes cooperantes na população apenas quando o nível de ruído presente no processo de actualização de estratégias é muito baixo. Dado este resultado, devemos esperar que o número de trocas de estratégia seja menor quando o nível de ruído é pequeno? É verdade que, tanto as regras PG e de Fermi com  $K \rightarrow 0$ , como a regra de replicação não permitem trocas directas de estratégia entre dois agentes vizinhos tal como, por exemplo, a regra de Moran permite. Isto é, e usando a mesma terminologia de Tomassini et al. (2006), dois agentes  $x$  e  $y$  não se podem infectar mutuamente em simultâneo. No entanto, é possível que dois agentes troquem de estratégias indirectamente. Por exemplo,  $x$  pode infectar o agente  $y$  ao mesmo tempo que é infectado por um agente  $a$  que tem a mesma estratégia que  $y$ , desde que  $a$  tenha um ganho superior ao seu. Não é também óbvio que a troca de estratégias seja desvantajosa para os agentes cooperantes, uma vez que quando dois agentes trocam de estratégia, directa ou indirectamente, o número de agentes cooperantes e não-cooperantes se mantém inalterado. Isto significa que devemos verificar se existe uma relação causa-efeito entre o número de trocas de estratégia e a proporção de agentes cooperantes. Finalmente, se concluirmos que a troca de estratégias afecta negativamente a sobrevivência de agentes cooperantes, devemos tentar explicar porque é que isso acontece.

## 6.1 Trocas de Estratégia, Assincronismo e Ruído

De modo a verificar esta ideia, começámos por medir o número de trocas de estratégia em função de  $\alpha$ . Dois agentes  $x$  e  $y$  trocam de estratégia na iteração  $t$  se as condições  $s_x = S_A \wedge s_y = S_B$  e  $s_x = S_B \wedge s_y = S_A$ , em que  $S_A \neq S_B$ , se verificarem, respectivamente, antes e depois do processo de actualização de estratégias.

Tal como acontece com  $\rho$ , o número de trocas de estratégia é medido nas últimas  $n \times 10^3$  actualizações individuais do processo evolutivo. No final de cada simulação, calculamos a quantidade

$$\frac{\text{Número de trocas de estratégia}}{\alpha \times \text{Número de iterações em equilíbrio}} \quad (6.1)$$

o que equivale ao cálculo da média do número de trocas de estratégia que ocorrem em cada período de  $\frac{1}{\alpha}$  iterações. De modo a garantirmos que o número de actualizações individuais tidas em conta em cada período de  $\frac{1}{\alpha}$  iterações é aproximadamente o mesmo que ocorre quando é utilizada uma actualização síncrona, a medição do número de trocas de estratégia é realizada apenas para  $\alpha \in \{1/n, 0.1, 0.2, 0.5, 1\}$ . Note-se que só para estes valores, de entre os que utilizámos, se garante que  $\frac{1}{\alpha}$  é um número inteiro. Os gráficos das trocas de estratégia podem ser consultados no Anexo F.

A Figura 6.1 mostra que, para a regra PG, em geral, o número de trocas de estratégia desce à medida que o valor de  $\alpha$  desce. Existem apenas dois tipos de situação em que este resultado não se verifica. O primeiro ocorre quando o Snowdrift é jogado com a regra o-melhor-vence (regra PG com  $K \rightarrow 0$ ) e em situações em que o sistema converge para uma dinâmica cíclica, na qual não existem trocas de estratégia, quando  $\alpha = 1$ . Isto acontece, por exemplo, para  $r = 0.4$  quando o jogo é jogado em redes de mundo-pequeno com  $\phi = 0.05$  (ver Anexo F), onde o número de trocas de estratégia é mais baixo para  $\alpha = 1$  do que para  $\alpha = 0.5$ . O comportamento cíclico nesta situação deve-se à natureza determinista tanto da regra de transição como da actualização síncrona. A outra excepção ocorre quando a população converge para um estado Tudo-D ou quando apenas uma pequena fracção de agentes cooperantes sobrevive. Isto acontece sobretudo com o Dilema do Prisioneiro quando são utilizados valores mais elevados de ruído. Por exemplo, na Figura 6.1(b) podemos observar que, para  $b = 1.2$ , o número de trocas de estratégia é 0 para  $\alpha = 1$  devido à extinção dos agentes

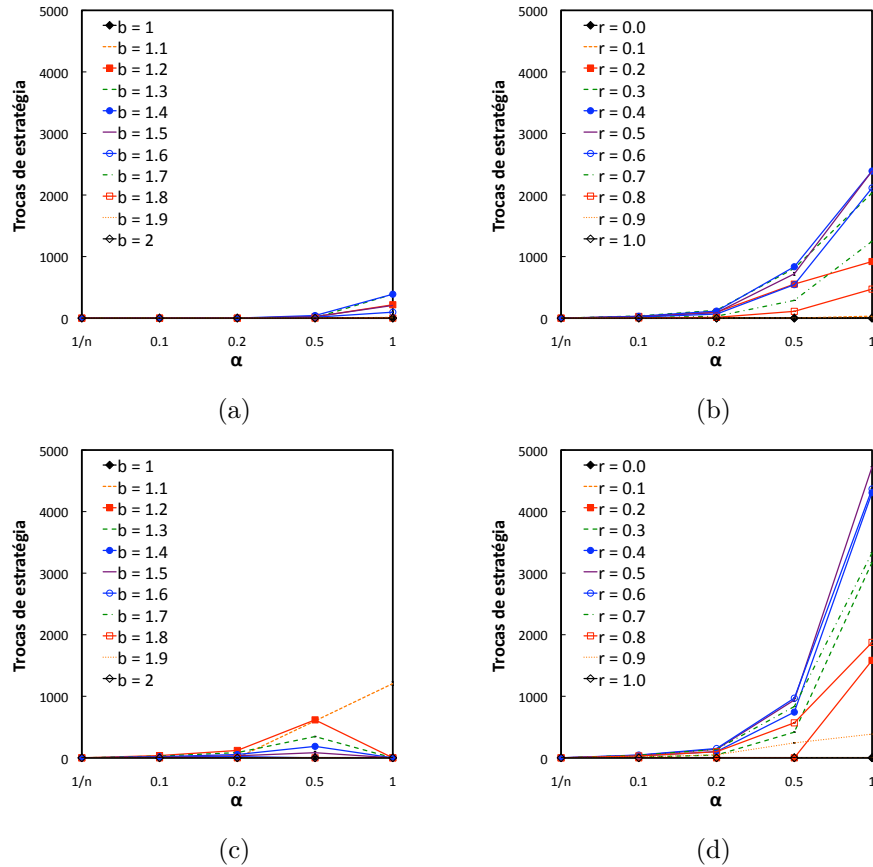


Figura 6.1: Número de trocas de estratégia em função do valor de  $\alpha$ , quando o Dilema do Prisioneiro (à esquerda) e o Snowdrift (à direita) são jogados em redes de mundo-pequeno ( $\phi = 0.1$ ) com a regra PG. Em cima:  $K \rightarrow 0$ ; Em baixo:  $K = 1$ . O número de estratégias diminui quando  $\alpha$  diminui e é menor para  $K \rightarrow 0$  do que para  $K = 1$ .

cooperantes (ver na Figura 5.8 o gráfico de  $\rho$  correspondente). Exceptuando estas situações, o número de trocas de estratégia aumenta sempre com o valor de  $\alpha$ .

A Figura 6.1 mostra também que o número de trocas de estratégia é maior para  $K = 1$  do que para  $K \rightarrow 0$ , excepto nas duas situações referidas no parágrafo anterior (lembramos que o efeito benéfico do assincronismo na cooperação ocorre quando se introduz ruído no processo de actualização). Este aumento ocorre para todas as redes de contactos quando são utilizados ganhos normalizados. Quando são utilizadas redes de escala-livre e a regra PG com ganhos acumulados, caso que analisámos na Secção 5.3.1, o número de trocas de estratégia é sempre muito pequeno, sendo frequentemente igual a 0. Isso deve-se ao facto de a população

convergir quase sempre para Tudo-C ou Tudo-D. Assim, os resultados descritos neste capítulo não se aplicam a este caso.

Os resultados obtidos com a regra de Fermi são qualitativamente semelhantes aos que são obtidos com a regra PG quando se utilizam redes de Watts-Strogatz e redes de escala-livre com ganhos normalizados. No entanto, as diferenças entre o número de trocas de estratégia obtido com valores diferentes de  $K$  é menor, o que é consistente com a menor sensibilidade da regra de Fermi à dinâmica de actualização. Por outro lado, quando os jogos são jogados em redes de escala-livre com ganhos acumulados, o número de trocas de estratégia mantém-se aproximadamente o mesmo quando se varia o valor de  $K$ , o que é também consistente com a insensibilidade desta regra a  $K$  que se verifica neste caso.

No que diz respeito à regra de replicação, o número de trocas de estratégia é sempre muito pequeno, nunca ultrapassando 16 trocas por cada período de  $\frac{1}{\alpha}$  iterações (note-se que utilizamos populações de  $10^4$  agentes). Lembramos que esta regra é insensível à dinâmica de actualização.

Estes resultados, combinados com a influência da dinâmica de actualização que se verifica para cada tipo de situação, sugerem que existe de facto uma relação estreita entre o número de trocas de estratégia e a forma como o valor de  $\rho$  varia com  $\alpha$ . No entanto, estes resultados não nos permitem estabelecer uma relação causa-efeito entre o número de trocas de estratégia e o valor de  $\rho$  dado que ambas são variáveis dependentes.

## 6.2 Trocas de Estratégia e Cooperação

De modo a verificar se existe uma relação causa-efeito entre o número de trocas de estratégia e o nível de cooperação, modificámos o modelo original, descrito no Capítulo 3, do seguinte modo: em cada iteração, com probabilidade  $1 - p$ , é escolhido aleatoriamente um agente que é actualizado utilizando a regra de transição; em alternativa, ou seja, com probabilidade  $p$ , são escolhidos aleatoriamente dois agentes vizinhos que trocam de estratégias um com o outro. O valor de  $p$  representa, portanto, a probabilidade de ocorrer uma troca de estratégias entre dois agentes vizinhos escolhidos aleatoriamente em vez de uma actualização com a regra de transição em estudo. Repare-se que neste modelo modificado não podem ocorrer trocas de estratégia como resultado da aplicação da regra de transição

uma vez que só se actualiza um agente de cada vez. Note-se que, quando  $p = 0$ , recuperamos o modelo original com uma actualização sequencial.

A Figura 6.2 ilustra o efeito das trocas de estratégia no valor de  $\rho$  quando ambos os jogos são jogados em redes regulares com a regra PG com  $K = 1$  e com a regra de replicação. Como se pode ver, o valor de  $\rho$  diminui com  $p$ , excepto quando o Snowdrift é jogado com a regra de replicação. A sensibilidade em relação a  $p$  é diferente nos dois jogos verificando-se que o Dilema do Prisioneiro é bastante mais sensível ao valor de  $p$  do que o Snowdrift, à semelhança do que acontece com o modelo original em relação a  $\alpha$ . Isto significa que a gama de valores de  $p$  para os quais os agentes cooperantes sobrevivem é mais limitada para o Dilema do Prisioneiro. Nos gráficos relativos ao Snowdrift não mostramos resultados para  $p = 1$  porque nestas condições a regra de transição nunca é aplicada e, logo, os ganhos não influenciam a dinâmica da população. Neste caso, o valor de  $\rho$  converge sempre para valores próximos de 0.5, que é a proporção inicial de agentes cooperantes. É impressionante, no entanto, que neste jogo a regra de transição tenha um papel preponderante na dinâmica do sistema até valores de  $p$  muito próximos de 1. Por exemplo, para  $p = 0.9$ , em que a regra de transição é aplicada apenas 10% das vezes, o valor de  $\rho$  mantêm-se aproximadamente o mesmo. Os gráficos de  $\rho$  em função do valor de  $p$  podem ser consultados no Anexo G.

As diferenças entre situações em que os jogos são sensíveis ao valor de  $p$  e situações de insensibilidade, como a do Snowdrift jogado com a regra de replicação, pode ser entendida se analisarmos os padrões espaciais formados pelos agentes durante o processo evolutivo. As figuras 6.3 e 6.4 mostram exemplos, respectivamente para o Dilema do Prisioneiro e para o Snowdrift, de padrões espaciais formados quando os dois jogos são jogados em redes regulares com a regra PG com  $K = 1$  e com a regra de replicação, para  $p = 0$  e  $p \neq 0$ . À excepção do Snowdrift jogado com a regra de replicação (figuras 6.4 (c) e 6.4 (d)), os agentes cooperantes formam grupos mais compactos quando não é permitida a troca de estratégias ( $p = 0$ ). A formação de grupos compactos quando os jogos são jogados por populações estruturadas é um fenómeno bem conhecido e já referido neste texto. Os grupos compactos permitem que os agentes cooperantes interajam sobretudo entre si, protegendo-se deste modo da exploração por parte de agentes não-cooperantes. Este aspecto é importante para percebermos como é que a troca de estratégias influencia a sobrevivência dos agentes cooperantes. Uma troca de estratégias entre um agente cooperante e um agente não-cooperante na

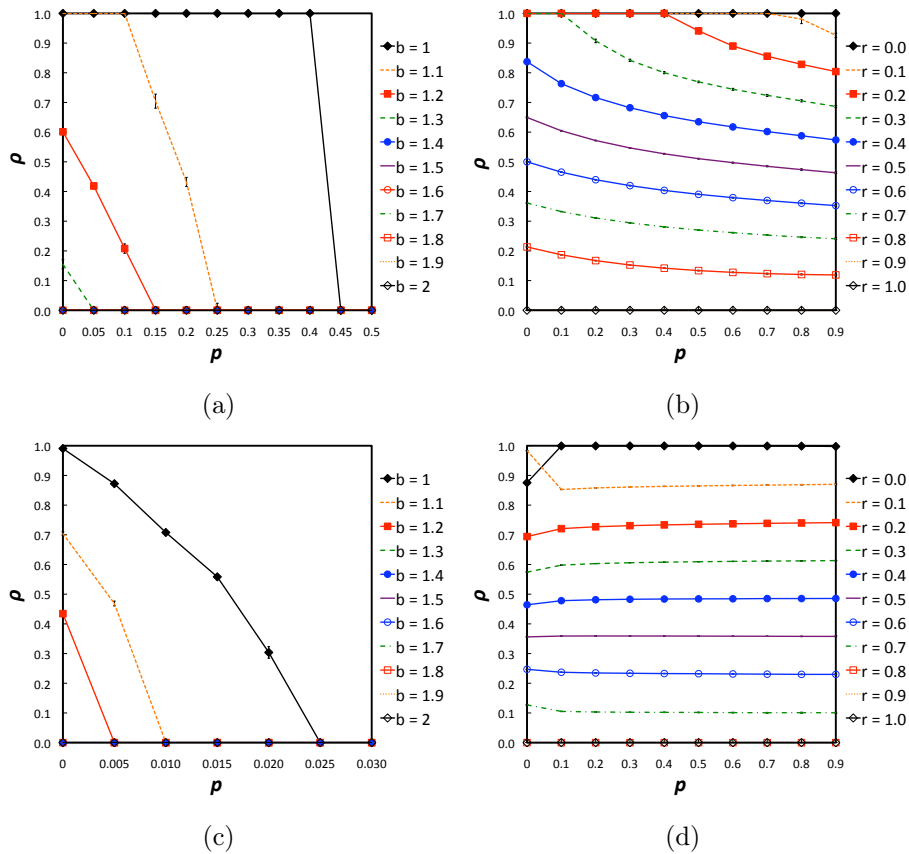


Figura 6.2: Valor de  $\rho$  em função de  $p$  quando o Dilema do Prisioneiro (à esquerda) e o Snowdrift (à direita) são jogados em redes regulares. Em cima: regra PG com  $K = 1$ ; Em baixo: regra de replicação. Nos gráficos, os valores de  $p$  são diferentes no Snowdrift e no Dilema do Prisioneiro porque este é muito mais sensível ao valor de  $p$ . No caso do Dilema do Prisioneiro, os valores de  $p$  são também diferentes para as duas regras de transição pela mesma razão.

fronteira de um grupo afasta o agente cooperante do grupo a que pertence. Ao mesmo tempo, a troca de estratégias introduz um agente não-cooperante dentro do grupo de agentes cooperantes ou, pelo menos, contribui para a formação de fronteiras mais irregulares, o que também é prejudicial a este tipo de agentes (Nowak et al., 1994). Este fenómeno pode ser observado na Figura 6.3, para o Dilema do Prisioneiro, e na Figura 6.4, para o Snowdrift jogado com a regra PG. Quando são introduzidas trocas de estratégia no Dilema do Prisioneiro, os grupos de agentes cooperantes não conseguem crescer tanto como quando estas não são permitidas. Já no Snowdrift jogado com a regra PG desaparecem os grupos

compactos de agentes cooperantes quando são introduzidas trocas de estratégia.

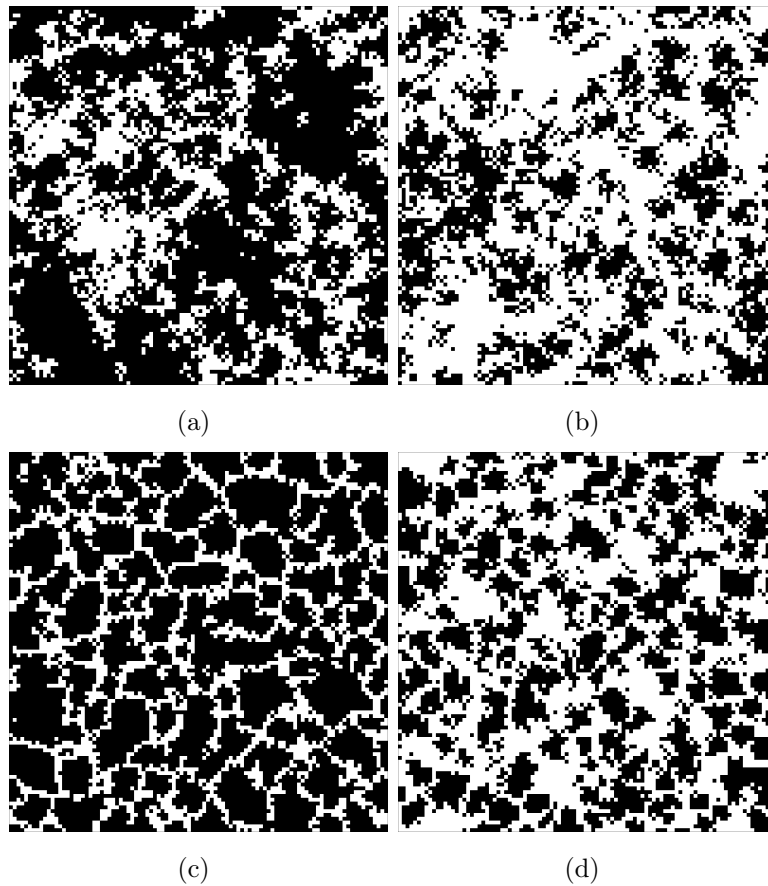


Figura 6.3: Padrões espaciais típicos formados quando o Dilema do Prisioneiro é jogado em redes regulares. Em cima: regra PG com  $K = 1$  e  $b = 1.2$ , (a)  $p = 0$ , (b)  $p = 0.05$ ; Em baixo: regra de replicação e  $b = 1.1$ , (c)  $p = 0$ , (d)  $p = 0.005$ . Cores: preto para agentes cooperantes e branco para agentes não-cooperantes.

O comportamento do Snowdrift quando se utiliza a regra de replicação é diferente. Neste caso, os agentes cooperantes organizam-se em pequenos grupos com a forma de filamentos quando não é permitida a troca de estratégias e este padrão não é modificado quando estas são introduzidas. Ou seja, quando são introduzidas trocas de estratégia não existem grupos compactos de agentes que possam ser destruídos, sendo esta a razão porque tanto os padrões espaciais como a proporção de agentes cooperantes não são afectados.

A razão porque os agentes cooperantes se organizam de modo diferente no Dilema do Prisioneiro e no Snowdrift quando é utilizada a regra replicação (ver

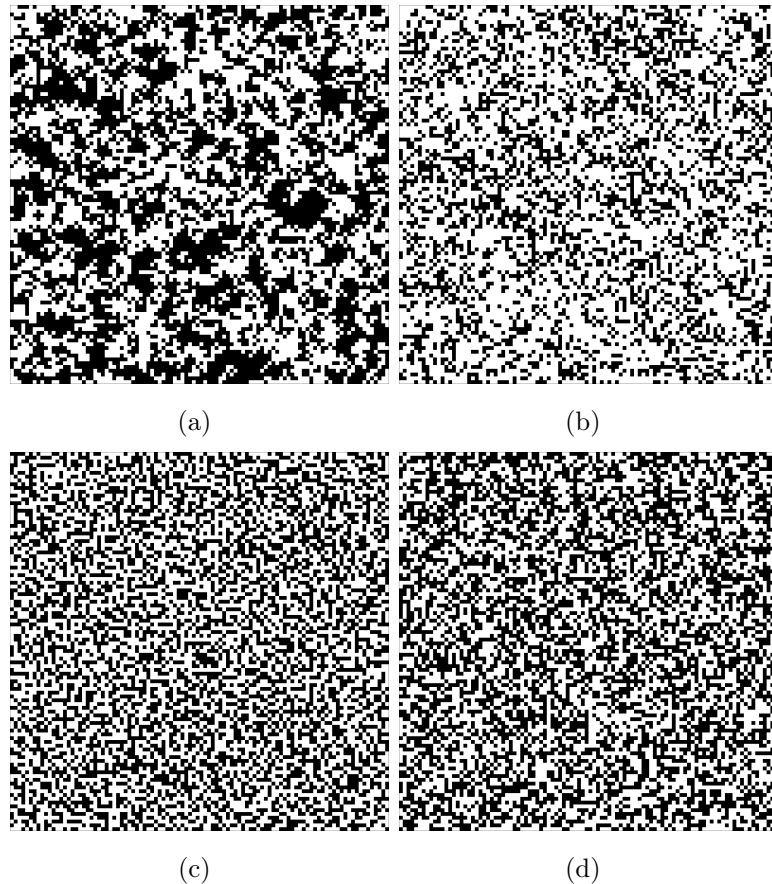


Figura 6.4: Padrões espaciais típicos formados quando o Snowdrift é jogado em redes regulares. Em cima: regra PG com  $K = 1$  e  $r = 0.6$ ; Em baixo: regra de replicação e  $r = 0.4$ . As imagens à esquerda correspondem a  $p = 0$  e as da direita a  $p = 0.9$ . Cores: preto para agentes cooperantes e branco para agentes não-cooperantes.

figuras 6.3(c) e 6.4(c)) pode ser explicada pelas características destes jogos. Tal como descrevemos no Capítulo 2, no Snowdrift é melhor jogar C se o outro jogador jogar D e vice-versa. Por outro lado, jogar D é a opção racional no Dilema do Prisioneiro. Isto significa que no Snowdrift os agentes cooperantes são capazes de sobreviver em grupos menos compactos enquanto que no Dilema do Prisioneiro estes agentes só conseguem sobreviver se formarem grupos compactos. Chamamos à atenção para o facto de, apesar disso, mesmo no Snowdrift ser melhor para os agentes cooperantes jogarem o jogo uns com os outros. Por exemplo, quando este jogo é jogado com a regra PG com  $K = 1$ , os agentes cooperantes formam grupos mais compactos do que quando é utilizada a regra de replicação. Por outro

lado, se diminuirmos o valor do ruído na regra PG, observa-se que os grupos de agentes cooperantes se tornam semelhantes aos que são formados com a regra de replicação.

O facto de os agentes cooperantes se organizarem em grupos mais compactos quando o Snowdrift é jogado com a regra PG com  $K = 1$  do que quando é jogado com a regra de replicação parece-nos dever-se ao papel que a proporção relativa de vizinhos cooperantes e não-cooperantes de um agente desempenha no processo de actualização de estratégias quando o nível de ruído é mais elevado. Como veremos melhor no próximo capítulo, à medida que o nível de ruído presente no processo de actualização de estratégias aumenta, a composição da vizinhança tende a assumir um papel importante nas escolhas dos agentes. Mais especificamente, para valores mais elevados de  $K$ , há uma tendência para os agentes imitarem a estratégia mais frequente na vizinhança quando nesta existe uma diferença clara na proporção de vizinhos cooperantes e não-cooperantes. Isto, por seu lado, leva à formação de grupos mais compactos de agentes do mesmo tipo, tal como ilustra a Figura 6.4(c). Este argumento não se aplica à regra de replicação porque, embora a selecção da estratégia candidata a ser imitada reflecta, em média, a composição da vizinhança (porque o vizinho  $y$  é escolhido aleatoriamente), uma estratégia só pode ser imitada se o vizinho seleccionado tiver um ganho superior ao do agente envolvido no processo de revisão da sua estratégia (ver Equação 2.11).

### 6.3 Resumo e Comentários Finais

Os resultados apresentados neste capítulo mostram que existe uma relação de causa-efeito entre o número de trocas de estratégia e a proporção de agentes cooperantes na população que se traduz no facto de aquelas impedirem o crescimento de grupos compactos de agentes cooperantes. Além disso, verifica-se que as trocas de estratégia aumentam com a taxa de sincronismo, especialmente quando existe ruído no processo de actualização de estratégias. Estes resultados constituem uma forte evidência de que as trocas de estratégia desempenham um papel fundamental no que diz respeito ao efeito benéfico do assincronismo na emergência da cooperação na presença de ruído, tal como sugerido, mas não confirmado, em Tomassini et al. (2006).

## Capítulo 7

# Mudanças de Estratégia

A proporção de agentes cooperantes na população,  $\rho$ , é sem dúvida a medida de maior interesse no estudo da evolução da cooperação tendo, por isso, merecido uma atenção quase exclusiva na literatura desta área. No entanto, o valor de  $\rho$  em equilíbrio raramente é um valor constante. Em geral, quando os agentes cooperantes e não-cooperantes coexistem em equilíbrio, o valor de  $\rho$  flutua à volta de um determinado valor, resultado de ambos os tipos de agentes mudarem de estratégia. A frequência com que os agentes mudam de estratégia, além de nos ajudar a caracterizar o comportamento dinâmico da população, é uma quantidade importante na medida em que uma sociedade mais volátil, na qual os agentes mudam frequentemente de comportamento, torna mais difícil a identificação de agentes não-cooperantes e, logo, a tomada de medidas que promovam a cooperação. Esta quantidade pode ser também interpretada como o nível de insatisfação da população uma vez que agentes menos satisfeitos tendem a modificar a sua forma de agir. Tanto quanto sabemos, a frequência de mudanças de estratégia foi estudada apenas por Abramson & Kuperman (2001). Estes autores estudaram o Dilema do Prisioneiro em redes de mundo-pequeno com a regra o-melhor-vence e concluíram que as mudanças de estratégia se tornam mais frequentes à medida que a rede de contactos tende para uma rede aleatória.

Neste capítulo analisamos a forma como a frequência de mudanças de estratégia varia com as condições do modelo, em particular, a dinâmica de actualização. Para medirmos a frequência de mudanças de estratégia,  $\mu$ , em cada simulação calculamos a seguinte quantidade:

$$\mu = \frac{\text{Número de mudanças de estratégia em equilíbrio}}{\text{Número de actualizações individuais em equilíbrio}}, \quad (7.1)$$

onde uma mudança de estratégia significa que um agente mudou a sua estratégia de C para D ou vice-versa. Tal como para o caso de  $\rho$ , os valores de  $\mu$  apresentados são o resultado da média de 50 simulações independentes. Os gráficos de  $\mu$  podem ser consultados no Anexo H.

## 7.1 Regra Proporcional Generalizada

Começamos por analisar os resultados obtidos com a regra PG quando os jogos são jogados em redes de Watts-Strogatz e em redes de escala-livre com ganhos normalizados. Não apresentamos resultados para redes de escala-livre com ganhos acumulados uma vez que o valor de  $\mu$  é, neste caso, quase sempre desprezável ou nulo. Como vimos no Capítulo 5, quando  $K \leq 100$  a população converge para pontos fixos ou para dinâmicas cíclicas onde apenas alguns agentes mudam de estratégia. Já para  $1/100 < K \leq 1/2$ , a população converge sempre para Tudo-C ou Tudo-D, o que implica  $\mu = 0$ . Finalmente, para  $K = 1$  o valor de  $\mu$  varia de forma semelhante à que descreveremos mais abaixo para o caso em que são utilizados ganhos normalizados com valores mais elevados de  $K$ .

Concentremo-nos então nos resultados obtidos em redes de Watts-Strogatz e em redes de escala-livre com ganhos normalizados. A primeira observação que podemos fazer é a de que o valor de  $K$  não tem uma influência consistente no valor de  $\mu$ . Isto é, se mantivermos constantes os outros parâmetros do modelo, não se observa uma influência directa de  $K$  sobre  $\mu$ . No entanto, verifica-se aquilo que podemos denominar como uma influência de segunda ordem que se tornará evidente ao longo desta secção.

Os resultados mostram que no Dilema do Prisioneiro o valor de  $\mu$  diminui à medida que  $\alpha$  diminui, quando o nível de ruído é inexistente ou muito pequeno ( $K \leq 1/100$ ). Dito de outro modo, o sistema torna-se mais estável ou menos dinâmico quando  $\alpha$  diminui. A Figura 7.1(a) mostra um exemplo deste comportamento. Este padrão é comum a todas as redes de contactos que utilizámos. No Snowdrift este padrão é, no entanto, bastante dependente da rede de contactos: em redes de escala-livre, o valor de  $\mu$  aumenta ligeiramente quando se diminui  $\alpha$  de 1 até 0.8. De  $\alpha = 0.8$  até  $\alpha = 1/n$  verifica-se uma diminuição do valor de  $\mu$ , tal como no Dilema do Prisioneiro. Com este jogo, o único caso em que  $\mu$  diminui sempre à medida que  $\alpha$  diminui ocorre para redes aleatórias. À medida que se diminui o valor de  $\phi$  torna-se mais difícil identificar um padrão de influência da

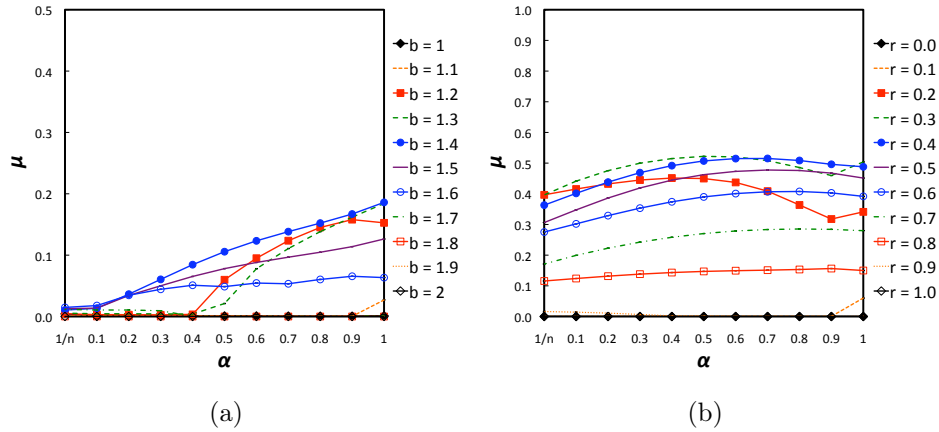


Figura 7.1: Frequência de mudanças de estratégia,  $\mu$ , em função de  $\alpha$  para o Dilema do Prisioneiro (a) e para o Snowdrift (b) jogados em redes de mundo-pequeno com  $\phi = 0.1$  e com a regra PG com  $K \rightarrow 0$  (regra o-melhor-vence).

taxa de sincronismo. A Figura 7.1(b) mostra um exemplo para redes com  $\phi = 0.1$  onde se pode observar que  $\mu$  diminui para alguns valores de  $r$  e que aumenta para outros à medida que se modifica o valor de  $\alpha$  num determinado sentido.

Os resultados descritos no parágrafo anterior referem-se apenas a situações com valores de  $K$  muito reduzidos. Para valores mais elevados de  $K$ , a taxa de sincronismo não tem qualquer influência sobre o valor de  $\mu$ . Por outro lado, verifica-se que o valor de  $\mu$  se torna progressivamente dependente da proporção de agentes cooperantes,  $\rho$ , à medida que se aumenta  $K$ . Mais especificamente, para valores mais elevados de  $K$  verifica-se que  $\mu$  aumenta à medida que  $\rho$  se aproxima de 0.5. Este padrão de comportamento é comum a ambos os jogos e ocorre para todas as redes de contactos que utilizámos. As figuras 7.2 e 7.3 mostram exemplos deste comportamento, respectivamente, para o Dilema do Prisioneiro e para o Snowdrift.

Este comportamento significa que, para valores de  $K$  próximos de 1, os parâmetros de entrada parecem não ter qualquer influência na volatilidade da população. Podemos apenas falar de uma influência indirecta no sentido em que os parâmetros influenciam a proporção de agentes cooperantes que, por sua vez, determina quão voláteis são as populações que jogam estes jogos.

Explicamos agora porque é que o valor de  $\mu$  aumenta à medida que  $\rho$  se aproxima da 0.5. Como ponto de partida, consideremos situações em que a proporção de agentes cooperantes está próxima de 0. Nestes casos, existe uma

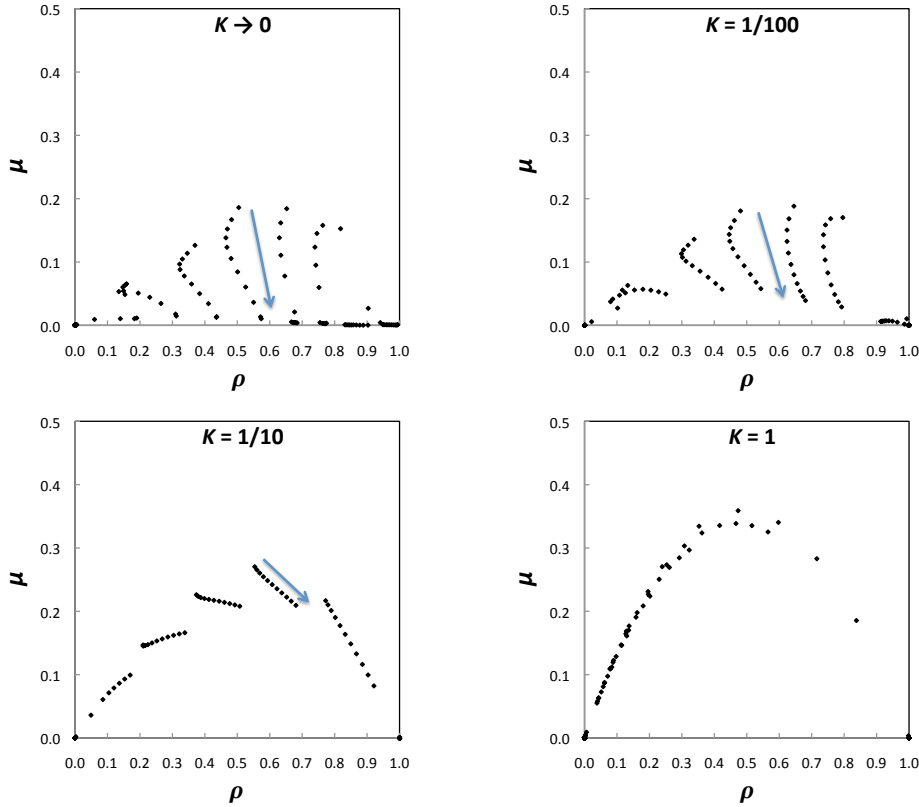


Figura 7.2: Freqüência de mudanças de estratégia,  $\mu$ , em função de  $\rho$  para diferentes valores de  $K$  quando o Dilema do Prisioneiro é jogado em redes de mundo-pequeno com  $\phi = 0.1$  com a regra PG. Nos gráficos correspondentes a  $K \leq 1/10$  podemos observar que alguns pontos se organizam em formas lineares. Cada “linha” corresponde ao valor de  $\mu$  obtido para um determinado valor de  $b$ . As setas apontam no sentido de valores decrescentes de  $\alpha$ . Note-se que o gráfico para  $K \rightarrow 0$  (regra o-melhor-vence), corresponde à situação da Figura 7.1(a).

larga maioria de ligações entre agentes não-cooperantes e um pequeno número de ligações entre agentes cooperantes, tal como um pequeno número de ligações entre agentes cooperantes e não-cooperantes. Dado que um agente cooperante apenas pode mudar de estratégia se tiver pelo menos um agente não-cooperante na sua vizinhança e vice-versa, isto explica porque é que o número médio de mudanças de estratégia é pequeno nestas situações. O mesmo raciocínio pode ser realizado quando a proporção de agentes cooperantes se aproxima de 1. À medida que  $\rho$  se aproxima de 0.5, é expectável que o número de ligações entre agentes cooperantes e não-cooperantes aumente em média. Em redes completas,

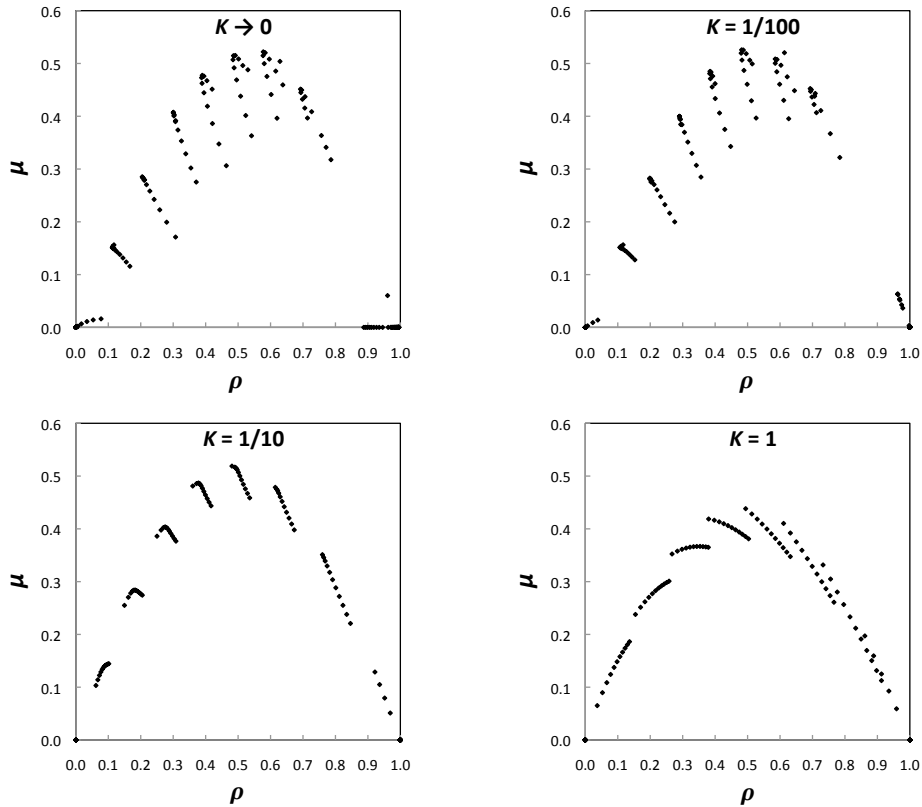


Figura 7.3: Como na Figura 7.2 mas para o Snowdrift. O gráfico para  $K \rightarrow 0$  (regra o-melhor-vence), corresponde à situação da Figura 7.1(b).

onde cada agente está ligado a todos os outros agentes da população, o cálculo da proporção de ligações entre agentes cooperantes e não-cooperantes é simples:

$$p_{CD}(n, k) = \frac{k(n-k)}{\sum_{i=1}^{n-1} i} = \frac{2k(n-k)}{n(n-1)}, \quad (7.2)$$

onde  $n$  representa o tamanho da população e  $k$  o número de agentes cooperantes na população. No entanto, em populações estruturadas o valor de  $p_{CD}(n, k)$  depende da estrutura da rede e da forma como os agentes nela estão distribuídos. O valor da média de  $p_{CD}(n, k)$  para o tipo de redes utilizadas neste trabalho foi calculado experimentalmente como descrevemos a seguir. Primeiro, foram geradas redes de Watts-Strogatz e redes de escala-livre de Barabási-Albert. A seguir, para cada rede foram geradas, por amostragem, configurações aleatórias da população com valores diferentes de  $\rho$  (para cada valor de  $\rho$  foram geradas  $10^5$  configurações). Para cada configuração medimos a proporção de ligações C-D por agente. Ou seja, para cada configuração medimos a proporção de ligações por

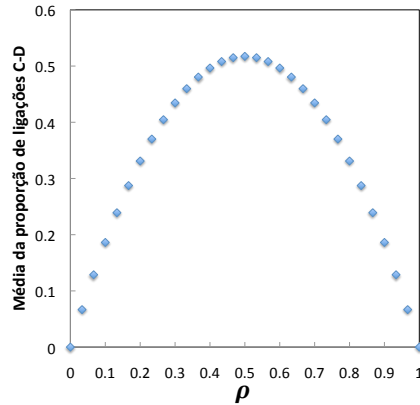


Figura 7.4: Média da proporção de ligações C-D por agente em função da proporção de agentes cooperantes na população. A forma da curva é exactamente a mesma para todas as redes.

agente que podem levar a uma mudança de estratégia. Chamamos a atenção para o facto de que estas são populações estáticas. Neste cálculo estamos interessados apenas em verificar como é que a proporção de agentes cooperantes na população influencia o potencial de ocorrência de mudanças de estratégia. A Figura 7.4 mostra a proporção média de ligações C-D em função da proporção de agentes cooperantes na população. Como podemos ver, a proporção de ligações C-D tem a forma de uma parábola invertida tal como acontece para redes completas. A forma da curva é a mesma para todas as redes que utilizámos. Além disso, esta curva é muito semelhante às curvas de  $\mu$  obtidas para ambos os jogos quando  $K = 1$  (figuras 7.2 e 7.3), especialmente para o Dilema do Prisioneiro. Esta é uma evidência adicional de que, para valores mais elevados de  $K$ , a frequência de mudanças de estratégia depende sobretudo da proporção de agentes cooperantes na população.

De modo a percebermos porque é que este padrão de comportamento não ocorre para valores reduzidos de  $K$  e porque é que surge à medida que  $K$  aumenta, devemos examinar a regra PG e como é que este parâmetro influencia a decisão dos agentes. Quando  $K \approx 0$ , um agente imita sempre a estratégia do seu vizinho mais bem sucedido ou mantém a sua, caso não exista nenhum vizinho mais bem sucedido do que ele próprio. Neste caso, não existe uma correlação directa entre a estratégia imitada e a estratégia mais comum na vizinhança de um agente. Por exemplo, um agente cooperante que possua 7 vizinhos cooperantes e um vizinho não-cooperante irá imitar o último se este tiver o ganho mais

alto. Quando  $K \neq 0$ , é possível que a soma dos ganhos dos vizinhos cooperantes (elevados a  $K$ ) exceda a soma dos ganhos dos vizinhos não-cooperantes (também elevados a  $K$ ) de um determinado agente, mesmo que aqueles tenham ganhos individuais menores. A probabilidade de isso acontecer aumenta se a proporção de vizinhos cooperantes na vizinhança for maior do que a proporção de vizinhos não-cooperantes, embora a natureza estocástica da regra PG quando  $K \neq 0$  não garanta que a estratégia com a soma de ganhos mais alta seja imitada. No entanto, à medida que o valor de  $K$  aumenta, o valor dos ganhos perde importância no processo de decisão e este tende, progressivamente, a reflectir a composição da vizinhança. Isto significa que para valores mais elevados de  $K$  haverá uma tendência para imitar a estratégia mais frequente na vizinhança, sobretudo se existir uma diferença clara na proporção de vizinhos cooperantes e não-cooperantes. Em actualizações posteriores, um agente tenderá a manter a sua estratégia uma vez que a maior parte dos seus vizinhos tem uma estratégia igual. Isto contribui para a ocorrência de menos mudanças de estratégia. Por outro lado, situações em que existe um maior equilíbrio entre a proporção de agentes cooperantes e não-cooperantes na vizinhança levam a que haja mais incerteza na estratégia a adoptar. Isto conduz a mudanças de estratégia mais frequentes.

No que diz respeito à forma como o valor de  $\mu$  depende da rede de contactos, verifica-se para ambos os jogos que, em redes de escala-livre,  $\mu$  aumenta quando se aumenta  $m$  (ver exemplo na Figura 7.5). Este resultado é natural uma vez que, quanto maior o valor de  $m$ , mais ligações existem entre os agentes e, logo, maior o potencial de ocorrência de mudanças de estratégia. Para as redes de mundo-pequeno, os resultados confirmam as conclusões de Abramson & Kuperman (2001) obtidas com o Dilema do Prisioneiro: o valor de  $\mu$  aumenta com  $\phi$ . Aparentemente, a formação de grupos compactos de agentes torna-se mais difícil à medida que o valor de  $\phi$  aumenta, o que poderá explicar o aumento do valor de  $\mu$ . Este resultado não se verifica, no entanto, para o Snowdrift.

Finalmente, as figuras 7.2 e 7.3 ilustram também que a frequência de mudanças de estratégia é maior para o Snowdrift do que para o Dilema do Prisioneiro. Este resultado está relacionado com as diferenças existentes na forma como os agentes se organizam na rede de contactos em cada jogo. Como vimos no capítulo anterior, os agentes cooperantes organizam-se em grupos mais compactos quando jogam o Dilema do Prisioneiro do que quando jogam o Snowdrift. Como consequência, existe um número maior de ligações entre agentes cooperantes e não-cooperantes quando é utilizado o Snowdrift. Isto, por sua vez, leva à ocorrência de um maior

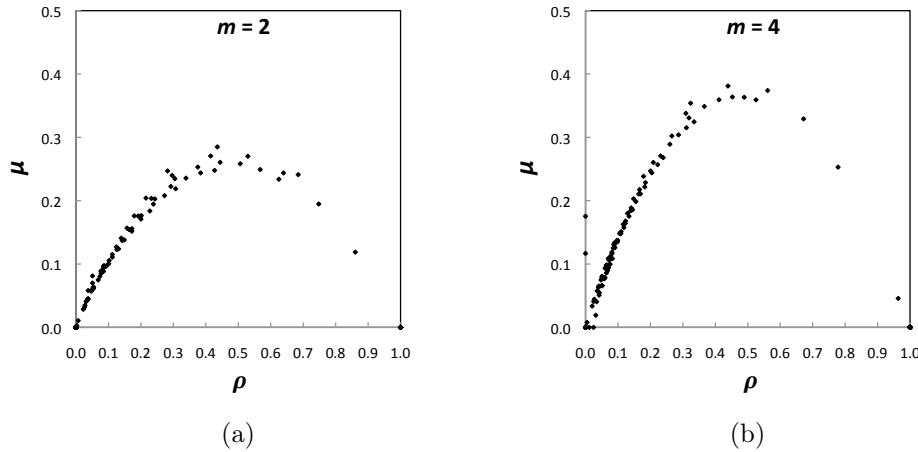


Figura 7.5: Valor de  $\mu$  em função de  $\rho$  para o Dilema do Prisioneiro jogado em redes de escala-livre com  $m = 2$  (a) e  $m = 4$  (b) com a regra PG com  $K = 1$ . Lembramos que, quanto maior o valor de  $m$ , maior o número de ligações entre os agentes. Mais especificamente,  $\bar{k} = 2m$ .

número de mudanças de estratégia. Este aspecto poderá também constituir uma explicação para o facto de o valor de  $\mu$  não aumentar com  $\phi$  no caso do Snowdrift, tal como referimos no parágrafo anterior. Isto é, o aumento de  $\phi$  não pode destruir os grupos compactos porque eles não existem mesmo com valores baixos de  $\phi$ .

## 7.2 Regra de Fermi e Regra de Replicação

Os resultados obtidos com a regra de Fermi (Figura 7.6) e com a regra de replicação (Figura 7.7) são qualitativamente semelhantes aos que são obtidos com a regra PG com valores mais elevados de  $K$  descritos na secção anterior. Salientamos que, para a regra de Fermi, isto é válido para a maior parte dos casos independentemente do valor de  $K$ , embora existam algumas excepções como acontece quando o Snowdrift é jogado em redes de escala-livre com  $K \rightarrow 0$  e ganhos normalizados. Tal como acontece com a regra PG com valores mais elevados de  $K$ , o processo de actualização de estratégias modelado por estas duas regras tende a reflectir a composição da vizinhança mas, neste caso, devido à escolha aleatória do vizinho candidato a ser imitado. Este aspecto explica que também com estas regras a frequência de mudanças de estratégia aumente à medida que a proporção de agentes cooperantes tende para 0.5. O facto de este comportamento se verificar para

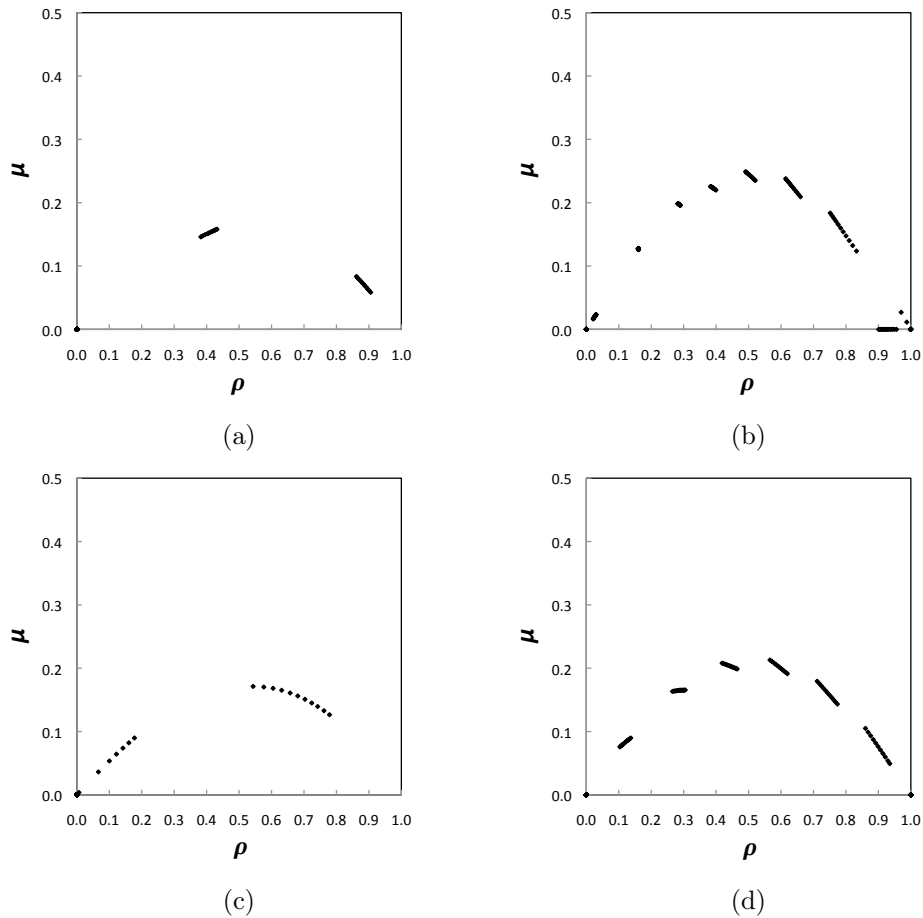


Figura 7.6: Valor de  $\mu$  em função de  $\rho$  quando o Dilema do Prisioneiro (esquerda) e o Snowdrift (direita) são jogados em redes de mundo-pequeno ( $\phi = 0.1$ ) com a regra de Fermi. Em cima:  $K \rightarrow 0$ ; Em baixo:  $K = 0.1$  para o Dilema do Prisioneiro e  $K = 1$  para o Snowdrift.

a regra de replicação e para a regra de Fermi independentemente do valor de  $K$  significa que ele se deve a intensidades de selecção reduzidas e não à possibilidade de os agentes imitarem vizinhos menos bem sucedidos.

Os gráficos de  $\mu$  mostram também que os valores obtidos com a regra de replicação são consideravelmente menores que os que são obtidos com a regra de Fermi, que por sua vez são menores que os que são obtidos com a regra PG, sobretudo para valores mais elevados de  $K$ . A diferença entre os resultados obtidos com as regras de Fermi e de replicação e os resultados obtidos com a regra PG parecem dever-se ao facto de aquelas modelarem apenas uma monitorização parcial da vizinhança. Por sua vez, o facto de a regra de replicação impedir que

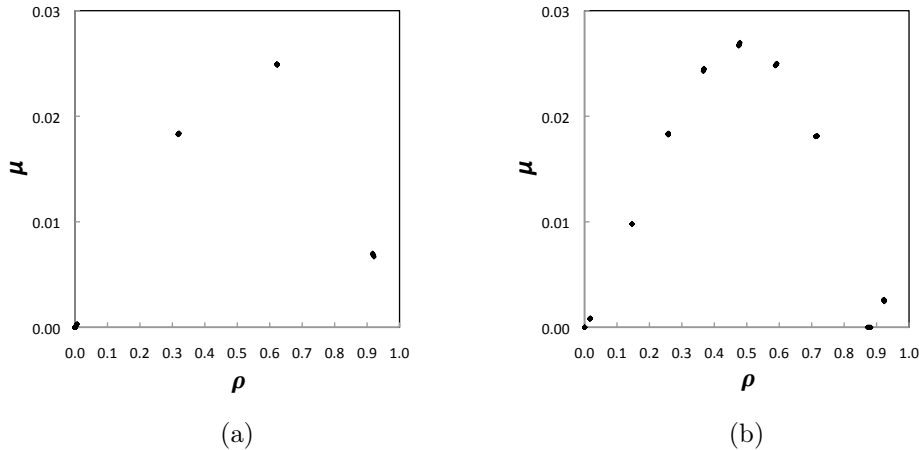


Figura 7.7: Valor de  $\mu$  em função de  $\rho$  quando o Dilema do Prisioneiro (a) e o Snowdrift (b) são jogados em redes de mundo-pequeno ( $\phi = 0.1$ ) com a regra de replicação.

os agentes imitem vizinhos menos bem sucedidos implica que a frequência de mudanças de estratégia seja menor do que para a regra de Fermi e, logo, para a regra PG.

Finalmente, nos gráficos relativos ao Snowdrift é possível verificar que há um conjunto de pontos para os quais  $\mu = 0$  quando  $0.85 < \rho < 0.95$ , tanto para a regra de Fermi com  $K \rightarrow 0$  como para a regra de replicação. Esta situação, que implica um desvio da parábola, ocorre quando  $r = 0$ , ou seja, para uma situação limite deste jogo em que  $R = S = T = 1$  e  $P = 0$ , e é comum a todas as redes de contactos e valores de  $\alpha$ . Através de inspeção visual das configurações formadas pelos agentes em redes regulares verificámos que, quando  $r = 0$ , a população converge para pontos fixos em que existe um grupo único de agentes cooperantes que domina quase toda a população e uma fracção de agentes não-cooperantes isolados, tal como ilustra a Figura 7.8. Neste caso, e independentemente da rede de contactos, todos os agentes, cooperantes e não-cooperantes têm um ganho médio igual a 1, daí a inexistência de mudanças de estratégia. A população converge para este tipo de estado porque, para este valor de  $r$ , os agentes não-cooperantes que não estejam isolados têm um ganho inferior aos seus vizinhos cooperantes.

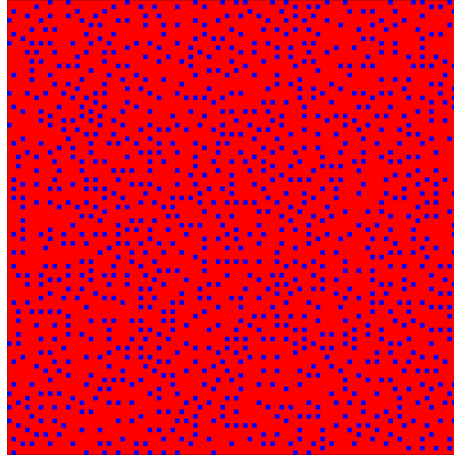


Figura 7.8: Estado em equilíbrio quando o Snowdrift, com  $r = 0$ , é jogado em grelhas regulares com a regra de replicação.

### 7.3 Resumo e Comentários Finais

Os resultados deste capítulo podem ser resumidos do seguinte modo: Quando se utiliza a regra PG com valores reduzidos de  $K$ , a frequência de mudanças de estratégia diminui à medida que se diminui a taxa de sincronismo. Posto de outro modo, neste caso o sistema torna-se menos dinâmico quando se diminui a taxa de sincronismo. Este resultado é sempre válido para o Dilema do Prisioneiro, existindo algumas exceções no caso do Snowdrift. À medida que o valor de  $K$  aumenta, a frequência de mudanças de estratégia torna-se progressivamente dependente da composição da população, aumentando o seu valor à medida que as proporções de agentes cooperantes e não-cooperantes se equilibram. Este comportamento verifica-se também para a regra de Fermi, independentemente do valor de  $K$ , e para a regra de replicação. Isto significa que em situações em que os agentes não imitem sempre o seu vizinho mais bem sucedido, a identificação de agentes não-cooperantes torna-se mais difícil à medida que as proporções de agentes cooperantes e não-cooperantes se equilibram.



# Capítulo 8

## Conclusão e Trabalho Futuro

O objectivo geral deste trabalho consistiu em investigar a influência da dinâmica de actualização na evolução da cooperação utilizando como ferramenta de trabalho os jogos evolucionários. Procurámos, nomeadamente, saber se o assincronismo é benéfico ou prejudicial à cooperação, isto é, se pode ser utilizado como um mecanismo de promoção de comportamentos de cooperação numa população de agentes. Procurámos também identificar os aspectos que determinam a forma como a dinâmica de actualização influencia a evolução da cooperação. De seguida fazemos uma síntese das principais conclusões e contribuições do trabalho desenvolvido e terminamos depois com algumas sugestões de trabalho futuro.

### 8.1 Principais Conclusões e Contribuições

Os resultados obtidos nas simulações realizadas mostram que, em geral, quando a dinâmica de actualização tem alguma influência, o assincronismo é benéfico à evolução da cooperação. Isto sugere que o assincronismo pode ser utilizado como um mecanismo de promoção da cooperação. Porventura, esta é a contribuição mais relevante do trabalho realizado. O efeito benéfico do assincronismo só não se verifica quando o ruído presente no processo de actualização da estratégia dos agentes é inexistente ou reduzido e, nestes casos, quase exclusivamente quando o grau de regularidade das ligações dos agentes é elevado. Isto significa que, à excepção destas situações, a cooperação pode ser promovida através de taxas de sincronismo baixas evitando, por exemplo, mecanismos de acoplamento entre os agentes ou abstendo-nos simplesmente de os forçar a actualizarem-se nos mesmos momentos específicos.

Os resultados obtidos em trabalhos anteriores não são conclusivos em relação à influência da dinâmica de actualização sobre a evolução da cooperação devido ao número limitado de condições que é geralmente testado. Esta foi, aliás, uma constatação que serviu de ponto de partida para a realização deste trabalho. Utilizamos, por isso, uma grande variedade de condições, nomeadamente, diferentes tipos de jogos, redes de contactos, regras de transição e taxas de sincronismo. Esta prática permitiu-nos, por um lado, caracterizar a forma como a influência da dinâmica de actualização varia com as condições do sistema e, por outro, identificar os aspectos que desempenham um papel relevante nessa influência.

### 8.1.1 Jogos

No que diz respeito aos jogos, começámos por explorar um grande número de configurações de quatro jogos simétricos de dois jogadores, a saber, o jogo da Harmonia, o Caça ao Veado, o Dilema do Prisioneiro e o Snowdrift. O primeiro não constitui um dilema pois é sempre melhor cooperar. A influência da dinâmica de actualização no Caça ao Veado é muito clara: quando esta influência tem algum significado, o assincronismo favorece sempre a evolução da cooperação. O Dilema do Prisioneiro e o Snowdrift são os jogos em que ocorrem mais casos em que o assincronismo é prejudicial à evolução da cooperação e, por isso, foram os mais explorados neste trabalho. Os resultados mostram que a influência da dinâmica de actualização, quando existe, é mais acentuada, em magnitude, no Dilema do Prisioneiro. No entanto, no Snowdrift é mais frequente a coexistência de agentes cooperantes e não-cooperantes, pelo que é maior o número de casos em que a influência da dinâmica de actualização se faz sentir.

### 8.1.2 Redes de Contactos

Podemos dividir as redes de contactos que usámos em dois tipos diferentes: redes em que o número de vizinhos por agente é o mesmo, ou aproximadamente o mesmo, e redes em que existe uma grande heterogeneidade no número de vizinhos. Para gerar o primeiro tipo de redes utilizámos o modelo de Watts-Strogatz, que permite cobrir o espaço entre as redes regulares e as redes aleatórias. Para o segundo tipo de redes, as redes de escala-livre, utilizámos sobretudo o modelo de Barabási-Albert, tendo sido também realizadas algumas simulações com o modelo de Holme-Kim, que permite controlar o coeficiente de agregação da rede.

A utilização de vários tipos de redes permitiu-nos concluir que a heterogeneidade de graus (número de vizinhos), a distância média entre agentes e o coeficiente de agregação não desempenham um papel relevante na influência da dinâmica de actualização.

Já referimos que os casos em que o assincronismo é prejudicial à evolução da cooperação acontecem quase exclusivamente em redes com uma grande regularidade nas ligações entre os agentes. Este aspecto parece, assim, desempenhar um papel importante, sobretudo quando associado a uma regra de transição determinista, como é o caso da regra o-melhor-vence. No entanto, uma análise da dinâmica do sistema e dos padrões espaciais formados pelos agentes revela que, dependendo dos parâmetros concretos do jogo utilizado, a regularidade das ligações pode tornar o assincronismo benéfico em alguns casos e prejudicial noutros.

### 8.1.3 Regras de Transição

Foram várias as regras de transição que utilizámos. Numa primeira abordagem utilizámos a regra de replicação, a regra o-melhor-vence e a regra de Moran, que se encontram entre as regras mais utilizadas. Estas regras diferem no grau de monitorização da vizinhança e no nível de ruído presente no processo de actualização. De modo a verificar o papel destes aspectos na influência da dinâmica de actualização, realizámos experiências com a regra PG e com a regra de Fermi. Estas regras permitem controlar o nível de ruído presente no processo de actualização, diferindo sobretudo no grau de monitorização da vizinhança: A regra de Fermi, tal como a regra de replicação, só tem em conta o ganho e a estratégia de um vizinho e, logo, modela uma monitorização parcial da vizinhança; A regra PG modela uma monitorização completa da vizinhança. As regras o-melhor-vence e de Moran são casos especiais da regra PG modelando, respectivamente, a ausência e a presença de ruído no processo de actualização.

Os resultados obtidos com as regras PG e de Fermi mostram que o assincronismo é, em geral, benéfico à evolução da cooperação. Os únicos casos em que isso não se verifica ocorrem apenas para níveis de ruído muito reduzidos. A diferença principal entre os resultados obtidos com as duas regras é o facto de a regra de Fermi ser menos sensível a alterações na dinâmica de actualização. Isto sugere que um menor grau de monitorização da vizinhança leva a uma menor sensibilidade à dinâmica de actualização. No entanto, o cruzamento com os resultados

descritos em Roca et al. (2009a), onde é utilizada uma versão da regra de replicação com monitorização completa da vizinhança, mostra que esta regra é também insensível à dinâmica de actualização. Ou seja, o grau de monitorização não é uma condição suficiente para tornar o nível de cooperação sensível à dinâmica de actualização.

O ruído permite que os agentes possam tomar decisões irracionais, imitando vizinhos menos bem sucedidos. A regra de replicação, que não permite esse tipo de decisões, é fortemente insensível a alterações na dinâmica de actualização. Por outro lado, a regra o-melhor-vence, que também não permite a tomada de decisões irracionais, mostra-se sensível a essas alterações. Uma das diferenças entre as duas regras é o facto de a regra de replicação modelar uma menor intensidade de selecção, isto é, uma menor pressão para seleccionar os vizinhos mais bem sucedidos. Colocámos, assim, a hipótese de que a monotonia em relação aos ganhos - ou seja, a impossibilidade de os agentes tomarem decisões irracionais - desempenhe um papel central na sensibilidade do nível de cooperação a modificações na dinâmica de actualização, quando associada a uma menor intensidade de selecção. Verificámos esta hipótese utilizando versões modificadas da regra de Moran e da regra de Fermi, em que não é permitido que os agentes tomem decisões irracionais. Os resultados confirmam esta hipótese, dada a quase total insensibilidade das versões modificadas. Isto confirma que a influência da dinâmica de actualização é fortemente dependente do nível de ruído presente no processo de actualização e sugere que, caso seja possível, o ruído pode ser utilizado como mecanismo de controlo da sensibilidade de sociedades de agentes artificiais a alterações na dinâmica de actualização. Este controlo pode traduzir-se, por exemplo, no melhoramento dos processos envolvidos na tomada de decisões pelos agentes e nas capacidades de percepção do ambiente que os rodeia, de modo evitar ou reduzir a imitação de agentes menos bem sucedidos.

#### 8.1.4 Assincronismo Intermédio

Os resultados obtidos com uma actualização síncrona e com uma actualização assíncrona sequencial podem ser quantitativamente e qualitativamente bastante diferentes. Por exemplo, em muitos casos a população converge para estados uniformes de agentes não-cooperantes quando é utilizada uma actualização síncrona e para estados em que ambos os tipos de agente coexistem, ou mesmo para populações uniformes de agentes cooperantes, quando se utiliza uma actualização sequencial. Dependendo do tipo de actualização utilizado, situações como

esta podem levar a conclusões diferentes se o objectivo da investigação for, por exemplo, verificar se um determinado aspecto é um mecanismo de promoção da cooperação. Por outro lado, tratando-se de dois casos extremos de actualização, coloca-se a questão de saber se é suficiente utilizar a actualização síncrona e a actualização sequencial ou se, pelo contrário, é necessária a exploração de graus intermédios de assincronismo, os quais modelam melhor as situações que se encontram na natureza.

Os resultados das simulações em que foram utilizados graus intermédios de assincronismo mostram que, exceptuando jogos jogados em redes com algum grau de regularidade e para intensidades de selecção elevadas, a proporção de agentes cooperantes varia de forma monótona com a taxa de sincronismo do sistema. Isto significa que, em geral, a influência máxima da dinâmica de actualização pode ser medida com base nos resultados obtidos com a actualização síncrona e com a actualização sequencial. Por outro lado, verifica-se que a variação da proporção de agentes cooperantes com a taxa de sincronismo nem sempre acontece de forma suave. Existem casos em que uma pequena alteração da taxa de sincronismo pode provocar uma variação considerável na proporção de agentes cooperantes na população. Em geral, a sensibilidade é maior quando se passa de uma actualização síncrona para uma actualização quase síncrona. Por exemplo, verificámos que, quando os jogos são jogados em redes de escala-livre com a regra PG e ganhos acumulados, a proporção de agentes é bastante elevada e praticamente a mesma para todos os valores da taxa de sincronismo, sofrendo um forte decréscimo apenas quando se passa de uma actualização quase síncrona para uma actualização síncrona. Este comportamento, para além de ser uma evidência do carácter artificial da actualização síncrona, mostra que a exploração de graus intermédios de assincronismo pode enriquecer as conclusões.

Esta prática revelou-se também de grande utilidade na verificação da ideia proposta em Tomassini et al. (2006) de que existe uma associação entre a ocorrência de trocas de estratégia entre os agentes e a forma como a dinâmica de actualização influencia a evolução da cooperação quando existe ruído no processo de actualização. Mais concretamente, estes autores sugerem que a ocorrência de trocas de estratégia quando se utiliza uma actualização síncrona faz com que o nível de cooperação seja menor do que o obtido com uma actualização sequencial, onde as trocas não podem ocorrer.

Para verificar esta ideia começámos por mostrar que, com a regra PG e a regra de Fermi, o número de trocas de estratégia diminui com a taxa de sincronismo

e que é maior quando existe ruído no processo de actualização. Este resultado não se verifica apenas quando os jogos são jogados em redes de escala-livre com ganhos acumulados. Para esta situação particular, propusemos no Capítulo 5 uma explicação alternativa para o efeito benéfico do assincronismo. Verificámos depois que existe de facto uma relação causa-efeito entre o número de trocas de estratégia e a proporção de agentes cooperantes na população: Quanto maior o número de trocas de estratégia, menor a proporção de agentes cooperantes. Uma análise dos padrões espaciais formados pelos agentes mostra que esta diminuição se deve ao facto de as trocas de estratégia contribuírem para a destruição de grupos compactos de agentes cooperantes, impedindo que estes interajam sobretudo entre si e que evitem a exploração por parte dos agentes não-cooperantes. Esta análise é reforçada por dois contra-exemplos: 1) O número de trocas de estratégia é muito reduzido quando se utiliza a regra de replicação, sendo que esta regra é insensível a alterações na taxa de sincronismo; 2) As trocas de estratégia não levam à diminuição da proporção de agentes cooperantes apenas quando os agentes não se organizam em grupos compactos de alguma dimensão.

Finalmente, a exploração de graus intermédios de assincronismo permitiu-nos analisar a forma como a dinâmica de actualização afecta a frequência com que os agentes mudam de estratégia quando o sistema está em equilíbrio e a estabilidade desse equilíbrio, que pode ser grande globalmente mas pequena localmente. A frequência de mudanças de estratégia pode também ser entendida como uma medida de insatisfação dos agentes, daí a relevância desta análise. Os resultados mostram que, para intensidades de selecção elevadas, a frequência de mudanças de estratégia diminui com a taxa de sincronismo para o Dilema do Prisioneiro existindo, no entanto, algumas excepções no caso do Snowdrift. Para valores mais reduzidos da intensidade de selecção a dinâmica de actualização não tem qualquer influência. Em vez disso, verifica-se que a frequência de mudanças de estratégia depende apenas da proporção relativa de agentes cooperantes e agentes não-cooperantes na população: O seu valor aumenta à medida que a proporção dos dois tipos de agente se equilibra.

## 8.2 Trabalho Futuro

Embora acreditemos que esta tese é um contributo relevante para o entendimento da influência da dinâmica de actualização na evolução da cooperação, o trabalho

que desenvolvemos tem limitações na medida em que, por um lado, alguns aspectos permanecem em aberto e necessitam de uma análise mais aprofundada e, por outro, pode ser estendido a situações para além daquelas que explorámos. De entre os aspectos que julgamos merecer uma análise mais aprofundada salientamos a explicação do comportamento observado quando se utilizam redes de escala livre e ganhos acumulados tanto com a regra PG como com a regra de Fermi que demos no Capítulo 5. Sendo uma explicação intuitiva, deverá ser também verificada. Outro aspecto que merece atenção é a não-monotonia do nível de cooperação em relação a modificações na taxa de sincronismo que se verifica quando se utilizam níveis reduzidos de ruído no processo de actualização de estratégias. Simulações que realizámos com populações de menores dimensões em que o grau de não-monotonia aumentou sugerem que, no caso do Dilema do Prisioneiro, este comportamento pode estar relacionado com o tamanho finito da população. No entanto, este aumento verifica-se apenas para grelhas regulares. Além disso, os resultados obtidos com o Snowdrift não variam com o tamanho da população, daí a necessidade de mais trabalho sobre este assunto. Terminamos com algumas propostas para estender o trabalho realizado.

### 8.2.1 Métodos de actualização

A escolha uniforme foi o método de actualização assíncrona sequencial que utilizámos por ser aquele que é quase exclusivamente utilizado em trabalhos anteriores sobre o estudo da evolução da cooperação. Este método e a sua generalização para graus intermédios de assincronismo, a dinâmica assíncrona estocástica, são os que implicam uma menor correlação entre os momentos de actualização dos agentes. No entanto, esta correlação poderá ocorrer, sobretudo em comunidades de agentes fortemente interligadas entre si. Faz sentido, por isso, investigar a influência de métodos de actualização que tenham este aspecto em conta como, por exemplo, o método de actualização por blocos que descrevemos na Secção 2.1.1.2. Por outro lado, a dinâmica assíncrona estocástica assume que a probabilidade de actualização em cada iteração é igual para todos os agentes. Verificar como é que o relaxamento desta restrição afecta, não só a proporção de agentes cooperantes na população, mas também a sua distribuição pelas diferentes probabilidades de actualização, parece-nos uma possibilidade que faz também sentido explorar.

Como vimos no Capítulo 2, o que distingue os métodos de actualização baseados em tempo discreto dos métodos baseados em tempo contínuo, é o facto de

estes, ao contrário daqueles, representarem o tempo de forma explícita. Referimos também que, na prática, os métodos de actualização contínuos correspondem a métodos discretos sequenciais, não só por a actualização ser, de facto, sequencial, mas também porque não são considerados aspectos como o tempo de transmissão e processamento da informação. Isto é, o resultado de um processo de actualização de um elemento do sistema fica imediatamente disponível para ser utilizado por outros agentes. Um caminho possível para o trabalho que realizámos consiste em estudar a influência da distribuição temporal dos momentos de actualização dos elementos do sistema e dos tempos de transmissão e processamento de informação utilizando, para isso, um método de actualização baseado em tempo contínuo.

### 8.2.2 Jogos Evolucionários

Os jogos evolucionários são modelos muito simplificados da realidade. No entanto, a teoria dos jogos evolucionária tem vindo a evoluir progressivamente no sentido da exploração de situações mais realistas. Como referimos já nesta tese, um desses passos consistiu na utilização de populações estruturadas. No entanto, a rede de contactos dificilmente permanece fixa ao longo do tempo. Nos últimos anos, diversos trabalhos mostraram que os comportamentos de cooperação podem ser promovidos e mantidos quando, além das estratégias dos agentes, a rede de contactos também evolui. Isto foi demonstrado analiticamente, considerando que diferentes tipos de agentes procuram novos contactos e quebram contactos já existentes com taxas diferentes (Pacheco et al., 2006a,b, 2008), bem como experimentalmente, quando a influência que os agentes têm sobre os seus vizinhos pode evoluir com o tempo (Szolnoki & Perc, 2008) ou quando a topologia da rede pode também evoluir, seja a partir de um número reduzido de agentes (Poncela et al., 2008), seja a partir de uma configuração inicial da uma população completa (Zimmermann & Eguíluz, 2004; Szolnoki et al., 2008a). Estes modelos, que é costume designar por jogos coevolucionários (Perc & Szolnoki, 2009), abrem novas perspectivas para o estudo da influência da dinâmica de actualização na evolução da cooperação na medida em que a dinâmica deve ser definida não só para o processo de actualização de estratégias mas também para o processo de revisão de contactos. Outras extensões possíveis considerarão o estudo da influência da dinâmica de actualização em agentes com memória (Lindgren & Nordahl, 1994; Kirchkamp, 2000) e jogos com um número arbitrário de jogadores, tal como o jogo do Bem Comum.

### 8.2.3 Autómatos Celulares

O trabalho que realizámos teve como objecto de estudo os jogos evolucionários, que são um caso particular de sistemas dinâmicos discretos. No entanto, julgamos que o trabalho que realizámos pode contribuir para o estudo da influência de dinâmica de actualização noutros sistemas como, por exemplo, os autómatos celulares. A influência da dinâmica de actualização nestes sistemas varia conforme a regra de transição utilizada mas, tanto quanto sabemos, não existe uma caracterização dessa influência em função das características das regras de transição, tal como fizemos neste trabalho, e julgamos que essa seria um contribuição interessante.

### 8.2.4 Algoritmos Evolucionários

Uma das áreas em que a influência da dinâmica de actualização tem sido estudada é a dos algoritmos evolucionários, que são algoritmos de pesquisa paralela e estocástica inspirados na teoria da selecção natural e na biologia molecular, que permitem a evolução de um conjunto de potenciais soluções para um problema (De Jong, 2007). Os estudos sobre a influência da dinâmica de actualização nestes sistemas concluem que actualização assíncrona sequencial leva a uma convergência mais rápida do processo evolutivo (Goldberg & Deb, 1990; Syswerda, 1991; De Jong & Sarma, 1993; Rogers & Prügel-Bennett, 1999; Giacobini et al., 2005, 2004, 2005). No entanto, para alguns problemas, as soluções obtidas com os métodos assíncronos são, em média, inferiores às que são obtidas com uma actualização síncrona (Alba et al., 2002). Tendo em conta que os resultados deste trabalho mostram que o comportamento do sistema nem sempre varia de forma gradual a pequenas alterações da taxa de sincronismo, faz sentido verificar se a exploração de graus intermédios de assincronismo permite a identificação de um bom compromisso entre rapidez de convergência e qualidade das soluções encontradas.



# Apêndice A

## Artigos Publicados

No âmbito do trabalho desenvolvido nesta tese foram publicados alguns artigos cujo conteúdo resumimos neste apêndice.

- (Grilo & Correia, 2007, 2008a): Nestes artigos são apresentados resultados para o Dilema do Prisioneiro de um parâmetro jogado em redes de Watts-Strogatz (Grilo & Correia, 2007) e redes de escala-livre (Grilo & Correia, 2008a) com a regra PG. Os resultados correspondentes a estes artigos são apresentados no Capítulo 4 da tese. Em (Grilo & Correia, 2008a) comparamos também os resultados obtidos com a dinâmica assíncrona estocástica e a actualização periódica (determinista). Os resultados obtidos com os dois métodos são semelhantes quando se utiliza a mesma taxa de sincronismo, o que significa que a natureza estocástica ou determinista da dinâmica de actualização não influencia as conclusões.
- (Grilo & Correia, 2008b): O ruído presente no processo de actualização é identificado como um dos principais factores a determinar a sensibilidade à dinâmica de actualização e em particular a monotonia desse processo em relação aos ganhos, tal como vimos no Capítulo 5.
- (Grilo & Correia, 2009a): O estudo da influência da dinâmica de actualização é estendido ao Snowdrift e a uma versão do Caça ao Veado com um parâmetro, incluindo também o Dilema do Prisioneiro. Para além do efeito benéfico ou prejudicial do assincronismo sobre a cooperação, o artigo incide sobre a monotonia e a sensibilidade da proporção de agentes cooperantes em relação à taxa de sincronismo, descritos no Capítulo 5. São também introduzidas as expressões de  $E(X)$  e  $V(X)$  apresentadas no Capítulo 2.

- (Grilo & Correia, 2009c): É verificada a ideia apresentada em (Tomassini et al., 2006), confirmando que o efeito benéfico do assincronismo sobre a cooperação está fortemente ligado à diminuição do número de trocas de estratégia entre os agentes quando se diminui a taxa de sincronismo no Snowdrift (Capítulo 6 da tese).
- (Grilo & Correia, 2009b): É apresentado o estudo descrito no Capítulo 7 da tese sobre a influência da dinâmica de actualização na frequência com que os agentes mudam de estratégia.
- (Grilo & Correia, 2011) São apresentados os principais resultados do trabalho desenvolvido no âmbito da tese. Para além das versões de um parâmetro do Dilema do Prisioneiro e do Snowdrift, o artigo contempla também jogos definidos no plano  $ST$  (Capítulo 3) bem como as diferentes regras de transição que utilizámos ao longo de todo o trabalho e ganhos acumulados. O artigo mostra o carácter geral do efeito benéfico do assincronismo sobre a cooperação. São explorados aspectos relativos à utilização de graus intermédios de assincronismo, nomeadamente o papel que a monotonia da regra de transição em relação aos ganhos e a intensidade de selecção têm na sensibilidade do nível de cooperação à taxa de sincronismo. Finalmente, a verificação da ideia de Tomassini et al. (2006) é alargada também ao Dilema do Prisioneiro.

# Bibliografia

- Abbas, A., J. M. Bahi, S. Contassot-Vivier, & M. Salomon (2005). Mixing synchronism/asynchronism in discrete-state discrete-time dynamic networks. In *Proceedings of the 4th International Conference on Engineering Applications and Computational Algorithms (DCDIS'2005)*, pp. 524–529. Springer-Verlag.
- Abramson, G. & M. Kuperman (2001). Social games in a social network. *Physical Review E* 63, 030901.
- Abramson, G. & D. H. Zanette (1998). Globally coupled maps with asynchronous updating. *Physical Review E* 58(4), 4454–4460.
- Alba, E., M. Giacobini, M. Tomassini, & S. Romero (2002). Comparing synchronous and asynchronous cellular genetic algorithms. In *PPSN VII: Proceedings of the 7th International Conference on Parallel Problem Solving from Nature*, pp. 601–610. Springer-Verlag.
- Albert, R. & A.-L. Barabási (2002). Statistical mechanics of complex networks. *Reviews of Modern Physics* 74(1), 47–97.
- Amaral, L. A. N., A. S. Barthélemy, & H. E. Stanley (2000). Classes of small-world networks. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 97(21), 11149–11152.
- Assenza, S., J. Gómez-Gardeñes, & V. Latora (2008). Enhancement of cooperation in highly clustered scale-free networks. *Physical Review E* 78, 017101.
- Axelrod, R. (1984). *The Evolution of Cooperation*. Penguin Books.
- Axtell, R. (2000). Effects of interaction topology and activation regime in several multi-agent systems. In *Proceedings of the Second International Workshop on Multi-agent Based Simulation (MABS 2000)*, pp. 33–48. Springer-Verlag.

- Barabási, A.-L. & R. Albert (1999). Emergence of scaling in random networks. *Science* 286(5439), 509–512.
- Bersini, H. & V. Detours (1994). Asynchrony induces stability in cellular automata based models. In P. M. R. Brooks (Ed.), *Artificial Life IV: Fourth International Workshop on the Synthesis And Simulation of Living Systems*, pp. 382–387. The MIT Press.
- Bettstetter, C., F. H. P. Fitzek, H. Hartenstein, G. Pujolle, & P. Santi (2000). Guest editorial. *European Transactions on Telecommunications, Special Issue: Self-Organisation in Mobile Networking* 16(5), 371–373.
- Blok, H. J. & B. Bergersen (1999). Synchronous versus asynchronous updating in the "game of life". *Physical Review E* 59, 3876–9.
- Boccaletti, S., J. Kurths, G. Osipov, D. L. Valladares, & C. S. Zhou (2002). The synchronization of chaotic systems. *Physics Reports* 366, 1–101.
- Boccaletti, S., V. Latora, Y. Moreno, M. Chavez, & D.-U. Hwang (2005). Complex networks: Structure and dynamics. *Physics Reports* 424, 175–308.
- Bonabeau, E. (2002). Agent based modeling: Methods and techniques for simulating human systems. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 99(3), 7280–7287.
- Branover, A., R. Kol, & R. Ginosar (2004). Asynchronous design by conversion: Converting synchronous circuits into asynchronous ones. In *Design, Automation and Test in Europe Conference and Exhibition - Volume 2*, pp. 870–875. IEEE Computer Society.
- Brauchli, K., T. Killingback, & M. Doebeli (1999). Evolution of cooperation in spatially structured populations. *Journal of Theoretical Biology* 200, 405–417.
- Camazine, S., J.-L. Deneubourg, N. R. Franks, J. Sneyd, G. Theraulaz, & E. Bonabeau (2001). *Self-Organization in Biological Systems*. Princeton University Press.
- Campbell, A. & A. S. Wu (2009). On the significance of synchronicity in emergent systems. In *Proceedings of the 8th International Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems (AAMAS 2009)*, pp. 449–456. International Foundation for Autonomous Agents and Multiagent Systems.

- Campbell, A., A. S. Wu, K. Garfield, R. Shumaker, S. Luke, , & K. A. D. Jong (2006). Empirical study on the effects of synthetic social structures on teams of autonomous vehicles. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Networking, Sensing, and Control*, pp. 440–445. IEEE Computer Society.
- Caron-Lormier, G., R. W. Humphry, D. A. Bohan, C. Hawes, & P. Thorbek (2008). Asynchronous and synchronous updating in individual-based models. *Ecological Modelling* 212, 522–527.
- Cassar, A. (2007). Coordination and cooperation in local, random and small world networks: Experimental evidence. *Games and Economic Behavior* 48(2), 209–230.
- Cheung, K. F., L. E. Atlas, & R. J. M. II (1987). Synchronous vs asynchronous behavior of Hopfield’s cam neural net. *Applied Optics* 26(22), 4808–4813.
- Cohen, P. R. (1995). *Empirical Methods for Artificial Intelligence*. The MIT Press.
- Cornforth, D., D. Green, & D. Newth (2005). Ordered asynchronous processes in multi-agent systems. *Physica D: Nonlinear Phenomena* 204, 70–82.
- Cornforth, D., D. G. Green, D. Newth, & M. Kirley (2002). Do artificial ants march in step? Ordered asynchronous processes in natural and artificial systems. In *Artificial Life VIII: Proceedings of the Eighth International Conference on the Simulation and Synthesis of Living Systems*, pp. 28–32. The MIT Press.
- Correia, L. (2006). Self-organized systems: Fundamental properties. *Ciências da Computação* 1, 89–121.
- Crosby, G. V. & N. Pissinou (2007). Evolution of cooperation in multi-class wireless sensor networks. In *32nd IEEE Conference on Local Computer Networks*, pp. 489–495. IEEE Press.
- Dauidsen, J., H. Ebel, & S. Bornholdt (2002). Emergence of a small world from local interactions: Modeling acquaintance networks. *Physical Review Letters* 88(12), 128701.
- De Jong, K. A. (2007). *Evolutionary Computation, A Unified Approach*. The MIT Press.

- De Jong, K. A. & J. Sarma (1993). Generation gaps revisited. In L. D. Whitley (Ed.), *Foundations of Genetic Algorithms 2*, pp. 19–28. Morgan Kaufmann.
- De Wolf, T. & T. Holvoet (2005). Emergence versus self-organisation: Different concepts but promising when combined. In *Engineering Self Organising Systems: Methodologies and Applications*, Volume 3464 of *LNCIS*, pp. 1–15. Springer-Verlag.
- Doebeli, M. & C. Hauert (2005). Models of cooperation based on the prisoner's dilemma and the snowdrift game. *Ecology Letters* 8(7), 748–766.
- Dorogovtsev, S. N., J. Mendes, & A. N. Samukhin (2001). Size-dependent degree distribution of a scale-free growing network. *Physical Review E* 63(6), 062101.
- Dorransoro, B., E. Alba, M. Giacobini, & M. Tomassini (2004). The influence of grid shape and asynchronicity on cellular evolutionary algorithms. In Y. Shi (Ed.), *Proceedings of the IEEE International Conference on Evolutionary Computation*, pp. 2152–2158. IEEE Press.
- Echenique, P., J. Gómez-Gardeñes, & Y. Moreno (2004). Improved routing strategies for internet traffic delivery. *Physical Review E* 70, 056105.
- Ellis, T. S. & X. Yao (2007). Evolving cooperation in the non-iterated prisoner's dilemma: a social network inspired approach. In *Proceedings of the IEEE Congress on Evolutionary Computation*, pp. 736–743. IEEE Press.
- Eshel, I. & L. L. Cavalli-Sforza (1982). Assortment of encounters and revolution of cooperativeness. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 79, 1331–1335.
- Eshel, I., E. Sansone, & A. Shaked (1999). The emergence of kinship behavior in structured populations of unrelated individuals. *International Journal of Game Theory* 28, 447–463.
- Facemyer, K. C. (1997). Asynchronicity: Distributed learning communities. In T. Muldner & T. Reeves (Eds.), *Educational Multimedia/Hypermedia and Telecommunications*, pp. 335–339. VA: Association for the Advancement of Computing in Education.
- Faloutsos, M., P. Faloutsos, & C. Faloutsos (1999). On power-law relationships of the internet topology. *Computer Communication Review* 29(4), 251–262.

- Fatès, N. (2009). Asynchronism induces second order phase transitions in elementary cellular automata. *Journal of Cellular Automata* 4(1), 21–38.
- Fatès, N. & V. Chevrier (2010). How important are updating schemes in multi-agent systems? An illustration on a multi-turmite model. In *Proceedings of the 9th International Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems (AAMAS 2010)*, pp. 533–540. International Foundation for Autonomous Agents and Multiagent Systems.
- Fatès, N. & M. Morvan (2004). Perturbing the topology of the game of life increases its robustness to asynchrony. In *Proceedings of the 6th International Conference on Cellular Automata for Research and Industry*, Volume 3305 of *LNCS*, pp. 111–120. Springer-Verlag.
- Fatès, N. & M. Morvan (2005). An experimental study of robustness to asynchronism for elementary cellular automata. *Complex Systems* 16(1), 1–27.
- Ferber, J. & J.-P. Müller (1996). Influences and reaction: A model of situated multiagent systems. In *Proceedings of the Second International Conference on Multiagent Systems*, pp. 72–79. AAAI Press.
- Floreano, D. & C. Matusi (2008). *Bio-Inspired Artificial Intelligence Theories, Methods and Technologies*. The MIT Press.
- Floría, L. M., C. Gracia-Lázaro, J. Gómez-Gardeñes, M. Campillo, & Y. Moreno (2009). Social network reciprocity as a phase transition in evolutionary cooperation. *Physical Review E* 79, 026106.
- Florian, G. & B. Drossel (2005). The dynamics of critical Kauffman networks under asynchronous stochastic update. *Physical Review Letters* 95, 048701.
- Frean, M. R. (1994). The prisoner’s dilemma without synchrony. *Proceedings of the Royal Society of London (B)* 257, 75–79.
- Frei, R., G. D. M. Serugendo, & J. Barata (2008). Designing self-organization for evolvable assembly systems. In *Proceedings of the 2nd IEEE International Conference on Self-Adaptive and Self-Organizing Systems (SASO 2008)*, pp. 97–106. IEEE Press.

- Fu, F., X. Chen, L. Liu, & L. Wang (2007). Social dilemmas in an online social network: The structure and evolution of cooperation. *Physics Letters (A)* 371, 58–64.
- Fudenberg, D. & J. Tirole (1991). *Game Theory*. The MIT Press.
- Gaston, M. E. & M. desJardins (2008). Social network structures and their impact on multi-agent system dynamics. *Computational Intelligence* 24(2), 122–157.
- Gershenson, C. (2002). Classification of random boolean networks. In *Artificial Life VIII: Proceedings of the Eighth International Conference on Artificial Life*, pp. 1–8. The MIT Press.
- Gershenson, C. (2004a). Introduction to random boolean networks. In *Artificial Life IX: Proceedings of the Ninth International Conference on the Simulation and Synthesis of Living Systems*, pp. 160–173. The MIT Press.
- Gershenson, C. (2004b). Updating schemes in random boolean networks: Do they really matter? In *Artificial Life IX: Proceedings of the Ninth International Conference on the Simulation and Synthesis of Living Systems*, pp. 238–243. The MIT Press.
- Ghosh, S. (2002). The role of modeling and asynchronous distributed simulation systems in analysing complex systems of the future. *Information Systems Frontiers* 4(2), 161–177.
- Giacobini, M., E. Alba, A. Tettamanzi, & M. Tomassini (2004). Modeling selection intensity for toroidal cellular evolutionary algorithms. In *Proceedings of the Genetic and Evolutionary Computation Conference (GECCO 2004)*, pp. 1138–1149. Springer-Verlag.
- Giacobini, M., M. Tomassini, & A. Tettamanzi (2005). Takeover time curves in random and small-world structured populations. In *Proceedings of the Genetic and Evolutionary Computation Conference (GECCO 2005), Volume 2*, pp. 1333–1340. ACM Press.
- Giacobini, M., M. Tomassini, A. Tettamanzi, & E. Alba (2005). Selection intensity in cellular evolutionary algorithms for regular lattices. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation* 9(5), 489–505.
- Gintis, H. (2000). *Game Theory Evolving*. Princeton University Press.

- Goldberg, D. E. & K. Deb (1990). A comparative analysis of selection schemes used in genetic algorithms. In *Proceedings of Foundations of Genetic Algorithms*, pp. 69–93. Morgan Kaufmann.
- Gómez-Gardeñes, J., M. Campillo, L. M. Floría, & Y. Moreno (2007). Dynamical organization of cooperation in complex topologies. *Physical Review Letters* 98, 108103.
- Gómez-Gardeñes, J., J. Poncela, L. M. Floría, & Y. Moreno (2008). Natural selection of cooperation and degree hierarchy in heterogeneous populations. *Journal of Theoretical Biology* 253, 296–301.
- Grilo, C. & L. Correia (2007). Asynchronous stochastic dynamics and the spatial prisoner’s dilemma game. In *Proceedings of the 13th Portuguese Conference on Artificial Intelligence (EPIA 2007)*, pp. 235–246. Springer-Verlag.
- Grilo, C. & L. Correia (2008a). The influence of asynchronous dynamics in the spatial prisoner’s dilemma game. In *Proceedings of the Animals to Animats - 10th International Conference on the Simulation of Behavior (SAB’08)*, pp. 362–371. Springer-Verlag.
- Grilo, C. & L. Correia (2008b). What makes the spatial prisoner’s dilemma game sensitive to asynchronism? In *Artificial Life XI: Proceedings of the Eleventh International Conference on the Simulation and Synthesis of Living Systems*, pp. 212–219. The MIT Press.
- Grilo, C. & L. Correia (2009a). The influence of the update dynamics on the evolution of cooperation. *International Journal of Computational Intelligence Systems, Special Issue on Computational Intelligence Issues in Systems Experiencing Nonlinear Dynamics and Synchronization* 2(2), 104–114.
- Grilo, C. & L. Correia (2009b). Instability in spatial evolutionary games. In *Proceedings of the 14th Portuguese Conference on Artificial Intelligence (EPIA 2009)*, pp. 41–52. Springer-Verlag.
- Grilo, C. & L. Correia (2009c). Update dynamics, strategy exchanges and the evolution of cooperation in the snowdrift game. In *Proceedings of the 10th European Conference on Artificial Life (ECAL 2009)*, pp. 212–219. Springer-Verlag.

- Grilo, C. & L. Correia (2011). Effects of asynchronism on evolutionary games. *Journal of Theoretical Biology* 269(1), 109–122.
- Grondin, G. O., W. Porod, C. M. Loeffler, & D. K. Ferry (1983). Synchronous and asynchronous systems of thresholds elements. *Biological Cybernetics* 49, 1–7.
- Hales, D. (2004). From selfish nodes to cooperative networks emergent link-based incentives in peer-to-peer networks. In *Proceedings of the Fourth IEEE International Conference on Peer-to-Peer Computing (p2p2004)*, pp. 151–158. IEEE Press.
- Hamilton, W. D. (1964a). The genetical evolution of social behavior I. *Journal of Theoretical Biology* 7, 1–16.
- Hamilton, W. D. (1964b). The genetical evolution of social behavior II. *Journal of Theoretical Biology* 7, 17–52.
- Harvey, I. & T. Bossomaier (1997). Time out of joint: Attractors in asynchronous random boolean networks. In *Proceedings of the 4th European Conference on Artificial Life (ECAL 1997)*, pp. 67–75. The MIT Press.
- Hauert, C. (2001). Fundamental clusters in spatial 2x2 games. *Proceedings of the Royal Society of London B* 268, 761–769.
- Hauert, C. (2002). Effects of space in 2x2 games. *International Journal of Bifurcation and Chaos* 12(7), 1531–1548.
- Hauert, C. (2006). Spatial effects in social dilemmas. *Journal of Theoretical Biology* 240(4), 627–636.
- Hauert, C. & M. Doebeli (2004). Spatial structure often inhibits the evolution of cooperation in the snowdrift game. *Nature* 428, 643–646.
- Hauert, C. & H. G. Schuster (1998). Extending the iterated prisoner's dilemma without synchrony. *Journal of Theoretical Biology* 192, 155–166.
- Hauert, C. & G. Szabó (2003). Prisoner's dilemma and public goods games in different geometries: Compulsory versus voluntary interactions. *Complexity* 8(4), 31–38.

- Helbing, D. (1992). Interrelations between stochastic equations for systems with pair interactions. *Physica A* 181(1-2), 29–52.
- Hofbauer, J. & K. Sigmund (1998). *Evolutionary Games and Population Dynamics*. Cambridge University Press.
- Hogeweg, P. (1988). Cellular automata as a paradigm for ecological modeling. *Applied Mathematics and Computation* 27(1), 81–100.
- Hogg, T. (1995). Social dilemmas in computational ecosystems. In *Proceedings of the 14th International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI95)*, pp. 711–716. Morgan Kaufmann.
- Holme, P. & B. J. Kim (2002). Growing scale-free networks with tunable clustering. *Physical Review E* 65(2), 026107.
- Hopfield, J. J. (1982). Neural networks and physical systems with emergent collective computational capabilities. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 79(8), 2554–2558.
- Huberman, B. & N. Glance (1993). Evolutionary games and computer simulations. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 90(16), 7716–7718.
- Ifti, M., T. Killingback, & M. Doebeli (2004). Effects of neighborhood size and connectivity on the spatial continuous prisoner’s dilemma. *Journal of Theoretical Biology* 231, 97–106.
- Ingerson, T. E. & R. L. Buvel (1984). Structure in synchronous cellular automata. *Physica D: Nonlinear Phenomena* 10, 59–68.
- Jeong, H., S. P. Mason, A. L. Barabási, & Z. N. Oltvai (2001). Lethality and centrality in protein networks. *Nature* 411, 41–42.
- Kanada, Y. (1994). The effects of randomness in asynchronous 1D cellular automata. In *Artificial Life IV: Proceedings of the Fourth International Conference on the Simulation and Synthesis of Living Systems*. The MIT Press.
- Kauffman, S. A. (1969). Metabolic stability and epigenesis in randomly constructed genetic nets. *Journal of Theoretical Biology* 22, 437–467.

- Keeling, M. J. (1999). The effects of local spatial structure on epidemiological invasions. *Proceedings of the Royal Society of London B* 266, 859–867.
- Kerr, B., M. A. Riley, M. W. Feldman, & B. J. M. Bohannan (2002). Local dispersal promotes biodiversity in a real-life game of rock-paper-scissors. *Nature* 418, 171–174.
- Killingback, T. & M. Doebeli (1996). Spatial evolutionary game theory: Hawks and doves revisited. *Proceedings of the Royal Society of London B* 263, 1135–1144.
- Kirchkamp, O. (2000). Spatial evolution of automata in the prisoner’s dilemma. *Journal of Economic Behavior & Organization* 43(2), 239–262.
- Klemm, K. & V. M. Eguíluz (2002). Highly clustered scale-free networks. *Physical Review E* 65(3), 036123.
- Kun, A., G. Boza, & I. Scheuring (2006). Asynchronous snowdrift game with synergetic effect as a model of cooperation. *Behavioral Ecology* 17(4), 633–641.
- Kuramoto, Y. (1984). *Chemical Oscillations, Waves and Turbulence*. Berlin: Springer-Verlag.
- Lamarsh, J. R. & A. Baratta (2001). *Introduction to Nuclear Engineering* (third ed.). Prentice Hall.
- Langton, C. G. (1990). Computation at the edge of chaos: Phase transitions and emergent computation. *Physica D: Nonlinear Phenomena* 42(1-3), 12–37.
- Liebovitch, L. S. & M. Sochowski (1998). Significance of updating schemes in computational models: Dynamics of neural networks. *Journal of Statistical Physics* 90(1-2), 253–260.
- Lindgren, K. & M. G. Nordahl (1994). Evolutionary dynamics of spatial games. *Physica D: Nonlinear Phenomena* 75, 292–309.
- Low, S. H. & D. E. Lapsley (1999). Optimization flow control, I: Basic algorithm and convergence. *IEEE/ACM Transactions on Networking* 7(6), 861–874.

- Lumer, E. D. & G. Nicolis (1994). Synchronous versus asynchronous dynamics in spatially distributed systems. *Physica D: Nonlinear Phenomena* 71(4), 440–452.
- Luthi, L., E. Pestelacci, & M. Tomassini (2007). Evolutionary dilemmas in a social network. In F. A. e Costa, L. M. Rocha, E. Costa, I. Harvey, & A. Coutinho (Eds.), *Proceedings of the 9th European Conference on Artificial Life (ECAL 2007)*, pp. 545–554. Springer-Verlag.
- Marcq, P., H. Chaté, & P. Manneville (2006). Critical properties of phase transitions in lattices of coupled logistic maps. *Progress of Theoretical Physics S* 161, 244–250.
- Mariano, P. (2006). *Controlo Distribuído de Agentes Não-Cooperantes - Exploradores e Traidores*. Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa, Portugal.
- Martelli, M. (1999). *Introduction to Discrete Dynamical Systems and Chaos*. Wiley-Interscience.
- Masuda, N. & K. Aiharaa (2003). Spatial prisoner’s dilemma optimally played in small-world networks. *Physics Letters A* 313(1-2), 51–61.
- May, R. M., S. Gupta, & A. R. McLean (2001). Infectious disease dynamics: What characterizes a successful invader? *Proceedings of the Royal Society of London B* 356, 901–910.
- Mesot, B. & C. Teuscher (2003). Critical values in asynchronous random boolean networks. In W. Banzhaf (Ed.), *Proceedings of the 7th European Conference on Artificial Life (ECAL 2003)*, pp. 367–376. Springer-Verlag.
- Mitchell, M., M. D. Thomure, & N. L. Williams (2006). The role of space in the success of coevolutionary learning. In *Artificial Life X: Proceedings of the Tenth International Conference on the Simulation and Synthesis of Living Systems*, pp. 118–124. The MIT Press.
- Nash, J. (1950). *Non-Cooperative Games*. Tese de Doutoramento, Princeton University.
- Nehaniv, C. L. (2003). Evolution in asynchronous cellular automata. In *Artificial Life VIII: Proceedings of the Eighth International Conference on the Simulation and Synthesis of Living Systems*, pp. 65–73. The MIT Press.

- Neumann, J. V. & O. Morgenstern (1953). *Theory of Games and Economic Behavior*. The Princeton University Press.
- Newman, M. E. J. (2003). The structure and function of complex networks. *SIAM Review* 45, 167–256.
- Newman, M. E. J. (2001). The structure of scientific collaboration networks. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 98, 404–409.
- Newth, D. (2009). Asynchronous iterated prisoner's dilemma. *Adaptive Behavior* 17(2), 175–183.
- Newth, D. & D. Cornforth (2007). Asynchronous spatial evolutionary games: spatial patterns, diversity and chaos. In *Proceedings of the 2007 IEEE Congress on Evolutionary Computation*, pp. 2463–2470. IEEE Press.
- Newth, D. & D. Cornforth (2009). Asynchronous spatial evolutionary games. *BioSystems* 95, 120–129.
- Nowak, M. (2006). *Evolutionary Dynamics*. Harvard University Press.
- Nowak, M., S. Bonhoeffer, & R. M. May (1994). More spatial games. *International Journal of Bifurcation and Chaos* 4(1), 33–56.
- Nowak, M. & R. M. May (1992). Evolutionary games and spatial chaos. *Nature* 359, 826–829.
- Nowak, M. & K. Sigmund (1994). The alternating prisoner's dilemma. *Journal of Theoretical Biology* 168, 219–226.
- Nowak, M. & K. Sigmund (1998). Evolution of indirect reciprocity by image scoring. *Nature* 393, 573–577.
- Nowak, M. & K. Sigmund (1999a). The continuous prisoner's dilemma: I. Linear reactive strategies. *Journal of Theoretical Biology* 200, 307–321.
- Nowak, M. & K. Sigmund (1999b). The continuous prisoner's dilemma: II. Linear reactive strategies with noise. *Journal of Theoretical Biology* 200, 323–338.
- Nowak, M. & K. Sigmund (2005). Evolution of indirect reciprocity. *Nature* 437, 1291–1298.

- Oh, J. C. (2001). Cooperating search agents explore more than defecting search agents in the internet information access. In *Proceedings of the 2001 Congress on Evolutionary Computation (CEC2001)*, pp. 1261–1268. IEEE Press.
- Ohtsuki, H., C. Hauert, E. Lieberman, & M. A. Nowak (2006). A simple rule for the evolution of cooperation on graphs and social networks. *Nature* 441, 502–505.
- Ohtsuki, H., M. A. Nowak, & J. Pacheco (2007). Breaking the symmetry between interaction and replacement in evolutionary dynamics on graphs. *Physical Review Letters* 98, 108106.
- Pacheco, J. M. & F. C. Santos (2005). Network dependence of the dilemmas of cooperation. In J. F. F. Mendes (Ed.), *Science of Complex Networks: From Biology to the Internet and WWW (CNET 2004)*, Volume 776, pp. 90–100. AIP Conference Proceedings.
- Pacheco, J. M., A. Traulsen, & M. A. Novak (2006a). Active linking in evolutionary games. *Journal of Theoretical Biology* 243, 437–443.
- Pacheco, J. M., A. Traulsen, & M. A. Novak (2006b). Co-evolution of strategy and structure in complex networks with dynamical linking. *Physical Review Letters* 97(25), 258103.
- Pacheco, J. M., A. Traulsen, H. Ohtsuki, & M. A. Novak (2008). Repeated games and direct reciprocity under active linking. *Journal of Theoretical Biology* 250, 723–731.
- Page, K. M., M. A. Nowak, & K. Sigmund (2000). The spatial ultimatum game. *Proceedings of the Royal Society of London B* 267, 2177–2182.
- Paolo, E. A. D. (2001). Rhythmic and non-rhythmic attractors in asynchronous random boolean networks. *BioSystems* 59, 185–195.
- Paolo, E. D. (2000). Searching for rhythms in asynchronous boolean networks. In *Artificial Life VII: Proceedings of the 7th International Conference on the Simulation and Synthesis of Living Systems*. MIT Press.
- Perc, M. (2009). Evolution of cooperation on scale-free networks subject to error and attack. *New Journal of Physics* 11, 033027.

- Perc, M. & A. Szolnoki (2008). Social diversity and promotion of cooperation in the spatial prisoner's dilemma game. *Physical Review E* 77, 011904.
- Perc, M. & A. Szolnoki (2009). Coevolutionary games - A mini review. *Biosystems* 99(2), 109–125.
- Poncela, J., J. Gómez-Gardeñes, L. M. Floría, A. Sánchez, & Y. Moreno (2008). Complex cooperative networks from evolutionary preferential attachment. *PLoS ONE* 3(6), e2449.
- Qin, S.-M., Y. Chen, X.-Y. Zhao, & J. Shi (2008). Effect of memory on the prisoner's dilemma game in a square lattice. *Physical Review E* 78, 041129.
- Roca, C. O., J. A. Cuesta, & A. Sánchez (2009a). Effect of spatial structure on the evolution of cooperation. *Physical Review E* 80(4), 046106.
- Roca, C. O., J. A. Cuesta, & A. Sánchez (2009b). Imperfect imitation can enhance cooperation. *Europhysics Letters* 87, 48005.
- Rogers, A. & A. Prügel-Bennett (1999). Modelling the dynamics of a steady-state genetic algorithm. In W. Banzhaf & C. Reeves (Eds.), *Foundations of Genetic Algorithms* 5, pp. 57–68. Morgan Kaufmann.
- Rohlfshagen, P. & E. A. D. Paolo (2004). The circular topology of rhythm in asynchronous random boolean networks. *BioSystems* 73, 141–152.
- Rolf, J., T. Bohr, & M. H. Jensen (1998). Critical properties of phase transitions in lattices of coupled logistic maps. *Physical Review E* 57, R2503.
- Russel, S. J. & P. Norvig (2009). *Artificial Intelligence: A Modern Approach* (third ed.). Prentice Hall.
- Ruxton, G. & L. A. Saravia (1998). The need for biological realism in the updating of cellular automata models. *Ecological Modelling* 107(2), 105–112.
- Santos, F. C. & J. M. Pacheco (2005). Scale-free networks provide a unifying framework for the emergence of cooperation. *Physical Review Letters* 95(9), 098104–+.
- Santos, F. C. & J. M. Pacheco (2006). A new route to the evolution of cooperation. *Journal of Evolutionary Biology* 19(3), 726–733.

- Santos, F. C., J. M. Pacheco, & T. Lenaerts (2006). Evolutionary dynamics of social dilemmas in structured heterogeneous populations. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 103(9), 3490–3494.
- Santos, F. C., J. F. Rodrigues, & J. M. Pacheco (2005). Graph topology plays a determinant role in the evolution of cooperation. *Proceedings of the Royal Society of London B* 273, 51–55.
- Santos, F. C., M. D. Santos, & J. M. Pacheco (2008). Social diversity promotes the emergence of cooperation in public goods games. *Nature* 454, 213–216.
- Schlag, K. (1998). Why imitate, and if so, how? A bounded rational approach to multi-armed bandits. *Journal of Economic Theory* 78(1), 130–156.
- Schönfisch, B. & A. de Roos (1999). Synchronous and asynchronous updating in cellular automata. *BioSystems* 51(3), 123–143.
- Schweitzer, F., L. Behera, & H. Muhlenbein (2002). Evolution of cooperation in a spatial prisoner’s dilemma. *Advances in Complex Systems* 5(2-3), 269–299.
- Serugendo, G. D. M., J. Fitzgerald, A. Romanovsky, & N. Guelfi (2008). A generic framework for the engineering of self-adaptive and self-organising systems. In K. Bellman, M. G. Hinchey, C. Müller-Schloer, H. Schmeck, & R. Würtz (Eds.), *Organic Computing - Controlled Self-organization*, Number 08141 in Dagstuhl Seminar Proceedings. Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum fuer Informatik, Germany.
- Serugendo, G. D. M., M.-P. Gleizes, & A. Karageorgos (2006). Self-organisation and emergence in MAS: An overview. *Informatica* 30, 45–54.
- Shnerb, N. M., Y. Louzon, E. Bettelheim, & S. Solomon (2000). The importance of being discrete: Life always wins on the surface. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 97(19), 10322–10324.
- Shoham, Y. & K. Leyton-Brown (2009). *Multiagent Systems: Algorithmic, Game-Theoretic and Logical Foundations*. Cambridge University Press.
- Shrimali, M. D., S. Sinha, & K. Aihara (2007). Asynchronous updating induces order in threshold coupled systems. *Physical Review E* 76(4), 046212.

- Simlastik, M. & V. Stopjakova (2009). Automated synchronous-to-asynchronous circuits conversion: A survey. In *Integrated Circuit and System Design. Power and Timing Modeling, Optimization and Simulation*, pp. 348–358. Springer-Verlag.
- Sipper, M., M. Tomassini, & M. Capcarrere (1997). Evolving asynchronous and scalable non-uniform cellular automata. In *Proceedings of International Conference on Artificial Neural Networks and Genetic Algorithms (ICANNGA97)*, pp. 67–71. Springer-Verlag.
- Skyrms, B. (2004). *The Stag Hunt and the Evolution of Social Structure*. Cambridge University Press.
- Smith, J. M. (1982). *Evolution and the Theory of Games*. Cambridge University Press.
- Smith III, A. R. (1976). Introduction to and survey of cellular automata or polyautomata theory. In *Automata, Language, Development*, pp. 405–422. North-Holland Publishing Company.
- Spiceland, J. D. & C. P. Hawkins (2002). The impact on learning of an asynchronous active learning course format. *Journal of Asynchronous Learning Networks* 6(1), 68–75.
- Stark, W. R. & W. H. Hughes (2000). Asynchronous, irregular automata nets: The path not taken. *Biosystems* 55(1), 107–117.
- Suzudo, T. (2004). Spatial pattern formation in asynchronous cellular automata with mass conservation. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 343, 185–200.
- Syswerda, G. (1991). A study of representation in generational and steady-state genetic algorithms. In *Foundations of Genetic Algorithms*, pp. 94–101.
- Szabó, G. & G. Fáth (2007). Evolutionary games on graphs. *Physics Reports* 446, 97–216.
- Szabó, G. & C. Hauert (2002). Evolutionary prisoner’s dilemma games with voluntary participation. *Physical Review E* 66, 062903.
- Szabó, G. & C. Tóke (1998). Evolutionary prisoner’s dilemma game on a square lattice. *Physical Review E* 55(1), 69–73.

- Szabó, G., J. Vukov, & A. Szolnoki (2005). Phase diagrams for an evolutionary prisoner's dilemma game on two-dimensional lattices. *Physical Review E* 72, 047107.
- Szolnoki, A. & M. Perc (2008). Coevolution of teaching activity promotes cooperation. *New Journal of Physics* 10, 043036.
- Szolnoki, A., M. Perc, & Z. Danku (2008a). Making new connections towards cooperation in the prisoner's dilemma game. *EPL* 84(5), 50007.
- Szolnoki, A., M. Perc, & Z. Danku (2008b). Towards effective payoffs in the prisoner's dilemma game on scale-free networks. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 387, 2075–2082.
- Szolnoki, A., M. Perc, & G. Szabó (2008). Diversity of reproduction rate supports cooperation in the prisoner's dilemma game on complex networks. *The European Physical Journal B* 61(4), 505–509.
- Tembine, H., E. Altman, & R. El-Azouzi (2007). Delayed evolutionary game dynamics applied to medium access control. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Mobile Adhoc and Sensor Systems*, pp. 1–6. IEEE Press.
- Tomassini, M., M. Giacobini, & C. Darabos (2005). Evolution and dynamics of small-world cellular automata. *Complex Systems* 15(4), 261–284.
- Tomassini, M., L. Luthi, & M. Giacobini (2006). Hawks and doves on small-world networks. *Physical Review E* 73(1), 016132.
- Tomassini, M., L. Luthi, & E. Pestelacci (2007). Social dilemmas and cooperation in complex networks. *International Journal of Modern Physics C* 18, 1173–1185.
- Tomochi, M. (2004). Defectors' niches: Prisoner's dilemma game on disordered networks. *Social Networks* 26(4), 309–321.
- Urpi, A., M. Bonuccelli, & S. Giordano (2003). Modelling cooperation in mobile ad hoc networks: A formal description of selfishness. In *Proceedings of Modeling and Optimization in Mobile, Ad Hoc and Wireless Networks*, pp. 3–5.
- Vainstein, M. H. & J. J. Arenzon (2001). Disordered environments in spatial games. *Physical Review E* 64, 051905.

- Verdasca, J., M. M. da Gama, A. Nunes, N. R. Bernardino, J. M. Pacheco, & M. C. Gomes (2005). Recurrent epidemics in small world networks. *Journal of Theoretical Biology* 233, 553–561.
- Vukov, J., G. Szabó, & A. Szolnoki (2006). Cooperation in the noisy case: Prisoner's dilemma game on two types of regular random graphs. *Physical Review E* 73, 067103.
- Vukov, J., G. Szabó, & A. Szolnoki (2008). Evolutionary prisoner's dilemma game on Newman-Watts networks. *Physical Review E* 77, 026109.
- Wang, W.-X., Jie-Ren, G. Chen, & B.-H. Wang (2006). Memory-based snowdrift game on networks. *Physical Review E* 74, 056113.
- Watts, D. & S. H. Strogatz (1998). Collective dynamics of small-world networks. *Nature* 393, 440–442.
- Weibull, J. W. (1997). *Evolutionary Game Theory*. The MIT Press.
- Weiss, G. (1999). *Multiagent Systems: A Modern Approach to Distributed Artificial Intelligence*. The MIT Press.
- Weyns, D. & T. Holvoet (2004). A formal model for situated multi-agent systems. *Fundamenta Informaticae* 63(2-3), 1–34.
- Winfree, A. (2001). *The Geometry of Biological Time*. Springer-Verlag.
- Wolfram, S. (1994). *Cellular Automata and Complexity*. Addison-Wesley.
- Zimmermann, M. G. & V. M. Eguíluz (2004). Coevolution of dynamical states and interaction in dynamic networks. *Physical Review E* 69, 065102(R).