

O ENSINO E A APRENDIZAGEM DAS FRAÇÕES NO  
2.º ANO DE ESCOLARIDADE NUM CONTEXTO DE  
ENSINO EXPLORATÓRIO

Dissertação de Mestrado

ANABELA SANTOS CARVALHO DE SOUSA

Trabalho realizado sob a orientação de

Doutora Hélia Pinto

Leiria, 2014

Mestrado em Educação Matemática no Pré-Escolar e 1.º Ciclo do Ensino Básico

ESCOLA SUPERIOR DE EDUCAÇÃO E CIÊNCIAS SOCIAIS

INSTITUTO POLITÉCNICO DE LEIRIA



## AGRADECIMENTOS

A concretização deste projeto constitui um marco muito importante na minha vida o qual apenas se tornou possível devido ao apoio imprescindível de diversas pessoas às quais quero apresentar os meus agradecimentos.

À Professora Doutora Hélia Pinto pela forma interessada e exigente com que me orientou, mas também pela disponibilidade e por todo o apoio e confiança que depositou em mim, fazendo-me acreditar que era possível, o meu profundo agradecimento.

Agradeço aos meus alunos que participaram neste estudo com empenho e às suas famílias que permitiram a sua participação.

Aos professores do Mestrado com os quais eu tanto aprendi e às colegas que constituíram um grupo fantástico de partilha e entreajuda, especialmente à minha colega e amiga Mónica, companheira de todo o percurso, muito obrigado.

Agradeço muito aos meus pais por toda a confiança que sempre depositaram em mim, por toda a força que me transmitem e todo o apoio que me deram, mostrando-se sempre disponíveis.

Agradeço especialmente ao meu marido e aos meus filhos, os quais de alguma forma prejudiquei com a minha ausência, pelo apoio incondicional e pela coragem que me transmitiram nos momentos de angústia desta longa caminhada.

Finalmente agradeço a todos os que de alguma forma contribuíram para que este trabalho se concretizasse.

## RESUMO

O tópicos dos números racionais continua a revelar-se como um tópicos de difícil ensino e aprendizagem, pelo que importa continuar a promover investigação nesta área. Neste sentido, surge este estudo com o qual se pretendeu perceber o percurso realizado por uma turma do 2.º ano de escolaridade durante a implementação de uma sequência de tarefas para o ensino e aprendizagem das frações, bem como a importância do papel do professor num contexto de ensino exploratório. Assim, tentou responder-se às seguintes questões de investigação: i) Que estratégias e dificuldades apresentam os alunos durante a realização de uma sequência de tarefas e ii) Que ações empreende o professor na orientação da exploração da referida sequência. Os números racionais, nomeadamente o ensino e a aprendizagem das frações no 1.ª ciclo e o ensino exploratório constituem a fundamentação teórica deste estudo. Foi adotada uma metodologia de investigação-ação no sentido de planejar, observar e refletir para melhorar. Os participantes foram os 16 alunos de uma turma de 2.º ano de escolaridade cuja professora foi também a investigadora. A sequência de tarefas foi planeada tendo como base um tema do quotidiano dos alunos permitindo assim o estabelecimento de uma ponte com os seus conhecimentos informais, atribuindo significado aos números racionais. A referida sequência foi aplicada de acordo com as fases do ensino exploratório: i) apresentação da tarefa; ii) resolução da tarefa a pares; iii) apresentação das estratégias e iv) síntese. A recolha de dados foi efetuada recorrendo a instrumentos como a observação participante com notas de campo, registos escritos dos alunos, fotografias e gravação vídeo, permitindo a realização de uma análise de conteúdo. Deste estudo emergiu que os alunos desta turma de 2.º ano de escolaridade, recorreram à representação como principal estratégia de resolução, tendo as principais dificuldades surgido no âmbito da conexão com a linguagem das frações e na comparação de frações. Emergiu, ainda, que o ensino exploratório promoveu um contexto facilitador do ensino e aprendizagem das frações, nomeadamente ao nível da discussão em grupo turma.

### **Palavras chave**

Ensino exploratório, frações, números racionais

## ABSTRACT

The topic of rational numbers continues to reveal itself as a subject of difficult teaching and learning, therefore it is important to continue the promotion of research in this area. In this sense, this study intended to perceive the path taken by a 2<sup>nd</sup> grade class during the implementation of a task sequence regarding the teaching and learning of fractions, as well the importance of the teacher's role in a context of exploratory teaching. In this manner, this study tried to answer the following investigation questions: i) Which strategies and difficulties the students present while performing a task sequence and ii) Which actions the teacher undertakes to direct the exploration of the referred sequence. Rational numbers, namely the teaching and learning of fractions during junior school, and the exploratory teaching constitute the theoretical basis of this study. A research-action methodology was adopted in order to plan, observe and ponder to improve. The participants were 16 students of a 2<sup>nd</sup> grade class whose teacher was also the researcher. The task sequence was planned based on students' everyday life, allowing the creation of a bridge with their informal knowledge, assigning meaning to the rational numbers. The referred sequence was applied in accordance with the stages of exploratory teaching: i) task presentation; ii) task resolution in pairs; iii) presentation of the strategy and iv) synthesis. Data collection was performed using tools such as participant observation with field notes, students' written records, photos and video recording, allowing the content analysis. This study revealed that the students of this 2<sup>nd</sup> grade class have used the representation as the central strategy of resolution, and the main difficulties have emerged in the context of connection with the language of fractions and in comparing fractions. It also recognized that the exploratory teaching promoted a facilitating context for teaching and learning fractions, namely in terms of class group discussion.

### **Keywords**

Exploratory teaching, fractions, rational numbers

# ÍNDICE GERAL

Agradecimentos .....	1
Resumo .....	2
Abstract.....	3
Índice Geral .....	4
Índice de Figuras .....	6
Índice de Tabelas .....	8
I - Introdução .....	9
1.1 Motivação, objetivos e questões do estudo .....	9
1.2 Pertinência do estudo.....	10
1.3 Organização do estudo.....	13
II - Fundamentação Teórica.....	14
2.1 O ensino e a Aprendizagem dos Números Racionais no 1.º Ciclo do Ensino Básico .....	14
2.1.1 Orientações Curriculares .....	17
2.1.2 O Ensino e a Aprendizagem das frações .....	19
2.2 O Ensino Exploratório .....	30
III – Metodologia.....	35
3.1 Opções Metodológicas .....	35
3.2 Procedimentos de Caráter Metodológico .....	36
3.2.1 Participantes .....	36
3.2.2 Sequência de Tarefas .....	36
3.2.3 Metodologia de trabalho.....	39
3.2.4 Técnicas e Instrumentos de Recolha de Dados .....	41
3.2.5 Análise de Dados .....	42

IV - Apresentação e discussão de resultados.....	43
4.1 Exploração da sequência de tarefas .....	43
4.1.1 Percurso de aprendizagem da turma num contexto de ensino exploratório .....	87
V- Conclusões .....	93
5.1 Síntese do estudo .....	93
5.2 Principais conclusões do estudo .....	95
5.3 Limitações e recomendações do estudo.....	97
5.4 Reflexão Final .....	98
Bibliografia.....	100
Anexos .....	104
Anexo 1- Planificação geral da sequência de tarefas .....	1
Anexo 2 – Sequência de tarefas.....	1

## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1 – Tarefa 1 .....	43
Figura 2: Produção do grupo 1 .....	44
Figura 3: Produção do grupo 6 .....	45
Figura 4: Produção do grupo 8 .....	45
Figura 5: Produção do grupo 4 .....	46
Figura 6: Produção do grupo 6 .....	46
Figura 7: Produção do grupo 8 .....	46
Figura 8: Produção do grupo 7 .....	47
Figura 9: Produção do grupo 3 .....	48
Figura 10: Produção do grupo 5 .....	49
Figura 11 - Tarefa 2 .....	50
Figura 12: Primeira produção do grupo 6.....	50
Figura 13: Produção do grupo 6 .....	51
Figura 14: Produção do grupo 3 .....	51
Figura 15: Produção do grupo 7 .....	53
Figura 16: Produção do grupo 5 .....	54
Figura 17: Produção do grupo 1 .....	54
Figura 18 - Tarefa 3 .....	56
Figura 19: Produção do grupo 6 .....	57
Figura 20: Produção do grupo 1 .....	58
Figura 21: Produção do grupo 3 .....	59
Figura 22: Produção do grupo 4 .....	59
Figura 23: Produção do grupo 5 .....	60
Figura 24: Produção do grupo 3 .....	61
Figura 25: Produção do grupo 4 .....	62
Figura 26: Produção do grupo 2 .....	63
Figura 27: Produção do grupo 8 .....	63
Figura 28 - Tarefa 4 .....	65
Figura 29: Produção do grupo 6 .....	66
Figura 30: Produção do grupo 8 .....	67
Figura 31 - Representação do chocolate dividido em 5 partes iguais .....	68
Figura 32 - Representação da metade do chocolate dividida em 5 partes iguais .....	68

Figura 33 - Tarefa 5 .....	70
Figura 34: Produção do grupo 6 .....	70
Figura 35: Produção do grupo 3 .....	72
Figura 36: Produção do grupo 2 .....	72
Figura 37: Produção do grupo 1 .....	73
Figura 38: Produções dos grupos 1, 2 e 3.....	73
Figura 39: Produção do grupo 1 .....	75
Figura 40: Produção do grupo 5 .....	75
Figura 41 - Tarefa 6 .....	75
Figura 42: Produção do grupo 2 .....	76
Figura 43: Produção do grupo 4 .....	76
Figura 44: Produção do grupo 5 .....	77
Figura 45 - Tarefa 7 .....	78
Figura 46: Produção do grupo 5 .....	79
Figura 47: Produção do grupo 7 .....	81
Figura 48: Produção do grupo 4 .....	82
Figura 49: Produção do grupo 5 .....	82
Figura 50: Produção do grupo 1 .....	82
Figura 51 - Tarefa 8 .....	82
Figura 52: Produção do grupo 1 .....	83
Figura 53: Produção do grupo 5 .....	84
Figura 54 - Tarefa 9 .....	84
Figura 55: Produções dos grupos 5 e 8.....	85
Figura 56: Produção do grupo 3 .....	85
Figura 57: Produção dos grupos 2, 4, 6 e 7 .....	86
Figura 58: Produção do grupo 1 .....	86

## ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 1- Significado das frações.....	<b>Erro! Indicador não definido.</b>
Tabela 2 - Sequência de tarefas .....	37

# I - INTRODUÇÃO

Pretendo, neste capítulo, dar a conhecer, além do objetivo desta investigação e respetivas questões de investigação, a motivação que me levou a investigar acerca do ensino e aprendizagem das frações no 2.º ano de escolaridade. Faço ainda referência à pertinência do estudo e por último, apresento a forma como o mesmo se encontra organizado.

## 1.1 MOTIVAÇÃO, OBJETIVOS E QUESTÕES DO ESTUDO

A minha motivação para este estudo prende-se com a insegurança que sentia na abordagem correta do tópico números racionais não negativos, nomeadamente na introdução ao estudo das frações, que surge nos dois primeiros anos de escolaridade do 1.º Ciclo do Ensino Básico, com o Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007). Este programa preconiza que os números racionais comecem a ser trabalhados no 1.º e 2.º anos de escolaridade, mas apenas com uma abordagem intuitiva e partindo de situações de partilha equitativa. É mais tarde, no 3.º e 4.º anos, que o estudo é aprofundado, trabalhando outros significados das frações e também os números decimais.

Com a abrangência de conceitos que os números racionais assumem no Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007), deparei-me com a necessidade de lecionar conteúdos para os quais sentia alguma falta de preparação ao nível da minha formação inicial, logo, alguma insegurança, o que se repercutia na minha prática letiva. Procurei manter-me atualizada no que concerne às novas abordagens dos conceitos matemáticos tendo realizado formação, nomeadamente, no âmbito do Programa de Formação Contínua em Matemática para professores do 1.º Ciclo do Ensino Básico, no entanto a minha insegurança subsistia. Apesar de toda a formação existente na área da matemática e que os professores tiveram oportunidade de frequentar, o ensino e aprendizagem das frações continuam a constituir um dos temas de abordagem mais difícil. Também para os alunos, este tema se tem revelado, ao longo dos anos, de difícil compreensão.

Assim, se por um lado o tópico dos números racionais se tem revelado, ao longo dos tempos, de difícil ensino e aprendizagem, por outro lado, o sucesso na aquisição do conceito de número racional é muito importante para a vida escolar dos alunos, pelo que é minha preocupação promover o sucesso dos meus alunos nesta área. Assim, é minha

intenção investigar uma primeira abordagem ao seu estudo, através da realização de uma sequência de tarefas que proporcione o desenvolvimento do sentido de número racional num contexto de ensino exploratório.

Deste modo, este estudo tem como objetivo compreender o percurso realizado por uma turma de 2.º ano durante a implementação de uma sequência de tarefas para o ensino e aprendizagem das frações, bem como a importância do papel do professor num contexto de ensino exploratório.

Decorrem deste objetivo as seguintes questões de investigação:

- a) Que estratégias e dificuldades apresentam os alunos durante a realização da sequência de tarefas?
- b) Que ações empreende o professor na orientação da exploração da referida sequência?

## 1.2 PERTINÊNCIA DO ESTUDO

A pertinência deste estudo assenta em três pontos fundamentais: i) na importância que a aprendizagem das frações assume no currículo nacional, desde 2007, com o PMEB/dificuldades no processo ensino/aprendizagem; ii) na importância do contexto de ensino exploratório numa primeira abordagem a um conceito; iii) na escassa investigação que ainda subsiste nesta área.

A primeira abordagem ao tópico dos números racionais inicia-se nos primeiros anos de escolaridade obrigatória. Segundo o Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007, p.15):

“Os números racionais começam a ser trabalhados nos dois primeiros anos com uma abordagem intuitiva a partir de situações de partilha equitativa e de divisão da unidade em partes iguais, recorrendo a modelos e à representação em forma de fracção nos casos mais simples”.

Assim, para o 1.º e 2.º anos de escolaridade, o Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007) determina que os alunos explorem “intuitivamente situações de partilha equitativa e de divisão da unidade em partes iguais, envolvendo quantidades discretas e contínuas” e que devem ser capazes de “representar estas quantidades por palavras, desenhos, esquemas ou fracções”, com o objetivo de “identificar a metade, a

terça parte, a quarta parte, a décima parte e outras partes da unidade e representá-las na forma de fracção” (p.17). Mais tarde, no 3.º e 4.º anos de escolaridade, este estudo será mais aprofundado, “quer recorrendo a problemas que permitam trabalhar outros significados das fracções, quer introduzindo números representados na forma decimal” (p.15).

A multiplicidade de conceitos inerentes aos números racionais transforma este tópico num dos mais difíceis de ensino e aprendizagem. As dificuldades na abordagem das fracções prendem-se, segundo a literatura existente, com diversos fatores, entre os quais o facto do próprio conceito de fracção ser “de natureza complexa e multifacetada” (Magina, Bezerra & Spinillo, 2009, p.413). Magina et al (2009), afirmam ainda que, na literatura internacional, alguns autores relacionam as causas das dificuldades sentidas pelos alunos com o facto de a criança não compreender o princípio da invariância e não dispor de um conhecimento reversível que lhe permita compreender que a soma das partes é igual ao todo inicial. Outros associam essa dificuldade à linguagem e à notação de fracção ou ainda ao facto de aplicarem o conhecimento que detém acerca dos números inteiros, às fracções. Também Mamede (2011), refere que os alunos revelam muitas dificuldades na aprendizagem das fracções, tanto ao nível conceptual, como de destrezas de cálculo. Ainda Monteiro e Pinto (2005) se debruçaram sobre este tema, referindo que algumas dificuldades que os alunos apresentam, são atribuídas na literatura, aos diferentes significados das fracções, à concepção da unidade e ao ensino precoce e descontextualizado de símbolos e algoritmos.

Apesar das dificuldades atrás referidas, é fundamental que os alunos tenham sucesso neste conteúdo, pois, segundo Behr, Lesh, Post e Silver (1983) citados por Quaresma (2010), o conceito de número racional é dos mais importantes que os alunos têm que aprender nos primeiros anos de escolaridade. Esta importância pode ser entendida a partir de uma variedade de perspetivas: (i) a partir de uma perspetiva prática, em que a capacidade de lidar eficazmente com esses conceitos melhora consideravelmente a capacidade de compreender e lidar com situações e problemas do mundo real; (ii) a partir de uma perspetiva psicológica, em que os números racionais permitem desenvolver e expandir as estruturas mentais necessárias para o desenvolvimento intelectual contínuo e (iii) a partir de uma perspetiva matemática, em que o entendimento do número racional fornece a base para a posterior aprendizagem das operações algébricas.

Assumindo o sucesso deste conteúdo, uma importância extrema na vida real e académica do aluno, é fundamental que o professor se sinta preparado ao nível dos seus conhecimentos matemáticos e didáticos de forma a realizar um ensino de qualidade e assim colmatar as dificuldades sentidas pelos alunos. Ma (1999) citado por Ferreira e Ponte (2014), relativamente aos conhecimentos matemáticos, refere que não basta ao professor ter o conhecimento acerca dos tópicos que vai ensinar, é essencial que saiba estabelecer conexões entre os conceitos, para que haja construção de conhecimento de forma compreensiva, caso contrário far-se-á uma abordagem meramente processual, centrada na mecanização. Sendo uma prática de cariz exploratório a preconizada para o ensino dos números racionais (Ferreira & Ponte, 2014), esta implica uma preparação mais exigente por parte do professor, o qual assume um papel fundamental na preparação das aulas, na experimentação de novos materiais, na identificação de possíveis problemas na comunicação em sala de aula ou na reflexão sobre os resultados obtidos.

Segundo Pessoa (2010), o Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007), veio assim redefinir os papéis desempenhados pelo aluno e pelo professor, em que o aluno assume “uma participação mais activa na construção do saber” e por sua vez, o professor, constitui-se como “organizador e dinamizador da aprendizagem” (p.26). Nesta perspetiva o ensino exploratório assume uma posição muito relevante no processo de ensino e aprendizagem, como uma prática em que os alunos aprendem através de “tarefas valiosas” (Canavarro, 2011, p.11) propostas pelo professor, através das quais emergem ideias matemáticas que serão sistematizadas, no final, em discussão coletiva (Canavarro, 2011).

As ideias atrás transcritas aliadas ao facto da investigação no âmbito do ensino-aprendizagem dos números racionais representados por frações, existente em Portugal, ainda ser escassa, tal como refere Pinto (2011), justificam a pertinência do tema. Assim pretende-se, com este estudo, demonstrar as potencialidades do ensino exploratório na aprendizagem dos números fracionários. Para tal propõe-se uma sequência de tarefas, baseada na resolução de problemas em contexto de partilha equitativa, em que os alunos terão um papel ativo no seu processo de aprendizagem, uma vez que será privilegiada a apresentação e discussão das várias estratégias usadas na resolução das tarefas.

### 1.3 ORGANIZAÇÃO DO ESTUDO

Este estudo será organizado em cinco capítulos distintos.

Do **primeiro capítulo** consta a Introdução onde se faz referência à motivação, sendo também apresentado o objetivo geral do estudo bem como as questões de investigação em que o mesmo é alicerçado. Faz-se ainda referência à pertinência do mesmo, baseando-se no Programa de Matemática do Ensino Básico (2007) e outros autores.

No **segundo capítulo** é apresentada a fundamentação teórica onde são abordados temas relacionados com o ensino e a aprendizagem dos números racionais no 1.º Ciclo do Ensino Básico, nomeadamente no que concerne às orientações curriculares e ao ensino e aprendizagem das frações. Será ainda abordada a importância do ensino exploratório na promoção de aprendizagens e a importância do papel do aluno e do professor neste contexto.

O **terceiro capítulo** integra a metodologia adotada, nomeadamente as opções metodológicas e os procedimentos de carácter metodológico onde se fará referência aos participantes, apresentar-se-á a sequência de tarefas, a metodologia de trabalho, as técnicas e os instrumentos de recolha de dados e a análise dos dados.

O **quarto capítulo** aborda a apresentação e discussão dos resultados, nomeadamente a forma como foi explorada a sequência de tarefas e o percurso de aprendizagem da turma num contexto de ensino exploratório.

Por fim, no **quinto capítulo** para além da síntese do estudo, apresentam-se ainda as conclusões do estudo onde serão dadas respostas às questões de investigação. São também apresentadas limitações e recomendações do estudo e para terminar será apresentada a reflexão final.

## II - FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo apresento dados da investigação nacional e internacional relativos ao ensino e a aprendizagem dos números racionais, nomeadamente os relativos à sua complexidade. Seguem-se as orientações curriculares preconizadas para uma abordagem ao ensino dos números racionais, principalmente na sua representação por frações, focando as principais dificuldades dos alunos e professores na abordagem deste tema, bem como o papel preponderante do professor no sucesso do mesmo. Abordo ainda o ensino exploratório como prática valorizada no ensino dos números racionais.

### 2.1 O ENSINO E A APRENDIZAGEM DOS NÚMEROS RACIONAIS NO 1.º CICLO DO ENSINO BÁSICO

Os números racionais têm sido objeto de estudo a nível nacional e internacional, nos diferentes graus de ensino, devido às dificuldades apresentadas por alunos e professores no processo de ensino e aprendizagem, geradas pela complexidade de conceitos que este conjunto de números abarca.

Esta complexidade assenta no facto de o conjunto dos números racionais ser um conjunto denso e com múltiplas representações, provocando conflitos conceptuais (Monteiro & Pinto, 2007). Definindo representação como sendo “uma configuração de sinais, caracteres, ícones ou objetos que podem, de alguma forma, designar ou substituir alguma coisa” (p.3), Goldin (2003) citado por Quaresma e Ponte (2012) refere que algumas dificuldades sentidas pelos alunos se devem, por um lado, às múltiplas interpretações do conceito de fração e por outro, ao facto do número racional assumir várias representações. Relativamente à multiplicidade de representações que o número racional pode assumir, o mesmo autor refere que os alunos devem compreender que um número racional pode ser representado na forma de: percentagem, número decimal, fração, linguagem natural e pictórica. Deste modo desenvolverão a sua capacidade de raciocínio e poderão chegar de forma espontânea à equivalência de frações e decimais.

Na literatura de investigação são apontadas ainda outras razões para as dificuldades na aprendizagem dos números racionais como: i) a escolha da unidade de referência; ii) o facto de haver formas diferentes de representar a mesma quantidade ou um mesmo número que representa quantidades diferentes, em função da unidade; iii) a compreensão do conceito (Monteiro & Pinto, 2005, 2007). É essencial que o aluno

compreenda o que é um número racional e para isso é fundamental que trabalhe com quantidades discretas e contínuas, que compreenda as diferentes formas de representar um mesmo número e que a mesma representação pode ter diferentes significados (Monteiro & Pinto, 2005; Pinto, 2011).

Por outro lado, apesar dos números racionais herdarem algumas propriedades dos números naturais, apresentam também algumas peculiaridades que geram dificuldades na sua aprendizagem. Godino (2004), citado por Quaresma (2010) refere que os números racionais são o primeiro conjunto de números que as crianças aprendem e que não se baseia na contagem. Enquanto no conjunto dos números naturais as crianças conseguem resolver uma grande parte dos problemas contando, para a frente ou para trás, com os números racionais tal não acontece porque não há um número racional que sucede ou antecede outro, logo a contagem não pode ser a base do raciocínio. Os números racionais exigem assim, uma forma diferente de pensar e trabalhar os números, o que se torna complexo para os alunos (Quaresma, 2010).

Porém, as dificuldades no ensino e aprendizagem dos números racionais não se prendem unicamente com a complexidade deste conjunto de números, mas também com o seu ensino. Por exemplo, Moss e Case (1999), citados por Monteiro e Pinto (2005), depois de examinarem alguns estudos realizados, apresentaram quatro aspetos principais que se prendem com as dificuldades sentidas por alunos na aprendizagem dos números racionais inerentes ao tipo de ensino praticado: 1) O ensino coloca a ênfase na sintaxe em detrimento da semântica, ou seja, é dedicado mais tempo ao treino de procedimentos do que ao desenvolvimento dos conceitos; 2) O ensino não ancora nos processos informais de resolução de tarefas utilizados pelos alunos; 3) Nas representações dos números racionais não se valoriza a diferenciação entre os números inteiros e não inteiros; 4) Os programas tratam as notações dos números racionais como algo que pode ser dado por definição.

Neste sentido, o Programa de Matemática do Ensino Básico<sup>1</sup> (ME, 2007) perspetiva uma abordagem dos números racionais diferente, em que por um lado surge a introdução das várias representações dos números racionais desde o 1.º Ciclo e por outro a ideia de trabalhar os números racionais numa perspetiva de desenvolvimento do sentido de número. Deste modo, Brocardo (2010) considera que o PMEB (ME, 2007)

---

<sup>1</sup> A partir de agora denominado de PMEB.

vem valorizar o cálculo, considerando os diversos tipos e não apenas o algorítmico, ao contrário do programa anterior, em que o 1.º Ciclo era perspectivado com a introdução rápida dos algoritmos tradicionais das operações aritméticas para serem usadas na resolução de problemas. A autora refere que sendo, no programa anterior, o cálculo algorítmico o foco dominante, se esperava que para além dos números naturais, só se incluíssem os números representados na forma decimal, uma vez que com a introdução destes números apenas se generaliza a estrutura decimal do sistema de numeração, usando as mesmas regras de cálculo. Os algoritmos usados para os números decimais eram os mesmos que os usados para os números naturais. Brocardo (2010) salienta ainda que a introdução dos números racionais não representados na forma decimal estava limitada apenas ao uso de operadores como “metade” ou “terça-parte” e por isso não considera que houvesse uma verdadeira inclusão dos números fracionários. Com o PMEB (ME, 2007) o foco deixa de ser em torno do algoritmo e por isso é possível introduzir os números fracionários antes dos decimais, atribuindo-lhe sentido a partir de contextos significativos.

Brocardo (2010) aponta, então, três princípios que considera importantes para orientar a ação do professor no que concerne ao trabalho com os números racionais e que são preconizados no PMEB (ME, 2007): i) Usar diferentes contextos e modelos apropriados, que permitam aprofundar a compreensão dos números racionais e as destrezas de cálculo; ii) Desenvolver gradualmente as ideias subjacentes aos números racionais, propondo situações que abranjam os sentidos das operações e os diversos significados das frações; iii) Construir significados e relações, uma vez que é necessário que os alunos saibam operar com os números naturais, fracionários ou decimais para que possam resolver problemas de forma flexível, percebendo as relações que existem entre as várias representações e selecionando a estratégia que se revela mais adequada.

Também Pimentel, Vale, Freire, Alvarenga e Fão (2010) referem que é fundamental proporcionar aos alunos oportunidade para explorarem diferentes situações em que os números racionais assumam diversos contextos. Consideram que “ao explorar os diferentes conceitos de uma forma completa e integrada, os alunos conseguem construir, gradualmente, o sentido de número racional” (p.38).

Desta forma promove-se construção do conhecimento que segundo Kieren (1988), citado por Monteiro e Pinto (2005) deve partir do intuitivo para o formal. As mesmas

autoras fazem alusão ao modelo de construção do conhecimento dos números racionais desenvolvido por Kieren (1988), constituído por quatro níveis representados por quatro anéis interligados. O nível mais elementar, o etnomatemático que se refere ao conhecimento proveniente da vida das crianças que já usam os termos metade, quarta parte.... O segundo nível, o intuitivo que já é alcançado na escola e onde há a conjugação deliberada da imagem, de mecanismos de pensamento e a utilização informal da linguagem. O terceiro nível, técnico-simbólico que se refere ao conhecimento construído através do uso da linguagem, das notações convencionais e dos algoritmos e por último, o nível axiomático. De acordo com o mesmo autor, citado por Monteiro e Pinto (2005), para que um aluno desenvolva conhecimento dos números racionais tem que resolver problemas em cada um destes quatro níveis.

### *2.1.1 ORIENTAÇÕES CURRICULARES*

Até há alguns anos atrás, o estudo dos números fracionários acontecia apenas no 2.º ciclo do ensino básico, onde por vezes se fazia de forma descontextualizada, tendo os alunos de aprender a operar e resolver problemas com estes números sem que fossem convenientemente trabalhados. O pouco tempo dedicado a este tópico, justificado pelas exigências dos programas em termos de conteúdos, revelava-se insuficiente para a compreensão e consolidação das aprendizagens, transformando-o num dos tópicos em que os alunos manifestavam mais dificuldades (Monteiro & Pinto, 2005).

Por forma a colmatar estas dificuldades demonstradas pelos alunos, permitindo-lhes um contacto mais prolongado com estes números ao longo da sua escolaridade, o PMEB (ME, 2007) passou a preconizar o início do estudo dos números racionais nos dois primeiros anos, com uma abordagem “intuitiva a partir de situações de partilha equitativa e de divisão da unidade em partes iguais, recorrendo a modelos e à representação em forma de fracção nos casos mais simples” (p.15). Os alunos deverão, assim, ser capazes de “identificar a metade, a terça parte, a quarta parte, a décima parte da unidade e representá-las na forma de fracção” através da exploração intuitiva de situações de partilha equitativa, envolvendo unidades discretas e contínuas e “representar essas quantidades por palavras, desenhos, esquemas ou fracções”(p.17). No 3.º e 4.º anos o estudo dos números racionais é aprofundado quer com o recurso “a problemas que permitam trabalhar outros significados das fracções, quer introduzindo números representados na forma decimal, (...) a partir de situações de partilha

equitativa ou de medida, refinando a unidade de medida” (p.15). Este programa salienta algumas sugestões de abordagem referindo a importância do contexto ligado ao dinheiro como propício para trabalhar a representação decimal dos números racionais devido à relação existente entre o euro e o cêntimo. É ainda referido que devem ser propostas aos alunos, situações que lhes permitam relacionar as representações fracionária e decimal dos números racionais. Estas representações surgem agora em paralelo, cabendo ao aluno a capacidade de usar a representação mais adequada em cada situação, assim como, passar com facilidade de uma representação para outra. O trabalho com os números racionais deve ainda incluir a exploração de situações que contribuam, de forma intuitiva, para o desenvolvimento da compreensão dos conceitos de razão e proporção (ME, 2007). Segundo Pessoa (2010) este programa é inovador de práticas e aprendizagens, redefinindo os papéis desempenhados pelo aluno e pelo professor. Acrescenta ainda que a valorização dada aos vários modos de trabalho, a natureza das tarefas de cariz exploratório e investigativo e a ênfase colocada no desenvolvimento das capacidades transversais permite a conexão de dimensões importantes das aprendizagens matemáticas, bem como a criação de dinâmicas comunicacionais baseadas na discussão e reflexão sobre a actividade desenvolvida promovendo-se assim uma matemática com compreensão.

Também o National Council of Teachers of Mathematics<sup>2</sup> (2007) preconiza que aprender matemática com compreensão é essencial, referindo que os alunos devem, de facto, “aprender matemática com compreensão, construindo activamente novos conhecimentos a partir da experiência e de conhecimentos prévios” (p.21). Este documento reporta ainda para pesquisas feitas em décadas recentes onde se concluiu que a “compreensão de conceitos é uma componente importante da competência, juntamente com o conhecimento de factos e o domínio dos procedimentos” (p.21). Quando os procedimentos ou factos são memorizados pelos alunos sem serem compreendidos, muitas vezes surgem dúvidas sobre quando e como os aplicarem. Antagonicamente, se os alunos conseguirem relacionar o conhecimento novo com o prévio, a matemática faz mais sentido, sendo mais facilmente memorizada e aplicada. Esta aprendizagem com compreensão irá preparar os alunos para que, no futuro, sejam capazes de resolver os problemas que terão que enfrentar (NCTM, 2007).

---

<sup>2</sup> A partir de agora denominado de NCTM.

Neste âmbito de aprendizagem com compreensão, as Normas para os Números e Operações realçam que os programas devem habilitar os alunos para “compreender os números, formas de representação dos números, relações entre números e sistemas numéricos” e ainda, “compreender o significado das operações e o modo como elas se relacionam entre si” (NCTM, 2007, p. 34), o que de facto vem ao encontro do preconizado pelo PMEB (ME, 2007) em que a palavra “compreender” está bem patente nos objetivos gerais e específicos de cada tópico. De acordo com o NCTM (2007), os alunos ao longo dos primeiros anos, além da compreensão dos números inteiros, podem ser encorajados a compreender e representar, em determinados contextos, frações como “ $\frac{1}{2}$  de uma bolacha ou  $\frac{1}{8}$  de uma piza e a ver as fracções como partes de uma unidade inteira ou de uma colecção” (p.35). Os professores deverão ajudar os alunos a compreender que as fracções estão associadas à divisão. É expresso, nestas orientações que os alunos do Pré-escolar ao 2.º no de escolaridade deverão “compreender e representar fracções comuns, como  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{3}$  e  $\frac{1}{2}$ ” (p. 90) e que, entre o 3.º e o 5.º ano “os alunos deverão desenvolver uma compreensão das fracções, como partes de uma unidade e como divisão” (p.174). Estas orientações recomendam ainda que, do Pré ao 2.º ano, os alunos deverão ter “alguma experiência no trabalho com fracções simples, por meio de associação a situações quotidianas e a problemas significativos, partindo das fracções mais comuns, expressas na linguagem que trazem consigo para a sala de aula como, por exemplo, o termo “metade”. No 2.º ano de escolaridade os alunos devem ser capazes de, por exemplo, identificarem três partes de um conjunto de quatro partes iguais e compreender que “quartos” significa que uma unidade está dividida em quatro partes iguais. Embora não constituindo, as fracções, um tema fulcral nesta fase, as experiências informais que os mesmos adquirem ao trabalhar este tema, “irão ajudar ao desenvolvimento das bases de uma aprendizagem mais aprofundada em anos escolares posteriores” (p.95).

### *2.1.2 O ENSINO E A APRENDIZAGEM DAS FRAÇÕES*

Os números fracionários assumem uma importância extrema no “desenvolvimento de estruturas mentais necessárias ao crescimento intelectual dos alunos” (Monteiro & Pinto, 2007, p.16). Também Kieren (1976), citado por Mamede (2011) considera que as fracções são a base para as relações algébricas posteriores, pelo que a sua compreensão é essencial para o desenvolvimento de ideias matemáticas. Dada a importância que este

tópico assume no desenvolvimento intelectual dos alunos era necessário implementar mudanças que conduzissem ao sucesso dos alunos no mesmo tema. Assim e de acordo com Mamede (2011), o PMEB (ME, 2007) trouxe algumas alterações, não antecipando a introdução dos números racionais nos primeiros anos do ensino básico, mas preconizando uma abordagem mais completa e profunda do conceito de fração, articulando o trabalho com frações com outras formas de representação de números racionais, nomeadamente a representação decimal. Desta forma, prolongar-se-á o contacto dos alunos com estes números que são de difícil aprendizagem, tendo em vista a promoção da aprendizagem do conceito de fração. A autora reforça ainda esta ideia afirmando que se procura promover o desenvolvimento do sentido de número, incluindo nele também as frações, desde cedo, sendo “relevante proporcionar ao aluno a oportunidade e tempo para construir um bom conceito de fração, na medida em que as frações são essenciais para o posterior desenvolvimento de outros conceitos matemáticos” (p.1). De nada servirá a introdução de algoritmos, regras e outros processos de fácil mecanização que se aprende em anos posteriores, se não tiverem sido aprendidos os conceitos essenciais (Mamede, 2011). Já Freundenthal (1983), citado por Pinto (2011) defendia que a matemática devia ser reinventada pelos alunos num processo progressivo de generalização e formalização. Assim, a Matemática Realista preconiza que as estratégias informais dos alunos constituem uma base para o desenvolvimento de conceitos e para o estabelecimento de conexões, dando destaque à matematização feita pelos alunos, através da resolução de problemas em contextos da sua realidade. Este é um processo em que o conhecimento vai passando do informal para o formal e abstracto (Pinto, 2011).

Neste sentido, é em situações concretas que deve ser enraizado o desenvolvimento de um conceito e não privilegiar a notação simbólica ou os algoritmos. Se numa situação de partilha equitativa em que é pedido ao aluno que divida três pizzas por quatro pessoas, o mesmo escreve que cada pessoa come três fatias em vez de  $\frac{3}{4}$  de piza e no desenho evidencia  $\frac{3}{4}$ , então porque não permitir que numa primeira fase o aluno resolva os problemas sem a notação simbólica e a partir daí para promover a aprendizagem da notação convencional (Monteiro & Pinto, 2005). Na perspectiva destas autoras “esta ligação entre as respostas informais das crianças na resolução de problemas e os símbolos convencionais vai permitir dar significado às diferentes representações dos

números e pode ser feita com recurso à linguagem oral. Dizer “três quartos” faz uma ponte entre o desenho que o aluno fez e o símbolo apresentado pelo professor” (p.97). Segundo as autoras, “estes processos informais usados na resolução de problemas nem sempre são valorizados e incentivados pelos professores, nem tão pouco são tidos em conta na construção de uma ponte que os ligue aos símbolos convencionais” (2005, p. 90). Esta importância atribuída às representações era já defendida por Cox (1999) que, citado por Ponte e Quaresma (2011), alega que “as representações pictóricas são úteis para o raciocínio, pois ajudam a representar a informação do problema e facilitam a mudança de estratégias de resolução” (p.58). Neste âmbito, Monteiro e Pinto (2005), fazem referência aos processos de matematização considerados por Keijzer (2003): i) *modelação* em que o aluno usa um desenho para representar algo sem recorrer a pormenores, por exemplo, usa um círculo para representar uma piza; ii) *simbolização* – nesta fase o aluno usa a linguagem para se referir a uma parte de uma piza, por exemplo; iii) *generalização* – os mesmos símbolos são generalizados a vários contextos, por exemplo a fração  $\frac{2}{3}$  representa várias situações em que a unidade está dividida em três partes e se tomam duas; iv) *formalização* – é uma extensão da anterior a regras ou fórmulas em que já não se trabalha com algo concreto mas sim com números; v) *abstração* - nesta fase o aluno já compreende o que é invariante nas relações. Estes três últimos processos podem não obedecer exatamente a esta hierarquia.

É assim necessário que os professores tenham em consideração que para que haja construção de conhecimento, os alunos terão que passar por diversas etapas até conseguirem chegar ao nível da abstração. Numa primeira fase, alguns alunos poderão conseguir resolver um problema recorrendo a desenhos ou esquemas, num determinado contexto, no entanto, poderão não o resolver recorrendo a símbolos e desligado do contexto. Um treino constante permite que alguns alunos dêem respostas corretas a situações de cálculo rotineiro, criando a ilusão que compreenderam o que fizeram (Monteiro & Pinto, 2005).

Ao resolverem determinadas atividades, em sala de aula, os alunos podem demonstrar alguma facilidade em trabalhar os números racionais, no entanto, não significa que tenham uma compreensão clara do conceito. Nunes e Bryant (1997) descrevem o raciocínio matemático das crianças e ao analisar sobre a forma como elas pensam ao resolver problemas matemáticos, nomeadamente no que respeita aos números racionais, afirmam que:

“Com as fracções as aparências enganam. Às vezes as crianças parecem ter uma compreensão completa das fracções e ainda não a têm. Elas usam os termos fracionários certos; falam sobre fracções coerentemente, resolvem alguns problemas fracionais; mas diversos aspectos cruciais das fracções ainda lhes escapam. De fato, as aparências podem ser tão enganosas que é possível que alguns alunos passem pela escola sem dominar as dificuldades das fracções, e sem que ninguém perceba” (p.191).

Assim, as dificuldades dos alunos com os números racionais são muitas vezes associadas à notação de fração ou ainda ao facto de aplicarem o conhecimento que detém acerca dos números inteiros, às fracções. Relativamente a este facto, Monteiro e Pinto (2007), referem que alguns dos mal entendidos mais comuns em relação às fracções centram-se na sua comparação. Os alunos ao compararem, por exemplo, os números  $\frac{1}{3}$  e  $\frac{1}{4}$ , referem  $\frac{1}{4}$  maior do que  $\frac{1}{3}$ , precisamente porque 4 é maior que 3, verificando-se a analogia aos números inteiros. Este erro é muito vulgar e é um indicador de que a representação fracionária ainda não está compreendida. É usual afirmarem também que  $\frac{1}{2} = 1,2$  demonstrando que, mais uma vez as representações não estão relacionadas com os números que representam. De acordo com estas autoras, alguns destes erros revelam que o sistema de numeração decimal não está entendido e que as representações estão desligadas das quantidades a que dizem respeito. Monteiro e Pinto (2007) alertam ainda para o facto de uma fração ser constituída por dois números e à dificuldade que os alunos revelam em compreender que não estão perante dois números distintos, mas sim, por um símbolo que representa apenas uma quantidade. Perante esta confusão, ao adicionarem fracções, muitas vezes os alunos adicionam numeradores e denominadores. Salientam que também a multiplicação e a divisão de números racionais se tornam de difícil compreensão para alunos habituados a um ensino mecanicista uma vez que, nem sempre o produto de dois números racionais é um número maior, nem sempre na divisão de números racionais se obtém um resultado menor que o dividendo, tal como acontece com os números inteiros. Segundo as autoras também é notória a interferência que os números inteiros têm nos fracionários, quando um aluno refere que o número 1,345 é maior do que 1,7 justificando que o primeiro tem mais números ou que 345 é maior do que 7. Esta é uma questão importante e que deve ser reconhecida pelos professores.

Perante estas dificuldades é necessário que os professores estejam atentos pois segundo Monteiro, Pinto e Figueiredo (2005, p.47):

“Os alunos operam com os símbolos sem terem ideia das quantidades e conceitos subjacentes, chegando a respostas sem sentido. Assim, não é raro vermos alunos adicionarem números representados por fracções adicionando os numeradores e os denominadores, evidenciando enormes lacunas na compreensão do conceito de fracção e das operações com estes números”.

Ainda relativamente às dificuldades que os alunos do ensino básico enfrentam na compreensão dos números racionais, Monteiro e Pinto (2005) afirmam que algumas estão identificadas, na literatura, com a concepção da unidade e com o ensino precoce e descontextualizado dos símbolos e algoritmos, como já foi referido anteriormente, mas também “com os diferentes significados das fracções,” (p.89).

Relativamente aos diferentes significados das fracções, vários investigadores, (e.g. Kieren (1983, 1995), Marshall (1993), Nunes e Bryant (1997)), definiram classificações de situações em que as fracções são usadas. No entanto, em sala de aula, mais do que abordar uma ou outra classificação, a literatura nacional e internacional aponta para a necessidade da exploração de todos os significados de fracção como essencial para o êxito na aprendizagem do conceito de fracção. Monteiro e Pinto (2007) definem os seguintes significados das fracções:

Tabela 1- Significado das fracções

<b>SIGNIFICADOS DAS FRAÇÕES</b>		
<b>a) A relação parte-todo de uma unidade contínua</b>	-A fracção surge da comparação entre a parte e o todo; - O denominador indica o n.º de partes em que a unidade está dividida e o numerador o n.º de partes escolhidas.	<b>Ex.:</b> 3/5 de uma folha de papel está pintada;
<b>b) A relação parte-todo de uma unidade discreta</b>	- A fracção surge da comparação entre a parte e o todo;	<b>Ex.:</b> 3/5 de uma colecção de 5 berlindes são cinzentos;
<b>c) O quociente entre dois números inteiros representado pela fracção a/b</b>	- Surge em situações de partilha equitativa; - O numerador representa o número de coisas a ser partilhado e o denominador o número de receptores desse partilha; - Também pode ter o significado de quantidade com que cada receptor	<b>Ex.:</b> 3 chocolates a dividir por 5 crianças – 3/5

	ficou.	
d) <b>Operador partitivo multiplicativo</b>	- A fração $a/b$ transforma o cardinal de um conjunto discreto; - O numerador indica uma multiplicação e o denominador uma divisão.	<b>Ex.:</b> $3/5 \times 20$ – três quintos de vinte caricas
e) <b>A medida</b>	- Compara-se uma grandeza com outra tomada como unidade.	
f) <b>A razão entre duas partes de um mesmo todo</b>		<b>Ex.:</b> Numa turma a razão entre o número de rapazes e o número de raparigas é de 3 para 5.

O professor deve assim, propor aos seus alunos, problemas que permitam trabalhar os diferentes significados das frações, proporcionando a construção do conceito de fração.

Porém, de acordo com vários autores (e.g. Mamede (2011), Monteiro e Pinto (2007), Nunes e Bryant (1997), Streefland (1991)), o ensino das frações deve iniciar-se por situações de partilha equitativa, uma vez que, uma das razões apontadas na literatura para o insucesso dos alunos nesta área é o facto de essa abordagem ser feita exclusivamente em situações de parte-todo, em detrimento da partilha equitativa. Assim, também Monteiro et al (2005) defendem uma primeira abordagem às frações em contextos de partilha equitativa, mas significativos para os alunos. É, segundo estas autoras, importante proporcionar aos alunos:

“...um trabalho em diversificadas situações, onde as fracções surgem com diferentes significados, de modo a que explorem os conceitos de forma completa e integrada possibilitando uma construção gradual do sentido do número racional. É preciso, portanto, dar tempo aos alunos para irem integrando todos estes conceitos e as suas relações, assim como os novos símbolos, e não ter pressa em introduzir regras e algoritmos, correndo o risco de os introduzir antes de que estes possam ter significado para as crianças” (p.51).

Também Streefland (1986, 1991, 1993, 1997) citado por Monteiro e Pinto (2005) defende uma abordagem ao estudo das frações em contexto de partilha equitativa, partindo de situações inspiradas no quotidiano das crianças, “num processo construtivo de matematização” (p.93). O mesmo autor considera “as situações de partilha equitativa uma fonte natural e um ponto de partida para o ensino das frações”, uma vez que a noção intuitiva de metade e quarta parte surgem desde muito cedo em contextos do dia-a-dia das crianças.

No entanto, para explorar o conceito de fração é importante diversificar a natureza da unidade que se transforma no processo de fracionamento. Monteiro e Pinto (2007) alertam para o facto de o trabalho com unidades discretas ou contínuas poder trazer perturbações o que requer atenção por parte do professor. Dão como exemplo que “Determinar a quarta parte de uma folha de papel ou a quarta parte de 8 lápis, implica que no segundo caso o resultado se represente por um número inteiro e no primeiro caso isso não seja possível” (p.94). As mesmas autoras fazem também referência a Lamon (2002) que analisa diferentes tipos de unidades em que considera unidades simples e compostas, sendo as primeiras indivisíveis e as segundas, agregados de objetos e exemplifica que “1 dúzia de ovos pode ser encarada como 2 meias dúzias, como 6 pares de ovos e ainda como 12 ovos” (p.94). É assim de extrema importância o papel que a unidade desempenha na compreensão das frações, uma vez que uma fração tem sempre implícita uma unidade.

Também Ponte e Quaresma (2011), salientam que:

“...numa grandeza contínua, um objecto é composto por várias partes, sendo cada parte uma entidade única contínua ligada às restantes. Esta unicidade, continuidade e conectividade são conceptualmente bem evidentes para os alunos. Por outro lado, num conjunto discreto, cada uma das partes iguais pode ser composta por conjuntos de objetos não conexos” (p. 254).

Behr, Khoury, Harel, Post e Lesh (1997) sugerem que “o ensino das frações deve começar pelas grandezas contínuas e ir gradualmente passando para as grandezas discretas” (Ponte & Quaresma, 2011, p.255). Segundo estes autores para os alunos determinarem  $\frac{2}{3}$  de 12 maçãs precisam pensar em 12 objetos como uma unidade conceptual, sendo difícil pensarem que cada terço corresponde a quatro maçãs.

Também Vizinho e Cabrita (2012), partilham da mesma opinião referindo que a ordem de apresentação das tarefas e dos materiais, em especial os de carácter lúdico, confere primazia aos que permitem explorar, primeiramente, a partilha de uma unidade contínua por questões relativas à hierarquia da construção do conceito de partilha de uma unidade. Posteriormente, as tarefas podem e devem surgir alternadamente, relativas a unidades discretas e a unidades contínuas.

No entanto, Ponte e Quaresma (2011), referem também alguns autores internacionais como Post, Cramer, Behr, Lesh e Harel (1993) que antagonicamente, consideram que

“inicialmente os alunos têm mais dificuldade em grandezas contínuas do que em discretas, porque nas discretas usam as estratégias de contagem que já conhecem, enquanto nas contínuas têm de usar estratégias de partição que ainda estão a desenvolver” (p. 254). Ou seja, nos primeiros anos as unidades discretas fazem parte do dia-a-dia da criança, quando, desde muito cedo, começam a repartir objetos entre si e os seus amigos.

A literatura, nacional e internacional, salienta ainda a relevância da promoção de atividades de reconstrução da unidade. Lamon (2002) citado por Monteiro e Pinto (2005) menciona que “experiências de reconstrução de unidades a partir de partes revestem-se da maior importância, pois é no convívio com uma multiplicidade de unidades que o sentido do número e dos símbolos que o representam se vai desenvolvendo” (p.95). Monteiro e Pinto (2007) consideram ainda que a conceptualização da unidade é um tema fundamental na compreensão das frações, pois uma fração tem sempre subjacente uma unidade.

Também Ponte e Quaresma (2011) defendem que a “construção das partes e a reconstrução da unidade pelos alunos são aspetos fundamentais da aprendizagem dos números racionais a que nem sempre se dá a necessária atenção” (p.253) e citam Behr et al. (1997) que afirmam que “os currículos dão geralmente mais ênfase às tarefas de construção de partes de um todo do que às que requerem a reconstrução da unidade a partir das suas partes.” Consideram também que “a inversão do processo de fraccionamento da unidade é importante porque a compreensão de um processo é maior quando os alunos são capazes de o reverter para voltar ao ponto de partida” (p. 254).

Do anteriormente exposto emana a necessidade do professor trabalhar os diferentes significados das frações, diversificando a natureza das unidades envolvidas, bem como contemplando tarefas de reconstrução da unidade. De acordo com Mamede (2011), ao trabalhar todos os diferentes significados das frações é esperado que o aluno aprenda a comparar e ordenar frações, bem como a representá-las de diversas formas. Segundo a autora, para que o aluno apreenda o conceito de fração é fundamental que compreenda três aspectos distintos, mas que se relacionam, que há frações equivalentes, que as mesmas podem ser ordenadas e, por fim, que essas quantidades podem ser representadas de diversas formas. Estes três aspectos “devem ser compreendidos pelas crianças nas

diferentes interpretações ou significados de fração. Pois só assim se caminha rumo ao desenvolvimento do sentido de número das crianças” (p. 2).

Neste sentido, Ponte e Quaresma (2011) fazem referência a alguns autores internacionais, nomeadamente Post, Behr e Lesh (1986), que se debruçaram sobre as estratégias espontâneas informais usadas pelos alunos na resolução de tarefas para a comparação de frações. Essas estratégias são: i) Pensamento residual, que se refere à quantidade necessária para construir o todo. Exemplificam que ao comparar as frações  $\frac{5}{6}$  e  $\frac{7}{8}$ , os alunos podem perceber que na primeira falta  $\frac{1}{6}$  para o todo, esse é o valor residual, e na segunda falta  $\frac{1}{8}$ . Ora, como  $\frac{1}{8}$  é menor que  $\frac{1}{6}$ , concluirão que  $\frac{7}{8}$  é maior que  $\frac{5}{6}$ . ii) Utilização de pontos de referência, em que se comparam duas frações utilizando uma terceira como referência que pode ser  $\frac{1}{2}$  ou 1. Exemplificam dizendo que ao comparar as frações  $\frac{3}{7}$  e  $\frac{5}{8}$ , o aluno dirá que  $\frac{5}{8}$  é maior que  $\frac{3}{7}$  porque  $\frac{5}{8}$  é maior que metade e  $\frac{3}{7}$  é menor que metade. iii) Pensamento diferencial, os alunos que utilizam esta estratégia concluem que  $\frac{5}{6}$  e  $\frac{7}{8}$  são equivalentes porque em ambas as frações, apenas falta uma parte para completar o todo. Neste caso os alunos comparam a diferença entre o 5 e o 6 e entre o 7 e o 8, não considerando o valor real da fração, podendo levar a resultados incorretos. Portanto, os alunos que utilizam como estratégias o pensamento residual ou a utilização de pontos de referência tenderão a ser mais assertivos dos que os que usam o pensamento diferencial. Relativamente à resolução de tarefas que envolvem a equivalência de frações, os autores referem que os alunos têm que compreender que as frações que representam a mesma quantidade podem ser representadas por diferentes símbolos, ex.:  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{2}{4}$ ,  $\frac{3}{6}$ . Todas estas frações representam “a metade”, no entanto têm representações simbólicas diferentes e designações também diferentes: um meio, dois quartos, três sextos. Esta situação acarreta ainda outra dificuldade que se prende com o facto de um mesmo símbolo ou palavra poder designar quantidades diferentes. Por exemplo,  $\frac{1}{2}$  de quatro e  $\frac{1}{2}$  de seis, representam quantidades diferentes. Relativamente à ordenação de frações, os alunos têm que compreender três aspectos distintos: para frações com o mesmo denominador é maior a fração que tiver maior numerador; para frações com o mesmo numerador é maior a fração que tiver menor denominador e para

frações com numeradores e denominadores diferentes ter-se-á que estabelecer uma relação proporcional entre as frações.

Ainda na resolução de tarefas envolvendo frações, McCloskey e Norton (2009) referem cinco operações ou ações mentais que os alunos utilizam: i) Unitizing – considerar um objeto ou um conjunto de objetos como unidade ou como um todo (por exemplo, considerar dois hexágonos como um todo; ii) Partitioning – repartir uma unidade ou o todo em partes iguais (por exemplo, repartir uma piza por quatro pessoas; iii) Disembedding – tirar uma fração do todo, mantendo o todo intacto e inalterado (por exemplo, depois de a piza ter sido cortada em quatro partes, imaginar como seria a representação de  $\frac{3}{4}$  dessa piza); iv) Iterating – repetir uma parte para produzir cópias idênticas (por exemplo, usar uma parte correspondente a  $\frac{1}{5}$  para identificar uma parte que representa  $\frac{3}{5}$ ); v) Splitting – é uma fusão de partitioning com iterating (por exemplo, “Esta barra é cinco vezes maior que a outra. Desenhe a outra barra”). De acordo com os mesmos autores, estas ações conjugadas constituem esquemas usados pelos alunos na construção das partes e reconstrução da unidade e permitem aos professores caracterizar o pensamento dos alunos. Esses esquemas são: i) Simultaneous partitioning (partição simultânea), que consiste em formar a unidade, dividindo um todo contínuo utilizando uma unidade composta como modelo (por exemplo, “Reparta esta barra de chocolate igualmente por si e dois amigos”; ii) Part-whole (parte-todo), que consiste em retirar uma parte de uma unidade repartida (por exemplo, “Mostrar  $\frac{2}{3}$  de uma barra de chocolate”); iii) Equi-partitioning (partilha-equitativa), que consiste em construir a unidade, partir e repetir qualquer parte por forma a identificar uma parte (por exemplo, “Se repartir esta barra de chocolate igualmente entre si e dois amigos, mostre-me como seria o seu pedaço”); iv) Partitive unit fractional (fracionamento partitivo da unidade), que consiste em iterar ou repetir uma fração unitária para construir um todo (por exemplo, “Se eu lhe der esta parte (mostrar  $\frac{1}{3}$  e o todo não repartido) que fração da barra de chocolate teria?”); v) Partitive fractional (fracionamento partitivo), que consiste em construir o todo, desintegrando uma fração própria do todo e, hipoteticamente, dividir uma fração própria para produzir uma fração unitária. Depois, iterando a fração unitária construir-se-á a fração própria e o todo, coordenando frações unitárias dentro de uma fração composta (por exemplo, “Se eu lhe der esta parte (mostrar uma parte

correspondente a  $\frac{2}{3}$  e o todo, ambos sem estarem divididos), que fração do chocolate teria?”); vi) Reversible partitive fractional (fracionamento reversível partitivo), que consiste em construir o todo através da divisão e iteração (splitting) de uma parte de um todo maior (por exemplo, “Se esta parte representa  $\frac{4}{5}$  da barra de chocolate, desenhe a barra de chocolate completa.”); vii) Iterative fractional (fracionamento iterativo), que consiste em, através da divisão e iteração (splitting) de uma parte de um todo menor para recriar o todo (por exemplo, “Se esta parte representa  $\frac{5}{4}$  da barra de chocolate, desenhe a barra de chocolate.”). Este quadro conceptual constitui, segundo Ponte e Quaresma (2011), “uma poderosa ferramenta de análise dos processos de pensamento dos alunos” (p.255).

Os alunos a que McCloskey e Norton (2009) se referem como “splitters” (divisores), podem explorar a natureza inversa das operações de partitioning e iterating (dividir e iterar) para resolver problemas e recriar o todo a partir de qualquer parte fracionária. Estas operações constituem o componente-chave do sistema e produzem nos alunos conceitos sobre frações. Segundo os autores, os alunos que sabem dividir atingiram um estágio muito importante na compreensão de frações, pelo que são capazes, de forma flexível e simultaneamente, dividir e iterar, estando em condições de desenvolver esquemas de fração mais avançados.

Segundo McCloskey e Norton (2009) os professores estão bem conscientes das dificuldades que os alunos apresentam com as frações. Acrescentam que o esforço feito para avaliar o raciocínio dos alunos pode ser mais valioso do que o tempo gasto a praticar algoritmos padrão no cálculo com frações. Assim, incentivam os professores a gastar o tempo e o esforço para avaliar o que os seus alunos entendem sobre frações como números que são produzidos por meio de ações mentais, uma vez que, descobriram que a sobrevalorização que se dá à fluência processual com operações com frações contorna o desenvolvimento de compreensões importantes.

Deste modo, é determinante que o professor encontre meios para promover a compreensão/sucesso deste conteúdo matemático, pois as frações são essenciais para o progresso do aluno na sua aprendizagem da matemática.

## 2.2 O ENSINO EXPLORATÓRIO

Num passado bem recente, o ensino da matemática era um ensino direto, centrado na exposição dos tópicos por parte do professor, à qual se seguiam um conjunto de exercícios práticos para que os alunos repetissem e treinassem procedimentos. Neste tipo de ensino, o conhecimento é apresentado diretamente ao aluno, por sua vez, o principal papel do aluno é receber “explicações” do professor. Existe uma e uma só tarefa padrão – o exercício -, as situações que se trabalham tendem a assumir um caráter artificial e para cada problema existe uma e uma só estratégia e resposta certa. Relativamente à comunicação, esta tem por padrão fundamental o facto de que o professor coloca questões e fornece feedback imediato ao aluno (Ponte & Serrazina, 2009). No entanto, este tipo de ensino centrado no professor não responde às necessidades atuais do sistema de ensino. Atualmente, o processo ensino-aprendizagem da matemática, centrado no aluno, preconiza que os alunos construam o seu próprio conhecimento através de tarefas exploratórias ricas e valiosas.

Neste sentido, o ensino exploratório assume uma importância extrema no ensino da matemática, em que os alunos trabalham a partir de situações, com frequência, realistas, propostas pelo professor. Os alunos têm de descobrir estratégias para resolver as tarefas propostas. De acordo com Ponte (2005), existe uma grande variedade de tarefas: problemas, exercícios, investigações, projetos e explorações. Um problema, segundo este autor, tem sempre um grau de dificuldade apreciável. No entanto, se for demasiado difícil poderá levar o aluno a desistir se for demasiado fácil passará a ser um exercício. Dos problemas devem, portanto, ser do interesse dos alunos, desafiadores e estimulantes para que os alunos reflitam, comuniquem, desenvolvam, apliquem e se familiarizem com novos conceitos e deverão ser contextualizados (rotinas diárias, situações matemáticas ou através da literatura infantil) em que os conceitos e as capacidades são aprendidos e conseqüentemente aplicados. No entanto, não é apenas o contexto que define se uma questão é um exercício ou um problema. Ainda segundo Ponte (2005), se o aluno dispõe de um processo imediato para o resolver, então estamos perante um exercício. Refere ainda que os exercícios servem para o aluno por em prática os conhecimentos que adquiriu. No entanto mais do que fazer muitos exercícios, o que poderá levar à desmotivação dos alunos, importa seleccionar aqueles que permitem testar a compreensão de conceitos essenciais por parte dos alunos. As investigações são tarefas abertas que promovem o envolvimento dos alunos, uma vez que, requerem a sua

participação ativa logo desde a formulação da questão que terão que resolver. As tarefas de exploração diferem das tarefas de investigação no que respeita ao grau de desafio, sendo que as primeiras comportam um grau de desafio mais reduzido. Para finalizar, os projetos são tarefas que têm muitas das características das tarefas de investigação, no entanto têm uma duração mais longa. É importante que o professor diversifique as tarefas que propõe aos seus alunos de acordo com as características dos seus alunos e as suas condições de trabalho (Ponte, 2005).

Assim, a escolha das tarefas deve ser criteriosa, permitindo aos alunos desenvolver conexões que lhes permitam fortalecer determinadas capacidades. O tipo de tarefas é relevante no processo de ensino e aprendizagem, se tivermos em atenção o papel do professor quer na seleção das mesmas, quer na condução da aula, principalmente, no momento de apresentação e discussão dos trabalhos realizados pelos alunos e no momento de síntese. Neste tipo de ensino, os alunos são encorajados a discutir com os colegas, em grupos ou em pares, discussões que são posteriormente alargadas a toda a turma (Ponte & Serrazina, 2009). Deste modo, o ensino exploratório não preconiza que os alunos descubram sozinhos procedimentos matemáticos, mas defende que “os alunos aprendem a partir do trabalho sério que realizam com tarefas valiosas que fazem emergir a necessidade ou vantagem das ideias matemáticas que são sistematizadas em discussão colectiva” (Canavarro, 2011, p. 11). O ensino exploratório da matemática exige, assim, muito do professor, não apenas pela importância da seleção das tarefas, mas também pela forma como conduz e explora as suas potencialidades. Deve ser muito criterioso na seleção da tarefa e preparar-se para explorar todas as potencialidades da mesma. Por outro lado, é necessário que o professor se sinta seguro ao nível científico para que consiga, sem receios, responder a todas as eventuais questões colocadas pelos alunos. Stein, Engle, Smith e Hughes (2008), citados por Canavarro, Oliveira e Menezes (2012) reiteram esta ideia afirmando que:

“A seleção de uma tarefa adequada e valiosa é muito importante pois ela tem implícita uma determinada oportunidade de aprendizagem mas, uma vez selecionada, é crucial que o professor equacione como explorar as suas potencialidades junto dos alunos e se prepare para lidar com a complexidade dessa exploração na sala de aula” (p.256).

Uma aula exploratória é, segundo Stein, Engle, Smith e Hughes (2008) citado por Canavarro et al (2012), “estruturada em três ou quatro fases: a fase de «lançamento» da tarefa, a fase de «exploração» pelos alunos, e a fase de «discussão e sintetização»” (p.

256). Na primeira fase, o professor lança a tarefa à turma, que pode ser um problema ou uma investigação e tem que se assegurar que os alunos entendem a tarefa e que se sentem desafiados para a sua resolução. Na fase de exploração o papel do professor é o de apoiar os alunos no trabalho autónomo que poderá ser realizado individualmente ou em pequenos grupos. Deve-se certificar que todos os alunos estão a participar e de forma produtiva. Ao circular pela sala, o professor vai observando e selecionando as produções dos alunos que promovem contribuições positivas para a discussão em plenário e a respetiva ordem de apresentação. A última fase é a da discussão coletiva das resoluções, em plenário. O professor tem que orquestrar a discussão, gerindo as intervenções e promovendo a qualidade das explicações e argumentações, comparando as diferentes resoluções e a sua eficácia (Canavarro et al, 2012). O professor assume assim um papel muito importante como fomentador e incentivador do desenvolvimento de competências de comunicação, promovendo um diálogo afetivo e criando condições e hábitos para que os alunos comuniquem as suas ideias ou raciocínios, mas também que saibam ouvir as ideias dos colegas. No entanto, para que o aluno se sinta motivado é também importante que o professor saiba valorizar o trabalho autónomo do aluno, ajudando-o a empenhar-se na sua própria aprendizagem para que o mesmo ganhe autoconfiança e seja um aluno participativo na dinâmica de ensino e aprendizagem. Através desta partilha de ideias matemáticas promover-se-á uma interação de estratégias o que implica uma reflexão, discussão e reformulação de ideias. Esta partilha permite que os alunos validem as ideias uns dos outros e também que se apercebam dos seus erros e das razões por que os cometeram. De acordo com Menezes, Rodrigues, Tavares e Gomes (2009), o professor terá oportunidade para compreender os procedimentos dos alunos, discutindo com os alunos as boas estratégias e levando-os a corrigir os seus erros.

A discussão coletiva assume, então, um papel crucial no ensino, promovendo a partilha e o desenvolvimento da comunicação, permitindo que os alunos identifiquem erros por eles cometidos solidificando aprendizagens. Segundo Lampert (2001), as tentativas de comunicar um raciocínio pessoal proporcionam oportunidades para uma compreensão mais profunda da Matemática. Através deste processo, Canavarro (2011) refere que “os alunos têm a possibilidade de ver os conhecimentos e procedimentos matemáticos surgir com significado e, simultaneamente, de desenvolver capacidades matemáticas como a resolução de problemas, o raciocínio matemático e a comunicação matemática” (p. 11).

Nesta fase da aula exploratória, a comunicação matemática que é definida por Ponte (2005) como sendo “um processo social onde os participantes interagem trocando informações e influenciando-se mutuamente” (p. 274), assume uma importância extrema, sendo um processo fundamental da atividade matemática em que estão envolvidos professor e alunos, no decorrer da aula (Menezes, 2005). Neste âmbito, a comunicação baseada na partilha de ideias, permite a interação do aluno com as ideias expostas, apropriando-se delas e também aprofundando as suas, levando, portanto, a uma influência mútua. Assim, a comunicação permite aprender, mas também contribui para uma melhor compreensão do próprio pensamento (Boavida, Paiva, Cebola, & Vale, 2008). A comunicação é, assim, entendida como um processo de interação social que, para se concretizar, necessita de ser “alimentada” por tarefas matemáticas ricas, enquadradas num ambiente de sala de aula desafiante e no qual o professor desempenha um papel chave (Guerreiro, 2011; Menezes, 2005). É fundamental que a discussão coletiva seja preparada pelo professor e que o mesmo se sinta bem preparado do ponto de vista científico de forma a responder às questões que lhe possam ser colocadas. Conseguir que esta discussão seja matematicamente produtiva, é uma tarefa, “extremamente exigente e intrincada” em que o “papel do moderador da discussão é particularmente difícil” (Sfard (2003), citado por Boavida & Menezes (2012, p.291))

No ensino exploratório, a orquestração das discussões matemáticas em sala de aula constitui um desafio para qualquer professor. De acordo com Canavarro (2011) existem cinco práticas que auxiliam o professor a orquestrar produtivamente as discussões matemáticas: Antecipar; Monitorizar; Selecionar; Sequenciar; Estabelecer conexões. A antecipação corresponde a uma previsão por parte do professor de como os alunos irão abordar as tarefas que lhes foram colocadas. O professor deve resolver a tarefa por forma a antecipar todas as possíveis resoluções, variando estratégias e representações. Antecipando o professor prepara-se e adquire confiança para responder a eventuais questões colocadas pelos alunos e fica mais apto a explorar todo o potencial da tarefa para as aprendizagens dos alunos. Monitorizar implica que o professor se aproprie das estratégias e resoluções dos alunos e avalie o seu potencial, em termos de promoção de aprendizagens, para a posterior apresentação à turma. Ao circular pela turma, o professor identifica também erros ou ideias erróneas dos alunos e que importam discutir colectivamente. Selecionar é a fase em que o professor identifica os alunos ou grupos cujas resoluções são adequadas ao propósito da aula. As resoluções seleccionadas não o

devem ser apenas porque os alunos se voluntariaram, mas, porque proporcionam riqueza em termos de aprendizagens. Sequenciar requer que o professor ordene as apresentações das produções dos alunos à turma. Por último, estabelecer conexões implica que as resoluções apresentadas sejam comparadas e avaliadas as suas potencialidades, para que se retirem heurísticas para abordar futuras tarefas. De acordo com o propósito da aula estabelecer-se-ão as conexões adequadas.

Canavarro et al (2012), citando Stein et al (2008), afirma que “O final da discussão é um momento de institucionalização das aprendizagens” onde tanto poderão surgir novos conceitos, como serem revistos ou aperfeiçoados conceitos já conhecidos. Afirmam ainda, que podem também ser “estabelecidas conexões com situações anteriores e/ou reforçados aspectos fundamentais dos processos matemáticos transversais como a representação, a resolução de problemas, o raciocínio matemático e a comunicação matemática” (p.257).

Decorre do anteriormente exposto, que o professor assume um papel fundamental na preparação de aulas de ensino exploratório, na sua concretização, bem como na reflexão sobre os resultados obtidos.

### III – METODOLOGIA

Neste capítulo apresento a metodologia adotada neste estudo, justificando as minhas opções. Assim, surgem as opções metodológicas adotadas, seguindo-se os procedimentos de carácter metodológicos no que concerne aos participantes, sequência de tarefas, metodologia de trabalho, instrumentos de recolha de dados e análise dos mesmos.

#### 3.1 OPÇÕES METODOLÓGICAS

Com o objetivo de compreender o percurso realizado por uma turma de 2.º ano de escolaridade durante a realização de uma sequência de tarefas para o ensino e aprendizagem das frações, bem como a importância do papel do professor num contexto de ensino exploratório, adoptei uma metodologia de investigação-ação. Segundo Lomax (1990) citado por Coutinho, Sousa, Dias, Bessa, Ferreira e Vieira (2009), a investigação-ação é uma intervenção na prática profissional com intenção de a melhorar. Watts (1985), citado por Coutinho et al (2009), define este tipo de investigação como “um processo em que os participantes analisam as suas próprias práticas educativas de uma forma sistemática e aprofundada, usando técnicas de investigação” (p.363). A mesma autora refere ainda outras definições de investigação-ação que embora não tendo o cunho dos grandes mestres, são um contributo para a compreensão desta metodologia. Assim, a investigação-ação pode também ser entendida como uma “família de metodologias de investigação que incluem ação (ou mudanças) e investigação (ou compreensão) ao mesmo tempo, utilizando um processo cíclico ou em espiral, que alterna entre ação e reflexão crítica” (Coutinho, 2013, p.363). Ainda de acordo com Coutinho (2013), Investigação-ação é também uma forma de ensino e não apenas uma metodologia para estudá-lo. Zuber-Skerrit (1996) citado por Coutinho (2013) refere que “fazer investigação-ação implica planejar, actuar, observar e reflectir mais cuidadosamente do que aquilo que se faz no dia-a-dia, no sentido de induzir melhorias nas práticas” (p.368). Assim, o essencial da investigação-ação é a exploração reflexiva que o professor faz da sua prática o que contribui, não só para a resolução do problema, mas também, para a introdução de alterações dessa mesma prática.

Nesta ótica, assumirei o papel de professor-investigador não sendo um agente externo à investigação, mas sim um co-investigador. Assim, adotarei o duplo papel de professor e

investigador, mantendo o distanciamento necessário da turma que o investigador deve ter para que não comprometa a investigação. O facto de o investigador não ser uma pessoa estranha à turma, poderá ser facilitador, não promovendo alterações de comportamentos, mantendo o contexto em que se realiza o estudo inalterado. Máximo-Esteves (2008) também considera este contexto o ideal, afirmando ainda que a criança deve ter um papel ativo na sua aprendizagem e que a pedagogia se deve basear na observação da criança e dos seus processos de aprendizagem num contexto naturalista (p. 24).

## 3.2 PROCEDIMENTOS DE CARÁTER METODOLÓGICO

### 3.2.1 PARTICIPANTES

O estudo foi realizado num Centro Escolar que entrou em funcionamento no ano letivo, 2013/2014, integrando a educação Pré-Escolar (3 turmas) e o 1.º Ciclo do Ensino Básico (4 turmas – uma por ano de escolaridade) num total de cerca de 140 alunos. Com o propósito de atingir o objetivo do estudo que pretendia levar a cabo, programei uma sequência de tarefas para o ensino e aprendizagem das frações na turma do 2.º ano de escolaridade da qual sou professora. Esta turma era constituída por 16 alunos: 7 do sexo masculino e 9 do sexo feminino, com idades compreendidas entre os 7 e os 8 anos. Os alunos que integravam a turma não se conheciam todos, sendo oriundos de três escolas diferentes. Apesar de conhecer apenas dois dos alunos da turma, ao longo do 1.º período, fui percebendo as suas dificuldades na área da matemática. Concluí assim, que era uma turma com um rendimento heterogéneo e com diferentes ritmos de trabalho, cujas principais dificuldades se prendem com a interpretação de enunciados, raciocínio matemático e comunicação. Demonstraram, no entanto, ser alunos interessados, trabalhadores e muito participativos, com motivação para superar as suas dificuldades. Dos 16 alunos que compunham a turma, 4 alunos necessitavam de apoio individualizado por parte de uma professora de apoio educativo.

### 3.2.2 SEQUÊNCIA DE TAREFAS

Com a finalidade de promover o ensino e a aprendizagem das frações no 2.º ano de escolaridade, num contexto de ensino exploratório, foi elaborada uma sequência de tarefas que assenta no propósito principal de ensino, constante no PMEB (2007)

“desenvolver nos alunos o sentido de número, a compreensão dos números e das operações e a capacidade de cálculo mental e escrito, bem como a de utilizar esses conhecimentos e capacidades para resolver problemas em contextos diversos” (p.13). Assim, com a sua aprendizagem, os alunos devem i) compreender e ser capazes de usar propriedades dos números racionais não negativos, ii) compreender as operações e ser capazes de operar com números racionais não negativos e iii) ser capazes de resolver problemas, raciocinar e comunicar em contextos numéricos (p.13).

A referida sequência de tarefas foi implementada na 2.<sup>a</sup> e 3.<sup>a</sup> semana do mês de março, de acordo com a planificação mensal do Agrupamento ao qual pertence esta escola, que, apontava para esta data a introdução deste tópico. Foi pensada tendo como base o desfile de carnaval que tinha acontecido na escola, sendo um tema do quotidiano dos alunos suscitando, nos mesmos, uma maior motivação implicando um maior interesse/empenho na execução das tarefas. Permite também, o estabelecimento de uma ponte com os seus conhecimentos informais, atribuindo assim, significado aos números racionais (Galen, Feijs, Figueiredo, Gravemeijer, Herpen & Keijer, 2008). Apresento, no seguinte quadro, as tarefas que compõem a sequência de tarefas implementada.

Tabela 2 - Sequência de tarefas

<b>Tarefas</b>	<b>Significado</b>
<b>Tarefa 1</b>	Divisão de uma unidade contínua –divisão de uma maçã em duas partes iguais; Reconstrução da unidade
<b>Tarefa 2</b>	Partilha equitativa de uma unidade contínua: <ul style="list-style-type: none"> <li>• divisão de 1 tarte em 2 partes iguais;</li> <li>• divisão de 1 tarte em 4 partes iguais.</li> </ul>
<b>Tarefa 3</b>	Partilha equitativa de uma unidade contínua: <ul style="list-style-type: none"> <li>• divisão de 3 pizzas em 4 partes iguais;</li> <li>• divisão de 3 pizzas em 8 partes iguais;</li> <li>• comparação de frações.</li> </ul>
<b>Tarefa 4</b>	Partilha equitativa de uma unidade contínua: <ul style="list-style-type: none"> <li>• divisão de 3 chocolates em 5 partes iguais;</li> </ul>
<b>Tarefa 5</b>	Partilha equitativa de uma unidade contínua: <ul style="list-style-type: none"> <li>• divisão de 6 chocolates em 10 partes iguais.</li> </ul>
<b>Tarefa 6</b>	Comparação de frações
<b>Tarefa 7</b>	Partilha equitativa de uma unidade discreta
<b>Tarefa 8</b>	Reconstrução da unidade envolvendo unidades discretas.
<b>Tarefa 9</b>	Reconstrução da unidade envolvendo unidades contínuas.

Estas tarefas envolveram os significados das frações sugeridos no programa para este ano de escolaridade. Assim, iniciou-se o estudo às frações pela partilha equitativa que é segundo Monteiro et al (2005), entre outros autores, o ponto de partida ideal para a sua abordagem. Pretende-se, desta forma, que os alunos resolvam problemas de partilha equitativa, começando pelas unidades contínuas, passando depois para as unidades discretas. Esta ordem é justificada por autores internacionais e nacionais como Vizinho e Cabrita (2012). Por fim, as duas últimas tarefas incidem na reconstrução da unidade envolvendo unidades discretas e contínuas. Estas tarefas de reconstrução da unidade são, de acordo com Ponte e Quaresma (2011), da máxima importância para a compreensão do conceito de fração. As várias tarefas foram elaboradas obedecendo a um crescente grau de dificuldade, em que na resolução de cada uma os alunos deverão aplicar os conhecimentos que adquiriram com a tarefa anterior.

Assim, com a Tarefa 1 pretende-se uma primeira abordagem ao conceito de fração, em que através de material manipulável, os alunos deverão ser capazes de dividir uma maçã ao meio e chegar ao conceito de metade. Posteriormente, em plenário, associar-se-á o termo “metade” ao símbolo  $\frac{1}{2}$ . De seguida, é esperado que os alunos sejam capazes de reconstruir a maçã. A Tarefa 2 pretende que os alunos usem o conhecimento obtido com a tarefa anterior e utilizem corretamente o termo “metade” ou a fração  $\frac{1}{2}$  para responder à questão. É esperado ainda que descubram o termo “quarta-parte” associando-o à fração  $\frac{1}{4}$  para responderem à segunda questão. A Tarefa 3 tem como objetivo repartir 3 pizzas por 4 amigos e depois por 8. Os alunos deverão descobrir que parte da piza cabe a cada um e compararem as frações  $\frac{3}{4}$  e  $\frac{3}{8}$ . Deverão chegar à conclusão que a parte correspondente a  $\frac{3}{4}$  é o dobro da parte correspondente a  $\frac{3}{8}$ .

As Tarefas 4 e 5 pressupõem um raciocínio semelhante ao da tarefa anterior, com o objetivo de chegar ao conceito de frações equivalentes, comparando as frações  $\frac{3}{5}$  e  $\frac{6}{10}$  (tarefa 6). Convicta de que os alunos, nesta altura, terão compreendido a partilha equitativa de uma unidade contínua, a Tarefa 7 propõe a partilha equitativa de uma unidade discreta, repartindo 16 apitos por 2 amigos e depois por 4. Os alunos deverão descobrir quantos apitos correspondem a  $\frac{1}{2}$  e a  $\frac{1}{4}$  do total dos apitos. As últimas duas tarefas terão como finalidade a reconstrução da unidade envolvendo unidades discretas e contínuas.

Apresento em anexo, a planificação da sequência de tarefas (anexo I), bem como as nove tarefas que a compõem (anexo II).

A sequência de tarefas implementada, esteve sujeita a alterações ao longo da sua aplicação, podendo ser reajustada em função das produções dos alunos.

### *3.2.3 METODOLOGIA DE TRABALHO*

O trabalho desenvolvido pelos alunos, em sala de aula, é sempre valorizado e posteriormente partilhado com toda a turma, sendo apresentadas e discutidas as diferentes estratégias utilizadas na resolução das tarefas, bem como a sua eficácia.

Em sala de aula, os alunos têm momentos de trabalho autónomo e trabalho de grupo. Quando trabalham em grupo, é privilegiado o trabalho a pares garantindo-me o envolvimento de todos os alunos na tarefa, o que por vezes não acontece com grupos constituídos por mais elementos. Há também a preocupação de diversificar os grupos para que os alunos aprendam a trabalhar com diferentes colegas. Este trabalho a pares permite o desenvolvimento de diversas capacidades como o saber ouvir e respeitar a opinião dos colegas, bem como o saber justificar e argumentar as suas ideias.

Sendo no âmbito do ensino exploratório, esta forma de trabalho a privilegiada, os 16 alunos que compõem a turma na qual insidiu este estudo, foram organizados em 8 grupos de 2 alunos. Optei por fazer grupos de dois alunos pois pretendia que ambos se envolvessem no trabalho, o que poderia não acontecer se os grupos fossem maiores, podendo haver dispersão por parte de alguns alunos. A constituição dos grupos não foi aleatória, foi minha preocupação que houvesse homogeneidade ao nível dos conhecimentos e aproveitamento dos elementos que compõem cada grupo, pelo contrário poderia um dos elementos monopolizar o trabalho e o outro ser um mero assistente. Assim, foram formados 3 grupos (grupos 1, 2 e 5) com um nível de aproveitamento muito bom; o grupo 8 com um bom nível de aproveitamento, 3 grupos com um nível satisfatório, mas muito empenhados (grupos 3, 4 e 6) e o grupo 7 constituído por alunos com um nível pouco satisfatório de aproveitamento e que revelam pouca motivação para a aprendizagem, necessitando de constantes chamadas de atenção para que mantenham a concentração na resolução de qualquer tarefa.

As tarefas foram sempre realizadas no primeiro tempo da manhã, que, em minha opinião, é o horário privilegiado para o ensino da matemática devido ao facto de os alunos estarem mais concentrados e não manifestarem cansaço.

Para a resolução das tarefas que compunham a sequência, foi distribuída, a cada grupo, apenas uma ficha de trabalho para posteriormente elaborarem um único registo, promovendo assim a comunicação e a partilha de ideias e raciocínios. Foi exigido ainda que resolvessem as tarefas a esferográfica para que não pudessem apagar nenhum dos registos efetuados. Foram então distribuídas aos alunos, as fichas de trabalho e material manipulável (representações de maçãs, das pizzas em papel, formas geométricas em cartolina (blocos lógicos)) para que os mesmos pudessem recortar e/ou manipular de forma a facilitar e promover a construção de conhecimento.

Antes da aplicação de cada tarefa, procedi sempre à sua resolução, de forma a antecipar as possíveis resoluções dos alunos. Assim, sentir-me-ia mais confiante e apta a responder a todas as questões que me poderiam ser colocadas e a explorar todo o seu potencial. Esta é uma etapa muito importante, segundo Canavarro (2011), que não deverá ser descurada.

As tarefas foram planificadas para 45 minutos, seguindo-se da sua exploração em plenário. Em todas as aulas foram respeitadas as seguintes etapas:

- i) Apresentação da tarefa – nesta etapa a tarefa era lida em voz alta por dois alunos diferentes e depois explicada por um terceiro. Posteriormente se ainda subsistissem dúvidas, eram esclarecidas por mim. Depois de me certificar que todos tinham entendido o que se pretendia, passava-se à etapa seguinte.
- ii) Resolução da tarefa a pares – cada par resolvia a tarefa enquanto eu circulava pelos grupos para acompanhar o trabalho desenvolvido. Era minha intenção compreender e/ou, quando necessário, conduzir o raciocínio seguido pelos alunos, colocando-lhes questões, ou ainda verificar se estavam seguros na resposta que apresentavam. Ao circular pelos pares também pretendia identificar ideias erróneas que importavam discutir coletivamente e selecionar as estratégias de resolução mais valiosas para posterior apresentação, bem como a ordem pela qual essas produções iriam ser apresentadas à turma.

- iii) Apresentação das estratégias – um elemento de cada grupo selecionado ia ao quadro apresentar a sua estratégia e explicar a forma como pensaram. Eram esclarecidas as dúvidas e corrigidos os erros quando existiam. Os restantes elementos da turma podiam intervir colocando dúvidas/questões que eram respondidas pelo grupo que estava a apresentar.
- iv) Síntese – por fim, com todas as estratégias registadas no quadro, eram comparadas, discutida a sua eficácia e avaliadas as potencialidades de cada uma, retirando heurísticas para abordar futuras tarefas. Era ainda nesta fase que eram introduzidos novos conceitos. Esta discussão foi sempre feita no final de cada tarefa, tendo os alunos, naquele momento, bem presente na sua memória, o trabalho desenvolvido.

### *3.2.4 TÉCNICAS E INSTRUMENTOS DE RECOLHA DE DADOS*

Ao longo da exploração da sequência de tarefas e com o intuito de recolher os dados necessários que me permitiriam posteriormente, responder às questões do estudo, utilizei técnicas e instrumentos de recolha de dados que segundo Latorre (2003), citado por Coutinho (2013), se dividem em três categorias: i) Técnicas baseadas na observação; ii) Técnicas baseadas na conversação e iii) Análise de documentos. Assim, recorrerei à observação participante com notas de campo, registos escritos dos alunos, fotografias e gravação vídeo, possibilitando a triangulação de dados.

Uma vez que este estudo incide em toda a turma coloquei na parte de trás da sala duas câmaras, uma em cada canto de forma a recolher imagens de todos os alunos e respetivas intervenções. Ao circular pelos grupos registava no bloco de notas os diálogos que mantinha com cada par o que veio a ser um auxílio muito importante para a posterior análise dos seus raciocínios. Recorri ainda aos registos fotográficos das estratégias apresentadas no quadro pelos diferentes pares para complementar os dados recolhidos. No final recolhi as fichas de trabalho de todos os pares contendo os registos escritos, as quais foram digitalizadas para posterior análise.

No final de cada sessão elaborei uma síntese escrita dos aspetos mais relevantes de todo o trabalho realizado por cada par, completando as minhas notas de campo, acompanhado de uma reflexão.

### 3.2.5 ANÁLISE DE DADOS

A análise de dados consistiu numa análise de conteúdo onde foram analisadas as produções dos alunos. Para Bardin (2011), citado por Coutinho (2013) a análise de conteúdo “...é um conjunto de técnicas de análise das comunicações” (p.217). Coutinho (2013) refere Krippendorff, 1980; Marshall & Rossman, 1989; Shutt, 1999, que definem análise de conteúdo como sendo “um método para a análise de texto, e utiliza-se na análise de dados de estudos em que os dados tomam a forma de texto dito ou escrito” (p.217).

De acordo com estes pressupostos analisei as produções dos alunos no âmbito das tarefas implementadas, de forma a identificar estratégias utilizadas e dificuldades detetadas. Para isso, as gravações vídeo foram integralmente transcritas e complementadas com os registos das minhas notas de campo e com os registos fotográficos e as digitalizações das fichas de registo de cada par. As notas de campo constituíram uma ferramenta muito importante uma vez, que ao conversarem comigo, por vezes os alunos, apercebiam-se do erro que estavam a cometer riscando o registo que tinham e corrigindo de imediato. Nestas ocasiões as notas de campo tornaram-se cruciais, pois continham os registos iniciais efetuados.

## IV - APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DE RESULTADOS

Neste capítulo apresento os aspetos principais da implementação de uma sequência de tarefas num contexto de ensino exploratório, dando ênfase às dificuldades e estratégias apresentadas pelos alunos durante a sua realização, bem como às ações empreendidas pela professora no decorrer da exploração da referida sequência. Termina com uma síntese das principais dificuldades e estratégias dos alunos e principais ações empreendidas pela professora.

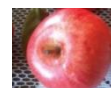
### 4.1 EXPLORAÇÃO DA SEQUÊNCIA DE TAREFAS

Na primeira tarefa (Figura 1), alguns alunos demonstraram dificuldades logo na 1ª fase da aula – Apresentação da tarefa – que se deve ao facto de alguns dos alunos apresentarem ainda uma leitura pouco fluente e manifestarem ainda algumas dificuldades de interpretação de textos ou enunciados. Um aluno depois de ouvir a leitura referiu: “É difícil de perceber...”. Imediatamente reforcei a ideia da necessidade de compreender bem o enunciado para que haja sucesso na realização da tarefa, lendo mais do que uma vez. Pedi então a outro aluno que voltasse a ler. Depois da leitura solicitei a uma aluna que explicasse a tarefa. Perguntei de seguida, a outros dois alunos se concordavam e certifiquei-me que todos compreenderam a tarefa. Esta primeira fase pode demorar algum tempo, no entanto, não pode ser considerada “perda de tempo” porque da eficácia da compreensão da tarefa, pode depender o sucesso da mesma.

#### **TAREFA 1**

1.1 No dia 28 de fevereiro participámos no desfile de Carnaval. Como ia haver lanche partilhado, a Francisca pediu à mãe para fazerem duas tartes de maçã. A mãe pediu-lhe que fosse à fruteira buscar 1 maçã e que a dividisse igualmente pelas duas tartes.

Que parte da maçã foi necessária para cada tarte?



Descreve o processo que utilizaste para responder à questão. Podes fazê-lo utilizando palavras, desenhos ou cálculos.

1.2 Se em vez de duas tartes tivessem feito quatro, quantas maçãs seriam necessárias?

Figura 1 – Tarefa 1

Na 2<sup>a</sup> fase da aula – Realização da tarefa - fui circulando pelos diferentes grupos para tentar compreender o raciocínio dos alunos e se o mesmo estava de acordo com os seus registos. Verifiquei que todos os alunos recorreram a material que disponibilizei (imagens de maçãs e tesouras), bem como ao desenho das mesmas. Porém alguns alunos esqueciam-se de responder à pergunta e/ou apresentavam dificuldades em identificarem a parte da maçã necessária para uma tarte, não havendo acordo entre os pares, nomeadamente nos grupos 1 e 6. Assim, tive necessidade de intervir, colocando algumas questões, para clarificar e orientar o seu raciocínio para o que realmente era pedido.

Prof. – Então falta a resposta. Que parte da maçã foi necessária para cada tarte?

T – Cada tarte levou uma e meia.

R – Não, é só meia...

Prof. – Quantas metades tem uma maçã?

T e R – Duas...

Prof. – Então cada tarte levou...

T e R – Metade.

Depois desta intervenção o grupo 1 registou a resposta correta (Figura 2).

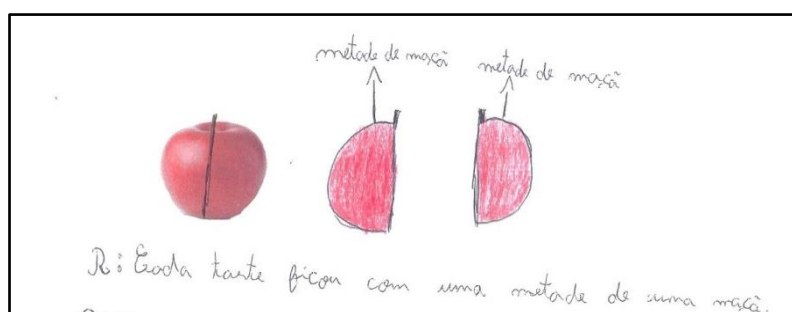


Figura 2: Produção do grupo 1

O grupo 6 apresentava alguma dificuldade na utilização da terminologia correta, afirmando que quando partiram a maçã ao meio ficaram com duas maçãs.

Prof. – Então, o que é que têm aqui representado?

I- São duas maçãs, dá para duas tartes.

Prof. - Isso são duas maçãs?

I - Sim, parti ao meio.

Prof. – Então e quando partes uma maçã ao meio ficas com duas maçãs?

B – Não, são duas metades.

Prof. – Então, vamos voltar a ler a pergunta.

(a aluna I leu novamente a pergunta)

B – São duas metades.

Prof. - Para cada tarte?

I – Era uma maçã e cortamos para fazer metade.  
 B - Esta metade vai para uma tarte e a outra vai para a segunda.  
 Prof. – Então cada tarte fica com...  
 I e B- Metade.

Depois desta intervenção o grupo corrigiu a sua resposta (Figura 3).

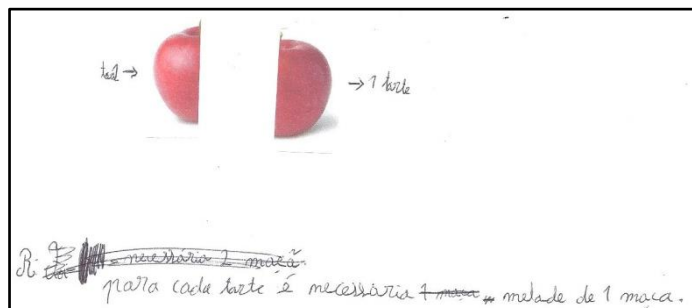


Figura 3: Produção do grupo 6

O grupo 8 apresentou uma estratégia diferente dos restantes grupos, igualando cada metade de maçã à representação de uma tarte (Figura 4).

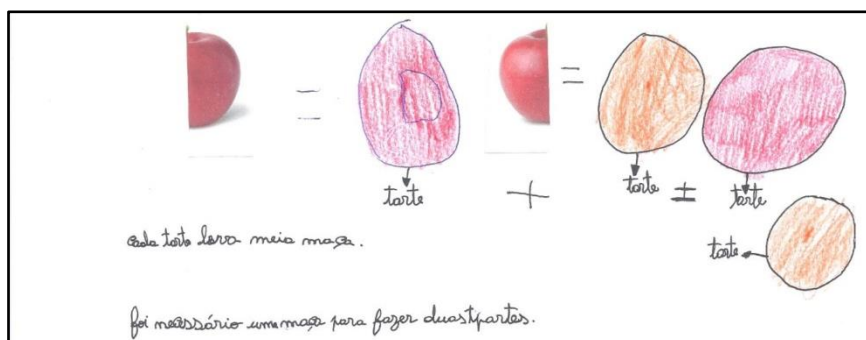


Figura 4: Produção do grupo 8

Deste modo, todos os grupos responderam corretamente à primeira questão da tarefa 1. Na segunda questão “Se em vez de duas tartes tivessem feito quatro, quantas maçãs seriam necessárias?”, alguns grupos cortaram as maçãs ao meio com a tesoura e colaram-nas na folha de registo reconstruindo a unidade com essas metades, chegando à resposta correta, outros dividiram as maçãs com uma linha vertical (Figura 5), explicando que cada maçã dava para duas tartes, logo duas maçãs davam para quatro tartes.

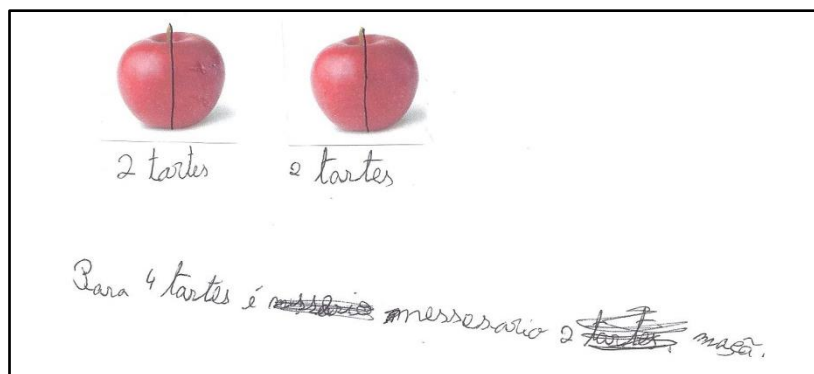


Figura 5: Produção do grupo 4

O grupo 6 continuou a fazer alguma confusão referindo-se às quatro metades como quatro maçãs pelo que tive de voltar a intervir para que o grupo usasse a terminologia correta (Figura 6).

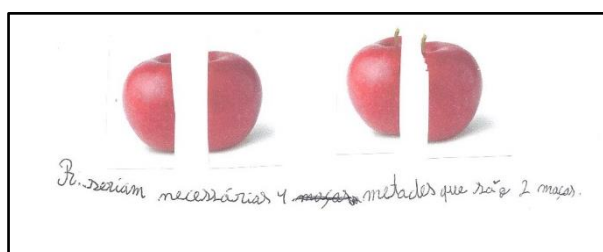


Figura 6: Produção do grupo 6

Tal como na primeira questão, todos os grupos apresentaram produções corretas, apesar do recurso a diferentes representações. O grupo 8 continuou a recorrer à mesma estratégia que tinha recorrido para resolver a primeira questão, ou seja, igualar metade de uma maçã a cada tarte (Figura 7).

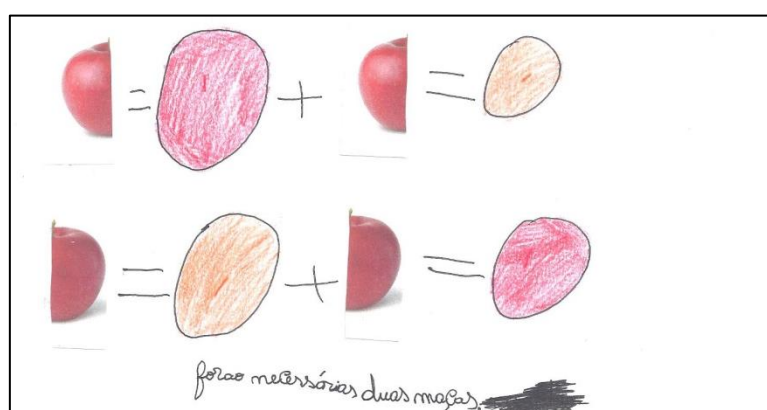


Figura 7: Produção do grupo 8

A próxima produção, justifica a importância que nós professores devemos atribuir à representação uma vez que o grupo 7, que revela dificuldades de expressão escrita,

apresenta uma resposta bastante confusa, no entanto a representação é bem perceptível revelando compreensão da tarefa.

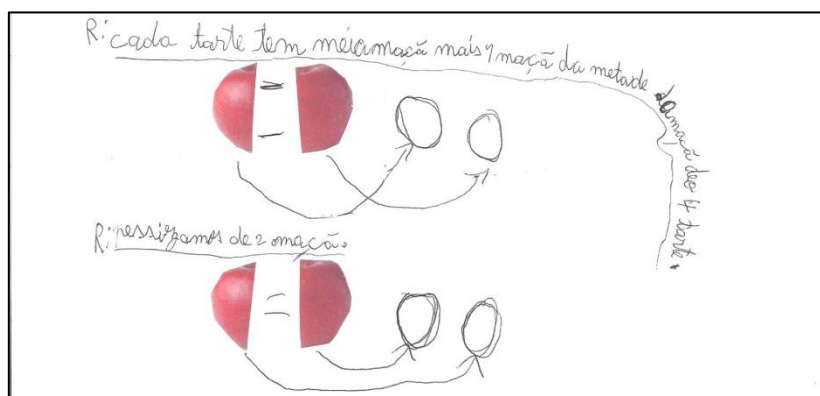


Figura 8: Produção do grupo 7

Na 3.<sup>a</sup> fase da aula – Apresentação das estratégias – foram discutidas em plenário as produções que considerei pertinentes. Assim, para a apresentação e discussão das estratégias de resolução da questão 1, selecionei três grupos: o grupo 1, porque apesar de a sua produção estar explícita e correta, percebi que um dos elementos do grupo estava a fazer alguma confusão com os termos usados, por isso queria certificar-me que conseguiam explicar à turma a sua estratégia; o grupo 3 porque embora a sua representação estivesse correta e muito explícita, a resposta estava incorreta (cada tarte leva duas metades) e o grupo 5 porque na resposta às questões, em vez da palavra “metade”, usaram a palavra “parte”.

Na apresentação aos colegas, o aluno T do grupo 1, teve alguma dificuldade em explicar a produção do grupo.

T – Era preciso uma metade de uma maçã para fazer duas tartes.

Prof. - Acho que não explicaste muito bem, uma metade dá para duas tartes?

T – Não, é uma parte que é uma metade.

Prof. - Ah, então cada tarte leva...

T – Uma metade de uma maçã.

O elemento do grupo 3 necessitou que eu fosse colocando questões para conseguir explicar a produção do grupo. Apesar de terem uma representação correta, tinham a resposta errada (Figura 9).

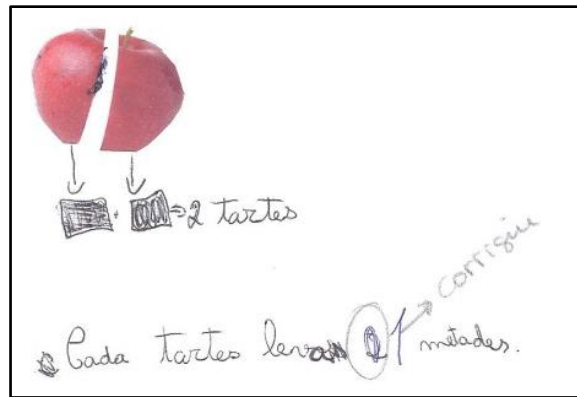


Figura 9: Produção do grupo 3

Prof. – Reparem como elas responderam: “Cada tarte leva 2 metades”. É isso que está aqui representado?

Vários alunos – Não.

Prof. - Reparem o desenho está tão bem feitinho e depois a resposta não está de acordo com o desenho. Temos que ter cuidado porque muitas vezes a resolução está correta e a resposta não está de acordo com a representação.

Por fim o grupo 5 apresentou a sua produção onde recorria ao termo “partes” em vez de “metades” (Figura 10). Durante a discussão em plenário alertei para a necessidade de usarem os termos corretos na resposta.

Prof. – Então reparem, nesta resposta. Eu dizer uma parte de uma maçã é a mesma coisa que dizer metade de uma maçã?

Peguei numa maçã...

Prof. – I, se eu disser que te vou dar uma parte da minha maçã, significa que te dou metade da minha maçã?

(Alguns alunos acenam a cabeça negativamente...)

Prof. - Não? Então?

T – Não.

Prof. - Uma parte tem que ser uma metade?

T – Não, pode não ser, porque pode ser só um bocadinho.

(Cortei um bocadinho da maçã.)

Prof. – Se eu cortar este bocadinho da maçã, é metade da maçã?

Vários – Não.

T – Não, mas é uma parte.

Prof. – Exatamente. E se eu cortar a maçã assim (enquanto cortava a maçã em duas partes diferentes) tenho duas partes?

Vários – Sim.

Prof. – Tenho. Uma mais pequena e uma maior. E se eu cortar a maçã assim (cortando a maçã ao meio), tenho duas partes?

Vários – Sim, mas já são iguais.

Prof. - Exatamente, assim tenho duas partes iguais e por isso se chamam metades. Por isso ter uma parte...

T - ...é diferente de ter uma metade.

D – Nesta maçã as duas partes não são iguais... e naquela maçã as duas partes são iguais.

Prof. – Exatamente e quando as duas partes são iguais, cada parte chama-se...

Vários- Metade.

Com esta discussão pretendi que os alunos compreendessem a importância da utilização dos termos corretos em matemática e que a utilização do termo “uma parte” não significa “uma metade”. A partir da participação dos alunos cheguei à conclusão que este objetivo foi conseguido.

Depois da exploração um dos alunos do grupo 5 corrigiu a resposta.

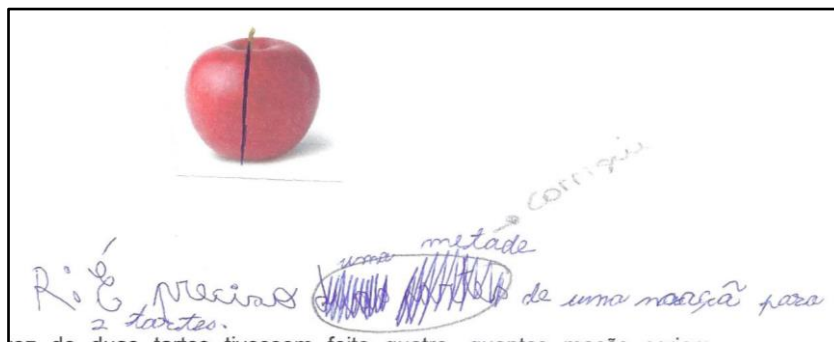


Figura 10: Produção do grupo 5

Seguidamente, associei a palavra metade à representação matemática  $\frac{1}{2}$  - explicando o seu significado.

Para a exploração da segunda questão foram ao quadro os grupos 8, 2, 4 e 7. Os grupos 2 e 8 por apresentarem uma estratégia ímpar, o grupo 4 porque embora a sua produção fosse igual à do grupo 5, este já tinha apresentado na questão anterior e por isso, decidi dar oportunidade a outro grupo. O grupo 7, por apresentar uma representação correta mas uma resposta muito confusa, como referi anteriormente. Todos os grupos responderam acertadamente chegando à conclusão que eram necessárias duas maçãs. Reconstruíram, assim, a unidade a partir das metades, sem dificuldades.

Na 4.<sup>a</sup> fase – Síntese - com todas as estratégias no quadro, foi discutida a eficácia de cada uma e reiterada a importância de se utilizar uma linguagem correta e de se ser rigoroso nas representações.

Depois de concluída a tarefa constatei que os grupos formados trabalharam com empenho e que os grupos constituídos por alunos com mais baixo rendimento

conseguiram resolver a tarefa com sucesso como se pode verificar nas resoluções dos grupos 4, 6 e 7.

No dia seguinte foi proposta aos alunos a tarefa 2 (Figura 11) que consistia na divisão de uma tarte por duas e por quatro pessoas para saber que parte da tarte comeria cada pessoa.


<p><b>TAREFA 2</b></p> <p>2.1 – Depois de feitas as tartes, a Francisca dividiu uma tarte igualmente com a sua mãe. Que parte da tarte comeu cada uma?</p> <p>2.2 – Se tivesse dividido a tarte também com a irmã e com o pai, que parte da tarte comeria cada um? Descreve o processo que utilizaste para responder à questão. Podes fazê-lo utilizando palavras, desenhos ou cálculos.</p>	
--	---

Figura 11 - Tarefa 2

A 1.<sup>a</sup> fase da aula decorreu sem qualquer dificuldade, os alunos pareciam ter compreendido o que se pretendia.

Passou-se então à 2.<sup>a</sup> fase que consistia na realização da tarefa. Mais uma vez fui circulando pelos grupos com o objetivo de tentar compreender as estratégias e as dificuldades dos alunos durante a realização da tarefa. Verifiquei que seis dos grupos desenharam a tarte e dividiram-na ao meio, demonstrando perfeitamente que compreendiam o que estavam a fazer. Apenas um dos grupos, o grupo 6, dividiu a tarte de forma errada (Figura 12).

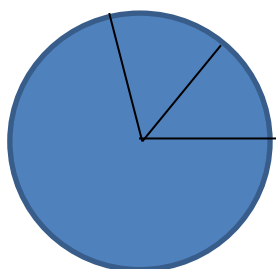


Figura 12: Primeira produção do grupo 6

Quando questionadas sobre que parte da tarte comeria cada uma, responderam, (apontando o dedo para as partes mais pequenas), que a Francisca comeria uma das partes e a mãe a outra. Tive então necessidade de intervir, colocando questões que as levasse a raciocinar e a descobrir que aquela representação não estava correta.

Prof. – Ai é? Então e a parte maior fica para quem?  
 (Ficaram em silêncio e dividiram novamente a tarte aleatoriamente, em 9 partes.)  
 Prof. - Então? E agora?  
 I – A Francisca come 5 e a mãe também come 5.  
 Prof. - Ai é? Conta bem as partes em que dividiste a tarte. Achas que dá 5 para cada uma?  
 I - Ah, não dá.  
 B – Ah, professora já percebi, desenhamos outra vez a tarte e a mãe come metade e a Francisca a outra metade.

À terceira tentativa, o grupo conseguiu finalmente resolver a tarefa (Figura 13).

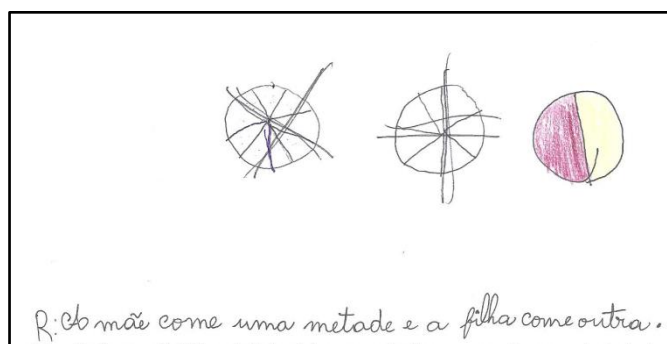


Figura 13: Produção do grupo 6

Na 3.ª fase - apresentação das estratégias - foram seleccionadas as produções dos grupos 3 e 6, uma vez que todas as outras estavam corretas tendo representações e respostas semelhantes.

O grupo 3 dividiu a tarte em quatro partes (Figura 14) respondendo que cada uma comerá duas fatias, apesar de aquando da exploração da tarefa 1 se ter explorado a questão dos termos “fatia” e “parte” não significarem partes iguais.

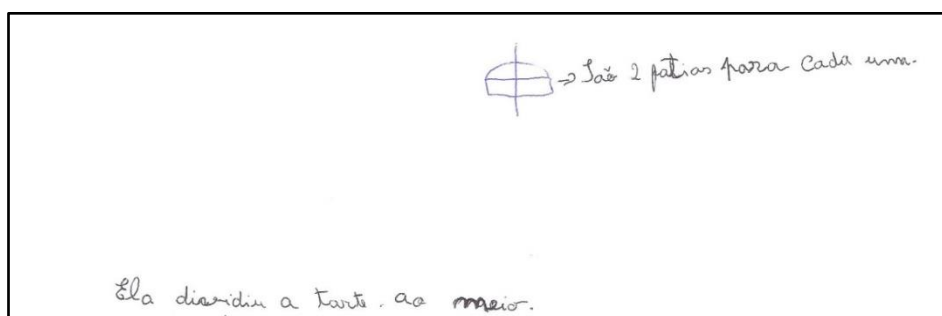


Figura 14: Produção do grupo 3

No quadro, um dos alunos deste grupo, desenhou no quadro a tarte dividida em 4 partes iguais, no entanto, quando lhe pedi que explicasse o raciocínio do seu grupo, respondeu:

D – Dividimos a tarte em duas metades e deu para as duas.

Prof. – Dividiram a tarte em duas metades? A tarte está dividida em duas metades?

(Acenou a cabeça afirmando que sim.)

Prof. – E essa tarte aí ao lado, da tua colega como é que está dividida?

D – Está dividida em duas metades.

Prof. - Então e a tua?

D – Está dividida ao meio.

Percebi que para este aluno “dividir em metades” era diferente de “dividir ao meio”. Decidi colocar esta questão à turma para tentar compreender se os restantes alunos também partilhavam esta ideia.

Prof. - Então dividir ao meio é diferente de dividir em metades?

D - Sim.

Prof. – Turma, o que é que vocês acham?

B - Dividir em várias metades é diferente que dividir só numa.

Prof. - Ouviram o vosso colega, o que acham disto? Eu aqui tenho a tarte dividida em...

Vários – Duas metades

Prof. – Sim duas metades, chamamos metades quando dividimos a unidade em duas...

Vários – Partes iguais

Prof. – E aqui também tenho a tarte dividida em metades?

B – Está dividida em 4 partes iguais.

Prof. - Sim e posso chamar a cada uma destas partes metade?

(Vários alunos acenaram a cabeça no sentido negativo.)

B – Não porque são muito pequenas.

Prof. – Então e se eu desenhar esta tarte maior (desenhando ao lado uma tarte maior e dividindo-a em 4 partes) já tenho partes maiores, são metades?

Vários – Não.

Prof. - Ah, então não é essa a justificação. Porque é que eu não lhes posso chamar metades?

G – Porque quando dividimos em metades só podem ser duas iguais.

Prof. - Pois é, eu só posso chamar metades quando a unidade está dividida em duas partes iguais e esta tarte está dividida em...

Vários – Quatro partes.

Prof. - Então o que é dividir em metades?

La – É dividir em duas partes iguais.

Professora – E dividir ao meio?

Le – É dividir também em duas partes iguais.

Prof. - Então dividir ao meio é diferente de dividir em metades?

Vários – Não, é igual.

Prof. - Muito bem. Então esta tarte está dividida em...

Vários – 4 partes.

...

Prof. - Reparem na resposta dada: “Cada uma comeu 2 fatias”, esta frase significa que ambas comeram a mesma quantidade?

T – Não, podem não comer, uma fatia pode ser maior e outra mais pequena e assim não comiam a mesma parte.

Este diálogo foi muito importante para eliminar ideias erróneas nos alunos, nomeadamente a ideia de que ter uma unidade dividida ao meio é diferente de ter uma unidade dividida em metades.

Propositadamente, não introduzi nesta altura o termo “um quarto”, porque poderia implicar a explicação dos alunos na próxima questão, alterando o que tinham respondido.

A aluna do grupo 6 representou e explicou corretamente no quadro a estratégia usada na resolução da tarefa, tendo dividido a tarte em duas partes iguais e respondido “*A mãe come uma metade e a filha como a outra*”.

Relativamente à segunda questão desta tarefa foram seleccionados os grupos 7, 5, 4 e 1 para apresentarem as suas produções por apresentarem respostas que promoveriam discussão em plenário. O grupo 1 foi o último a apresentar porque além de ter a resolução correta, utilizou a nomenclatura “um quarto” que ainda não tinha sido abordada em sala de aula. O elemento do grupo 7 explicou que dividiu a tarte ao meio, ficando metade para a Francisca e a outra metade para a mãe, depois a mãe e a Francisca partiram as suas metades ao meio para dar ao pai e à irmã (Figura 15) e que cada um tinha comido meia metade. Estas alunas demonstraram que embora tivessem alguma dificuldade em usar os termos adequados, não conseguindo chegar à noção de quarta parte, perceberam e representaram corretamente a resolução da tarefa.

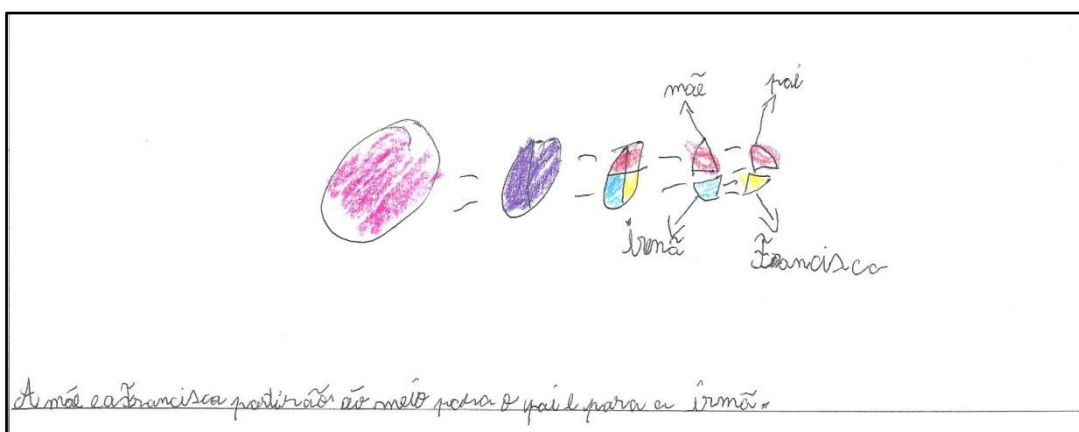


Figura 15: Produção do grupo 7

Reforcei o facto de ser muito positivo o facto de se ser rigoroso na representação efetuada para que todos entendam o raciocínio usado. O grupo 5 representou

corretamente a tarte dividida em 4 partes iguais, escrevendo também, o nome de cada elemento da família em cada uma das partes (Figura 16). No entanto, quando o elemento do grupo leu a resposta dada “*Cada membro da família come uma fatia*”, de imediato alguns alunos disseram que ele não podia responder assim. Mais uma vez reiterei a ideia de que a palavra “fatia” ou “parte” não significam partes iguais. Foi notória a dificuldade por parte de alguns alunos em utilizar a palavra “metade”, continuavam a referir as palavras “fatia” ou “parte”, sendo esta a linguagem que utilizam no seu dia-a-dia.

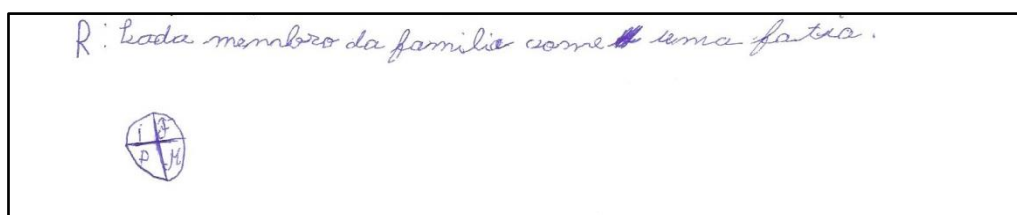


Figura 16: Produção do grupo 5

O grupo 4, embora também tenha representado corretamente a tarte dividida em 4 partes iguais, a resposta estava errada: “*A família tem quatro metades*”. Imediatamente o outro elemento do grupo referiu que não lhes podiam ter chamado metades porque têm 4 partes e não duas. Esta intervenção revela a importância da apresentação das estratégias em plenário, em que, os próprios elementos dos grupos se apercebem dos erros cometidos e os corrigem.

O elemento do grupo 1 apresentou a sua produção, respondendo: “*Cada um comeu um quarto.*” (Figura 17).

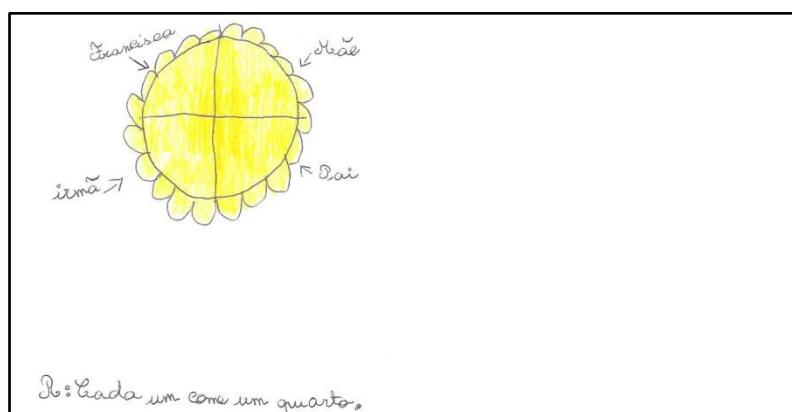


Figura 17: Produção do grupo 1

Embora a resposta estivesse correta, considere essencial ouvir a sua justificação para me certificar que de facto tinham compreendido o que fizeram e, não menos importante, que o sabiam explicar aos colegas.

Prof. – Porque é que vocês chamaram um quarto a cada uma dessas partes?

T – É tipo as horas, nas horas também dividimos o relógio em quatro partes e cada parte é um quarto de hora.

É bem evidente, nesta resposta, a importância das conexões que o aluno consegue estabelecer com outro conteúdo que já tinha sido abordado e que o ajudou nesta resposta.

Prof. – Muito bem, então a resposta correta seria que cada elemento da família come...

Vários – Um quarto

Prof. - Um quarto. Quando temos uma unidade dividida em 4 partes iguais, a cada uma dessas partes chamamos um quarto.

Prof. – Então quantos quartos tem uma unidade?

T – 4

Prof. – Quatro quartos.

B – Professora, então se fossem três fatias era um terço.

Este aluno evidenciou compreensão na correspondência entre a terminologia e o número de partes em que a unidade está dividida.

Seguidamente, lembrei que no dia anterior tinham representado a metade sob a forma de fração e questionei os alunos sobre que fração representaria um quarto. Os alunos, sem dificuldade, responderam que era “*1 por cima e um 4 por baixo*”. Quando questionados sobre o porquê de ser um 4, logo responderam que “*é uma unidade dividida em quatro partes iguais.*”

Prof. – Então cada uma destas partes é  $\frac{1}{4}$ . Então e se forem duas destas partes?

Vários –  $\frac{2}{4}$ .

Prof. – E três?

Vários –  $\frac{3}{4}$ .

Prof. – E quatro?

Vários –  $\frac{4}{4}$ .

Quando questionados sobre como se representava cada uma daquelas frações, responderam corretamente, demonstrando compreensão ao construírem as frações. Foram estabelecidas, em plenário, as relações entre  $\frac{1}{4}$  e  $\frac{1}{2}$  e a unidade.

♦ A parte que corresponde a  $\frac{1}{2}$  é o dobro da parte que corresponde a  $\frac{1}{4}$ .

$$\diamond \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\diamond \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

$$\diamond \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Esta última fase de síntese revelou-se muito importante e significativa em que os alunos se mantiveram muito motivados e participativos chegando a conclusões muito assertivas.

Nesta tarefa todos os alunos desenharam as tartes, partindo-as em partes iguais e distribuindo-as pelos elementos da família. Os alunos revelaram mais facilidade ao nível da representação e manifestaram ainda algumas dificuldades na elaboração da resposta às questões.

A tarefa 3 (Figura 18) tinha um grau de dificuldade um pouco mais elevado.


<p><b>TAREFA 3</b></p> <p>3.1 – Chegou a hora do lanche. A Lara tinha levado 3 pizzas que dividiu igualmente por ela e pelas suas três amigas. Que parte da pizza comeu cada uma? Descreve o processo que utilizaste para responder à questão. Podes fazê-lo utilizando palavras, desenhos ou cálculos.</p> <p>3.2 Cada amiga comeu mais ou menos que uma pizza?</p> <p>3.3 - Se em vez de 4 amigas, fossem 8 e dividissem as três pizzas igualmente que parte comeria cada uma? Descreve o processo que utilizaste para responder à questão. Podes fazê-lo utilizando palavras, desenhos ou cálculos.</p> <p>3.4- Em qual dos grupos anteriores, o de 4 amigos ou o de 8 amigos, cada um comeu mais pizza? Explica o teu raciocínio.</p>	
---	--

Figura 18 - Tarefa 3

Na primeira fase desta tarefa não se verificaram dificuldades, passando de seguida à realização da mesma. Passado algum tempo, constatei que dois dos grupos (grupo 1 e 6) ainda não tinham começado a resolver a tarefa. Ao serem questionados sobre o que se passava, responderam que não sabiam como resolver. Tinham entendido que era para dividir as 3 pizzas por 4 meninas mas não sabiam como fazer essa divisão. Fiquei algo apreensiva porque o grupo 1 é constituído por dois alunos de nível muito bom. Mais tarde, numa segunda abordagem a este grupo, apercebi-me de algum conflito no grupo. Um dos elementos afirmou que tinha uma ideia, mas que o colega não a aceitava. Pedi-lhe que deixasse a colega explicar e de facto a sua estratégia estava correta. Alertei

sobre o facto de ser importante ouvir os colegas e evitar o “amuo”, uma vez que são atitudes que prejudicam o desenvolvimento da tarefa. Foi muito importante nesta fase a minha intervenção para desbloquear esta situação que estava a prejudicar o bom desempenho do grupo. Outros grupos fizeram várias tentativas de resolução, necessitando da minha intervenção/orientação. O grupo 5, imediatamente dividiu as 3 pizzas em quatro partes iguais, no entanto a resposta estava errada: “Cada amiga comeu uma parte igual das 3 pizzas.” Decidi intervir e questionar:

Prof. – Que parte é essa a que se referem?

B – Uma fatia.

Prof. - Não podemos falar em fatias quando nos queremos referir a partes iguais...

B – Ah, um quarto...

M – Cada amiga comeu um quarto das 3 pizzas.

Prof. – Então quanto comeu ao todo?

MB – três quartos.

A minha intervenção nos grupos, colocando algumas questões, não tinha o intuito de lhes dar a resposta correta, mas ajudá-los a desbloquear e a sair do impasse em que muitas vezes mergulhavam e que os podia conduzir à desmotivação. Mais uma vez foi necessário chamar a atenção de alguns grupos para que não utilizassem as palavras “fatia” ou “parte”.

O grupo 6 manifestou muita dificuldade na divisão das pizzas, tal como se pode verificar nas diversas tentativas que efetuaram (Figura 19).

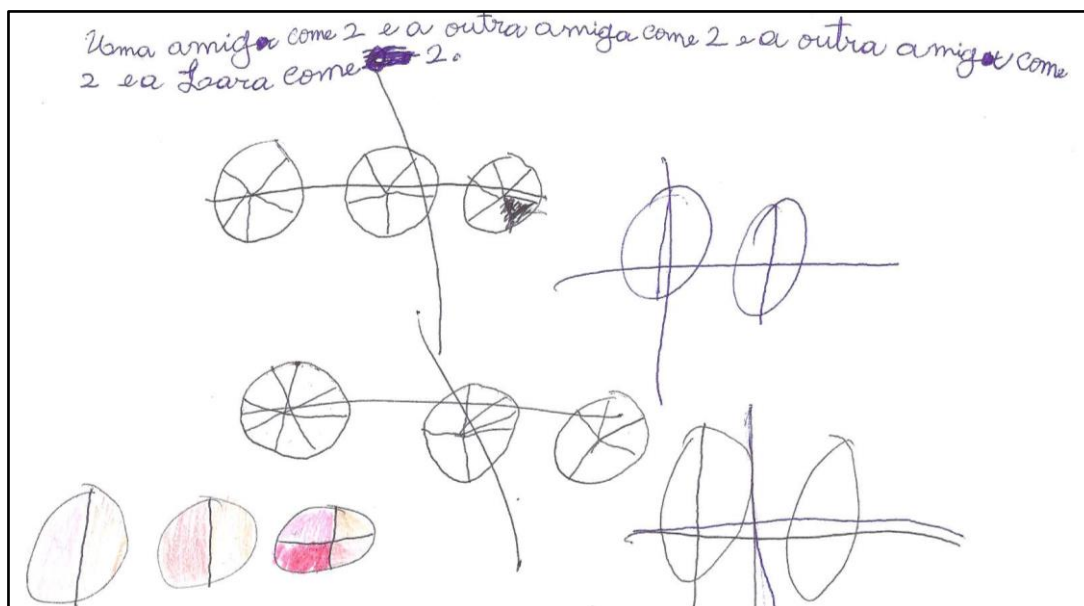


Figura 19: Produção do grupo 6

Este grupo, embora sendo constituído por elementos com um nível satisfatório, têm revelado algumas dificuldades na resolução das tarefas, no entanto são trabalhadoras e esforçam-se por ultrapassar as dificuldades. Mais uma vez foi necessário intervir.

Prof. – Então, como é que podem dividir essas pizzas?

B – Posso partir esta em metade e esta também em metade e já dá metade para cada uma.

Prof. – Sim, e essa piza que falta, como é que a vão dividir?

I – Não sei.

Prof. – Então já têm uma metade para cada amiga, agora têm que dividir a última piza para as quatro amigas.

Sem muita confiança acabaram por dividir a terceira piza em 4 partes iguais, no entanto responderam apenas que cada amiga comia duas.

Na exploração em plenário – 3.<sup>a</sup> Fase - foram ao quadro os grupos 1, 3 e 4. O grupo 1 por ter uma estratégia diferente da de todos os outros grupos. Foi chamada a atenção do grupo 1 devido ao facto de não terem sido muito rigorosos na representação da divisão das pizzas, principalmente na última, em que a parte azul deveria representar  $\frac{1}{4}$  (Figura 20).

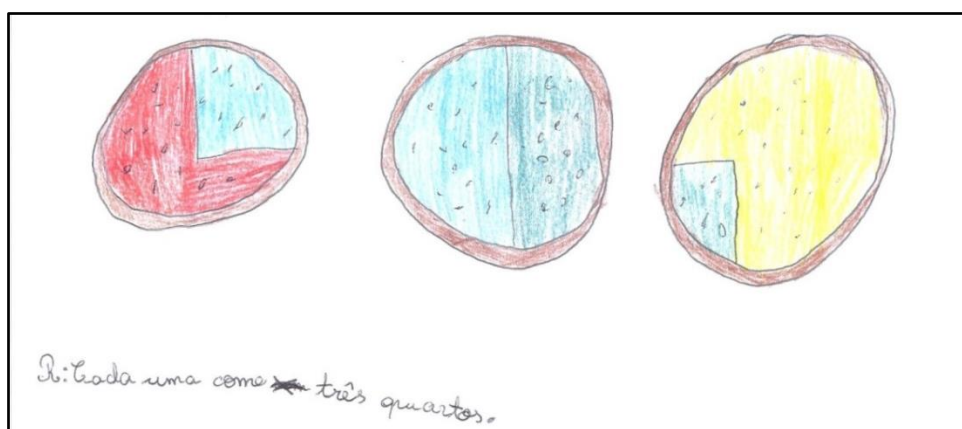


Figura 20: Produção do grupo 1

Os grupos 3 e 4 por terem produções representativas dos restantes grupos mas terem sentido algumas dificuldades aquando da resolução. Pretendia verificar se os mesmos conseguiriam explicar as suas produções aos colegas, o que significaria que tinham compreendido o que fizeram.

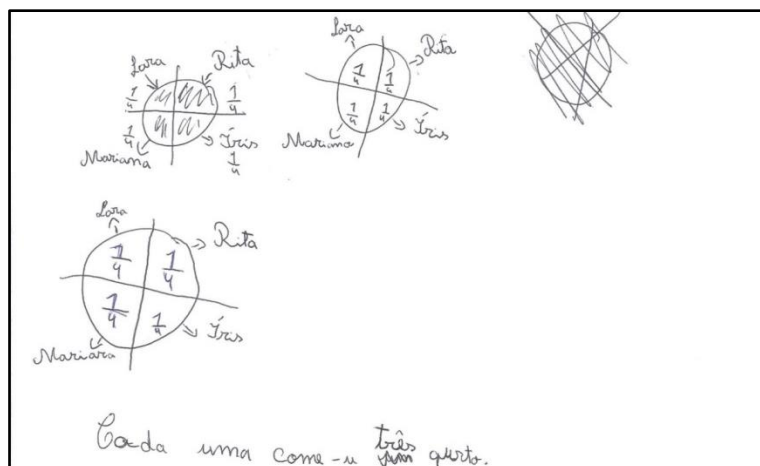


Figura 21: Produção do grupo 3

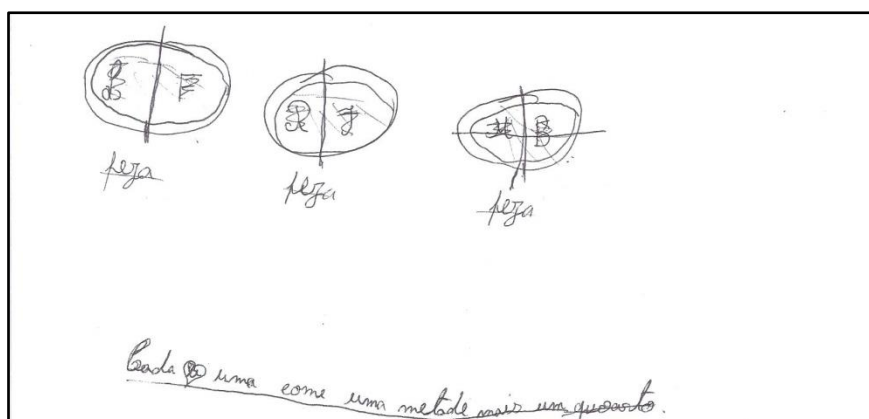


Figura 22: Produção do grupo 4

Perante as respostas dadas por estes grupos “Cada amiga comeu três quartos” e “Cada amiga comeu uma metade mais um quarto”, questionei a turma:

Prof. – Então digam-me lá, estas respostas são diferentes, será que representam a mesma quantidade? Comer  $\frac{3}{4}$  é a mesma coisa que comer  $\frac{1}{2}$  mais  $\frac{1}{4}$  de piza?

Vários – Simmm...

Prof. – Porquê?

B – Porque uma metade é o mesmo que  $\frac{2}{4}$ ...

R – E mais  $\frac{1}{4}$  faz  $\frac{3}{4}$ .

Os alunos demonstraram compreender que  $\frac{1}{2}$  e  $\frac{2}{4}$  representam a mesma quantidade, ou seja, são frações equivalentes.

Relativamente à segunda questão, à exceção de dois grupos que responderam de forma incorreta, (grupos 2 e 7) todos os outros concordaram que cada amiga comeu menos do

que uma piza inteira, no entanto 3 dos grupos (3, 6 e 7) não conseguiram justificar. Surgiram respostas, em dois dos grupos (1 e 4) que evidenciam compreensão:

- “ Cada uma comeu menos do que uma piza porque uma piza tem quatro quartos e cada uma comeu três quartos”.

- “ Cada amiga comeu um quarto a menos do que uma piza inteira”.

O grupo 5 justificou corretamente através de uma representação, embora nao tivesse conseguido justificar por escrito (Figura 23).

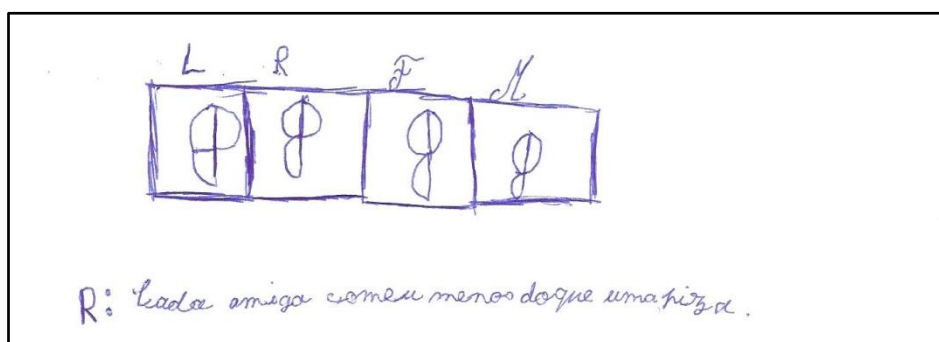


Figura 23: Produção do grupo 5

Por me aperceber que alguns alunos estariam com dúvidas, ainda em plenário, representei a piza no quadro e questionei os alunos:

Prof. – D, que quantidade de piza tinha comido cada amiga?

D – Três quartos.

Prof. – Se eu quiser dividir esta piza em quartos, em quantas partes iguais a divido?

D – 4 partes iguais.

Prof. – Muito bem.

(Dividi, então, a piza em quatro partes iguais.)

Prof. – Quantos quartos tem esta piza?

Vários - Quatro.

Prof. – Quantos quartos comeu cada amiga?

Vários – Três quartos.

(Pintei os três quartos que cada amiga comeu.)

Prof. – Então I, sobrou alguma piza?

I – Sim.

Prof. – Que parte?

I – Um quarto.

Prof. – Então cada amiga comeu mais ou menos que uma piza?

Vários – Menos.

Prof. – Claro, uma piza inteira tem e cada uma apenas comeu 3.

Depois desta explicação não surgiram dúvidas, todos tinham compreendido a tarefa.

Na questão 3.3 “Se em vez de 4 amigas, fossem 8 e dividissem as três pizzas igualmente que parte comeria cada uma?”, os alunos revelaram mais facilidade na resolução, tendo já um raciocínio idêntico ao que usaram na questão 3.1.

Ao circular pelos grupos, observei que alguns tinham dividido as pizzas em 8 partes iguais, mas não sabiam como responder. Resolvi intervir junto do grupo 2:

Prof. – Como é que dividiram a piza?

L – Em 8 partes iguais.

Prof. – Então que parte comeu cada amiga.

M – Três quartos.

Prof. – Três quartos? Se fossem quartos tínhamos que dividir em quantas partes?

(Depois de uns segundos de silêncio...)

L – 4

Prof. – Pois é, mas não estão divididas em 4, estão divididas em quantas?

L e M – Em 8.

Prof. - Então que fração é que representa cada uma destas pequenas partes?

M – 1, o traço de fração e o 8 por baixo.

Prof. – Muito bem e chama-se “um oitavo”. Então quantos oitavos comeram cada uma.

L e M –  $\frac{3}{8}$ .

A dificuldade deste grupo prendia-se com o nome a atribuir àquela fração, uma vez que a representação estava correta.

Os grupos 3 e 4 conseguiram representar corretamente o seu raciocínio, no entanto não conseguiram elaborar a resposta corretamente (Figuras 24 e 25).

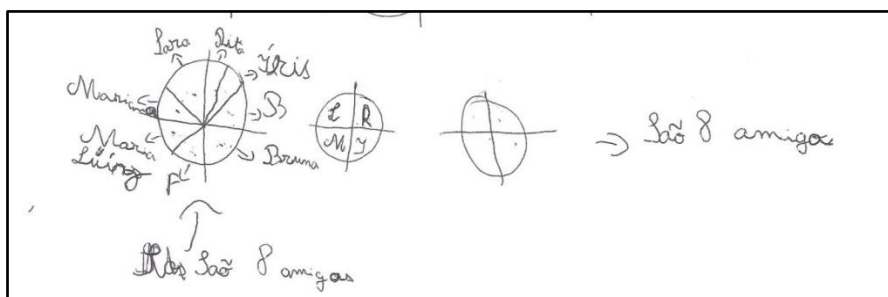


Figura 24: Produção do grupo 3

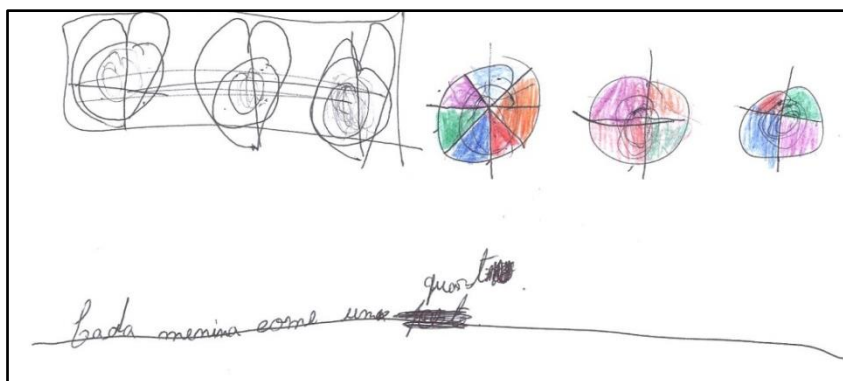


Figura 25: Produção do grupo 4

Mais uma vez, é relevante a dificuldade com que alguns alunos se deparam na elaboração das repostas, no entanto pictoricamente conseguem resolver a tarefa, revelando raciocínio e compreensão.

Nesta questão, ao circular pelos grupos, fui reparando na diversidade das respostas dadas pelos grupos. Os grupos 2, 5 e 6 utilizaram na resposta as frações (terminologia ou simbolização):

- Cada uma come  $\frac{3}{8}$ .
- Cada menina come um quarto mais meio quarto.
- Cada menina come um quarto e meio.
- Cada menina come  $\frac{1}{4}$  mais  $\frac{1}{8}$ .

Na 3.<sup>a</sup> fase, foram ao quadro os grupos 2 e 8 para apresentarem as suas estratégias de resolução. Selecionei o grupo 2 porque apenas este grupo e outro apresentaram a estratégia da divisão das pizzas em 8 partes. Embora pensasse que esta seria a estratégia mais utilizada, isso não aconteceu. A estratégia mais utilizada foi a divisão de duas das pizzas em 4 partes e uma em 8 partes iguais. Selecionei o grupo 8 pela resposta que deu e que seria um bom ponto de partida para promover a discussão, logo promover conhecimento. Além do mais, o sucesso deste grupo depende do envolvimento de um dos elementos, uma vez que é uma criança que, embora detentora de um bom raciocínio, desmotiva com facilidade. Achei que seria um bom momento para congratular em plenário o seu desempenho, o que contribuiria muito para elevar a sua autoestima, logo o seu empenho.

Mais uma vez insisti que quando falamos em metades é porque a unidade está dividida em duas partes iguais, falamos em quartos quando a unidade está dividida em 4 partes iguais, neste caso tínhamos a unidade dividida em oito partes iguais, então teríamos que falar em oitavos.

O grupo 2 apresentou a sua estratégia, revelando facilidade na comunicação. Chegaram à resposta procedendo à adição de frações (Figura 26).

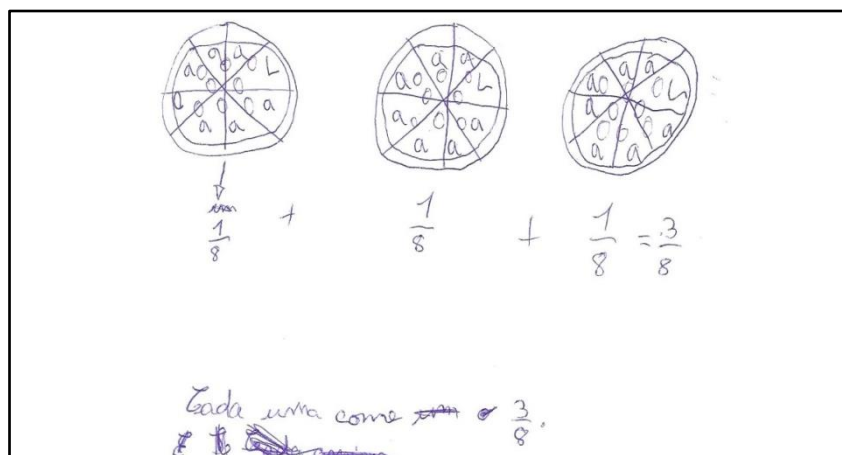


Figura 26: Produção do grupo 2

Um dos elementos do grupo 8 apresentou a sua estratégia.

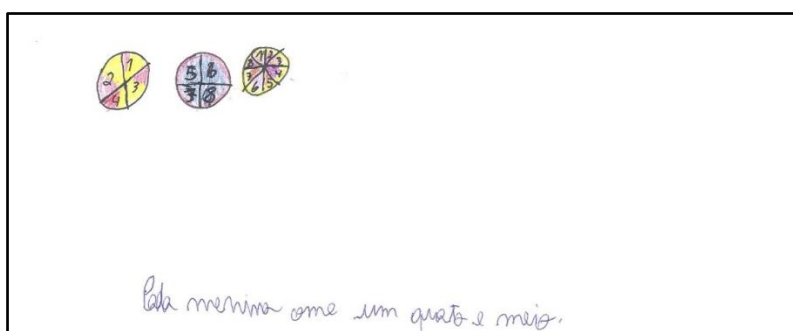


Figura 27: Produção do grupo 8

Este aluno necessitou da minha ajuda para explicar o raciocínio do seu grupo. É uma criança inibida na apresentação, no entanto com muito bom raciocínio. Ao responder que cada amiga comeu um quarto e meio, alguns colegas disseram logo que ele estava errado.

Dirigi-me ao quadro desenhando uma piza e dividindo-a em quatro partes e com uma cor diferente em oitavos. De seguida questionei os alunos:

Prof. – Quantos oitavos cabem num quarto?

L, D e R – Dois.

Prof. - Então esta parte (apontando para  $\frac{1}{8}$ ) é o quê em relação a esta (apontando para  $\frac{1}{4}$ )?

T – É metade.

Os alunos compreenderam que afinal o seu colega tinha razão ao ter respondido que cada amiga comeu um quarto e meio. E que “meio quarto” representava a mesma parte que “um oitavo”. Elogiei o aluno que ficou extremamente feliz por o seu raciocínio estar correto.

Relativamente à última questão “*Em qual dos grupos anteriores, o de 4 amigos ou o de 8 amigos, cada um comeu mais piza?*”, à exceção de um grupo, que elaborou uma resposta sem muito sentido dizendo que quem comeu mais foi o grupo das quatro porque “quantas mais meninas são mais piza se gasta”. Todos os outros afirmaram que foi o grupo das oito uma vez que, para eles,  $\frac{3}{8}$  era maior que  $\frac{3}{4}$ , porque o 8 é maior que o 4. Nesta resposta é bem patente a influência nos números inteiros em alguns alunos, considerando o 4 e o 8 como números isolados.

Aquando da exploração em plenário, depois de eu ter colocado a questão: “*Afinal, em qual dos grupos anteriores, o de 4 amigos ou o de 8 amigos, cada um comeu mais piza?*”, imediatamente um dos alunos referiu:

B - Professora, eu agora já estou a achar que quem comeu mais foi o grupo das quatro por causa daquilo que tu explicaste há pouco na do G (referindo-se à explanação do grupo 8).

Na 4.<sup>a</sup> fase, representei no quadro as partes comidas por cada um dos grupos levando os alunos a reconhecer que quanto mais se divide uma unidade, menores ficam as partes.

Ao longo de toda esta tarefa o grupo 7 respondeu corretamente apenas à primeira questão, evidenciando falta de empenho na sua resolução e brincando constantemente, apesar das constantes chamadas de atenção.

Esta foi uma tarefa demasiado longa. Os alunos demoraram cerca de 80 minutos a resolver as quatro questões desta tarefa. Aquando da exploração já se denotava algum cansaço e falta de concentração por parte de alguns alunos. Decidi então reformular a tarefa seguinte e subdividi-la em três tarefas distintas (tarefa 4, tarefa 5 e tarefa 6).

A tarefa 4 visava a divisão de 3 chocolates por 5 amigas (Figura 28).

**TAREFA 4**

4.1 Na mesa também havia chocolates, a Raquel e quatro das suas amigas quiseram partilhar 3 desses chocolates, igualmente. Que porção de chocolate coube a cada uma das cinco amigas?

Descreve o processo que utilizaste para responder à questão. Podes fazê-lo utilizando palavras, desenhos ou cálculos.

4.2 Cada amiga comeu mais ou menos que um chocolate inteiro.




Figura 28 - Tarefa 4

Mais uma vez não se verificaram dúvidas na 1.<sup>a</sup> fase pelo que os grupos começaram de imediato a resolver a tarefa, passando à 2.<sup>a</sup> fase da aula. Ao circular pelos grupos, nomeadamente pelo grupo 1, perguntei se tinham entendido a tarefa e como estavam a pensar fazer.

R – É igual à outra (referindo-se à tarefa anterior) só que agora são 5 amigas.

A aluna revelou ter compreendido a tarefa pelo que os deixei continuar autonomamente.

Ao passar pelo grupo 6, reparei que já tinham dividido os chocolates mas não sabiam como responder. Tinham respondido que cada amiga comia 5 chocolates.

Prof. – Cada amiga come que parte?

B – Come 5 chocolates.

Prof. – Cinco chocolates? Quantos chocolates têm aqui para repartir?

I – Três...

Prof. – Então se só tens 3 chocolates para repartir pelas 5 amigas como é que cada uma come 5 chocolates?

B – Oh, não, a Raquel come este bocadinho (referindo-se a  $\frac{1}{5}$ ), mais este e mais este.

Prof. – Então quanto come?

I – Três bocados.

Prof. – Sim, mas não falamos em bocados, que fração representa este bocadinho?

B – Três quartos.

Prof. – Quartos?

B – Oh, quintos.

Mais uma vez este grupo revela compreensão da tarefa, tendo dividido as pizzas corretamente em 5 partes iguais, no entanto, necessitou de ajuda para a elaboração da resposta.



chocolates tinham que estar divididos em 4 partes iguais, mas como estavam divididos em 5, eram quintos.

De seguida o elemento do grupo 8 apresentou a sua estratégia (Figura 30). Este aluno tem alguma dificuldade em se exprimir, por ser de nacionalidade ucraniana, pelo que eu fui ajudando colocando questões.

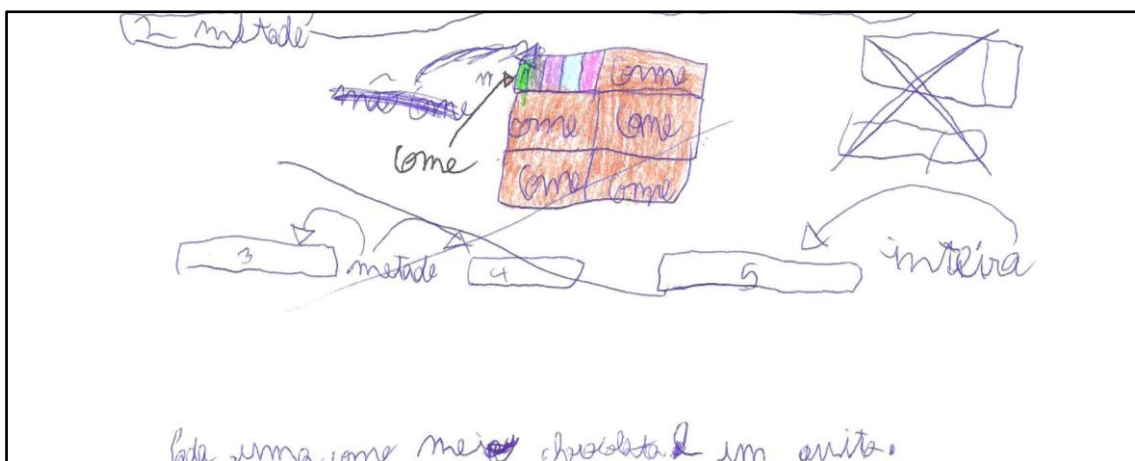


Figura 30: Produção do grupo 8

Prof. – Como é que dividiram os chocolates?

D – Ao meio.

Prof. – Então com quantas metades ficaste?

D – Com seis.

Prof. – Mas as amigas não eram 6?

D – Não eram 5, então sobrou uma metade.

Prof. – E o que fizeram?

D – Dividimos esta metade em 5 partes e demos uma a cada amiga.

Prof. – Então que parte de chocolate comeu cada amiga?

D – Comeu uma metade e mais um quinto.

Prof. – Concordam com o D?

Todos os alunos concordaram à exceção de um.

B – Eu não concordo.

Prof. – Não B, porquê?

B – Porque cada uma recebeu metade e depois a metade que sobrou é que dividiram em 5 partes iguais, não foi o chocolate inteiro, por isso cada bocadinho daqueles não é  $\frac{1}{5}$  é metade de  $\frac{1}{5}$ .

Coloquei então a questão à turma.

Prof. – Turma, perceberam o que o B quis dizer?

Vários alunos – Não.

B – Posso ir ao quadro explicar?

Prof. – Podes....

Depois de o aluno B ter explicado, desenhei o chocolate no quadro.

Prof. – Para eu ter quintos, eu tenho que dividir o chocolate inteiro em quantas partes iguais.

Vários – Em 5.

Prof. – Boa, para eu ter quintos eu tenho que dividir o chocolate inteiro em 5 partes iguais.

Representei essa divisão no quadro (Figura 31).

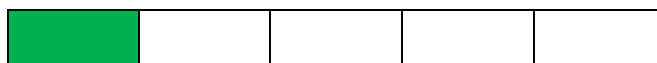


Figura 31 - Representação do chocolate dividido em 5 partes iguais

Prof. – Os vossos colegas dividiram o chocolate inteiro em 5 partes?

Vários - Não.

Prof. – Então?

Vários – Só metade.

Prof. – Eles dividiram esta metade em 5.

Representei novamente, no quadro a divisão referida (Figura 32).



Figura 32 - Representação da metade do chocolate dividida em 5 partes iguais

T – Que é meio quinto porque não é o chocolate inteiro.

Prof. – Este bocadinho é igual a este? (comparando as duas partes pintadas de verde)

T – Não, porque o de cima está todo dividido em 5 e em baixo é só metade que está dividido em 5, por isso o bocadinho de baixo é metade do de cima.

Prof. – Então se esta metade está dividida em 5, o chocolate inteiro fica dividido em quantas partes?

R – 10

Prof. – Muito bem, então se está dividido em 10, cada parte pequenina destas é um...

Alguns alunos – Dez.

L – Décimo.

Prof. – Muito bem, então cada amiga comeu que parte do chocolate, vamos ajudar o D.

Alguns alunos – Uma metade e mais um décimo.

Prof. – Então e uma metade e mais um décimo, quantos décimos são?

Vários – Seis décimos.

Prof. – Muito bem, todos percebem porquê?

Os alunos referiram que se uma metade tinha  $\frac{5}{10}$ ,  $\frac{5}{10}$  mais  $\frac{1}{10}$  eram  $\frac{6}{10}$ . Sobrepondo, de seguida as duas representações concluiu-se que  $\frac{3}{5}$  e  $\frac{6}{10}$  representam a mesma parte do chocolate, pelo que são frações equivalentes.

Relativamente à segunda questão alguns grupos ainda revelaram dificuldades na comparação da fração com a unidade, respondendo erradamente. Outros respondem de forma correta, mas não conseguem justificar. Apenas o grupo 5 respondeu que “*cada amiga come menos do que um chocolate porque cada amiga come  $\frac{3}{5}$  e o chocolate inteiro são  $\frac{5}{5}$* ”, revelando compreensão no que estava a fazer. Este é um grupo que se tem destacado pela qualidade das intervenções do aluno B.

Para a 4.<sup>a</sup> fase, representei no quadro o chocolate dividido em 5 partes iguais e pintei  $\frac{3}{5}$  que representa a parte que cada amiga comeu.

Prof. – Então se cada amiga comeu  $\frac{3}{5}$  é mais ou é menos que um chocolate?

Vários – É menos.

B – Se tivessem comido  $\frac{6}{5}$  é que era mais que um chocolate.

Prof. – E se tivessem comido  $\frac{6}{5}$  era um chocolate e mais quanto?

Le – Mais um ...

Prof. – Mais um quê? Mais um chocolate inteiro?

Le – Não, mais um... mais um... quinto.

G – Professora, posso fazer uma pergunta aos meus colegas?

Prof. – Podes.

G – E se ela tivesse comido  $\frac{5}{5}$ ?

Le – Oh, sobrava zero.

Os alunos, na generalidade revelaram mais dificuldade na segunda questão do que na primeira, no entanto depois desta exploração no quadro todos consideraram que afinal era fácil.

Na aula seguinte foram aplicadas as tarefas 5 e 6 que eram a continuação da tarefa 4. Como tinha passado o fim de semana decidi começar a aula com uma breve revisão sobre as tarefas já realizadas a fim de relembrar as frações já introduzidas e o seu significado. Relembrámos também a tarefa 4, pois a 5 (Figura 33), como já referi, dava continuidade à anterior.

## TAREFA 5

5.1 O Rodrigo reparou que na mesa ainda havia 6 chocolates. Decidiu ir buscá-los e distribuí-los igualmente por ele e os seus 9 amigos. Que porção de chocolate coube a cada um dos 10 amigos?

Descreve o processo que utilizaste para responder à questão.  
Podes fazê-lo utilizando palavras, desenhos ou cálculos.



5.2 Cada amigo comeu mais que um chocolate ou menos que um chocolate? Explica o teu raciocínio.

Figura 33 - Tarefa 5

Mais uma vez, como é habitual, foi adotado o mesmo procedimento na leitura/explicação da tarefa que iriam realizar. A 1ª fase decorreu assim, sem dificuldades.

Passando à 2.ª fase da aula, imediatamente cinco dos grupos começaram a dividir os chocolates em 10 partes iguais. A maioria dos grupos trabalhou autonomamente. Os grupos 4, 6 e 7 necessitaram de algum apoio na resposta, tal como mostram os diálogos seguintes.

Prof. – Então, o que estão a fazer?

I – Dividimos 10 chocolates.

Prof. – São 10 chocolates?

B – Eu disse-lhe que eram 6!

Prof. – Então, quantos chocolates são afinal?

I e B – 6

Riscaram os 4 que estavam a mais (Figura 34).



Figura 34: Produção do grupo 6

Prof. – E agora?

I – Vamos contar os bocadinhos.

B – Os meninos comem 6.

Prof. – Seis quê?

B –  $\frac{1}{6}$ .

Prof. – O chocolate está dividido em 6 partes?

B –  $\frac{1}{10}$ .

Prof. – Come  $\frac{1}{10}$  em cada um dos chocolates, ao todo come quanto?

B – Seis.

Prof. – Seis quê?

I – Seis décimos.

Tal como referi, também o grupo 7 estava com algumas dificuldades na resposta, apesar de terem já dividido cada chocolate em 10 partes iguais.

Prof. – O que estão a fazer?

B – Desenhámos os 6 chocolates e dividimos com 9 traços para ficar com 10 partes.

Prof. – Então cada amigo come quanto?

B – 6

Prof. – Seis quê?

B – Seis quartos.

Prof. – Então em quantas partes está dividido o chocolate?

R – Em 10.

Prof. – Então não são quartos.

R – São 10.

Prof. – São décimos...

Ao passar pelo grupo 2 reparei que estavam a dividir os chocolates em 5 partes.

Prof. – Então expliquem-me o que estão a fazer. Vejo que dividiram os chocolates em 5 partes iguais, porquê?

M – Dividimos em 5 porque  $5+5$  são 10. Estes dois chocolates dão para os 10 amigos. Cada amigo come  $\frac{1}{5}$  aqui,  $\frac{1}{5}$  aqui e mais  $\frac{1}{5}$  aqui. Come  $\frac{3}{5}$ .

A estratégia mais utilizada, nesta tarefa, foi a divisão das barras de chocolate em dez partes iguais (5 grupos), 2 grupos dividiram cinco chocolates ao meio e o último em 10 partes e apenas um dos grupos dividiu os chocolates em 5 partes iguais. A maioria dos alunos atribuiu letras ou números a cada uma das partes para não se enganarem.

Na 3.<sup>a</sup> fase da aula solicitei a um dos elementos dos grupos 1, 2 e 3, que fossem ao quadro explicar as respetivas produções. A estratégia do grupo 3 é idêntica em 5 grupos, no entanto difere na forma de apresentar a resposta, tendo recorrido à soma das frações (Figura 35). A estratégia do grupo 1 foi também utilizada pelo grupo 8 e a do grupo 2 foi uma estratégia ímpar.

Solicitei então ao elemento do grupo 3 que explicasse a forma como resolveu a tarefa. A aluna explicou sem qualquer dificuldade evidenciando compreensão do trabalho que tinha sido desenvolvido.

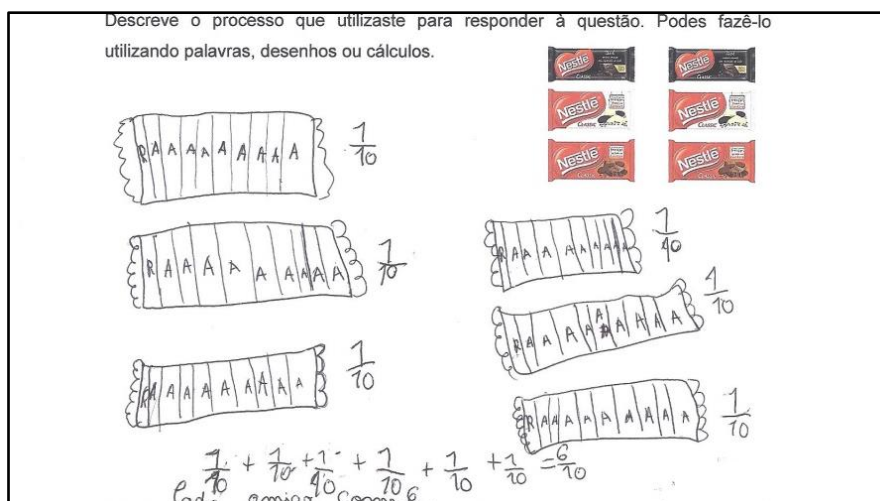


Figura 35: Produção do grupo 3

Seguidamente, foi a vez do elemento do grupo 2 justificar a sua estratégia. A aluna representou no quadro a divisão dos chocolates em 5 partes iguais (Figura 36).

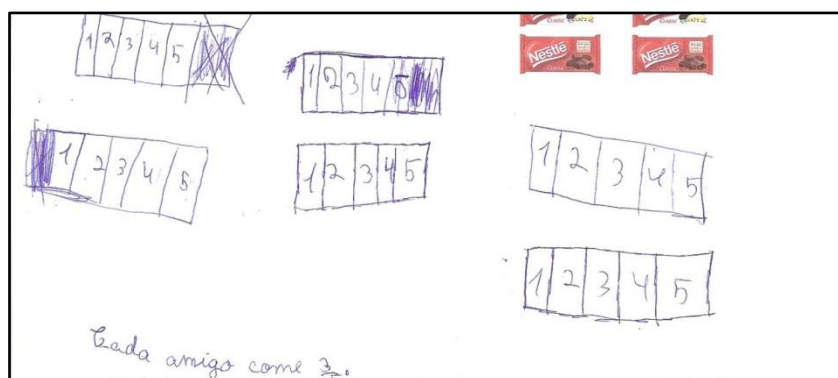


Figura 36: Produção do grupo 2

Questionei a aluna sobre o facto de ter os números repetidos até ao 5, fazendo parecer que eram cinco alunos. Logo um aluno respondeu:

T – Eu punha os números 1, 2, 3, 4, 5, 6 até ao 10.

Corrigi no quadro para ficar mais perceptível. A aluna continuou a sua explicação afirmando que cada aluno comeria  $\frac{3}{5}$  dos chocolates.

Por fim a aluna do grupo 1 apresentou a sua estratégia (Figura 37), justificando a forma como pensaram.

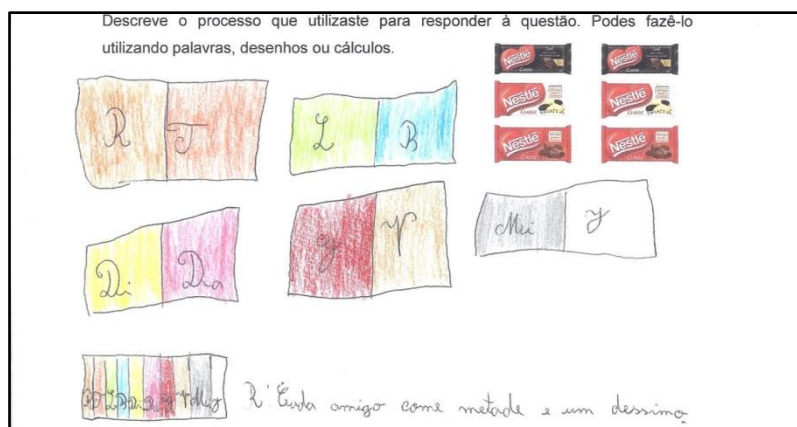


Figura 37: Produção do grupo 1

R – Dividimos estes 5 chocolates ao meio porque vimos logo que dava para os 10 amigos. Demos metade a cada um. Depois como sobrou um chocolate, dividimo-lo em 10 partes iguais e demos uma a cada um.

Prof – Então cada um comeu...

R – Comeu metade e mais  $\frac{1}{10}$ .

Em síntese, questionei, os alunos sobre as diferentes respostas que estavam no quadro (Figura 38).

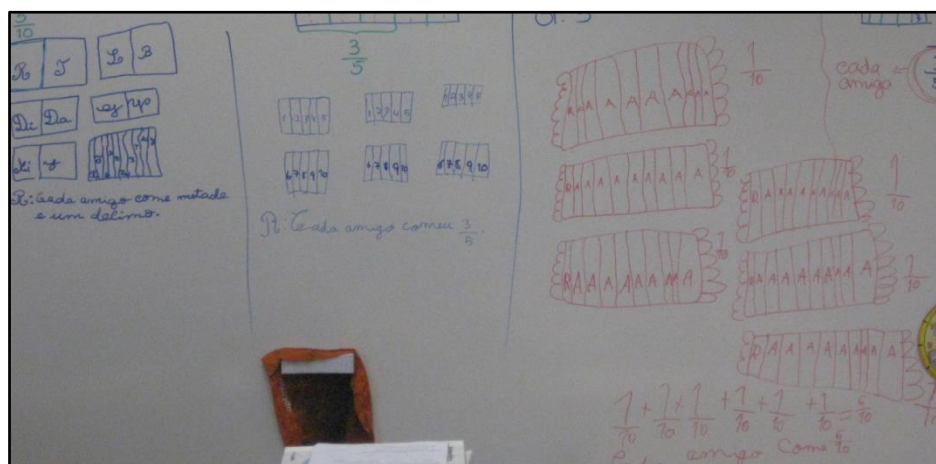


Figura 38: Produções dos grupos 1, 2 e 3

Grupo 1 - “Cada amigo comeu  $\frac{1}{2}$  mais  $\frac{1}{10}$ .”

Grupo 2 - “ Cada amigo comeu  $\frac{3}{5}$  .”

Grupo 3 - “Cada amigo comeu  $\frac{6}{10}$  .”

Prof. - Será que todas estas respostas representam a mesma quantidade?  
Um grande número de alunos – Não.

Prof. – Estão a perceber a minha pergunta? Estes meninos que comeram  $\frac{6}{10}$  comeram a mesma parte de chocolate que comeram estes ( $\frac{3}{5}$ )?

Alguns alunos – Não.

Prof. – Vamos por partes, ter  $\frac{6}{10}$  é a mesma coisa que ter  $\frac{1}{2}$  mais  $\frac{1}{10}$ ?

R – Sim.

Prof. – Porquê?

R – Porque metade é  $\frac{5}{10}$  mais  $\frac{1}{10}$  faz  $\frac{6}{10}$ .

...

Prof. - Então e  $\frac{3}{5}$  será a mesma coisa que  $\frac{6}{10}$ .

R – É parecido.

Desenhei e dividi uma figura em 5 partes iguais e depois de pintar  $\frac{3}{5}$ , perguntei:

Prof. – Como é que posso agora dividir esta figura em 10 partes?

T – Divides os quintos ao meio.

Dividimos então a mesma figura em 10 partes iguais e pintámos  $\frac{6}{10}$ . Os alunos observaram que a parte que representa  $\frac{3}{5}$  é igual à parte que representa  $\frac{6}{10}$ .

B – Professora eu reparei numa coisa.

Prof. – Diz, B.

B – É que o 3 é metade de 6 e o 5 é metade de 10.

Este aluno descobriu a relação entre frações equivalentes. Aproveitei a sua intervenção para justificar que  $\frac{3}{5}$  e  $\frac{6}{10}$  são, por isso, frações equivalentes, logo representam a mesma quantidade.

Relativamente à segunda questão, “*Cada amigo comeu mais que um chocolate ou menos que um chocolate? Explica o teu raciocínio.*”, mais uma vez alguns grupos revelaram dificuldades em justificar a sua resposta, embora todos tenham respondido corretamente. Quatro dos grupos conseguiram justificar através de uma representação, dos quais apresento dois exemplos (Figuras 39 e 40).

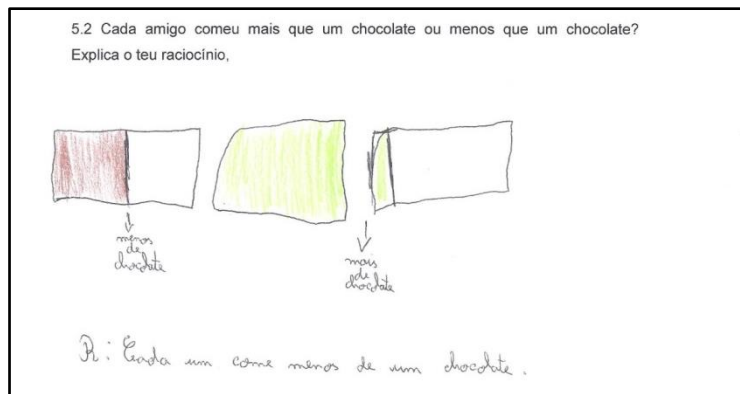


Figura 39: Produção do grupo 1

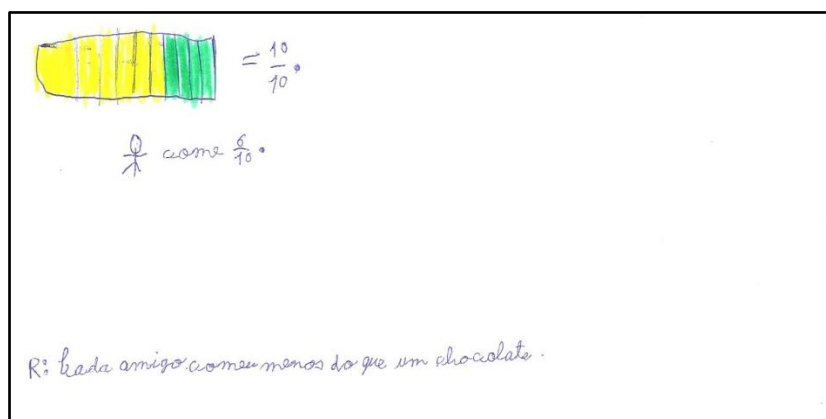


Figura 40: Produção do grupo 5

Outros grupos explicaram que:

- “Cada amigo comeu menos porque comeu  $\frac{6}{10}$  que é menos que  $\frac{10}{10}$ .”
- “Comeu menos porque  $\frac{6}{10}$  é meio chocolate mais  $\frac{1}{10}$ .”

Houve ainda um grupo (grupo 7) que não deu qualquer justificação.

É de salientar o sucesso desta questão, em que a totalidade dos alunos acertou o que não se verificou em questões idênticas nas tarefas anteriores.

Decidi ainda, nesta aula, implementar a tarefa 6 (Figura 41) para que os alunos beneficiassem da exploração anterior podendo ser uma mais-valia para a resolução da mesma.

**TAREFA 6**

Quem comeu mais chocolate, as amigas da tarefa 4 ou os amigos da tarefa 5? Explica o teu raciocínio.

Figura 41 - Tarefa 6

Assim, depois de ter explicado a tarefa, pedi que a resolvessem. Ao contrário do que esperava os alunos manifestaram muitas dificuldades na sua resolução. Tive necessidade de intervir e explicar várias vezes. Os alunos teriam que comparar as frações  $\frac{3}{5}$  e  $\frac{6}{10}$  e dizer em qual dos grupos cada amigo comeu mais. Apenas três grupos conseguiram ser assertivos (Figuras 42, 43 e 44).

Os elementos do grupo 2 fizeram a representação e afirmaram que “Comeram igual porque  $\frac{1}{5} = \frac{1}{10} + \frac{1}{10}$ ” (Figura 42).

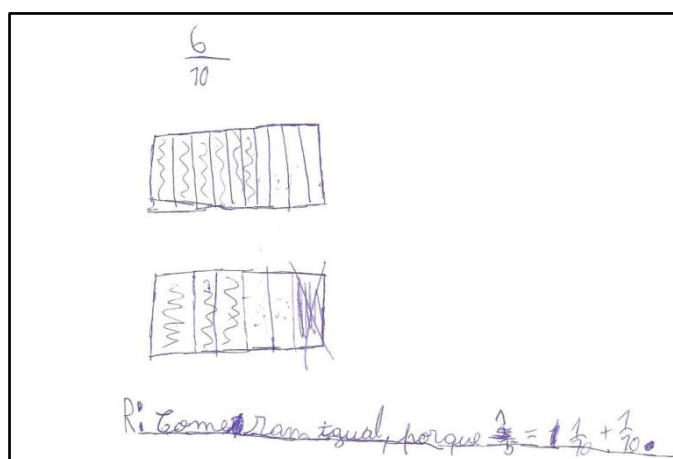


Figura 42: Produção do grupo 2

O grupo 4 também representou e afirmou que vão comer a mesma quantidade (Figura 43).

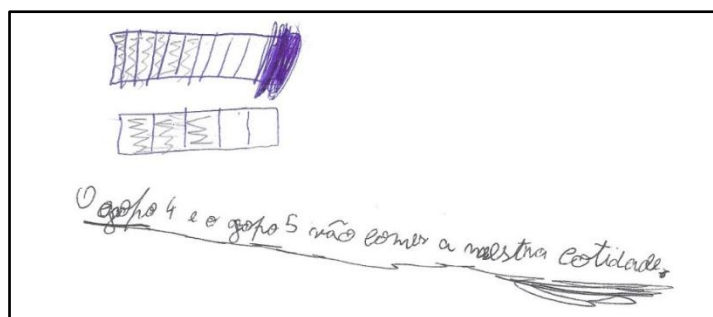


Figura 43: Produção do grupo 4

Os elementos do grupo 5 afirmaram que “Comeram a mesma coisa porque  $\frac{1}{5}$  tem  $\frac{2}{10}$ , então  $\frac{3}{5}$  têm  $\frac{6}{10}$ ” (Figura 44).

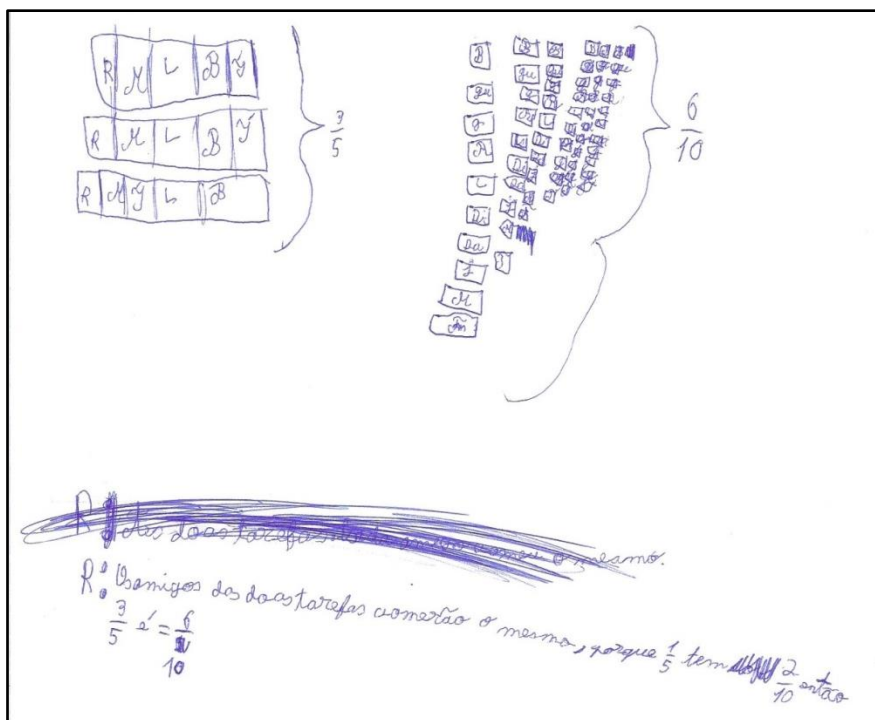


Figura 44: Produção do grupo 5

Tal como já referi, os restantes 5 grupos responderam de forma errada apesar da exploração baseada na comparação de frações que tinha sido feita anteriormente. Três dos grupos referiram que comeram mais os da tarefa 4 enquanto dois dos grupos responderam que comeram mais os da tarefa 5. As representações usadas estavam muito confusas não justificando qualquer das respostas. Na minha opinião parte do insucesso desta questão deveu-se à formulação da questão que poderá não ter sido elucidativa. Como a questão colocada era “Quem comeu mais...”, poderá ter levado os alunos a pensar que um dos grupos teria de facto comido mais e orientado o seu raciocínio nesse sentido.

Na 3.<sup>a</sup> e 4.<sup>a</sup> fases, aquando da exploração em plenário os alunos foram participativos. Chamei a atenção para o facto da fração  $\frac{1}{5}$  representar uma quantidade maior que  $\frac{1}{10}$ , embora o número 10, isoladamente, fosse maior que 5.

Prof. – 10 é o quê em relação ao 5?

B – É o dobro.

Prof. – E a porção que representa  $\frac{1}{10}$  também é o dobro da porção que representa  $\frac{1}{5}$ .

Vários – Não.

B – É metade.

T – É ao contrário.

Prof. – Porque é que  $\frac{1}{10}$  é menor que  $\frac{1}{5}$ ?

M – Porque dividimos mais.

Prof. – Então quanto mais dividimos, mais pequenas ficam as partes.

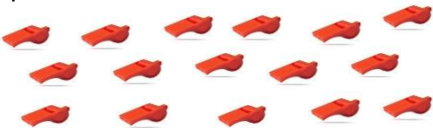
O diálogo continuou com a comparação das frações através da representação no quadro da porção que cada uma delas representa. Todos os alunos evidenciaram compreender que  $\frac{3}{5}$  e  $\frac{6}{10}$  representavam a mesma quantidade, tal como já tinha sido explorado na tarefa 5.

No dia seguinte foi aplicada uma tarefa de partilha equitativa com unidades discretas (Figura 45).

**TAREFA 7**

7.1 – No início do desfile de Carnaval, a professora pediu à Mariana que distribuísse os 16 apitos pelos colegas. A Mariana pediu à Maria Luísa que a ajudasse na distribuição dando-lhe metade e ficando com a outra metade para ela.

Com que fração de apitos ficou cada uma? Quantos apitos são?



R: Cada uma ficou com \_\_\_\_\_ dos apitos que são \_\_\_\_\_.

7.2 – E se a Mariana pedisse ajuda à Maria Luísa, ao Gustavo e ao Leo, como poderiam fazer a divisão de forma a ficarem todos com o mesmo número de apitos? Ilustra a divisão em que a Mariana estava a pensar.

R: Cada um ficava com \_\_\_\_\_ dos apitos que são \_\_\_\_\_.

Figura 45 - Tarefa 7

A 1.<sup>a</sup> fase da aula decorreu, mais uma vez, sem dificuldades, tendo a tarefa sido lida e explicada pelos alunos de forma a certificar-me que todos a tinham compreendido perfeitamente.

Na 2.<sup>a</sup> fase, ao percorrer os grupos verifiquei que, tal como eu tinha previsto, estavam a dividir os apitos em dois grupos de 8 apitos cada, no entanto o grupo 5 fez uma divisão diferente – dividiu os apitos em grupos de dois e rodeou-os com duas cores diferentes (Figura 46).

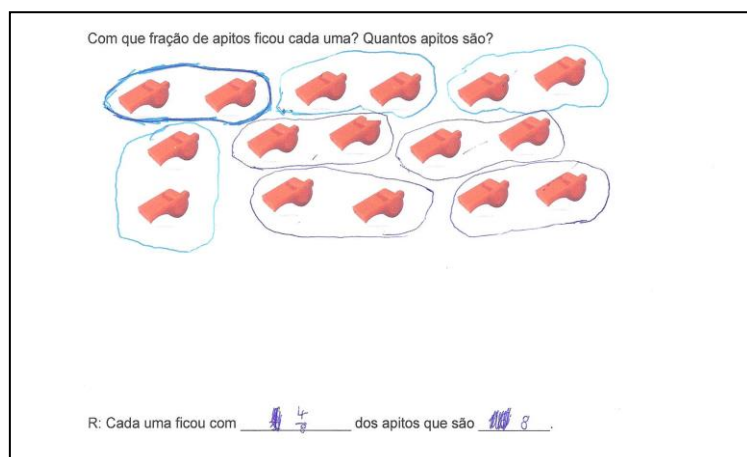


Figura 46: Produção do grupo 5

Prof. – Por que é que dividiram os apitos assim?

B – Fizemos grupos de dois e fomos dando dois a cada uma.

M – Também sabemos que 8 é metade de 16, por isso cada uma vai distribuir 8 apitos.

Prof. – Está bem, mas de acordo com a forma como vocês dividiram, quantos grupos fizeram?

M – 8.

Prof. – E quantos grupos ficaram para cada menina distribuir.

B – 4.

Prof. – Então qual é a fração que corresponde aos apitos que cada uma distribuiu?

B –  $\frac{4}{8}$ .

Os alunos começaram inicialmente por contar os apitos e sabiam, por cálculo mental que cada um ficaria com 8, no entanto, foi minha intenção que a fração correspondesse à representação efetuada.

O grupo 4 referiu que não tinha compreendido o que era para fazer por isso fui-lhes colocando questões às quais elas iam respondendo por forma a orientar o seu raciocínio e assim resolverem a tarefa.

Um outro grupo, o grupo 7, dividiu os apitos em quatro grupos, dois de 5 e dois de 3, sem uma explicação muito plausível disseram que primeiro deram 5 apitos a cada uma, depois como sobraram 6 ainda deu mais 3 a cada uma. Na resposta referiram que cada uma distribuiu metade dos apitos que são 8.

Os grupos 3 e 6 necessitaram de ajuda na descoberta da fração correta, uma vez que em vez de  $\frac{1}{2}$ , escreveram  $\frac{1}{8}$  fazendo alguma confusão com o número de apitos.

Na 3.<sup>a</sup> fase da aula - apresentação das estratégias - foram ao quadro três grupos com produções diferentes. As produções dos grupos 2 e 5 que permitiam posteriormente levar os alunos a comparar as frações  $\frac{1}{2}$  e  $\frac{4}{8}$ , como sendo frações equivalentes. E a estratégia do grupo 7 para explorar o facto de não se poder representar aquela divisão através de uma fração uma vez que as partes não eram iguais. As estratégias dos grupos 5 e 7 foram singulares, todos os restantes grupos adotaram a estratégia igual à do grupo 2.

Começou o grupo 2 por apresentar o seu trabalho, por ser a estratégia mais evidente, ou seja, dividiram os apitos em dois grupos de 8 apitos cada e responderam que cada uma ficou com  $\frac{1}{2}$ . Aquando da apresentação do grupo 5, ao responder que cada menina distribuiu  $\frac{4}{8}$  dos apitos, houve um aluno que disse que não concordava com aquela fração, tendo havido a necessidade de explorar aquela representação:

Prof. – Quantos conjuntinhos é que o B fez?

Alguns alunos – 8.

Prof. – Oito sim. Estão lá representados 8 conjuntos de 2 apitos. E quantos conjuntos são para cada menina. Reparem que o B até teve a preocupação de os rodear de cor diferente.

R – 4.

Prof. – Quatro. Muito bem. Cada menina fica com 4 conjuntos. E a totalidade dos apitos estão divididos em quantos conjuntos?

Alguns alunos – 8.

Prof. – Então o número que colocamos por baixo do traço de fração indica-nos o quê?

R – O número de conjuntos.

Prof. – Muito bem, então cada menina fica com 4 conjuntos dos...

Alguns alunos – 8.

Prof. – Então aquela fração,  $\frac{4}{8}$  está correta ou não?

Todos – Sim.

Por fim foi a vez do grupo 7 apresentar a sua estratégia de resolução (Figura 47).

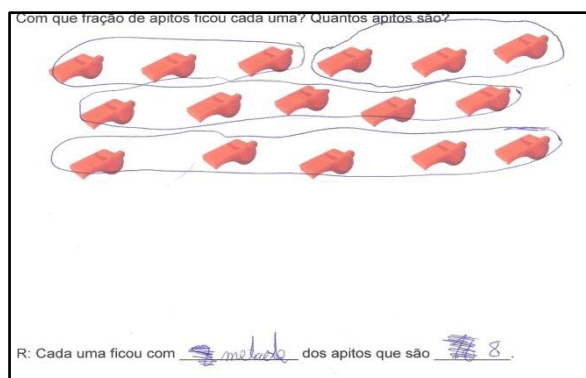


Figura 47: Produção do grupo 7

Este grupo não conseguiu explicar o porquê daquela divisão, justificando-se apenas pela forma como os apitos estão dispostos. Considerarei, no entanto, pertinente explorar a questão da fração ter que estar de acordo com a representação efetuada.

Prof. – Esta representação representa a metade?

Todos – Não.

Prof. – Não. Porquê?

M – Porque para ter metades tinhamos que ter só dois grupos, como fez o L.

Prof. – Então se eu perguntar qual é a fração que representa este pequeno grupo (apontando para um grupo de 3 apitos)?

...

Prof. – Posso dizer que cada um destes grupos representa  $\frac{1}{4}$ ?

Alguns alunos – Não.

Prof. – Porquê?

R – Porque os grupos não são iguais, uns têm 5 apitos e outros têm 3.

Prof. – Pois é, o que é que nós já dissemos em relação às frações? É que as frações representam a divisão da unidade em partes iguais e por isso não podemos representar esta divisão através de uma fração.

Relativamente à segunda questão desta tarefa que visava a divisão dos 16 apitos por 4 colegas, todos a resolveram da mesma forma fazendo 4 grupos de 4 apitos e respondendo que cada um distribuía  $\frac{1}{4}$  dos apitos que eram 4. No entanto, esta questão não tinha a imagem dos apitos tendo sido os alunos a representá-los e por isso houve representações diferentes. Enquanto 4 dos grupos tiveram necessidade de desenhar os apitos demorando mais algum tempo, 3 dos grupos desenharam círculos para representar esses apitos e um dos grupos recorreu a um esquema, utilizando apenas números (Figuras 48, 49 e 50). Estas representações são representativas dos estádios de evolução dos alunos.

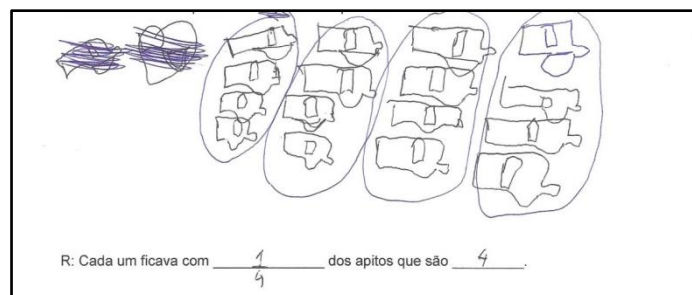


Figura 48: Produção do grupo 4

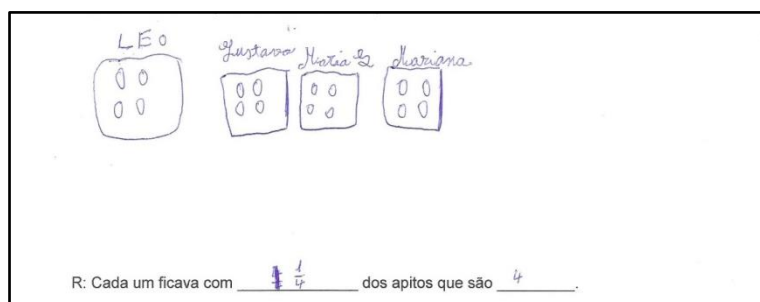


Figura 49: Produção do grupo 5

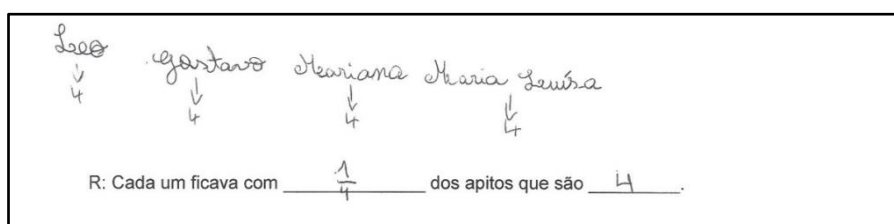


Figura 50: Produção do grupo 1

No final os alunos afirmaram que esta tarefa tinha sido muito fácil.

A tarefa 8 visava a reconstrução da unidade com unidades discretas (Figura 51).

**TAREFA 8**

8.1. Durante o desfile de Carnaval a professora distribuiu serpentinas pelos alunos. Sabendo que 5 rolinhos correspondem a  $\frac{1}{4}$  da embalagem, quantos rolinhos tem a embalagem completa?

Descreve o processo que utilizaste para responder à questão.




Figura 51 - Tarefa 8

Na 1.ª fase o procedimento foi análogo ao das tarefas anteriores.

Na 2.<sup>a</sup> fase, o grupo 6 necessitou de ajuda para resolver a tarefa. Mais uma vez este grupo demonstrou ter algumas dificuldades de interpretação e também falta de confiança mas, por outro lado, muito empenho na realização das tarefas.

Prof. – Se aqui diz  $\frac{1}{4}$ , significa que a embalagem está dividida em quantas partes?

I – 4.

Prof. – Boa, então desenhem... Cada um desses quartos, quantos rolinhos tem?

B – 5 rolinhos.

Prof. – Muito bem então se cada quarto tem 5 rolinhos, quantos rolinhos têm os quatro quartos?

IB – 20 rolinhos.

Prof. – Muito bem, então respondam.

Também o grupo 4 estava com dificuldades na realização da tarefa.

Prof. – O que é que significa este  $\frac{1}{4}$ ?

F – A embalagem dividida em 4 partes.

Prof. – Então desenhem e dividam-na em 4 partes.

A partir daqui concluíram a tarefa autonomamente.

Seis grupos (grupos 1, 2, 3, 4, 6 e 8) resolveram a tarefa corretamente, três deles sem dificuldades, utilizando representações idênticas à do grupo 1 (Figura 52).

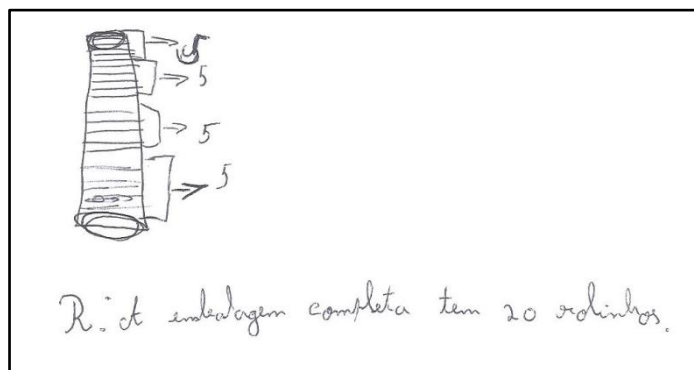


Figura 52: Produção do grupo 1

Os restantes dois grupos (grupos 5 e 7) não conseguiram resolver a tarefa corretamente por terem cometido algumas lacunas como se pode verificar na produção do grupo 5 (Figura 53).

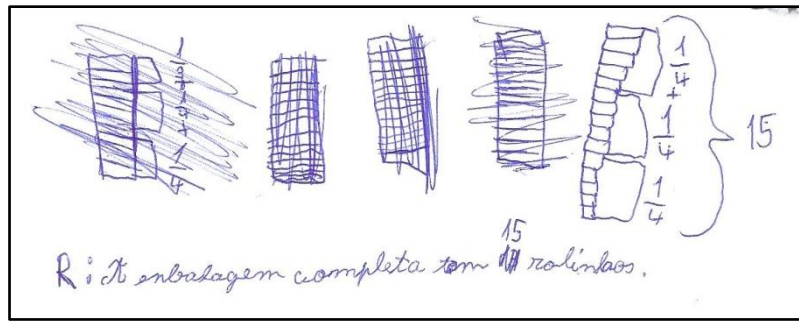


Figura 53: Produção do grupo 5






Esta tarefa revelou-se algo difícil na medida em que, metade dos grupos, necessitaram de ajuda para a compreensão/interpretação da mesma.

Na 3.<sup>a</sup> fase da aula solicitei a um dos elementos do grupo 5 que fosse ao quadro apresentar a sua produção com o intuito do mesmo se aperceber do erro que tinham cometido, pois tinha a certeza de que aquela resposta errada tinha sido fruto de um equívoco. De facto, no quadro, o aluno fez a representação correta, apercebendo-se, de imediato, do seu erro e respondendo corretamente.


No dia seguinte, foi aplicada a tarefa 9 que visava a reconstrução da unidade com unidades contínuas (Figura 54).


**TAREFA 9**


Nos fatos de carnaval foram colados remendos com as seguintes formas geométricas.

Manipula as figuras para poderes investigar e descobrir as relações que existem entre elas. Seguidamente responde às questões, explicando como pensaste.

9.1. Se  for  $\frac{1}{2}$  de uma figura, desenha a figura completa.

9.2. Se  for  $\frac{1}{3}$  de uma figura, desenha a figura completa.

9.3. Se  for  $\frac{1}{2}$ , desenha a figura completa.


9.4. Se  for  $\frac{1}{6}$ , desenha a figura completa.

Figura 54 - Tarefa 9

A 1.<sup>a</sup> fase decorreu sem dificuldades, passando então para a 2.<sup>a</sup> fase. Para a resolução desta tarefa foram distribuídos aos alunos blocos padrão representando as formas geométricas constantes na tarefa, para que os mesmos as pudessem manipular. Esta tarefa revelou-se muito fácil para os alunos. Todos a conseguiram resolver com sucesso e num curto espaço de tempo. Todos os alunos manipularam o material que foi disponibilizado para resolver a tarefa. Construam a figura na mesa com o material e só depois a reproduziam, através do desenho, para a folha de registo. Dois dos grupos (grupos 5 e 8) utilizaram os blocos padrão e através do contorno dos mesmos reproduziam a figura na folha de registo (Figura 55).

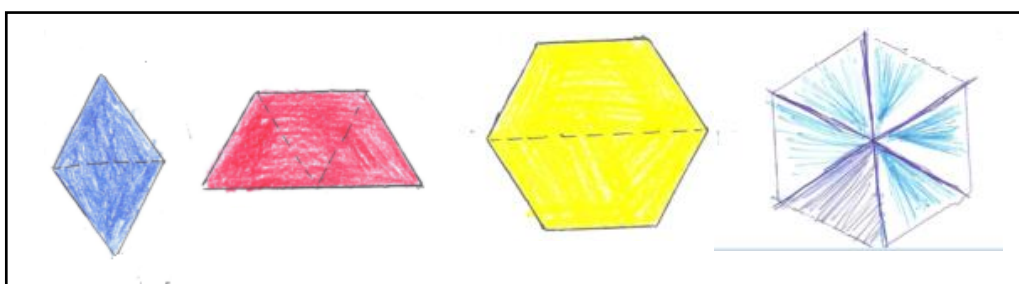


Figura 55: Produções dos grupos 5 e 8

O grupo 3 respondeu acertadamente às questões 9.1 e 9.2, no entanto, nas questões 9.3 e 9.4, embora tenham demonstrado compreensão ao reconstruírem a unidade, não tiveram em atenção que tinham que reconstruir uma das formas que tinham em cima da mesa e não foram rigorosos na representação (Figura 56).

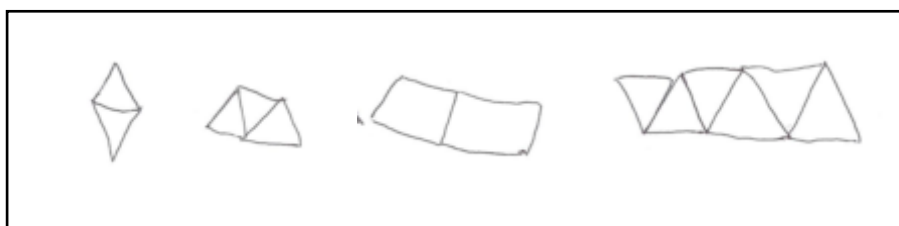


Figura 56: Produção do grupo 3

Os restantes 5 grupos desenharam as figuras livremente, no entanto o grupo 1 foi o único que ao desenhar as formas encontradas não teve necessidade de as dividir no interior, desenhando todas as figuras que as constituíam.

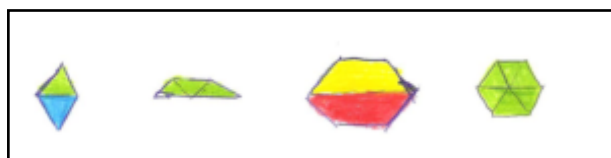


Figura 57: Produção dos grupos 2, 4, 6 e 7

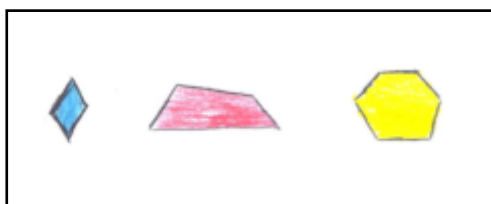


Figura 58: Produção do grupo 1

Na 3.<sup>a</sup> fase da aula foram assim apresentar as suas produções os grupos 3, 5 e 1, exatamente por esta ordem. O grupo 1 foi o primeiro a apresentar a sua produção porque era meu objetivo promover a discussão em torno daquela representação (ver Figura 56) permitindo que os restantes grupos se manifestassem em relação à mesma, se estava ou não correta e justificasse. Por outro lado a discussão permitiu que o próprio grupo compreendesse o erro. O grupo 5 apresentou de seguida a sua produção que era semelhante à maioria dos grupos. O grupo 1 foi o último a apresentar a sua produção por revelar um nível de abstração maior.

Na 4.<sup>a</sup> fase – síntese - os alunos compreenderam e concluíram que se um triângulo é metade de uma figura, então essa figura é constituída por 2 triângulos, por outro lado se um triângulo é um terço da figura, significa que a unidade é composta por três triângulos. No final, ao colocar-lhes a questão: “*Então e se o losango for  $\frac{1}{3}$  de uma figura, qual será a figura completa?*”, todos, sem exceção, construíram em cima da mesa o hexágono com o material que dispunham. O material manipulativo revelou-se muito motivador, levando os alunos a mexer e experimentar, o que contribuiu para o sucesso desta tarefa.

Os alunos revelaram mais facilidade nesta tarefa de reconstrução da unidade com unidades contínuas do que na anterior que envolvia unidades discretas. Quando questionados sobre a dificuldade das tarefas propostas, todos os alunos consideraram esta a mais fácil, afirmando que: “*Agora já sabemos mais sobre esta matéria*”, ou, “*Esta foi fácil porque tínhamos estes materiais*” (referindo-se aos blocos padrão).

#### 4.1.1 PERCURSO DE APRENDIZAGEM DA TURMA NUM CONTEXTO DE ENSINO EXPLORATÓRIO

Sendo esta turma, do 2.º ano de escolaridade, no início desta investigação, alguns alunos ainda apresentavam uma leitura pouco fluente e revelavam dificuldades na interpretação de textos e enunciados. No entanto, apesar disso, foi minha intenção que todos participassem na leitura em voz alta das diferentes tarefas para que não se sentissem inferiorizados. Em cada tarefa, começou sempre por ler um aluno com mais dificuldades seguindo-se um aluno com uma leitura mais fluente. Decorrente desta situação, a primeira dificuldade da turma surgiu com a interpretação do enunciado das primeiras tarefas. Porém, para ultrapassar esta dificuldade foram muito importantes as várias etapas que compõem a fase da apresentação da tarefa, em que a mesma era lida por dois alunos, explicada por um terceiro e ainda esclarecidas, por mim, algumas dúvidas que subsistissem. Essa dificuldade foi também sendo ultrapassada à medida que os alunos se foram familiarizando com a exploração deste tipo de tarefas e progredindo na leitura e interpretação de textos/enunciados.

As primeiras seis tarefas envolviam a partilha equitativa com unidades contínuas, que de acordo com Monteiro e Pinto (2007), deve ser a base para a primeira abordagem às frações. Estas tarefas apresentavam um grau crescente de dificuldade, sendo expectável que os alunos utilizassem os conhecimentos da tarefa anterior para resolver a seguinte. Para a primeira tarefa os grupos recorreram ao material manipulável disponibilizado, recortando as maçãs, colando-as na folha de registo e associando-as a uma representação pictórica. Nas tarefas seguintes todos os grupos utilizaram a representação pictórica que se revelou útil para o raciocínio dos alunos, tal como reconhece Cox (1999), citado por Ponte e Quaresma (2011). Uma das principais dificuldades dos alunos surgiu logo na primeira tarefa nomeadamente na terminologia usada uma vez que alguns alunos representaram pictoricamente as metades da maçã, corretamente, no entanto utilizaram o termo “maçã” para se referir a cada metade. Nestas situações houve necessidade de intervir, colocando questões, nomeadamente “*Então quando partes uma maçã ao meio ficas com duas maçãs?*”, não no sentido de lhes fornecer as respostas mas, de orientar o seu raciocínio. Esta dificuldade foi recorrente nas primeiras tarefas, em que alguns grupos utilizaram os termos “partes” ou “fatias” para se referir a “metade” ou “um quarto”, sendo aquela a linguagem que utilizam no seu dia-a-dia. Em plenário, foi esclarecido com os alunos a importância de

atribuir a palavra “metade” quando dividimos uma unidade em duas partes iguais. Na resolução da questão 2.2 da Tarefa 2, um grupo destacou-se pela positiva respondendo que cada um comia “um quarto”, embora esta noção ainda não tivesse sido abordada em sala de aula. Quando questionada sobre esta resposta, a aluna referiu: *“É como nas horas, nas horas também dividimos o relógio em 4 partes e cada parte é um quarto de hora”*. Está bem patente nesta resposta a conexão feita pela aluna a outro conteúdo matemático que a auxiliou nesta tarefa. Na segunda tarefa foi visível a evolução dos alunos em relação à representação pictórica, uma vez que enquanto na primeira tarefa todos desenharam as maçãs, na segunda tarefa, a maioria dos grupos representou as tartes com círculos, encontrando-se na “modelação”, no que respeita aos processos de matematização considerados por Keijzer (2003), citado por Monteiro e Pinto (2005). Na última fase da aula foi feita a conexão entre a terminologia usada e a simbologia correspondente ( $\frac{1}{2}$  e  $\frac{1}{4}$ ). Um dos alunos, demonstrando compreensão referiu *“Professora, então se em vez de quatro fatias fossem três, cada uma era um terço”*. Estas intervenções refletem a importância deste contexto de ensino exploratório, em que através da discussão em sala de aula, é possível partilharem ideias, fazendo descobertas, logo, promovendo aprendizagens. Na terceira tarefa, que envolvia a divisão de 3 pizzas por 4 amigas, um grupo teve dificuldades em representar a divisão das pizzas. Depois de fazerem a representação, dividindo duas pizzas ao meio e a última em 4 partes, também tiveram dificuldades na resposta dizendo que *“Cada amiga come duas”*. Outros 6 grupos utilizaram duas estratégias de resolução diferentes: divisão das 3 pizzas em quatro partes; divisão de duas pizzas ao meio e uma em quatro partes. Por fim, o último grupo resolveu a tarefa sem necessitar dividir a piza em 4 partes, mas apenas imaginando a parte que corresponde a esses  $\frac{3}{4}$ , utilizando a ação mental “Disembedding” referida por McCloskey e Norton (2009). Os restantes grupos utilizaram a ação mental de “Partitioning” referida pelos mesmos autores. Tendo surgido as respostas *“Cada uma come três quartos”* e *“Cada uma come metade mais um quarto”*, na última fase da aula, em grupo turma, fez-se a analogia entre a simbologia das frações e os termos utilizados e ainda a comparação de frações, chegando à conclusão que  $\frac{1}{2}$  era igual a  $\frac{2}{4}$ . Também na divisão das 3 pizzas por 8 amigas enquanto alguns grupos dividiram as três pizzas em 8 partes iguais, outros dividiram duas pizzas em quatro partes e a terceira em 8. Um dos grupos elaborou a resposta recorrendo à adição de frações *“ $\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$ ”*. Ainda nesta

tarefa, na questão 3.3, surgiram dificuldades na comparação de frações, uma vez que todos os grupos, à exceção de um, ao comparar as frações  $\frac{3}{4}$  e  $\frac{3}{8}$ , afirmavam que  $\frac{3}{8}$  era maior porque o 8 é maior que o 4. Este é um dos mal-entendidos que segundo Monteiro e Pinto (2007) representa a analogia que os alunos fazem aos números inteiros. Na tarefa 4 em que se pretendia que 3 chocolates fossem divididos por 5 amigas, todos os grupos dividiram os 3 chocolates em 5 partes iguais à exceção de um grupo que dividiu os três chocolates ao meio e uma metade do terceiro em 5 partes iguais. Embora esta representação estivesse correta, a resposta não estava porque afirmaram que “*Cada uma come meio chocolate e um quinto*”. Apesar de enquanto circulava pelos grupos, me ter apercebido que a resposta estava incorreta, não os alertei porque considerei que seria um ponto de partida muito importante para a discussão em plenário. Assim, quando o grupo apresentou a sua produção à turma, um aluno referiu que não concordava com aquela resposta, porque “*Só uma metade é que foi dividida em 5, não foi o chocolate todo, por isso aquela partezinha não é  $\frac{1}{5}$  é metade de  $\frac{1}{5}$*  “. Mais uma vez é bem patente a importância do ensino exploratório, em que através da promoção da comunicação em sala de aula, permitiu a este aluno desenvolver o seu raciocínio através da produção elaborada pelos seus colegas e, por outro lado, permitiu que os colegas se apercebessem do erro, corrigindo-o. Na divisão de 6 chocolates por 10 amigas, 5 dos grupos dividiram os chocolates em 10 partes iguais, 2 dos grupos dividiram 5 chocolates ao meio e o último em 10 partes iguais e apenas um dos grupos dividiu os chocolates em 5 partes iguais. Todos os grupos responderam corretamente a esta questão, através da representação pictórica, tendo utilizado na resposta, a linguagem das frações e alguns, a simbologia. Nesta fase os alunos demonstraram facilidade no esquema de Steffe referido por McCloskey e Norton (2009) - “Equi-partitioning”, conseguindo repartir uma unidade em várias partes e identificar uma das partes. Com base nas diferentes respostas apresentadas pelos alunos: “*Cada amigo comeu  $\frac{1}{2}$  mais  $\frac{1}{10}$* ”, “*Cada amigo comeu  $\frac{3}{5}$* ” e “*Cada amigo comeu  $\frac{6}{10}$* ”, procedeu-se, em plenário, à comparação daquelas frações. Um dos alunos interveio acerca da comparação das frações  $\frac{3}{5}$  e  $\frac{6}{10}$ : “*Professora eu reparei numa coisa, é que o 3 é metade de 6 e o 5 é metade de 10*”, provando ter descoberto a relação existente entre as frações equivalentes. Depois desta intervenção orientei a discussão para a noção de frações equivalentes como frações que representam a mesma quantidade. Neste sentido foi notória a evolução de alguns

grupos, que para além de utilizarem a simbologia das frações se situavam já num nível de “generalização” no que respeita aos processos de matematização considerados por Keijzer (2003) citado por Monteiro e Pinto (2005). Também na questão seguinte que perguntava se cada amiga comeu mais ou menos que um chocolate, todos os grupos foram assertivos, conseguindo comparar a fração com a unidade, e referindo que “Cada amigo comeu menos porque comeu  $\frac{6}{10}$  que é menos que  $\frac{10}{10}$ ” ou “Comeu menos porque  $\frac{6}{10}$  é meio chocolate mais  $\frac{1}{10}$ ”. Estes alunos para resolverem esta tarefa utilizaram o que Post et al (1986) citados por Ponte e Quaresma (2011), relativamente às estratégias informais usadas pelos alunos, denominam de “utilização de pontos de referência”.

Na tarefa 6 alguns alunos manifestaram dificuldades na comparação das frações  $\frac{3}{5}$  e  $\frac{6}{10}$ . No entanto um grupo respondeu corretamente afirmando que “Comeram a mesma coisa porque  $\frac{1}{10} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5}$ ” e outro grupo respondeu que “Comeram a mesma quantidade porque  $\frac{1}{5}$  tem  $\frac{2}{10}$  então  $\frac{3}{5}$  têm  $\frac{6}{10}$ ”.

Ao longo destas 6 tarefas foi notório o desenvolvimento dos alunos nomeadamente no que concerne ao uso da linguagem correta. Os termos “fatia” ou “parte”, tão utilizados nas duas primeiras tarefas, deram lugar à linguagem correta das frações. A simbologia correspondente às frações, apreendida em cada tarefa, foi sendo utilizada nas tarefas seguintes.

A tarefa 7 envolvia a partilha equitativa de unidades discretas. Na primeira questão que pretendia que dividissem os 16 apitos por dois amigos, 6 grupos formaram dois conjuntos com 8 apitos cada. Dois destes grupos tiveram dificuldade na fração uma vez que em vez de  $\frac{1}{2}$  escreveram  $\frac{1}{8}$ , manifestando dificuldade em pensar nos 16 objetos como uma unidade conceptual. Esta é uma das razões pela qual Ponte e Quaresma (2011) afirmam que os alunos têm mais dificuldade ao trabalhar com unidades discretas e corroborada neste estudo. Um outro grupo formou 8 conjuntos com 2 apitos cada, necessitando também de ajuda para chegar à fração  $\frac{4}{8}$ . Estas questões foram todas apresentadas e discutidas na 3.<sup>a</sup> e 4.<sup>a</sup> fases da aula, pelo que, na questão seguinte que pretendia que dividissem os 16 apitos por 4 amigos, todos foram assertivos, fazendo conjuntos de 4 apitos e dizendo que cada amigo distribuiu  $\frac{1}{4}$  dos apitos. Também nesta

questão importa salientar que enquanto alguns grupos recorreram ao desenho dos apitos, outros apenas desenharam pequenos círculos para representar os apitos e um outro grupo recorreu apenas ao algarismo 4, parecendo já ter atingido o nível de “Formalização”, no que concerne aos processos de matematização considerados por Keijzer (2003), citado por Monteiro e Pinto (2005).

Relativamente às últimas tarefas em que se pretendia a reconstrução da unidade com unidades discretas e contínuas, os alunos, mais uma vez, manifestaram mais dificuldade nas unidades discretas embora 6 dos grupos tenham resolvido a tarefa corretamente, através da representação pictórica. Na tarefa de reconstrução da unidade com unidades contínuas, todos os grupos foram assertivos. Para esta tarefa foram distribuídos blocos padrão, que, em minha opinião, poderão ter constituído um meio facilitador para o sucesso da mesma. Todos os alunos, mostrando grande motivação, manipularam os blocos em cima das mesas, compondo as figuras solicitadas e só depois as reproduziram na folha de registo. Tal como referem Monteiro e Pinto (2007), o material manipulável, quando utilizado com intenção e objetivos definidos assume uma importância enorme permitindo um percurso do concreto para o abstrato. Nesta tarefa, ao analisar os processos de pensamento destes alunos com base nos esquemas de Steffe, referidos por McCloskey e Norton (2009), constatei que se encontram num nível de “Partitive unit fractional”, uma vez que conseguiram construir o todo, repetindo uma fração unitária.

Este percurso foi realizado no âmbito do ensino exploratório cujas fases que o compõem se revelaram muito importantes, corroborando as ideias de Canavarro (2012). Na primeira fase - apresentação da tarefa - tive a preocupação de que as mesmas fossem interpretadas corretamente, já que daí dependeria a motivação dos alunos, para que se sentissem desafiados, para a sua resolução. Na segunda fase – resolução da tarefa a pares – em que os alunos trabalham autonomamente em pares, foi muito importante o apoio que dei na orientação do seu raciocínio no sentido de nunca desmotivarem e tentarem chegar sempre a uma estratégia válida. Ao circular pela sala fui selecionando as estratégias que considerava relevantes apresentar e discutir em plenário, bem como a ordem da sua apresentação. A 3.<sup>a</sup> fase – apresentação das estratégias – revelou-se tal como refere Ponte (2005) um processo social, onde os alunos interagiram, trocaram informações e se influenciaram mutuamente. É de facto, tal como reconhecido por outros autores como Menezes (2005) ou Guerreiro (2011), uma atividade matemática muito importante, em que estão envolvidos professores e alunos, onde a comunicação

baseada na partilha de ideias permite a interação do aluno com as ideias expostas apropriando-se delas e aprofundando as suas. Para isso revelou-se também crucial o meu papel na preparação desta discussão respeitando aquelas que são as cinco práticas que segundo Canavarro (2011) auxiliam o professor a orquestrar produtivamente as discussões matemáticas: antecipar, monitorizar, selecionar, sequenciar e estabelecer conexões. A última fase do ensino exploratório – Síntese – foi um momento de institucionalização de aprendizagens em que novos conceitos foram apreendidos e aperfeiçoados os já existentes. Este contexto de ensino exploratório revelou-se assim promotor de sucesso no ensino e aprendizagem das frações, onde os alunos através de tarefas valiosas construíram o seu próprio conhecimento.

## V- CONCLUSÕES

Neste capítulo apresento a síntese do estudo, as principais conclusões, bem como as suas limitações e recomendações. Termino com uma reflexão final.

### 5.1 SÍNTESE DO ESTUDO

Este estudo resultou de uma preocupação enquanto professora em promover o sucesso dos alunos numa área que se tem revelado de difícil ensino/aprendizagem. Houve a necessidade de investigar neste âmbito devido à importância que a aprendizagem das frações assume no currículo nacional com o PMEB (ME, 2007), às dificuldades no processo de ensino e aprendizagem, à importância de um contexto de ensino exploratório numa primeira abordagem a um conceito e à escassa investigação que ainda subsiste nesta área.

É bem patente a importância que o estudo dos números racionais assume nas orientações curriculares ao nível nacional e internacional. Com o PMEB (ME, 2007), a abordagem aos números racionais não negativos, nomeadamente a introdução ao estudo das frações surge nos dois primeiros anos de escolaridade do 1.º CEB. Este programa preconiza que os números racionais comecem a ser trabalhados no 1.º e 2.º anos de escolaridade com uma abordagem intuitiva e a partir de situações de partilha equitativa, sendo este estudo aprofundado, no 3.º e 4.º anos, trabalhando outros significados das frações e também os números decimais. Também o NCTM (2007) defende que os alunos do Pré ao 2.º ano já deverão compreender e representar frações comuns e ter alguma experiência no trabalho com frações simples, partindo de problemas significativos e que entre o 3.º e o 5.º ano deverão desenvolver uma compreensão das frações como partes de uma unidade e divisão.

Assim, assumindo, de acordo com a literatura nacional e internacional, o sucesso deste conteúdo uma importância extrema na vida real e académica do aluno, é necessário que o professor se sinta preparado ao nível dos seus conhecimentos didáticos e matemáticos de forma a promover um ensino de qualidade. Neste contexto, o PMEB (ME, 2007), veio também, segundo Pessoa (2010), redefinir os papéis desempenhados pelo aluno e pelo professor valorizando vários modos de trabalho, a natureza das tarefas de cariz exploratório e investigativo assim como a criação de dinâmicas comunicacionais assentes na discussão e reflexão sobre o trabalho desenvolvido.

Neste âmbito, o quadro teórico que alicerça este estudo aborda aspetos relacionados com o ensino e aprendizagem dos números racionais no 1.º CEB, nomeadamente no que concerne às orientações curriculares e às dificuldades no ensino e aprendizagem das frações e também a importância do contexto exploratório no ensino da matemática, referindo o papel do aluno e do professor nas várias fases inerentes a este tipo de ensino.

Assim, com este estudo, com o intuito de compreender o percurso realizado por uma turma de 2.º ano, durante a implementação de uma sequência de tarefas para o ensino e aprendizagem das frações, bem como a importância do papel do professor num contexto de ensino exploratório, procurou-se identificar as estratégias usadas e as dificuldades sentidas pelos alunos na resolução da referida sequência. Procurou-se, ainda, demonstrar a importância do papel do professor na promoção da construção do conhecimento em cada uma das fases do ensino exploratório.

Decorreram do objetivo deste estudo as seguintes questões de investigação:

- a) Que estratégias e dificuldades apresentam os alunos durante a realização da sequência de tarefas?
- b) Que ações empreende o professor na orientação da exploração da referida sequência?

Para este estudo adoptou-se uma metodologia de investigação-ação que de acordo com Zuber-Skerrit (1996) citado por Coutinho (2013), implica planear, observar, actuar e reflectir mais cuidadosamente do que aquilo que se faz no dia-a-dia, por forma a melhorar a própria prática.

Os participantes foram uma turma do 2.º ano de escolaridade, constituída por 16 alunos e da qual a investigadora é também professora.

As tarefas foram pensadas tendo como base um tema do quotidiano dos alunos, permitindo o estabelecimento de conexões com os seus conhecimentos informais, atribuindo assim significado às frações. Antes de cada aplicação as várias tarefas foram resolvidas pela professora, antecipando as possíveis resoluções dos alunos, estando assim apta a explorar todo o potencial de cada tarefa. Os alunos resolveram as tarefas a pares, tendo sido respeitadas, em todas as aulas, as fases do ensino exploratório.

Para analisar as produções dos alunos foram utilizados vários instrumentos de recolha de dados como notas de campo, registos escritos dos alunos, fotografias e gravação vídeo que permitiram a realização de uma análise de conteúdo.

## 5.2 PRINCIPAIS CONCLUSÕES DO ESTUDO

No sentido de compreender o percurso realizado por esta turma durante a implementação de uma sequência de tarefas para o ensino e aprendizagem das frações foram analisadas as suas estratégias e dificuldades. Assim, na realização das tarefas propostas os alunos recorreram ao material manipulável, quando disponibilizado, e à representação pictórica, tendo-se verificado evolução, ao nível da representação, ao longo das tarefas. De acordo com os processos de matematização considerados por Keijzer (2003) citado por Monteiro e Pinto (2005) os grupos passaram pelas fases de “Modelação”, “Simbolização”, “Generalização”, parecendo, ter um grupo chegado à fase de “Formalização”. Relativamente às dificuldades sentidas, estas inicialmente, prenderam-se essencialmente com a interpretação do enunciado da primeira tarefa e com a elaboração da resposta, nomeadamente com a utilização da terminologia correta uma vez que ao longo das primeiras tarefas eram usados os termos “fatia” ou “parte” para se referirem a “metade” ou “um quarto”. Uma outra dificuldade surgiu na equivalência de frações, em que alguns alunos afirmavam, por exemplo que  $\frac{3}{8}$  era maior que  $\frac{3}{4}$  porque o 8 é maior que o 4, verificando-se a analogia aos números inteiros, tal como referem Monteiro e Pinto (2007). Também na tarefa que envolvia a partilha equitativa com unidades discretas, alguns grupos, não conseguiram entender os 16 apitos como uma unidade conceptual, representando a metade dos apitos com a fração  $\frac{1}{8}$ , sendo esta uma dificuldade também identificada por Ponte e Quaresma (2011).

O ensino exploratório revelou-se um contexto facilitador para a superação das dificuldades sentidas pelos alunos e para a promoção de aprendizagens que levaram à construção do próprio conhecimento no âmbito das frações e para o qual todas as fases se mostraram essenciais. A 1.<sup>a</sup> fase da aula – Apresentação da tarefa – foi de extrema importância pois, para o sucesso das tarefas, é fundamental que as mesmas sejam interpretadas corretamente e que os alunos se sintam motivados para a sua resolução. Embora alguns alunos ainda tivessem alguma dificuldade na leitura, decorrente do ano de escolaridade que frequentam, considerei importante que todos os alunos tivessem

oportunidade de ler em voz alta para que não se sentissem excluídos e de alguma forma desmotivados. Neste contexto, solicitei sempre a dois alunos que lessem a tarefa em voz alta, começando pelo que lia com mais dificuldade, para que a última leitura fosse mais fluente. Depois era explicada por um terceiro aluno. De seguida perguntava a mais dois alunos se concordavam com o colega e, se ainda subsistissem dúvidas, eram esclarecidas por mim. Esta foi uma fase algo demorada, mas que se revelou essencial para a motivação dos alunos. A dificuldade que foi sentida essencialmente na primeira tarefa, inerente à interpretação do enunciado, foi sendo ultrapassada nas tarefas seguintes, pelo que me parece que esta estratégia de apresentação das tarefas foi bem-sucedida. Na 2.<sup>a</sup> fase da aula – Resolução da tarefa a pares – observei que ambos os alunos que compunham os pares se empenhavam na realização da tarefa. Em minha opinião, a preocupação que tive em constituir pares de acordo com o seu nível de aproveitamento refletiu-se nesta fase no empenho que manifestaram, dialogando entre si com o intuito de resolver a tarefa e chegar a uma conclusão. Nesta fase da aula o acompanhamento individual feito a cada grupo revelou-se essencial para me aperceber das dificuldades de cada um e, através de um apoio imediato, conseguir que se mantivessem envolvidos na tarefa, participando de forma produtiva, evitando a desmotivação, ações que, em minha opinião, foram fundamentais para o sucesso da tarefa. O referido acompanhamento permitiu-me ainda inteirar das várias estratégias utilizadas e selecionar aquelas que, por conterem ideias erróneas ou promoverem aprendizagem, importava discutir coletivamente, assim como sequenciar a sua apresentação, partindo da mais evidente para a menos evidente, ou respeitando um grau crescente de dificuldade. A 3.<sup>a</sup> fase da aula – Apresentação das estratégias – revelou-se muito enriquecedora. Foi minha preocupação que todos os grupos fossem ao quadro, valorizando o trabalho de cada um. No entanto, de cada vez, ía ao quadro apenas um aluno de cada grupo, para que todos tivessem oportunidade de desenvolver a sua comunicação matemática. Esta minha ação foi decorrente do facto de, durante a 2.<sup>a</sup> fase, ter observado que a maioria dos alunos apresentava bastantes dificuldades na comunicação do raciocínio, não parecendo estar habituados a esta forma de trabalho. Era minha intenção desenvolver esta capacidade nos alunos, uma das capacidades transversais do ensino da matemática. Esta fase revelou-se muito importante, em que a minha ação assumiu um papel preponderante, promovendo o diálogo, colocando questões pertinentes que fomentaram o interesse e o empenho dos alunos. Na 4.<sup>a</sup> fase da aula – síntese – com as diferentes estratégias registadas no quadro, foi o momento de as

comparar, discutir a sua eficácia analisando pontos fortes e fracos de cada uma e retirando heurísticas para abordar futuras tarefas. Este foi o momento da partilha de ideias e raciocínios em que os alunos tomaram consciência das estratégias utilizadas pelos colegas, as compararam com as suas e se aperceberam dos seus erros.

Neste contexto de ensino exploratório, partindo de situações realistas, os alunos foram encorajados a descobrir estratégias para resolver as tarefas apresentadas, discuti-las com o par e depois com toda a turma, permitindo assim, o desenvolvimento das capacidades transversais do ensino da matemática: a resolução de problemas, o raciocínio matemático e a comunicação matemática. Neste sentido, corroborando as ideias de Ponte e Serrazina (2009), o ensino exploratório assumiu uma importância extrema no ensino da matemática, em que os alunos trabalhando através de situações realistas, descobriram diferentes estratégias que discutiram, numa primeira fase, com o seu par, sendo depois sistematizadas numa discussão alargada em grupo-turma, estabelecendo conexões que lhes permitiram o desenvolvimento de diversas capacidades.

### 5.3 LIMITAÇÕES E RECOMENDAÇÕES DO ESTUDO

Este estudo permitiu identificar estratégias e dificuldades que os alunos apresentam na resolução de tarefas para uma primeira abordagem ao estudo das frações. No entanto, foi realizado num contexto muito próprio, apenas numa turma de 2.º ano de escolaridade pelo que os resultados obtidos não poderão ser generalizados. Por outro lado, o tempo em que este decorreu foi também limitativo, uma vez que foi necessário respeitar a calendarização constante na planificação mensal do agrupamento, ao qual pertencia a escola, para a abordagem daquele tópico. Outra limitação prendeu-se com as dificuldades de comunicação sentidas pelos alunos. Nas primeiras tarefas aplicadas, os alunos sentiam muitas dificuldades em comunicar o seu raciocínio, as estratégias de resolução estavam corretas, no entanto não conseguiam explicar o seu raciocínio, parecendo não estar habituados a trabalhar neste contexto de ensino exploratório. Na minha opinião a dificuldade em comunicar o seu próprio raciocínio foi um entrave, o que poderia não ter acontecido se os alunos começassem a trabalhar neste contexto, logo desde os primeiros anos de escolaridade. Ao longo do estudo estes alunos resolveram tarefas utilizando estratégias que estão associadas, muitas vezes a alunos mais velhos, comprovando que faz todo o sentido que o início ao estudo das frações aconteça nos primeiros anos de escolaridade obrigatória. O ensino exploratório revelou ser um

contexto facilitador para o ensino e aprendizagem das frações permitindo que os alunos, apoiados pelo professor construam o seu próprio conhecimento desenvolvendo as capacidades transversais de resolução de problemas, desenvolvimento do raciocínio e da comunicação matemática, pelo que recomendo este contexto para o sucesso do tópico ensino e aprendizagem das frações.

#### 5.4 REFLEXÃO FINAL

Este estudo revelou-se muito importante e muito enriquecedor, quer a nível pessoal, quer a nível profissional. É o culminar de um longo caminho feito de avanços e recuos, por vezes com muitas incertezas, mas cujo balanço final é muito positivo.

A realização deste estudo determinou uma exigente investigação acerca dos números racionais que me permite hoje possuir um conhecimento mais aprofundado e conseqüentemente uma maior segurança em contexto de sala de aula. O facto de o professor ter conhecimento sobre as dificuldades que estão associadas à aprendizagem dos números racionais, nomeadamente às frações – tema deste estudo- e saber como atuar perante essas dificuldades, torna-se um meio facilitador para a promoção de um ensino de qualidade que vá ao encontro das necessidades sentidas pelos alunos. Também o ensino exploratório, em minha opinião, se revelou uma forma facilitadora de promover o ensino de uma matemática, cada vez mais exigente, na medida em que, através de tarefas “valiosas”, promove motivação, empenho, descoberta, partilha, discussão, permitindo, aos alunos, retirar conclusões que culminam em novas aprendizagens. Esta abordagem exploratória exige muito do aluno, uma vez que este participa ativamente no processo de ensino/aprendizagem, não sendo apenas um figurino que recebe explicações e treina procedimentos, mas uma das personagens principais que participa ativamente na construção do seu próprio conhecimento. Por outro lado, também o professor tem um papel fundamental, tanto na preparação das aulas, seleccionando criteriosamente tarefas e experimentando materiais, como na condução da aula. Na condução da aula, todas as fases se revelaram muito importantes, uma vez que, em minha opinião, o sucesso de uma fase implica sempre o sucesso da seguinte. É necessário rigor na apresentação da tarefa, para que os alunos a compreendam e se sintam desafiados e motivados para a resolver. Só assim se empenharão na sua resolução, descobrindo estratégias de resolução. Ao descobrirem uma estratégia de resolução que considerem válida também se sentirão motivados e

desafiados para a apresentar em plenário. Assim, a fase de apresentação e discussão das estratégias encontradas revelou-se muito gratificante, com intervenções, por parte de alguns alunos, muito ricas, o que me levou a concluir que houve aprendizagem com compreensão.

Por tudo isto sinto que, de facto, este estudo me contemplou com uma panóplia de conhecimentos que me proporcionam uma mais-valia enquanto professora, nesta tarefa tão árdua mas tão gratificante de promoção de aprendizagem.

## BIBLIOGRAFIA

- Boavida, A., Paiva, A., Cebola, G. e Vale, I. (2008). *A Experiência Matemática no Ensino Básico*. DGIDC. Lisboa.
- Brocardo, J. (2010). *Trabalhar os números racionais numa perspectiva de desenvolvimento do sentido de número*. *Educação e Matemática*, (109) 15-23.
- Canavarro, A. P. (2011). *Ensino exploratório da matemática: práticas e desafios*. *Educação matemática*, 115, 11-17
- Canavarro, A. P., Oliveira, H., & Menezes, L. (2012). *Práticas de ensino exploratório da Matemática: O caso de Célia*. In A. P. Canavarro, L. Santos, A. Boavida, H. Oliveira, L. Menezes & S. Carreira (Eds.), *Investigação em Educação Matemática – Práticas de ensino da Matemática*, 2012.
- In FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia no âmbito do *Projeto Práticas Profissionais dos Professores de Matemática* (contrato PTDC/CPECED/098931/2008).
- Coutinho, C. P., Sousa, A., Dias, A., Bessa, F., Ferreira, M. J. e Vieira, S. (2009). *Investigação-acção: metodologia preferencial nas práticas educativas*. *Psicologia, Educação e Cultura*, 2009, XIII, 2
- Coutinho, P. C. (2013). *Metodologia de Investigação em Ciências Sociais e Humanas: Teoria e Prática*. 2.<sup>a</sup> edição.
- Ferreira, N., Ponte, J. P. (2014). *O conhecimento de futuros professores do 2.º ciclo sobre números racionais: O caso de Maria*. Atas do XXV Seminário de Investigação em Educação Matemática. Braga: APM., pp343-356
- Van Galen, F., Feijs, E., Figueiredo, N., Gravemeijer, K., Herpen, E., & Keijer, R. (2008). *Fractions, percentages and proportions*. Utrecht: Freudenthal Institute for Science and Mathematics Education, Utrecht University, Sense Publishers.
- Guerreiro, A., (2011). *Desenvolvimento Curricular e Didáctica. Conceções e práticas de comunicação matemática*. Vol.3 (pp. 25-40). Universidade Aveiro. Aveiro

- Kieren, T. (1983). *Partitioning, Equivalence and the Construction of Rational Number Ideas*. In M. Zweng, T. Green, J. Kilpatrick, H. Pollack, & M. Suydam (Eds.), *Proceedings of the Fourth International Conference of Psychology of Mathematics Education* (pp.501–508). Boston: Birkhauser.
- Kieren, T. (1995). *Creating Spaces for Learning Fractions*. In T. Sowder & B.P. Schappelle (Eds.), *Providing a Foundation for Teaching Mathematics in the Middle Grades* (pp. 31–66). Albany, New York: SUNY Press.
- Lampert, M. (2001). *Teaching problems and the problems of teaching*. New Haven, CT: Yale University Press.
- Magina, S., Bezerra, F., Spinillo, A. (2009). *Como desenvolver a compreensão da criança sobre fração? Uma experiência de ensino*. Vol.90, n.225 (pp. 411-432). Estudos RBEP. Brasília
- Mamede, E. (2011). *Sobre o ensino e aprendizagem de frações nos níveis elementares de ensino*. Universidade do Minho. Profmat
- Mamede, E. e Cardoso, P. (2010). *Insights on students (Mis)understanding of fractions*. In M. M. Pinto & T. F. Kawasaki (Eds.), *Proc. 34th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 257-264). Belo Horizonte, Brasil: PME.
- Marshall, S.P. (1993). *Assessment of rational number understanding: A schema-based approach*, in T.P. Carpenter, E. Fennema and T.A. Romberg (eds.), *Rational 65 Numbers: An Integration of Research* (pp. 261–288). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- Maximo-Esteves, L. (2008). *Visão Panorâmica da Investigação-Acção*. Porto Editora.Porto
- McCoskey, A., Norton, A. (2009). *Using Steffe's fraction: Recognizing schemes, which are different from strategies, can help teachers understand their student's thinking about fractions*. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 15 (1),44-50.

- Menezes, L. (2005). *Desenvolvimento da comunicação matemática em professores do 1º ciclo no contexto de um projecto de investigação colaborativa*. In J.
- Menezes, L., Rodrigues, C., Tavares, F., Gomes, H., (2009). *Números Racionais Não Negativos*. DGIDC. Lisboa.
- Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: DGIDC.
- Monteiro, C. e Pinto, H. (2005). *A aprendizagem dos números racionais*. Quadrante, vol.14, n.º1
- Monteiro, C., Pinto, H. e Figueiredo, N. (2005). *As fracções e o desenvolvimento do sentido do número racional*. Educação e Matemática, 85,47-51.
- Monteiro, C., Pinto, H. e Figueiredo (2007). *Desenvolvendo o sentido do número racional*. Lisboa: APM
- National Council of Teachers of Mathematics. NCTM (2007). *Princípios e normas para a Matemática escolar*. Lisboa: APM.
- Nunes, T., e Bryant, P. (1997). *Crianças fazendo matemática*. Porto Alegre: Artes Médicas.
- Pessoa, P.(2010). *Novo Programa de Matemática. Inovação de práticas e aprendizagens*. Educação e Matemática, n.º109
- Pimentel, T., Vale, I., Freire, F., Alvarenga, D. e Fão, A. (2010). *Matemática nos primeiros anos. Tarefas e desafios para a sala de aula*. Lisboa
- Pinto, H. (2011). *O desenvolvimento do sentido da multiplicação e da divisão de números racionais*. (Tese de Doutoramento, Unversidade de Lisboa)
- Ponte, J. P. (2005). *Gestão curricular em Matemática*. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.
- Ponte, J. P. (2005). *O interaccionismo simbólico e a pesquisa sobre a nossa própria prática*. Revista Pesquisa Qualitativa, 1, 107-134.

- Ponte, J. P. e Serrazina, L. (2009). *O Novo Programa de Matemática: uma oportunidade de mudança*. Educação e matemática, n.º 105
- Ponte, J. P., e Quaresma, M. (2011). *Abordagem exploratória com representações múltiplas na aprendizagem dos números racionais: Um estudo de desenvolvimento curricular*. Quadrante.
- Ponte, J. P. e Quaresma, M. (2011). *A construção das partes e a reconstrução da unidade na compreensão dos números racionais*. Atas do XXII SIEM
- Quaresma, M. e Ponte, J. P. (2012) *Compreensão dos números racionais, comparação e ordenação: O caso de Leonor*.
- Quaresma, M (2010) *Ordenação e comparação de números racionais em diferentes representações: uma experiência de ensino* (Dissertação de mestrado, Universidade de Lisboa)
- Streefland, L. (1991). *Fractions, an integrated perspective*. In L. Streefland (Ed.), *Realistic mathematics education in primary school* (pp. 93-118). Utrecht: Freudenthal Institute.
- Vieira, V., Tedesco, P. e Salgado, A. C. (2009). *Modelos e Processos para o Desenvolvimento de Sistemas Sensíveis ao contexto*. Brasil
- Vizinho, I. e Cabrita, I. (2012). *Percurso dos racionais do Pré-escolar ao 1º Ciclo do Ensino Básico*. Desenvolvimento Curricular e Didáctica, vol.4, 154-173.

## ANEXOS

# ANEXO 1- Planificação geral da sequência de tarefas

## SEQUÊNCIA DE TAREFAS

Escola: Centro Educativo	1ºciclo
--------------------------	---------

Números e Operações 2º ano	<b>Propósito Principal de Ensino</b>	Desenvolver nos alunos o sentido de número, a compreensão dos números e das operações e a capacidade de cálculo mental e escrito, bem como a de utilizar esses conhecimentos e capacidades para resolver problemas em contextos diversos.
	<b>Objetivos Gerais</b>	Com a sua aprendizagem, no âmbito deste tema, os alunos devem: <ul style="list-style-type: none"> <li>• compreender e ser capazes de usar propriedades dos números racionais não negativos;</li> <li>• compreender as operações e ser capazes de operar com números racionais não negativos;</li> <li>• ser capazes de resolver problemas, raciocinar e comunicar em contextos numéricos.</li> </ul>

Tópicos e Subtópicos	Objetivos Específicos	Tarefas / Operacionalização	Avaliação	Duração
<b>Tópico</b> – Números racionais não negativos	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Explorar situações do quotidiano que envolvam as noções de: metade, quarta parte.</li> <li>▪ Resolver problemas de partilha equitativa através de estratégias pessoais.</li> <li>▪ Explorar intuitivamente situações de partilha equitativa e da divisão da unidade em partes iguais, envolvendo quantidades contínuas e discretas.</li> <li>▪ Resolver problemas de partilha equitativa através de estratégias pessoais.</li> <li>▪ Representar as quantidades por palavras, desenhos, esquemas ou frações.</li> </ul>	<b>Tarefa 1 - Divisão de uma unidade contínua</b> – divisão de uma maçã em duas partes iguais; Reconstrução da unidade	Observação participante	<b>45 min</b>
<b>Subtópico</b> – Frações		<b>Tarefa 2</b> -Partilha equitativa de uma unidade contínua: <ul style="list-style-type: none"> <li>• divisão de 1 tarte em 2 partes iguais;</li> <li>• divisão de 1 tarte em 4 partes iguais.</li> </ul> <b>Tarefa 3</b> - Partilha equitativa de uma unidade contínua: <ul style="list-style-type: none"> <li>• divisão de 3 pizzas em 4 partes iguais;</li> <li>• divisão de 3 pizzas em 8 partes iguais;</li> <li>• comparação de frações.</li> </ul>	Registos escritos	<b>45 min</b>
			Avaliação formativa	<b>45 min</b>



## ANEXO 2 – Sequência de tarefas

### TAREFA 1

1.1 No dia 28 de fevereiro participámos no desfile de Carnaval. Como ia haver lanche partilhado, a Francisca pediu à mãe para fazerem duas tartes de maçã. A mãe pediu-lhe que fosse à fruteira buscar 1 maçã e que a dividisse igualmente pelas duas tartes.



Que parte da maçã foi necessária para cada tarte?

Descreve o processo que utilizaste para responder à questão. Podes fazê-lo utilizando palavras, desenhos ou cálculos.

1.2 Se em vez de duas tartes tivessem feito quatro, quantas maçãs seriam necessárias?

Descreve o processo que utilizaste para responder à questão. Podes fazê-lo utilizando palavras, desenhos ou cálculos.

### TAREFA 2

2.1 – Depois de feitas as tartes, a Francisca dividiu uma tarte igualmente com a sua mãe.



Que parte da tarte comeu cada uma?

Descreve o processo que utilizaste para responder à questão. Podes fazê-lo utilizando palavras, desenhos ou cálculos.

2.2 – Se tivesse dividido a tarte também com a irmã e com o pai, que parte da tarte comeria cada um?

Descreve o processo que utilizaste para responder à questão. Podes fazê-lo utilizando palavras, desenhos ou cálculos.

### TAREFA 3

3.1 – Chegou a hora do lanche. A Lara tinha levado 3 pizzas que dividiu igualmente por ela e pelas suas três amigas.



Que parte da pizza comeu cada uma?

Descreve o processo que utilizaste para responder à questão. Podes fazê-lo utilizando palavras, desenhos ou cálculos.

3.2 Cada amiga comeu mais ou menos que uma pizza?

3.3 - Se em vez de 4 amigas, fossem 8 e dividissem as três pizzas igualmente que parte comeria cada uma?

Descreve o processo que utilizaste para responder à questão. Podes fazê-lo utilizando palavras, desenhos ou cálculos.

3.4- Em qual dos grupos anteriores, o de 4 amigos ou o de 8 amigos, cada um comeu mais pizza? Explica o teu raciocínio.

### TAREFA 4

4.1 Na mesa também havia chocolates, a Raquel e quatro das suas amigas quiseram partilhar 3 desses chocolates, igualmente. Que porção de chocolate coube a cada uma das cinco amigas?



Descreve o processo que utilizaste para responder à questão. Podes fazê-lo utilizando palavras, desenhos ou cálculos.

4.2 Cada amiga comeu mais que um chocolate ou menos que um chocolate? Explica o teu raciocínio,

## TAREFA 5

5.1 O Rodrigo reparou que na mesa ainda havia 6 chocolates. Decidiu ir buscá-los e distribuí-los igualmente por ele e os seus 9 amigos. Que porção de chocolate coube a cada um dos 10 amigos?



Descreve o processo que utilizaste para responder à questão. Podes fazê-lo utilizando palavras, desenhos ou cálculos.

5.2 Cada amigo comeu mais que um chocolate ou menos que um chocolate? Explica o teu raciocínio.

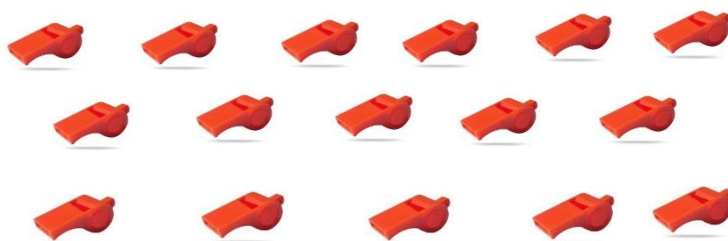
## TAREFA 6

Quem comeu mais chocolate, as amigas da tarefa 4 ou os amigos da tarefa 5? Explica o teu raciocínio.

## TAREFA 7

7.1 – No início do desfile de Carnaval, a professora pediu à Mariana que distribuisse os 16 apitos pelos colegas. A Mariana pediu à Maria Luísa que a ajudasse na distribuição dando-lhe metade e ficando com a outra metade para ela.

Com que fração de apitos ficou cada uma? Quantos apitos são?



R: Cada uma ficou com \_\_\_\_\_ dos apitos que são \_\_\_\_\_.

7.2 – E se a Mariana pedisse ajuda à Maria Luísa, ao Gustavo e ao Leo, como poderiam fazer a divisão de forma a ficarem todos com o mesmo número de apitos? Ilustra a divisão em que a Mariana estava a pensar.

R: Cada um ficava com \_\_\_\_\_ dos apitos que são \_\_\_\_\_.

## TAREFA 8

8.1. Durante o desfile de Carnaval a professora distribuiu serpentinas pelos alunos.

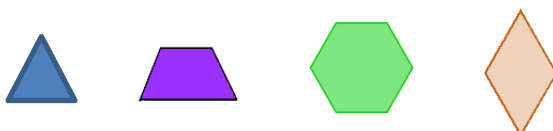
Sabendo que 5 rolinhos correspondem a  $\frac{1}{4}$  da embalagem, quantos rolinhos tem a embalagem completa?




Descreve o processo que utilizaste para responder à questão.


## TAREFA 9


Nos fatos de carnaval foram colados remendos com as seguintes formas geométricas.




Manipula as figuras para poderes investigar e descobrir as relações que existem entre elas. Seguidamente responde às questões, explicando como pensaste.

9.1. Se  for  $\frac{1}{2}$  de uma figura, desenha a figura completa.

9.2. Se  for  $\frac{1}{3}$  de uma figura, desenha a figura completa.

9.3. Se  for  $\frac{1}{2}$ , desenha a figura completa.

9.4. Se  for  $\frac{1}{6}$ , desenha a figura completa.