

ÁLGEBRA LINEAR

UMA ABORDAGEM INTUITIVA E PRÁTICA

Com exercícios resolvidos
e testes de autoavaliação

LEONEL VICENTE • CARLOS CAMPOS

Ficha Técnica

Título

Álgebra Linear: uma abordagem intuitiva e prática

Autores

Leonel Vicente

Escola Superior de Tecnologia e Gestão | IPLeiria

ORCID 0000-0002-6657-4694

Carlos Campos

Escola Superior de Tecnologia e Gestão | IPLeiria

ORCID 0000-0002-1598-0609

Design

Diogo Honório

Ano

2026 | 1.^a Edição

DOI

<https://doi.org/10.25766/ws3d-kt44>.

ISBN

978-972-8415-30-3

Edição

OPSA 2.0 – Observatório para o Sucesso Académico

O projeto Observatório para o Sucesso Académico (OPSA 2.0) é cofinanciado pelo Plano de Recuperação e Resiliência – PRR, através do NextGenerationEU, no âmbito do Investimento RE-C06-i07 – Impulso Mais Digital, submedida Inovação e Modernização Pedagógica no Ensino Superior – Programa de Promoção de Sucesso e Redução de Abandono Escolar no Ensino Superior, sob a responsabilidade da Direção-Geral do Ensino Superior (DGES).

Licença

© 2026 Leonel Vicente, Carlos Campos. Este trabalho encontra-se licenciado sob a licença Creative Commons Atribuição–NãoComercial 4.0 Internacional (CC BY-NC 4.0). É permitida a sua utilização, partilha e adaptação para fins não comerciais, desde que seja devidamente atribuída a autoria.

Nota de Abertura

A presente publicação integra o conjunto de iniciativas desenvolvidas no âmbito do projeto **OPSA 2.0 – Observatório para o Sucesso Académico** do Instituto Politécnico de Leiria, financiado pelo Programa Impulso Mais Digital, no quadro do Plano de Recuperação e Resiliência (PRR), através da submedida «Inovação e Modernização Pedagógica no Ensino Superior – Programa de Promoção de Sucesso e Redução de Abandono Escolar no Ensino Superior».

O OPSA 2.0 assume como missão promover o sucesso académico, prevenir situações de insucesso e abandono escolar e reforçar práticas pedagógicas inovadoras, ativas e centradas na aprendizagem dos estudantes, particularmente dos estudantes do 1.º ano/1.ª vez.

No âmbito dos **Programas Especiais de Apoio à Aprendizagem**, esta obra foi concebida como instrumento de apoio ao estudo da Álgebra Linear, procurando disponibilizar aos estudantes um recurso pedagógico estruturado, acessível e orientado para a consolidação de conhecimentos fundamentais, promovendo simultaneamente a autonomia, o raciocínio matemático e o desenvolvimento de competências académicas essenciais ao percurso no ensino superior.

A organização dos conteúdos, a valorização da componente prática e a integração de exercícios resolvidos e instrumentos de autoavaliação refletem o compromisso institucional do Instituto Politécnico de Leiria com a inovação pedagógica, a qualidade do ensino e a criação de ambientes de aprendizagem promotores do envolvimento ativo dos estudantes no seu processo formativo.

O OPSA 2.0 reafirma, através desta publicação, o compromisso do Instituto Politécnico de Leiria com a promoção do sucesso académico, a inovação pedagógica e o desenvolvimento de recursos de apoio à aprendizagem dos estudantes.

A Coordenação Científico-Pedagógica do OPSA 2.0,

Graça Poças Santos

Susana Sardinha Monteiro

Catarina Mangas

Agradecimentos

Os autores agradecem à Professora Coordenadora Jubilada **Doutora Cidália dos Anjos Martinho Macedo**, do Departamento de Matemática da Escola Superior de Tecnologia e Gestão do Instituto Politécnico de Leiria, todas as suas valiosas contribuições científicas, pedagógicas e organizacionais, que estiveram na origem deste livro.

Uma parte significativa dos conteúdos aqui apresentados tem origem nos materiais pedagógicos que a Professora Cidália Macedo desenvolveu, ao longo de vários anos, em colaboração com o primeiro autor, sob a forma de atividades para apoio à leção da unidade curricular de Álgebra Linear nos cursos de Engenharia da ESTG.

A organização dos conteúdos em formato de atividades, abordagem que a Professora Cidália introduziu e consolidou no contexto do Ensino Superior, constitui uma das marcas distintivas deste livro e tem sido amplamente reconhecida e valorizada pelos estudantes.

Os autores reconhecem com apreço os anos de trabalho conjunto, sempre sob a sua orientação científica e pedagógica, que contribuíram de forma decisiva para o seu crescimento enquanto docentes e para a consolidação da abordagem adotada nesta obra.

Agradecimento pessoal do primeiro autor (Leonel Vicente)

Agradeço sinceramente aos colegas do Departamento de Matemática da Escola Superior de Tecnologia e Gestão do Instituto Politécnico de Leiria. Ao longo de 28 anos de ensino de Álgebra Linear, o ambiente de partilha e colaboração que sempre encontrei foi determinante para o meu desenvolvimento académico e para a visão didática que este livro procura refletir.

Expresso o meu profundo reconhecimento a todos quantos, direta ou indiretamente, contribuíram para este percurso.

Uma palavra de sincero agradecimento à minha esposa, Mirtes Cunha, pela paciência, compreensão e apoio emocional ao longo da elaboração deste livro. A sua presença tranquila, a sua generosidade e a capacidade de me incentivar nos momentos de maior exigência foram essenciais para a sua concretização.

Índice de Conteúdos

Introdução	1
1 Cálculo Vetorial	3
1.1 Conceitos Gerais	5
1.2 Norma, Versor e Ângulo	13
1.3 Produto Escalar	21
1.4 Produto Vetorial	29
1.5 Produto Misto	36
2 Cálculo Matricial	43
2.1 Conceitos Gerais	46
2.2 Operações Matriciais	50
2.3 Transposição	60
2.4 Matrizes Invertíveis	67
2.5 Condensação de Matrizes	72
3 Sistemas de Equações Lineares	83
3.1 Conceitos Gerais	85
3.2 Método de Eliminação de Gauss	89
3.3 Classificação de Sistemas	94
4 Determinantes	103
4.1 Conceitos Gerais	105
4.2 Regras Práticas	111
4.3 Teorema de Laplace	115
4.4 Propriedades	120
4.5 Matriz Inversa	132
4.6 Regra de Cramer	139

5	Espaços Vetoriais Reais	143
5.1	Conceitos Gerais	145
5.2	Combinação Linear de Vetores	153
5.3	Subespaço Vetorial Gerado	158
5.4	Dependência Linear de Vetores	165
5.5	Propriedades da Dependência Linear	169
5.6	Base	174
5.7	Dimensão	180
6	Transformações Lineares	193
6.1	Conceitos Gerais	195
6.2	Operações	200
6.3	Núcleo e Imagem	209
6.4	Transformações Planas	220
7	Valores e Vetores Próprios	233
7.1	Conceitos Gerais	235
7.2	O Cálculo Analítico	239
7.3	Diagonalização de Matrizes	249
8	Auto-Avaliação	257
8.1	Avaliação sobre Cálculo Vetorial	258
8.2	Avaliação sobre Cálculo Matricial	263
8.3	Avaliação sobre Sistemas de Equações Lineares	267
8.4	Avaliação sobre Determinantes	272
8.5	Avaliação sobre Espaços Vetoriais Reais	279
8.6	Avaliação sobre Transformações Lineares	286
8.7	Avaliação sobre Valores e Vetores Próprios	295
	Bibliografia Recomendada	301

Introdução

Este livro nasceu da vontade de partilhar a experiência acumulada ao longo de vários anos de ensino de Álgebra Linear, procurando oferecer a estudantes e professores uma abordagem clara, prática e acessível.

Este documento pretende ser um instrumento de apoio ao estudo da álgebra linear, contribuindo para que os leitores desenvolvam o seu raciocínio matemático e adquiram um conjunto de técnicas que lhes permitam resolver uma ampla variedade de problemas. Os autores esperam, com este livro, reforçar as competências dos leitores e facilitar a sua progressão nos respetivos cursos superiores, na investigação ou na vida profissional.

Não se pretende, de forma alguma, substituir os inúmeros manuais de álgebra linear já existentes. O objetivo principal é apresentar uma abordagem intuitiva e prática dos tópicos essenciais - desde os conceitos fundamentais de vetores, matrizes, sistemas de equações lineares e determinantes, até aos temas mais avançados, como os espaços vetoriais reais, as transformações lineares e os valores e vetores próprios. Cada conceito é introduzido de forma clara e concisa, sendo acompanhado de exemplos ilustrativos que facilitam a compreensão e a aplicação prática.

Este livro não tem como propósito explorar exaustivamente os conteúdos nem desenvolver demonstrações matemáticas formais, dado que tal já é amplamente tratado na bibliografia especializada. Ainda assim, reconhece-se a importância das demonstrações teóricas e da compreensão rigorosa dos fundamentos. Para os leitores que pretendam aprofundar a teoria de forma mais sistemática, são sugeridos, no final do documento, diversos livros de referência que apresentam um tratamento formal e aprofundado da álgebra linear.

A estrutura do livro assenta na divisão dos conteúdos em atividades autónomas, cada uma das quais requer, em média, entre 3 e 5 horas de estudo ou trabalho, consoante os conhecimentos prévios, as competências do leitor e os objetivos a atingir. Sempre que possível, encoraja-se a consulta de bibliografia complementar,

com o intuito de aprofundar e consolidar os conceitos apresentados.

No último capítulo são incluídos testes que permitem ao leitor aplicar os conhecimentos adquiridos ao longo dos vários capítulos. Estes exercícios visam reforçar a aprendizagem, promover a autonomia e facilitar a identificação de eventuais lacunas conceptuais. A resolução dos testes, idealmente realizada num período de cerca de uma hora e sem recurso a apoio externo, constitui uma oportunidade para desenvolver competências na interpretação e aplicação prática dos conteúdos estudados.

Cumpram também salientar que este trabalho não deve ser encarado como um produto finalizado, mas antes como um projeto em evolução. Está sujeito a atualizações regulares, não só para corrigir eventuais imprecisões, como também para se ajustar às mudanças curriculares que têm vindo a ocorrer, quer no Ensino Secundário, quer no Ensino Superior. Os autores agradecem, desde já, todas as sugestões e contributos que visem melhorar os conteúdos aqui apresentados.

Durante a preparação deste livro, recorreu-se a ferramentas de inteligência artificial como apoio na reformulação de textos. Todas as sugestões foram cuidadosamente analisadas, revistas e validadas pelos autores, dado que estas ferramentas, em diversas situações, produziram conteúdos incorretos ou desadequados.

Esta nota serve também de alerta aos leitores - em particular aos estudantes - para a importância de um uso crítico da inteligência artificial. Estas ferramentas podem ser úteis como complemento, mas não substituem o raciocínio matemático, o pensamento crítico, nem a orientação pedagógica essencial à aprendizagem.

1

Cálculo Vetorial

Em problemas de diversas áreas encontram-se quantidades físicas de duas naturezas: escalares e vetoriais. A massa, o tempo, o comprimento e a temperatura são grandezas escalares. Quantidades como a força, a velocidade e a aceleração são representadas por vetores, que incluem não só o valor escalar, mas também a direção e o sentido da sua atuação. As propriedades e operações entre estas grandezas são estudadas no cálculo vetorial, o qual tem diversas aplicações, tais como:

1. Física

O cálculo vetorial é utilizado para representar e manipular grandezas vetoriais, como forças, velocidades e acelerações. É essencial para a descrição e resolução de problemas que envolvem o movimento de corpos e sistemas físicos.

2. Engenharia de Sistemas

Em áreas como a Engenharia Eletrotécnica, Mecânica e Civil, o cálculo vetorial é fundamental na análise e no projeto de sistemas complexos. Por exemplo, na Engenharia de Controlo, é utilizado para modelar sistemas dinâmicos e estudar a sua estabilidade.

3. Computação Gráfica

No desenvolvimento de jogos, animações e gráficos computacionais, o cálculo vetorial é utilizado para representar e manipular objetos tridimensionais. Per-

mite realizar transformações geométricas, como rotações e translações, calcular interseções de objetos e aplicar técnicas de iluminação e sombras.

4. Navegação e Astronomia

O cálculo vetorial é aplicado em sistemas de navegação para determinar a posição e a direção de um objeto relativamente a um ponto de referência. Na Astronomia, é utilizado para calcular as trajetórias de corpos celestes, como planetas e cometas.

Este capítulo começa com a introdução de conceitos gerais sobre vetores, bem como das operações entre eles. Seguem-se os conceitos de norma, versor e ângulo. Em seguida, exploram-se as propriedades e aplicações do produto escalar, com especial destaque para a determinação de ângulos entre vetores e a projeção ortogonal de vetores. O tópico seguinte é o produto vetorial, no qual são abordados tanto o cálculo como a interpretação geométrica deste produto. Por fim, estuda-se o produto misto, uma operação que combina o produto escalar e o produto vetorial para resolver problemas que envolvem operações vetoriais e sólidos tridimensionais.

Orientação de trabalho: este capítulo apresenta 5 atividades de trabalho e recomendamos que o leitor dedique, a cada uma delas, entre 3 e 5 horas de estudo.

As atividades que propomos encontram-se esquematizadas da seguinte forma:

- ▶ Atividade 1 – 1.1 Conceitos Gerais
- ▶ Atividade 2 – 1.2 Norma, Versor e Ângulo
- ▶ Atividade 3 – 1.3 Produto Escalar
- ▶ Atividade 4 – 1.4 Produto Vetorial
- ▶ Atividade 5 – 1.5 Produto Misto

1.1 Conceitos Gerais

Definição 1

Um **vetor** $\vec{u}$ é um objeto que pode ser representado por um segmento de reta orientado, com um ponto inicial A e com um ponto final B . Escreve-se $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

O vetor $\vec{u}$ possui três características:

- ▶ a *grandeza* é o escalar que mede a intensidade ou o comprimento do vetor.
- ▶ a *direção* é determinada pela reta que define a direção do vetor.
- ▶ o *sentido* é determinado pela orientação que o vetor tem sobre a sua linha de ação.

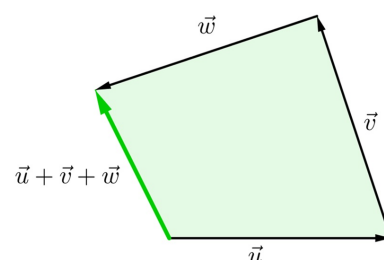
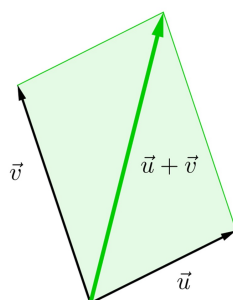
Observações:

1. O vetor $\vec{0}$ é designado por **vetor nulo** e possui propriedades únicas entre todos os vetores, assim como o zero, entre os números reais.
2. Todos os vetores com o mesmo comprimento, direção e sentido são **equivalentes**.

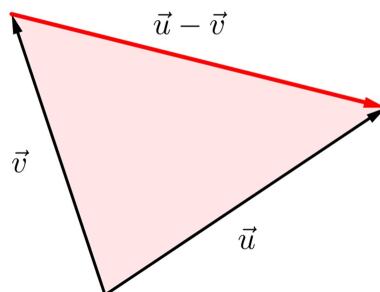
Operações com Vetores

Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores, e α um escalar não nulo. Definem-se geometricamente as seguintes operações:

1. **soma** ou **adição**: $\vec{u} + \vec{v}$ é o vetor obtido pela regra do paralelogramo ou o encadeamento de vetores quando o número de vetores é superior a dois.



2. **diferença ou subtração:** $\vec{u} - \vec{v}$ é o vetor que somado a $\vec{v}$ dá $\vec{u}$.



3. **multiplicação escalar:** $\alpha \vec{u}$ é o vetor com as características:

- ▶ a *grandeza* é dada pelo produto de $|\alpha|$ pela grandeza de $\vec{u}$.
- ▶ a *direção* é a mesma de $\vec{u}$.
- ▶ o *sentido* é o de $\vec{u}$ se $\alpha > 0$ e contrário a $\vec{u}$ se $\alpha < 0$.

Definição 2

Dois vetores não nulos $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dizem-se **paralelos** ou **colineares**, denotando-se por $\vec{u} \parallel \vec{v}$, se existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{v} = \lambda \vec{u}$.

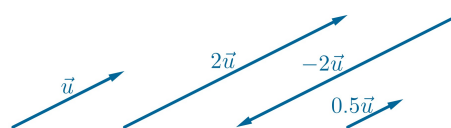
Observações:

1. O vetor nulo $\vec{0}$ é colinear com qualquer vetor não nulo $\vec{v}$ pois $\vec{0} = 0 \vec{v}$.
2. O vetor nulo $\vec{0}$ não tem representação gráfica (não é um ponto!).
3. Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos quando têm a mesma direção.

Exemplo 1

Considere os vetores $\vec{u}$, $2\vec{u}$, $-2\vec{u}$ e $0.5\vec{u}$, representados na figura.

Os vetores são paralelos? Justifique.



Resolução

Todos os vetores da figura são paralelos entre si, pois todos têm a mesma direção, ou seja, qualquer um dos vetores se pode obter a partir de um outro multiplicando-o por um escalar adequado. Por exemplo, $2\vec{u} \parallel 0.5\vec{u}$, pois $2\vec{u} = 4 \cdot 0.5\vec{u}$.

Exemplo 2

Considere os vetores $\vec{u} = (2, 1, -1)$, $\vec{v} = (-4, -2, 2)$ e $\vec{w} = (6, 2, -3)$. Verifique se $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são paralelos ao vetor $\vec{u}$.

Resolução

Como $\vec{v} = -2\vec{u}$ então $\vec{u} \parallel \vec{v}$. Os vetores $\vec{w}$ e $\vec{u}$ não são paralelos pois não existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{w} = \lambda\vec{u}$.

Nota: os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ têm sentidos contrários ($\lambda = -2 < 0$) e o comprimento de $\vec{v}$ é o dobro ($|-2| = 2$) do comprimento de $\vec{u}$.

Seja (O, x, y, z) o referencial ortonormado de $\mathbb{R}^3$, onde $O = (0, 0, 0)$ é a origem e os eixos Ox , Oy e Oz são definidos pelos vetores $\hat{e}_x$, $\hat{e}_y$ e $\hat{e}_z$, onde:

- $\hat{e}_x = (1, 0, 0) \parallel$ eixo Ox (eixo das *abscissas*).
- $\hat{e}_y = (0, 1, 0) \parallel$ eixo Oy (eixo das *ordenadas*).
- $\hat{e}_z = (0, 0, 1) \parallel$ eixo Oz (eixo das *cotas*).

Neste referencial:

- Um ponto A é definido pelas suas **coordenadas** $A = (a_x, a_y, a_z)$. O seu **vetor posição** é definido por:

$$\vec{r}_A = \overrightarrow{OA} = a_x\hat{e}_x + a_y\hat{e}_y + a_z\hat{e}_z = (a_x, a_y, a_z).$$

- Um vetor $\vec{u}$ é definido pelas suas **componentes** $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$ e tem-se:

$$\vec{u} = u_x\hat{e}_x + u_y\hat{e}_y + u_z\hat{e}_z = (u_x, u_y, u_z)$$

ou $\vec{u}$ também pode ser definido por um ponto inicial $A = (a_x, a_y, a_z)$ e um ponto final $B = (b_x, b_y, b_z)$. Assim, as suas **componentes** são definidas por:

$$\begin{aligned}\vec{u} = \overrightarrow{AB} &= B - A = (b_x - a_x)\hat{e}_x + (b_y - a_y)\hat{e}_y + (b_z - a_z)\hat{e}_z \\ &= (b_x - a_x, b_y - a_y, b_z - a_z).\end{aligned}$$

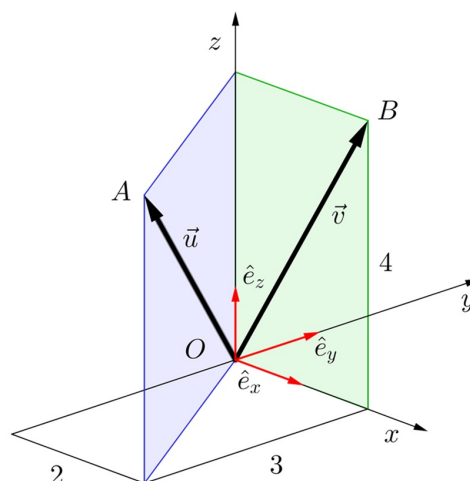
Exemplo 3

Determine as componentes dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ representados na figura.

Resolução

Uma vez que

- $\vec{u}$ está orientado no sentido positivo do eixo Ox com valor 2; está orientado no sentido negativo do eixo Oy com valor 3; está orientado no sentido positivo do eixo Oz com valor 4
- $\vec{v}$ tem a direção paralela ao plano Oxz ; está orientado no sentido positivo do eixo Ox com valor 2; está orientado no sentido positivo do eixo Oz com valor 4



então $\vec{u} = 2\hat{e}_x - 3\hat{e}_y + 4\hat{e}_z = (2, -3, 4)$ e $\vec{v} = 2\hat{e}_x + 4\hat{e}_z = (2, 0, 4)$.

Algebricamente, as operações entre vetores podem ser realizadas usando as suas componentes.

Se $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$ e $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ são quaisquer vetores de $\mathbb{R}^3$ então:

1. soma ou adição

$$\begin{aligned}\vec{u} + \vec{v} &= (u_x + v_x)\hat{e}_x + (u_y + v_y)\hat{e}_y + (u_z + v_z)\hat{e}_z \\ &= (u_x + v_x, u_y + v_y, u_z + v_z).\end{aligned}$$

2. diferença ou subtração

$$\begin{aligned}\vec{u} - \vec{v} &= (u_x - v_x)\hat{e}_x + (u_y - v_y)\hat{e}_y + (u_z - v_z)\hat{e}_z \\ &= (u_x - v_x, u_y - v_y, u_z - v_z).\end{aligned}$$

3. multiplicação escalar

$$\alpha \vec{u} = \alpha u_x \hat{e}_x + \alpha u_y \hat{e}_y + \alpha u_z \hat{e}_z = (\alpha u_x, \alpha u_y, \alpha u_z).$$

Exemplo 4

Considere os vetores $\vec{u} = (2, 1, -1)$, $\vec{v} = (-4, -2, 2)$ e $\vec{w} = (6, 2, -3)$.

Determine $\vec{u} + \vec{w}$, $\vec{u} - \vec{w}$, $-2\vec{u}$ e $\vec{u} - 2\vec{v} - \vec{w}$.

Resolução

Tem-se

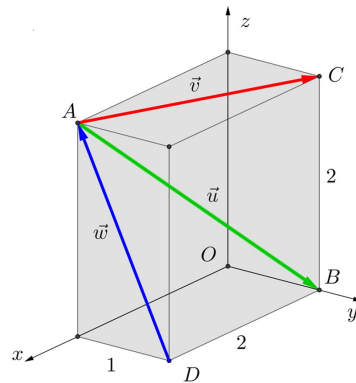
- ▶ $\vec{u} + \vec{w} = (2, 1, -1) + (6, 2, -3) = (2 + 6, 1 + 2, -1 - 3) = (8, 3, -4).$
- ▶ $\vec{u} - \vec{w} = (2, 1, -1) - (6, 2, -3) = (2 - 6, 1 - 2, -1 + 3) = (-4, -1, 2).$
- ▶ $-2\vec{u} = -2(2, 1, -1) = (-4, -2, 2) = \vec{v}.$
- ▶ $\vec{u} - 2\vec{v} - \vec{w} = (2, 1, -1) + (8, 4, -4) + (-6, -2, 3) = (4, 3, -2).$

Exercício 1

Considere os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ representados na figura.

Determine:

- (a) $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$.
- (b) $\vec{u} + \vec{v} - \vec{w}$.
- (c) o valor de k de modo que o vetor $\vec{a} = k\vec{u} + \vec{v} + k\vec{w}$ tenha a direção do eixo Oy .



Resolução

- (a) Uma vez que $\vec{u}$ mede a deslocação do ponto $A = (2, 0, 2)$ para o ponto $B = (0, 1, 0)$, observa-se um deslocamento negativo de 2 unidades nas abscissas, um deslocamento positivo de 1 unidade nas ordenadas e um deslocamento negativo de 2 unidades nas cotas, pelo que $\vec{u} = (-2, 1, -2)$. Procedendo de forma análoga obtém-se $\vec{v} = (-2, 1, 0)$ e $\vec{w} = (0, -1, 2)$.

(b) $\vec{u} + \vec{v} - \vec{w} = (-2, 1, -2) + (-2, 1, 0) + (0, 1, -2) = (-4, 3, -4).$

(c) Qualquer vetor que tenha a direção do eixo Oy terá a forma $(0, s, 0)$, onde s é um qualquer número real não nulo. Assim

$$\vec{d} = k(-2, 1, -2) + (-2, 1, 0) + k(0, -1, 2) = (-2k - 2, 1, 0).$$

Portanto, $-2k - 2 = 0$, ou seja, $k = -1$.

Definição 3

Sejam $A = (a_x, a_y, a_z)$ e $B = (b_x, b_y, b_z)$ dois pontos de $\mathbb{R}^3$. O **ponto médio** M do segmento $[AB]$ é o ponto que divide o segmento em duas partes iguais e tem coordenadas:

$$M = \left(\frac{a_x + b_x}{2}, \frac{a_y + b_y}{2}, \frac{a_z + b_z}{2} \right).$$

Exemplo 5

Determine as coordenadas do ponto médio M do segmento $[AB]$, onde:

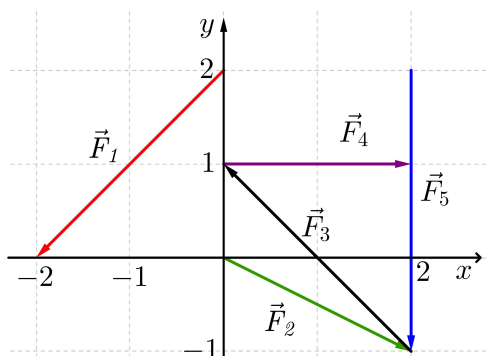
$$A = (2, 0, -2) \text{ e } B = (-2, 2, 4).$$

Resolução

O ponto médio do segmento $[AB]$ é $M = \left(\frac{2 - 2}{2}, \frac{0 + 2}{2}, \frac{-2 + 4}{2} \right) = (0, 1, 1).$

➤ Exercícios da Secção 1.1

1. Considere os vetores representados na figura.



Determine as componentes dos vetores:

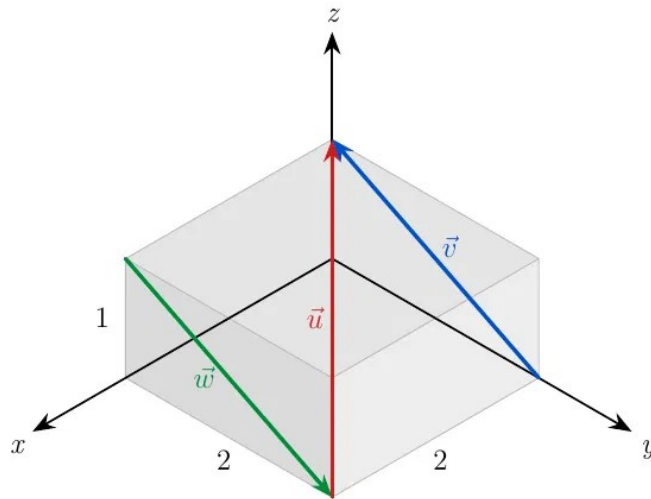
(a) $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 + \vec{F}_5$. (b) $2\vec{F}_1 - \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + 3\vec{F}_4 - \vec{F}_5$.

2. Dados os pontos $O = (0, 0)$, $A = (2, 1)$ e $B = (-1, -2)$.

Determine e represente geometricamente:

(a) o vetor $\overrightarrow{AB}$. (b) o vetor $\overrightarrow{OP}$, sabendo que $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{AB}$.

3. Considere os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ representados no paralelepípedo da figura.



- (a) Indique as componentes dos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

- (b) Determine as componentes dos vetores:

(i) $\vec{w} + \vec{u}$. (ii) $\vec{u} - \vec{v}$. (iii) $\vec{w} + \vec{v}$.

- (c) Considere os pontos $P(2, 2, 0)$ e $Q(0, 0, 1)$. Determine as coordenadas dos pontos:

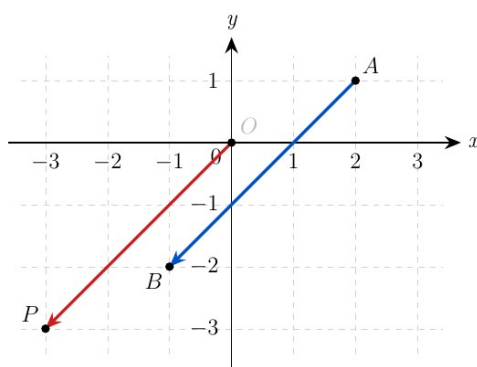
(i) $P + \vec{v}$. (ii) $Q - \vec{v}$.

4. Determine as coordenadas do ponto A , sabendo que M é o ponto médio de $[AB]$, sendo $B = (2, 0, 1)$ e $M = (4, -1, 2)$.
5. Os vetores $\vec{u} = (2, -1, 4)$ e $\vec{v} = (-6, 3, -12)$ são colineares? Justifique.
6. Determine $a, b \in \mathbb{R}$ de modo que os vetores $\vec{u} = (1, 2, 5)$ e $\vec{v} = (a, b + 2, 3)$ sejam colineares.
7. Considere os vetores $\vec{u} = (2, 1, -2)$ e $\vec{v} = (a^2, 1 + b, -4)$. Determine a e b de modo que $\vec{u} \parallel \vec{v}$.

8. Dados os pontos $A = (2, 0, 1)$, $B = (3, 0, -1)$ e $C = (-1, 0, 7)$, verifique se são colineares, ou seja, se os pontos pertencem à mesma reta.

► Soluções dos Exercícios

1. (a) $(0, -4)$. (b) $(-2, 2)$.
2. (a) $\overrightarrow{AB} = (-3, -3)$. (b) $\overrightarrow{OP} = (-3, -3)$.



3. (a) $\vec{u} = (-2, -2, 1)$, $\vec{v} = (0, -2, 1)$ e $\vec{w} = (0, 2, -1)$.
- (b) (i) $(-2, 0, 0)$. (ii) $(-2, 0, 0)$. (iii) $(0, 0, 0)$.
- (c) (i) $(2, 0, 1)$. (ii) $(0, 2, 0)$.
4. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \Rightarrow A = (6, -2, 3)$.
5. Sim, pois $\vec{v} = -3\vec{u}$.
6. $a = \frac{3}{5} \wedge b = -\frac{4}{5}$.
7. $a = \pm 2 \wedge b = 1$.
8. Sim, pois $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{AC}$.

1.2 Norma, Versor e Ângulo

Definição 4

Considere o vetor $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$ de $\mathbb{R}^3$. A **norma, comprimento** ou **grandeza** de $\vec{u}$ é definida por $\|\vec{u}\| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}$.

Além das designações referidas existem muitas outras tais como **intensidade** ou **magnitude**, que são usadas consoante o contexto seja geométrico ou físico.

Propriedade 1

Se $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\vec{u}$ é um vetor então $\|\lambda \vec{u}\| = |\lambda| \|\vec{u}\|$.

Demonstração

Consideremos o caso particular em que $\vec{u}$ é um vetor de $\mathbb{R}^3$. Se $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$ então

$$\begin{aligned}\|\lambda \vec{u}\| &= \|(\lambda u_x, \lambda u_y, \lambda u_z)\| = \sqrt{(\lambda u_x)^2 + (\lambda u_y)^2 + (\lambda u_z)^2} \\ &= \sqrt{\lambda^2} \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2} = |\lambda| \|\vec{u}\|.\end{aligned}$$

Exemplo 6

Determine a norma dos vetores:

- (a) $\vec{u} = \left(-\frac{2}{15}, -\frac{4}{15}, \frac{4}{15}\right)$.
- (b) $\vec{v} = (-20000, 10000, 20000)$.
- (c) $\vec{w} = (3 \cdot 10^{-6}, 6 \cdot 10^{-6}, 2 \cdot 10^{-6})$.

Resolução

- (a) $\|\vec{u}\| = \left\| \left(-\frac{2}{15}, -\frac{4}{15}, \frac{4}{15} \right) \right\| = \left| -\frac{2}{15} \right| \|(1, 2, -2)\|$
 $= \frac{2}{15} \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} = \frac{2}{15} \sqrt{9} = \frac{2}{5}.$
- (b) $\|\vec{v}\| = \|10000(-2, 1, 2)\| = 10000 \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 2^2} = 10000\sqrt{9}$
 $= 30000 = 3 \cdot 10^4.$
- (c) $\|\vec{w}\| = \|(3 \cdot 10^{-6}, 6 \cdot 10^{-6}, 2 \cdot 10^{-6})\| = \|10^{-6}(3, 6, 2)\| = 10^{-6} \|(3, 6, 2)\|$
 $= 10^{-6} \sqrt{3^2 + 6^2 + 2^2} = 10^{-6} \sqrt{49} = 7 \cdot 10^{-6}.$

Definição 5

O **versor** de um vetor não nulo $\vec{u}$ é um vetor **unitário** (norma igual a 1) com a direção e sentido de $\vec{u}$ e denota-se por $\hat{u}$, sendo $\hat{u} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}.$

Observação: As componentes de qualquer vetor $\vec{u}$ podem ser obtidas a partir do seu comprimento e do seu versor pois $\vec{u} = \|\vec{u}\| \hat{u}.$

Exercício 2

Considere o vetor $\vec{v} = (3, 6, -6)$. Determine:

- (a) o versor de $\vec{v}$. (b) os vetores $\vec{u}$ tais que $\vec{u} \parallel \vec{v}$ e $\|\vec{u}\| = 3$.
 (c) o vetor $\vec{w}$ com sentido contrário ao de $\vec{v}$ e tal que $\|\vec{w}\| = 18$.

Resolução

- (a) A norma de $\vec{v}$ é $\|\vec{v}\| = \|(3, 6, -6)\| = \|3(1, 2, -2)\| = 3\sqrt{9} = 9.$

O versor de $\vec{v}$ é $\hat{v} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{1}{9}(3, 6, -6) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3} \right).$

- (b) **1.º processo:** Uma vez que $\vec{u} \parallel \vec{v}$ então os dois vetores ou têm o mesmo sentido ou têm sentidos opostos. Como $\|\vec{u}\| = 3$ então

$$\vec{u} = \pm 3\hat{v} = \pm 3 \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3} \right) = \pm(1, 2, -2).$$

Portanto, $\vec{u} = (1, 2, -2)$ ou $\vec{u} = (-1, -2, 2).$

2.º processo: Se $\vec{u} \parallel \vec{v}$ então $\vec{u} = k\vec{v}$, com $k \in \mathbb{R}$. Atendendo a que

$$\|\vec{u}\| = 3 \Leftrightarrow \|k\vec{v}\| = 3 \Leftrightarrow |k| \|\vec{v}\| = 3 \Leftrightarrow |k| = \frac{3}{9} \Leftrightarrow k = \pm \frac{1}{3}$$

então $\vec{u} = k\vec{v} = \pm \frac{1}{3}\vec{v} = \pm(1, 2, -2)$.

Assim, tem-se $\vec{u} = (1, 2, -2)$ ou $\vec{u} = (-1, -2, 2)$.

(c) Como se pretende que $\vec{w}$ tenha sentido contrário ao de $\vec{v}$ então $\hat{w} = -\hat{v}$.

Uma vez que $\|\vec{w}\| = 18$ então

$$\vec{w} = -18\hat{v} = -18\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) = (-6, -12, 12).$$

Logo, $\vec{w} = (-6, -12, 12)$.

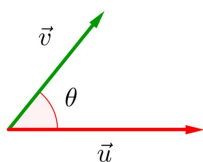
Definição 6

Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores não nulos, aplicados no mesmo ponto.

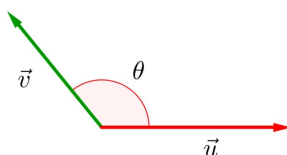
Designa-se por **ângulo entre** $\vec{u}$ e $\vec{v}$ o menor dos ângulos formados por esses vetores, e denota-se por $\angle(\vec{u}, \vec{v})$.

Observações: Doravante, consideram-se os vetores como aplicados no mesmo ponto. Seja $\theta = \angle(\vec{u}, \vec{v})$.

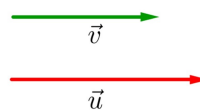
1. Tem-se $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$.
2. Se $\theta = 90^\circ$ diz-se que o ângulo é reto e para os restantes valores de θ tem-se:



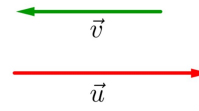
$0^\circ < \theta < 90^\circ$
Ângulo agudo



$90^\circ < \theta < 180^\circ$
Ângulo obtuso



$\theta = 0^\circ$
Ângulo nulo



$\theta = 180^\circ$
Ângulo raso

Teorema 1

Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos ($\vec{u} \parallel \vec{v}$) $\Leftrightarrow \angle(\vec{u}, \vec{v}) = 0^\circ \vee \angle(\vec{u}, \vec{v}) = 180^\circ$.

Exemplo 7

Determine o ângulo entre cada par de vetores nas figuras.



Resolução

Para medir o ângulo entre dois vetores é necessário fazer translação dos vetores de forma a terem o mesmo ponto inicial, pelo que $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = 150^\circ$ e $\angle(\vec{w}, \vec{t}) = 150^\circ$.

Definições 7

Os ângulos que um vetor $\vec{u}$ forma com os eixos Ox , Oy e Oz são denominados **ângulos diretores coordenados**, respetivamente θ_x , θ_y e θ_z . Os cossenos desses ângulos são designados por **cossenos diretores**.

Além disso:

► em $\mathbb{R}^2$ tem-se $\vec{u} = \|\vec{u}\| \hat{u} = \|\vec{u}\| (\cos \theta_x, \cos \theta_y)$, pelo que:

$$(\cos \theta_x)^2 + (\cos \theta_y)^2 = \|\hat{u}\|^2 = 1.$$

► em $\mathbb{R}^3$ tem-se $\vec{u} = \|\vec{u}\| \hat{u} = \|\vec{u}\| (\cos \theta_x, \cos \theta_y, \cos \theta_z)$, pelo que:

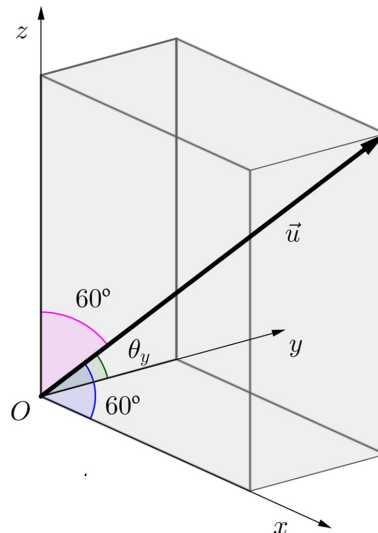
$$(\cos \theta_x)^2 + (\cos \theta_y)^2 + (\cos \theta_z)^2 = \|\hat{u}\|^2 = 1.$$

Exemplo 8

Considere o vetor $\vec{u}$ representado na figura, que está orientado segundo os ângulos diretores $\theta_x = 60^\circ$ e $\theta_z = 60^\circ$ e tem grandeza igual a 10.

Determine:

- (a) o ângulo diretor coordenado θ_y .
- (b) as componentes do vetor $\vec{u}$.



Resolução

- (a) Para determinar o ângulo diretor θ_y devemos considerar a relação

$$(\cos 60^\circ)^2 + (\cos \theta_y)^2 + (\cos 60^\circ)^2 = 1.$$

Atendendo a que

$$\begin{aligned} (\cos 60^\circ)^2 + (\cos \theta_y)^2 + (\cos 60^\circ)^2 = 1 &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 + (\cos \theta_y)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow (\cos \theta_y)^2 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

então $\cos \theta_y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Uma vez que o vetor $\vec{u}$ está orientado no sentido positivo do eixo Oy então $\cos \theta_y = \frac{\sqrt{2}}{2}$, ou seja, $\theta_y = 45^\circ$.

- (b) As componentes do vetor $\vec{u}$ são dadas por

$$\vec{u} = \|\vec{u}\| \hat{u} = 10 (\cos 60^\circ, \cos 45^\circ, \cos 60^\circ) = (5, 5\sqrt{2}, 5).$$

➤ Exercícios da Secção 1.2

1. Determine a norma do vetor $\overrightarrow{AB}$, sendo $A = (3, -2, 1)$ e $B = (1, 0, 2)$.

2. Determine a norma dos vetores:

(a) $\vec{u} = (16, -30, 0)$.

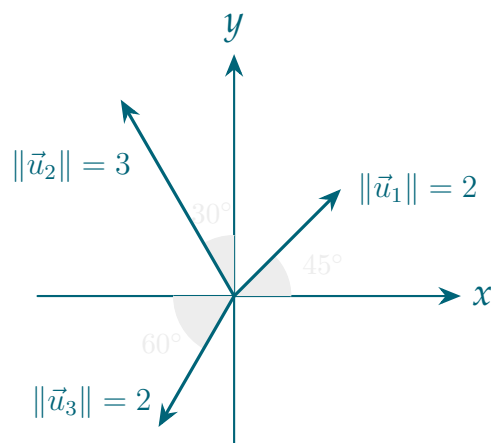
(b) $\vec{v} = (100, 200, -200)$.

(c) $\vec{w} = (3 \cdot 10^{-4}, -2 \cdot 10^{-4}, 6 \cdot 10^{-4})$.

3. Considere os vetores $\vec{u} = (1, 1, -1)$ e $\vec{v} = (20, 30, -60)$.

Determine os versores de $\vec{u}$ e de $\vec{v}$.

4. Determine as componentes dos vetores representados na figura.



5. Dado o vetor $\vec{u} = (0, 4, -3)$, determine o vetor $\vec{v}$ tal que $\vec{v} \parallel \vec{u}$ e $\|\vec{v}\| = 2$.

6. Considere os vetores $\vec{u} = (2, 1, -2)$, $\vec{v} = (1, 1, 0)$, $\vec{a} = (-1, 2, 2)$ e $\vec{w} = (3, -6, k)$, com $k \in \mathbb{R}$. Determine:

(a) $\|\vec{u}\| \vec{u} - 2\vec{v} + \vec{a}$.

(b) $\hat{a}$.

(c) k , de modo que $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$ seja paralelo ao plano Oxy .

(d) k , de modo que $\|\vec{w}\| = 7$.

(e) k , de modo que $\vec{a} \parallel \vec{w}$.

7. Considere em $\mathbb{R}^3$ o vetor $\vec{u}$ tal que $\|\vec{u}\| = 100$, $u_x > 0$, $\theta_y = 60^\circ$ e $\theta_z = 60^\circ$.

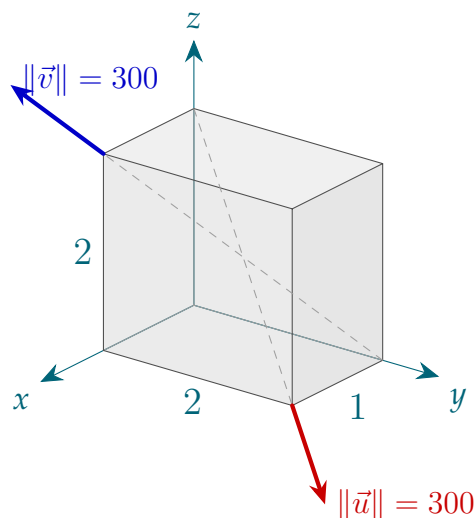
Determine:

(a) o ângulo diretor coordenado θ_x

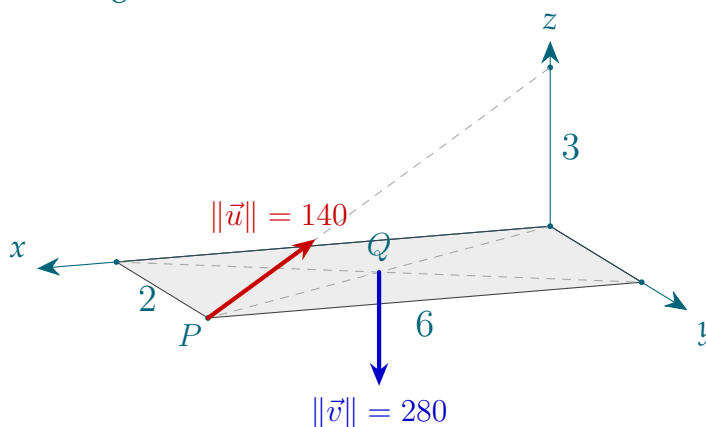
(b) as componentes do vetor $\vec{u}$.

8. Considere os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ representados na figura.

- Determine as componentes dos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{u} + \vec{v}$.
- Determine as coordenadas do ponto de encontro P das linhas de ação dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.
- Represente o vetor $\vec{u} + \vec{v}$ no ponto P .



9. Determine as coordenadas dos pontos P e Q e as componentes dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ representados na figura.



► Soluções dos Exercícios

1. 3.

2. (a) $\|\vec{u}\| = 34$. (b) $\|\vec{v}\| = 300$. (c) $\|\vec{w}\| = 7 \cdot 10^{-4}$.

3. $\hat{u} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3} \right)$ e $\hat{v} = \left(\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, -\frac{6}{7} \right)$.

4. $\vec{u}_1 = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $\vec{u}_2 = \left(-\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2} \right)$ e $\vec{u}_3 = (-1, -\sqrt{3})$.

5. $\vec{v} = \left(0, \frac{8}{5}, -\frac{6}{5} \right) \vee \vec{v} = \left(0, -\frac{8}{5}, \frac{6}{5} \right)$.

6. (a) $(3, 3, -4)$. (b) $\hat{a} = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$. (c) $k = 2$.

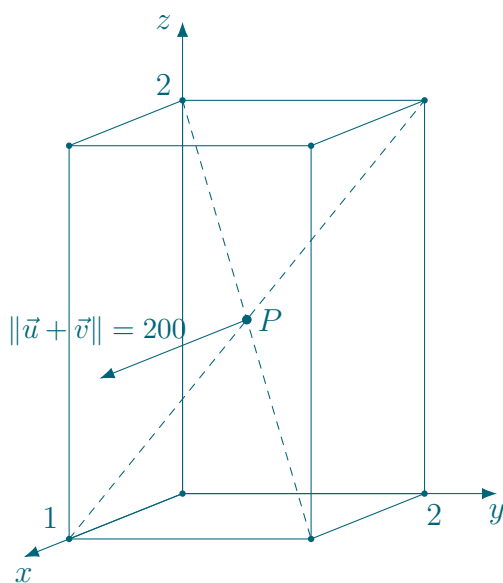
(d) $k = -2 \vee k = 2$. (e) $k = -6$.

7. (a) $\theta_x = 45^\circ$. (b) $\vec{u} = (50\sqrt{2}, 50, 50)$.

8. (a) $\vec{u} = (100, 200, -200)$, $\vec{v} = (100, -200, 200)$ e $\vec{u} + \vec{v} = (200, 0, 0)$.

(b) $P = \left(\frac{1}{2}, 1, 1\right)$.

(c)



9. $P = (6, 2, 0)$, $Q = (3, 1, 0)$, $\vec{u} = (-120, -40, 60)$ e $\vec{v} = (0, 0, -280)$.

1.3 Produto Escalar

O produto escalar permite quantificar a relação geométrica entre dois vetores, ligando propriedades geométricas a expressões algébricas.

Definições 8

Sejam $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$ e $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ vetores não nulos e $\theta = \angle(\vec{u}, \vec{v})$. Designa-se por **produto escalar** ou **produto interno** de $\vec{u}$ e $\vec{v}$, denotando-se por $\vec{u} \bullet \vec{v}$, o escalar dado pelas seguintes definições equivalentes.

► **Definição geométrica:** $\vec{u} \bullet \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta$.

► **Definição algébrica:** $\vec{u} \bullet \vec{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$.

Se $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ então $\vec{u} \bullet \vec{v} = 0$.

Teorema 2

Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores não nulos então:

1. $\vec{u} \bullet \vec{v} > 0$ se e só se $0^\circ < \theta < 90^\circ$ (ângulo **agudo**).
2. $\vec{u} \bullet \vec{v} = 0$ se e só se $\theta = 90^\circ$ (ângulo **reto**, $\vec{u} \perp \vec{v}$).
3. $\vec{u} \bullet \vec{v} < 0$ se e só se $90^\circ < \theta < 180^\circ$ (ângulo **obtuso**).

Demonstração

Como os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são não nulos então $\|\vec{u}\| > 0$ e $\|\vec{v}\| > 0$. Da definição geométrica do produto escalar, podemos concluir que o seu sinal depende do sinal de $\cos \theta$. Tem-se

1. $\vec{u} \bullet \vec{v} > 0 \Leftrightarrow \cos \theta > 0 \Leftrightarrow 0^\circ < \theta < 90^\circ \Leftrightarrow \theta$ é um ângulo agudo.
2. $\vec{u} \bullet \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \cos \theta = 0 \Leftrightarrow \theta = 90^\circ \Leftrightarrow \theta$ é um ângulo reto.
3. $\vec{u} \bullet \vec{v} < 0 \Leftrightarrow \cos \theta < 0 \Leftrightarrow 90^\circ < \theta < 180^\circ \Leftrightarrow \theta$ é um ângulo obtuso. ■

Observação: A condição 2. do Teorema 2 estabelece uma condição necessária e suficiente da ortogonalidade ou perpendicularidade de dois vetores.

Propriedades 2

Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores não nulos então:

1. $\cos \theta = \frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} = \frac{u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$.
2. $\vec{u} \bullet \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$, pois $\vec{u} \bullet \vec{u} = \|\vec{u}\| \|\vec{u}\| \cos 0^\circ = \|\vec{u}\|^2$.
3. se $\vec{u} \parallel \vec{v}$ e os vetores têm o **mesmo sentido** então $\vec{u} \bullet \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$, pois $\cos \theta = 1$.
4. se $\vec{u} \parallel \vec{v}$ e os vetores têm **sentidos opostos** então $\vec{u} \bullet \vec{v} = -\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$, pois $\cos \theta = -1$.

Exercício 3

Considere os vetores $\vec{u} = (1, 0, -1)$, $\vec{v} = (0, 2, 2)$ e $\vec{w} = (\alpha^2, 2, 4)$. Determine:

- (a) o ângulo θ formado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.
- (b) o ângulo que o vetor $\vec{u}$ faz com o eixo Oz .
- (c) os valores de α de modo que os vetores $\vec{u}$ e $\vec{w}$ sejam perpendiculares.
- (d) os valores de α de modo que o ângulo formado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{w}$ seja obtuso.

Resolução

(a) Atendendo a que

$$\cos \theta = \frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} = \frac{1 \cdot 0 + 0 \cdot 2 - 1 \cdot 2}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

vem que o ângulo formado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é 120° .

(b) Como

$$\cos \angle(\vec{u}, \hat{e}_z) = \frac{(1, 0, -1) \bullet (0, 0, 1)}{\|1, 0, -1\| \|0, 0, 1\|} = \frac{1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1}{\sqrt{2} \cdot 1} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

então o vetor $\vec{u}$ faz um ângulo de 135° com o eixo Oz .

(c) Dado que $\vec{u} \bullet \vec{w} = (1, 0, -1) \bullet (\alpha^2, 2, 4) = 1 \cdot \alpha^2 + 0 \cdot 2 - 1 \cdot 4 = \alpha^2 - 4$ então

$$\vec{u} \perp \vec{w} \Leftrightarrow \vec{u} \bullet \vec{w} = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \pm\sqrt{4} \Leftrightarrow \alpha = \pm 2$$

ou seja, $\vec{u}$ e $\vec{w}$ são perpendiculares se e só se $\alpha \in \{-2, 2\}$.

(d) O ângulo θ formado por $\vec{u}$ e $\vec{w}$ é obtuso quando

$$\vec{u} \bullet \vec{w} < 0 \Leftrightarrow (1, 0, -1) \bullet (\alpha^2, 2, 4) < 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - 4 < 0$$

e a função $f(\alpha) = \alpha^2 - 4$ tem como zeros -2 e 2 , e a concavidade do seu gráfico está voltada para cima então o ângulo θ é obtuso se e só se $\alpha \in]-2, 2[$.

Propriedades 3

Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores e λ um escalar. O produto escalar é:

1. comutativo: $\vec{u} \bullet \vec{v} = \vec{v} \bullet \vec{u}$.
2. associativo relativamente à multiplicação escalar

$$\vec{u} \bullet (\lambda \vec{v}) = (\lambda \vec{u}) \bullet \vec{v} = \lambda (\vec{u} \bullet \vec{v}).$$

3. distributivo em relação à adição de vetores

$$(\vec{u} + \vec{v}) \bullet \vec{w} = \vec{u} \bullet \vec{w} + \vec{v} \bullet \vec{w} \text{ e}$$

$$\vec{u} \bullet (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \bullet \vec{v} + \vec{u} \bullet \vec{w}.$$

Observação: O produto escalar **não é associativo** pois as expressões $(\vec{u} \bullet \vec{v}) \bullet \vec{w}$ e $\vec{u} \bullet (\vec{v} \bullet \vec{w})$ não estão definidas.

Exercício 4

Mostre que $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \bullet \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$.

Resolução

Aplicando as propriedades do produto escalar tem-se

$$\begin{aligned} \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 &= (\vec{u} - \vec{v}) \bullet (\vec{u} - \vec{v}) \\ &= \vec{u} \bullet \vec{u} - \vec{u} \bullet \vec{v} - \vec{v} \bullet \vec{u} + (-\vec{v}) \bullet (-\vec{v}) \\ &= \|\vec{u}\|^2 - \vec{u} \bullet \vec{v} - \vec{u} \bullet \vec{v} + \vec{v} \bullet \vec{v} = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \bullet \vec{v} + \|\vec{v}\|^2. \end{aligned}$$

Exercício 5

Sabendo que $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 4$ e $\|\vec{u} - \vec{v}\| = 2\sqrt{3}$, determine o ângulo θ formado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Resolução

Atendendo a que

$$\begin{aligned}\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 &= \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 \\ \Leftrightarrow 12 &= 2^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + 4^2 \Leftrightarrow 2\vec{u} \cdot \vec{v} = 8 \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 4\end{aligned}$$

então

$$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} = \frac{4}{2 \cdot 4} = \frac{1}{2}$$

ou seja, $\theta = 60^\circ$.

Exercício 6

Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores não nulos e λ um escalar tais que:

$$\|\vec{u}\| = 2 \|\vec{w}\| = 2, \quad \vec{u} \perp \vec{v} \text{ e } \angle(\vec{u}, \vec{w}) = 120^\circ.$$

Determine o valor da expressão $2\vec{u} \cdot (\vec{u} + 2\vec{v} - 3\vec{w})$.

Resolução

Como $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{w}\| = 1$ e $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ (pois $\vec{u} \perp \vec{v}$) então

$$\begin{aligned}2\vec{u} \cdot (\vec{u} + 2\vec{v} - 3\vec{w}) &= 2\vec{u} \cdot \vec{u} + 4\vec{u} \cdot \vec{v} - 6\vec{u} \cdot \vec{w} \\ &= 2\|\vec{u}\|^2 + 4 \cdot 0 - 6\|\vec{u}\| \|\vec{w}\| \cos 120^\circ \\ &= 2 \cdot 2^2 + 0 - 6 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 14.\end{aligned}$$

Definições 9

A **projeção ortogonal** ou **vetorial** do vetor $\vec{v}$ sobre o vetor $\vec{u}$, denotando-se por $\text{proj}_{\vec{u}} \vec{v}$, é um vetor paralelo ao vetor $\vec{u}$ definido por:

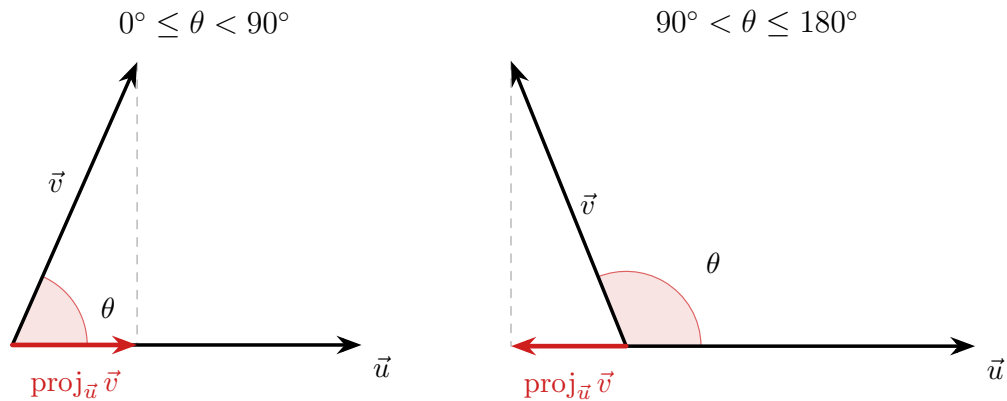
$$\text{proj}_{\vec{u}} \vec{v} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|} \hat{u}.$$

O comprimento de $\text{proj}_{\vec{u}} \vec{v}$ é designado por **projeção escalar** do vetor $\vec{v}$ sobre o vetor $\vec{u}$ e define-se por:

$$\|\text{proj}_{\vec{u}} \vec{v}\| = \frac{|\vec{u} \bullet \vec{v}|}{\|\vec{u}\|}.$$

Observações:

1. Se $\theta = 90^\circ$ então $\text{proj}_{\vec{u}} \vec{v} = \vec{0}$ e $\|\text{proj}_{\vec{u}} \vec{v}\| = 0$.
2. Considerem-se os casos de $0^\circ \leq \theta < 90^\circ$ e $90^\circ < \theta \leq 180^\circ$ que são ilustrados nos dois exemplos da figura.



Note que $\text{proj}_{\vec{u}} \vec{v} = \alpha \hat{u}$, sendo $\hat{u}$ o versor de $\vec{u}$ e α o escalar definido por:

$$\alpha = \|\vec{v}\| \cos \theta = \|\vec{v}\| \frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} = \frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{\|\vec{u}\|}$$

ou seja, a projeção escalar do vetor $\vec{v}$ sobre o vetor $\vec{u}$ é igual a:

$$\|\text{proj}_{\vec{u}} \vec{v}\| = \frac{|\vec{u} \bullet \vec{v}|}{\|\vec{u}\|}.$$

Como $\hat{u} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ então a projeção vetorial do vetor $\vec{v}$ sobre o vetor $\vec{u}$ é:

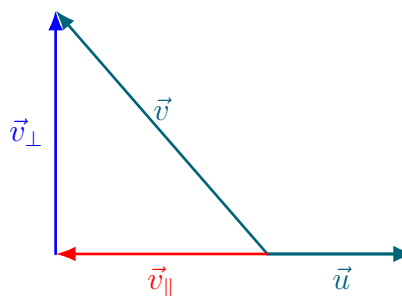
$$\text{proj}_{\vec{u}} \vec{v} = \alpha \hat{u} = \frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{\|\vec{u}\|} \hat{u} = \frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u}.$$

Observação: Considere um vetor não nulo $\vec{u}$.

Denote-se por $\vec{v}_{\parallel}$ e $\vec{v}_{\perp}$ as componentes que são paralela e perpendicular, respectivamente, ao vetor $\vec{u}$.

Então $\vec{v} = \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp}$ com

$$\vec{v}_{\parallel} = \text{proj}_{\vec{u}} \vec{v} \quad \text{e} \quad \vec{v}_{\perp} = \vec{v} - \vec{v}_{\parallel}.$$



Exercício 7

Considere os vetores $\vec{u} = (2, 1, -2)$ e $\vec{v} = (1, 0, -1)$. Determine:

- a projeção ortogonal do vetor $\vec{u}$ sobre o vetor $\vec{v}$.
- as componentes do vetor $\vec{u}$ que são paralela e perpendicular, respectivamente, ao vetor $\vec{v}$.

Resolução

- (a) A projeção ortogonal do vetor $\vec{u}$ sobre o vetor $\vec{v}$ é

$$\text{proj}_{\vec{v}} \vec{u} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} \vec{v} = \frac{(2, 1, -2) \cdot (1, 0, -1)}{(\sqrt{2})^2} \vec{v} = 2\vec{v} = (2, 0, -2).$$

- (b) A componente de $\vec{u}$ paralela ao vetor $\vec{v}$ é $\vec{u}_{\parallel} = \text{proj}_{\vec{v}} \vec{u} = (2, 0, -2)$.

A componente de $\vec{u}$ perpendicular ao vetor $\vec{v}$ é

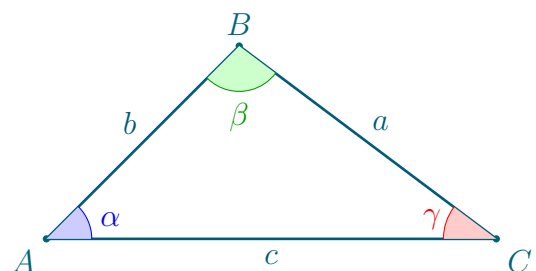
$$\vec{u}_{\perp} = \vec{u} - \vec{u}_{\parallel} = (2, 1, -2) - (2, 0, -2) = (0, 1, 0).$$

► Exercícios da Seção 1.3

- Considere os vetores $\vec{u} = (1, 2)$ e $\vec{v} = (2, -1)$. Determine:
 - $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
 - $\angle(\vec{u}, \vec{v})$ em graus e em radianos.
- Considere os vetores $\vec{u} = (2, -4, -4)$ e $\vec{v} = (-1, 2, 2)$. Determine:
 - $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
 - $\angle(\vec{u}, \vec{v})$ em graus e em radianos.
- Verifique se o ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é agudo, obtuso ou reto:
 - $\vec{u} = (1, -2, 5)$ e $\vec{v} = (1, -1, -1)$.

- (b) $\vec{u} = (1, 2, 3)$ e $\vec{v} = (1, 1, -1)$.
 (c) $\vec{u} = (-1, 2, -5)$ e $\vec{v} = (1, -1, -1)$.
4. Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores de $\mathbb{R}^3$ tais que $\|\vec{u}\| = 1$, $\|\vec{v}\| = 2$ e $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = 60^\circ$. Determine $\vec{u} \bullet \vec{v}$.
5. Considere os vetores $\vec{u} = (1, 2, 0)$, $\vec{v} = (2, 2, -1)$ e $\vec{w} = (3, -2, 1)$. Determine:
 (a) $\vec{u} \bullet (\vec{v} - \vec{w})$. (b) $\|\vec{v}\| (\vec{u} \bullet \vec{w})$. (c) $\vec{v} \bullet 2\vec{w}$.
6. Sabendo que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores de $\mathbb{R}^3$ tais que $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 2$ e $\vec{u} \perp \vec{v}$, determine o valor da expressão $(2\vec{u} - \vec{v}) \bullet (\vec{v} - 3\vec{u})$.
7. Sabendo que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores de $\mathbb{R}^3$ tais que $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 7$ e $\|\vec{u} + \vec{v}\| = 8$, mostre que $\cos \angle(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{1}{7}$.
8. Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores não nulos de $\mathbb{R}^3$. Mostre que se $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$ então $(\vec{u} + \vec{v}) \perp (\vec{u} - \vec{v})$.
9. **(Teorema de Pitágoras)** Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores não nulos de $\mathbb{R}^3$. Mostre que $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$ se e só se $\vec{u} \perp \vec{v}$.
10. Sabendo que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores de $\mathbb{R}^3$ tais que $\|\vec{u} + \vec{v}\| = 3$ e $\|\vec{u} - \vec{v}\| = 1$, mostre que $\vec{u} \bullet \vec{v} = 2$.
11. Considere os vetores $\vec{u} = (2, 1, -2)$ e $\vec{v} = (3, -6, k)$, $k \in \mathbb{R}$. Determine:
 (a) o valor do parâmetro k , de modo que $\vec{u} \perp \vec{v}$.
 (b) os vetores unitários perpendiculares ao vetor $\vec{u}$ e que são paralelos ao plano Oxy .
 (c) k , de modo que $\angle(\vec{v}, \hat{e}_z) = 60^\circ$, sendo $\hat{e}_z$ o vetor de base do eixo Oz .
12. Considere os vetores $\vec{u} = (2, 1, -2)$ e $\vec{v} = (3, 6, 0)$. Determine:
 (a) a projeção ortogonal do vetor $\vec{v}$ sobre o vetor $\vec{u}$.
 (b) as componentes do vetor $\vec{v}$ que são paralela e perpendicular, respectivamente, ao vetor $\vec{u}$.
13. Seja $[ABC]$ um triângulo de lados com medidas a, b e c e ângulos internos α, β e γ .
 Mostre que é válida a **lei dos cossenos**:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$$

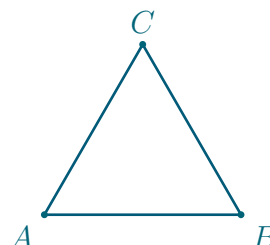


Sugestão: Sejam $\vec{a} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BA}$ e $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$. Tem-se $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$ e $\|\vec{a}\|^2 = (\vec{b} + \vec{c}) \bullet (\vec{b} + \vec{c})$.

14. Seja $[ABC]$ um triângulo equilátero cujos lados medem 2 cm.

Mostre que:

$$\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \bullet \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{AB} = 2.$$



► Soluções dos Exercícios

1. (a) 0. (b) $90^\circ = \frac{\pi}{2}$.
2. (a) -18. (b) $180^\circ = \pi$.
3. (a) obtuso. (b) reto. (c) agudo.
4. 1.
5. (a) 7. (b) -3. (c) 2.
6. -28.
7. —
8. —
9. —
10. —
11. (a) 0. (b) $\left(\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{2\sqrt{5}}{5}, 0\right)$ e $\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}, 0\right)$. (c) $\sqrt{15}$.
12. (a) $\left(\frac{8}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{8}{3}\right)$. (b) $\vec{v}_{\parallel} = \left(\frac{8}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{8}{3}\right)$ e $\vec{v}_{\perp} = \left(\frac{1}{3}, \frac{14}{3}, \frac{8}{3}\right)$.
13. —
14. —

1.4 Produto Vetorial

Sejam $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$ e $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ vetores de $\mathbb{R}^3$ e $\theta = \angle(\vec{u}, \vec{v})$.

O **produto vetorial** ou **produto externo** de dois vetores é um vetor dado pelas próximas duas definições que são equivalentes.

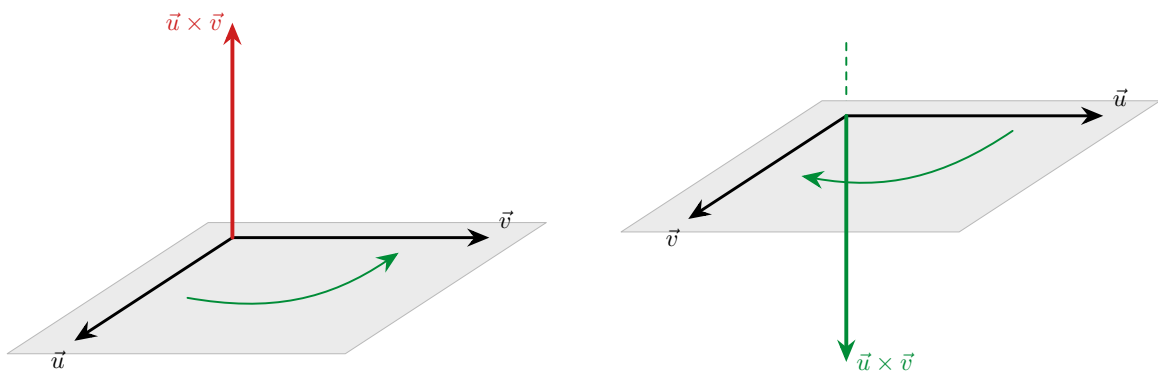
Definição 10

Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores não paralelos ($\vec{u} \nparallel \vec{v}$) de $\mathbb{R}^3$. Designa-se por **produto vetorial** ou **produto externo** de $\vec{u}$ por $\vec{v}$, denotando-se por $\vec{u} \times \vec{v}$ ou $\vec{u} \wedge \vec{v}$, o vetor com as seguintes características:

- ▶ a *direção* é perpendicular ao **paralelogramo** definido por $\vec{u}$ e $\vec{v}$.
- ▶ o *sentido* é dado pela regra da mão direita (descrita na próxima observação).
- ▶ o *comprimento* é igual à **área do paralelogramo** definido por $\vec{u}$ e $\vec{v}$, isto é, $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \text{Área}(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \theta$.

Se $\vec{u} \parallel \vec{v}$ então $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$.

Observação: O sentido de $\vec{u} \times \vec{v}$ é dado pela regra da mão direita, tal como ilustrado nos dois exemplos da figura. Rodando a mão direita de $\vec{u}$ para $\vec{v}$, o polegar indicará o sentido de $\vec{u} \times \vec{v}$, ou seja, no exemplo da esquerda o polegar aponta para cima e no exemplo da direita o polegar aponta para baixo.



Definição 11

O **produto vetorial** de $\vec{u}$ por $\vec{v}$ define-se por:

$$\vec{u} \times \vec{v} = (u_x, u_y, u_z) \times (v_x, v_y, v_z) = (u_y v_z - u_z v_y, -(u_x v_z - u_z v_x), u_x v_y - u_y v_x).$$

Observações:

1. Para auxiliar no cálculo das componentes do vetor $\vec{u} \times \vec{v}$ pode recorrer-se à notação:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \circ & \circ & \circ \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} u_y & u_z \\ v_y & v_z \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_x & u_z \\ v_x & v_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} \right),$$

onde $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc, \forall a, b, c, d \in \mathbb{R}.$

2. Recorrendo à Definição 10 e de acordo com os exemplos da observação anterior, tem-se $\vec{v} \times \vec{u} = -\vec{u} \times \vec{v}.$

Exemplo 9

Verifique que o produto vetorial entre os vetores do referencial ortonormado de $\mathbb{R}^3$ é dado por:

$\times$	$\hat{e}_x$	$\hat{e}_y$	$\hat{e}_z$
$\hat{e}_x$	$\vec{0}$	$\hat{e}_z$	$-\hat{e}_y$
$\hat{e}_y$	$-\hat{e}_z$	$\vec{0}$	$\hat{e}_x$
$\hat{e}_z$	$\hat{e}_y$	$-\hat{e}_x$	$\vec{0}$

Resolução

► $\hat{e}_x \times \hat{e}_x = \vec{0}, \hat{e}_y \times \hat{e}_y = \vec{0}$ e $\hat{e}_z \times \hat{e}_z = \vec{0}$, pois $\hat{e}_x \parallel \hat{e}_x, \hat{e}_y \parallel \hat{e}_y$ e $\hat{e}_z \parallel \hat{e}_z$.

►
$$\begin{aligned} \hat{e}_x \times \hat{e}_y &= \begin{vmatrix} \circ & \circ & \circ \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) \\ &= (0 \cdot 0 - 0 \cdot 1, -(1 \cdot 0 - 0 \cdot 0), 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0) = (0, 0, 1) = \hat{e}_z. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \hat{e}_x \times \hat{e}_z &= \begin{vmatrix} \circ & \circ & \circ \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \right) \\ &= (0 \cdot 1 - 0 \cdot 0, -(1 \cdot 1 - 0 \cdot 0), 1 \cdot 0 - 0 \cdot 0) = (0, -1, 0) = -\hat{e}_y. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \hat{e}_y \times \hat{e}_z &= \begin{vmatrix} \circ & \circ & \circ \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (1 \cdot 1 - 0 \cdot 0, -(0 \cdot 1 - 0 \cdot 0), 0 \cdot 0 - 1 \cdot 0) = (1, 0, 0) = \hat{e}_x. \end{aligned}$$

► Por outro lado, tendo em conta o ponto 2 da observação anterior, tem-se

$$\begin{aligned} \triangleright \hat{e}_y \times \hat{e}_x &= -\hat{e}_x \times \hat{e}_y = -\hat{e}_z \\ \triangleright \hat{e}_z \times \hat{e}_x &= -\hat{e}_x \times \hat{e}_z = \hat{e}_y \\ \triangleright \hat{e}_z \times \hat{e}_y &= -\hat{e}_y \times \hat{e}_z = -\hat{e}_x. \end{aligned}$$

Propriedades 4

O produto vetorial tem as propriedades:

1. $\vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{u}$ e $\vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{v}$.
2. $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \text{Área}(\vec{u}, \vec{v})$ (paralelogramo definido por $\vec{u}$ e $\vec{v}$).
3. $\frac{\|\vec{u} \times \vec{v}\|}{2} = \text{Área}_{\triangle}(\vec{u}, \vec{v})$ (triângulo definido por $\vec{u}$ e $\vec{v}$).

Propriedades 5

Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores de $\mathbb{R}^3$ e λ um escalar. O produto vetorial é:

1. anticomutativo: $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$.
2. associativo relativamente à multiplicação escalar
 $\vec{u} \times (\lambda \vec{v}) = (\lambda \vec{u}) \times \vec{v} = \lambda (\vec{u} \times \vec{v})$.
3. distributivo em relação à adição de vetores
 $(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w}$ e
 $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$.

Teorema 3

Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores de $\mathbb{R}^3$. Então $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$ se e só se $\vec{u} \parallel \vec{v}$.

Exercício 8

Considere os vetores $\vec{u} = (1, 0, -1)$ e $\vec{v} = (1, 2, 1)$. Determine:

- (a) o vetor $\vec{u} \times \vec{v}$ e o vetor $\vec{v} \times \vec{u}$.
- (b) a área do paralelogramo definido por $\vec{u}$ e $\vec{v}$.
- (c) a área do triângulo definido por $\vec{u}$ e $\vec{v}$.
- (d) os vetores de comprimento 3 que são ortogonais a $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Resolução

- (a) O produto vetorial $\vec{u} \times \vec{v}$ é dado por

$$\begin{aligned}\vec{u} \times \vec{v} &= \begin{vmatrix} \circ & \circ & \circ \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right) \\ &= (0 \cdot 1 - (-1) \cdot 2, -(1 \cdot 1 - (-1) \cdot 1), 1 \cdot 2 - 0 \cdot 1) = (2, -2, 2)\end{aligned}$$

pelo que $\vec{v} \times \vec{u} = -\vec{u} \times \vec{v} = (-2, 2, -2)$.

- (b) A área do paralelogramo definido por $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é dada por

$$\text{Área}(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|(2, -2, 2)\| = 2\|(1, -1, 1)\| = 2\sqrt{3}.$$

- (c) A área do triângulo definido por $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é dada por

$$\text{Área}_{\triangle(\vec{u}, \vec{v})} = \frac{\|\vec{u} \times \vec{v}\|}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$

- (d) Seja $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = (2, -2, 2)$. Então $\vec{n} \perp \vec{u}$ e $\vec{n} \perp \vec{v}$.

Os vetores de comprimento 3 que são ortogonais a $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são

$$\vec{a} = \pm 3\hat{n} = \pm 3 \frac{(2, -2, 2)}{2\sqrt{3}} = \pm \sqrt{3}(1, -1, 1)$$

ou seja, $\vec{a} = \sqrt{3}(1, -1, 1)$ ou $\vec{a} = -\sqrt{3}(1, -1, 1)$.

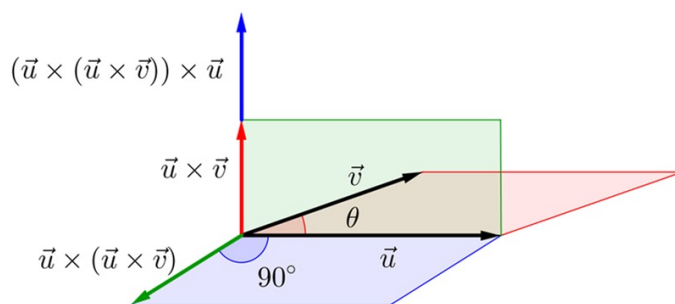
Exercício 9

Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores não paralelos de $\mathbb{R}^3$. Caracterize a direção e o sentido do vetor $\vec{a} = (\vec{u} \times (\vec{u} \times \vec{v})) \times \vec{u}$.

Resolução

Conforme se ilustra na figura, $\vec{u} \times \vec{v}$ é perpendicular a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$, logo perpendicular ao paralelogramo definido por eles. O vetor $\vec{u} \times (\vec{u} \times \vec{v})$ é perpendicular ao paralelogramo definido por $\vec{u}$ e $\vec{u} \times \vec{v}$.

Por último tem-se $\vec{a} = (\vec{u} \times (\vec{u} \times \vec{v})) \times \vec{u}$ sendo perpendicular ao paralelogramo definido por $\vec{u}$ e por $\vec{u} \times (\vec{u} \times \vec{v})$, tem a direção de $\vec{u} \times \vec{v}$. O sentido de $\vec{a}$ é o mesmo de $\vec{u} \times \vec{v}$, atendendo à regra da mão direita aplicada de forma sucessiva nos 3 casos. Portanto, $\vec{a}$ tem a direção e sentido de $\vec{u} \times \vec{v}$.



Observação: O produto vetorial **não é associativo** pois, em geral

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} \neq \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}).$$

Exercício 10

Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores de $\mathbb{R}^3$ e λ um escalar tais que:

$$\|\vec{u}\| = 2, \|\vec{v}\| = \sqrt{3}, \vec{u} \parallel \vec{w} \text{ e } \angle(\vec{u}, \vec{v}) = 60^\circ.$$

Determine o valor da expressão $\|\vec{u} \times (2\vec{u} - 2\vec{v} + \vec{w})\|$.

Resolução

Como $\vec{u} \parallel \vec{u}$ e $\vec{u} \parallel \vec{w}$ então

$$\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0} \text{ e } \vec{u} \times \vec{w} = \vec{0},$$

pelo que

$$\begin{aligned}
 \|\vec{u} \times (2\vec{u} - 2\vec{v} + \vec{w})\| &= \|2\vec{u} \times \vec{u} - 2\vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}\| \\
 &= \|\vec{0} - 2\vec{u} \times \vec{v} + \vec{0}\| \\
 &= |-2| \|\vec{u} \times \vec{v}\| = 2 \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin 60^\circ \\
 &= 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6.
 \end{aligned}$$

Portanto, $\|\vec{u} \times (2\vec{u} - 2\vec{v} + \vec{w})\| = 6$.

► Exercícios da Seção 1.4

1. Considere os vetores

$$\vec{u} = (1, 2, 0), \vec{v} = (2, 2, -1), \vec{z} = (-2, -4, 1) \text{ e } \vec{w} = 1000(2, 2, -1).$$

Determine:

- (a) os vetores $\vec{u} \times \vec{v}$ e $\vec{v} \times \vec{u}$.
 (b) os vetores $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{z}$ e $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{z})$.
 (c) o vetor $\vec{u} \times \vec{w}$.

2. Considere os vetores $\vec{u} = (-1, 2, 1)$, $\vec{v} = (2, 0, -1)$ e $\vec{z} = (2, -4, -2)$.

Determine:

- (a) $\vec{u} \times \vec{u}$.
 (b) $\vec{u} \times \vec{v}$.
 (c) $\vec{u} \times \vec{z}$.
 (d) $\vec{u} \times (\vec{v} - \vec{z})$.
 (e) $(\vec{u} + \vec{v}) \times (\vec{v} - 2\vec{z})$.

3. Considere os vetores $\vec{u} = (0, 2, -1)$ e $\vec{v} = (1, 2, -1)$. Determine:

- (a) os vetores unitários $\vec{w}$ tais que $\vec{w} \perp \vec{u}$ e $\vec{w} \perp \vec{v}$.
 (b) a área do paralelogramo definido por $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

4. Determine a área do triângulo definido pelos pontos $A = (0, 1, 2)$, $B = (2, 0, 0)$ e $C = (1, -1, 1)$.

5. Considere os vetores $\hat{e}_x$, $\hat{e}_y$ e $\hat{e}_z$ do referencial ortonormado de $\mathbb{R}^3$.

Simplifique a expressão:

- (a) $(2\hat{e}_x \bullet \hat{e}_x)\hat{e}_y \times \hat{e}_x$.
 (b) $(2\hat{e}_y \times 3\hat{e}_x) \times 4\hat{e}_z$.
 (c) $[\hat{e}_y \times (\hat{e}_z \times \hat{e}_y)] \times \hat{e}_x$.

6. Sejam $\vec{u} = (4k, k, 1)$ e $\vec{v} = (k, -1, -1)$ vetores não nulos. Determine k de modo que $\vec{u} \times \vec{v}$ seja paralelo ao plano Oxy .

7. Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores não nulos de $\mathbb{R}^3$ e α um número real não nulo. Indique, justificando, se a expressão define um escalar, um vetor ou não está definida:

- (a) $\vec{u} \bullet \vec{v} + \vec{u} \times \vec{v}$. (b) $(\vec{u} \bullet \vec{v}) \times \vec{w}$. (c) $\alpha \bullet \vec{u}$.
 (d) $(\vec{u} \times \vec{v}) \bullet \vec{w}$. (e) $(\vec{u} \bullet \vec{v}) \vec{v} \times \|\vec{w}\| \vec{w}$. (f) $\alpha \times \vec{u}$.
 (g) $\frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{\|\vec{u} \times \vec{v}\|}$.
8. Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores não nulos de $\mathbb{R}^3$ tais que $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$ e $\vec{u} \perp \vec{v}$. Mostre que $\vec{u} \bullet (\vec{u} + \vec{v}) - \|\vec{u} \times \vec{v}\| = 0$.
9. Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores não nulos de $\mathbb{R}^3$. Mostre que a área do paralelogramo definido por $\vec{u} + \vec{v}$ e $\vec{u} - \vec{v}$ é o dobro da área do paralelogramo definido por $\vec{u}$ e $\vec{v}$.
10. Sejam O, A, B e C quaisquer pontos de $\mathbb{R}^3$. Considere o triângulo T de vértices A, B e C e os vetores $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ e $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$. Mostre que:
- $$\text{Área } T = \frac{1}{2} \left\| \vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a} \right\|.$$
11. Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores unitários e ortogonais de $\mathbb{R}^3$. Determine:
- (a) $\vec{u} \times (\vec{u} \times \vec{v})$. (b) $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{v}$.

► Soluções dos Exercícios

1. (a) $(-2, 1, -2)$ e $(2, -1, 2)$. (b) $(-7, 6, 10)$ e $(-8, 4, 4)$. (c) $1000(-2, 1, -2)$.
 2. (a) $(0, 0, 0)$. (b) $(-2, 1, -4)$. (c) $(0, 0, 0)$.
 (d) $(-2, 1, -4)$. (e) $(6, -3, 12)$.
 3. (a) $\left(0, \frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$ e $\left(0, -\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$. (b) $\sqrt{5}$.
 4. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.
 5. (a) $-2\hat{e}_z = (0, 0, -2)$. (b) $\vec{0}$. (c) $\hat{e}_y$.
 6. $k = -4 \vee k = 0$.
 7. (a) Não definida. (b) Não definida. (c) Não definida. (d) Escalar.
 (e) Vetor. (f) Não definida. (g) Escalar se $\vec{u} \nparallel \vec{v}$.
 8. — 9. — 10. —
 11. (a) $-\vec{v}$. (b) $-\vec{u}$.

1.5 Produto Misto

Sejam $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$, $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ e $\vec{w} = (w_x, w_y, w_z)$ vetores de $\mathbb{R}^3$.

Definição 12

Designa-se por **produto misto** de $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ o escalar definido por $\vec{u} \times \vec{v} \bullet \vec{w}$.

Observações:

1. A operação de produto vetorial deve ser realizada antes do produto escalar.
2. Qualquer expressão obtida a partir de $(\vec{u} \times \vec{v}) \bullet \vec{w}$ por permutação dos vetores e/ou pela troca entre as operações $\times$ e $\bullet$ também representa o produto misto, podendo, no entanto, alterar o seu sinal.

Propriedades 6

Com base na definição de $\vec{u} \times \vec{v} \bullet \vec{w}$, verificam-se as seguintes propriedades:

1. a troca da ordem das operações $\bullet$ e $\times$ não altera o valor do produto misto:

$$\vec{u} \bullet \vec{v} \times \vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} \bullet \vec{w}.$$

2. uma permutação de dois vetores altera o sinal do produto misto:

$$\vec{u} \times \vec{w} \bullet \vec{v} = \vec{v} \times \vec{u} \bullet \vec{w} = \vec{w} \times \vec{v} \bullet \vec{u} = -\vec{u} \times \vec{v} \bullet \vec{w}.$$

3. duas permutações de dois vetores não altera o valor do produto misto:

$$\vec{v} \times \vec{w} \bullet \vec{u} = \vec{w} \times \vec{u} \bullet \vec{v} = \vec{u} \times \vec{v} \bullet \vec{w}.$$

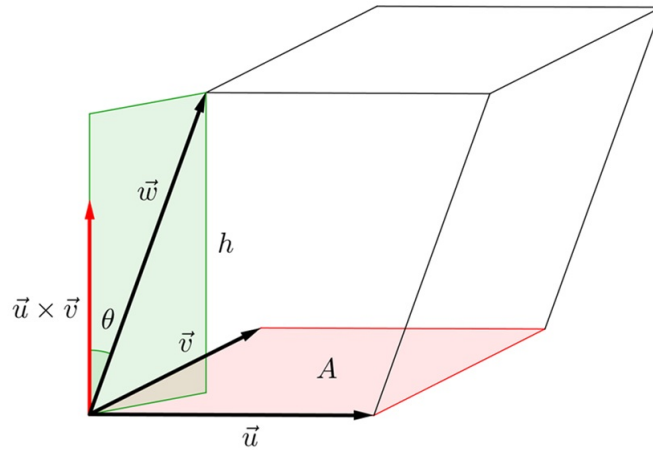
Teorema 4

O volume de um paralelepípedo definido por vetores não nulos de $\mathbb{R}^3$, $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ é igual a:

$$\text{Volume}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = |\vec{u} \times \vec{v} \bullet \vec{w}|.$$

Demonstração

Considere $\theta = \angle(\vec{u} \times \vec{v}, \vec{w})$ e o paralelepípedo definido por $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$.



O volume deste paralelepípedo pode ser obtido multiplicando a área da base $A = \|\vec{u} \times \vec{v}\|$ pela altura $h = \|\vec{w}\| |\cos \theta|$, ou seja

$$V = Ah = \|\vec{u} \times \vec{v}\| \|\vec{w}\| |\cos \theta| = |\vec{u} \times \vec{v} \bullet \vec{w}|.$$

A inclusão do módulo no cosseno é necessária uma vez que θ pode ser superior a 90° . De facto, isto acontece pois $\vec{u} \times \vec{v}$ pode ter sentido contrário ao indicado na figura, o que sucederia se houvesse uma troca entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Observação: Note que h pode ser obtido sem recorrer à trigonometria.

Como $\|\text{proj}_{\vec{a}} \vec{c}\| = \frac{|\vec{a} \bullet \vec{c}|}{\|\vec{a}\|}$ então

$$h = \|\text{proj}_{\vec{u} \times \vec{v}} \vec{w}\| = \frac{|\vec{u} \times \vec{v} \bullet \vec{w}|}{\|\vec{u} \times \vec{v}\|}.$$

Definição 13

Os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ dizem-se **coplanares** quando:

- ▶ dois deles são colineares **ou**
- ▶ existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $\vec{w} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$ com $\vec{u} \nparallel \vec{v}$.

O próximo teorema é uma consequência imediata do Teorema 4, o qual refere uma condição necessária e suficiente para a coplanaridade de vetores.

Teorema 5

Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores de $\mathbb{R}^3$.

Os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são coplanares se e só se $\vec{u} \times \vec{v} \bullet \vec{w} = 0$.

Exercício 11

Considere os vetores $\vec{a} = (1, 0, 1)$, $\vec{b} = (0, -1, 1)$ e $\vec{c} = (0, -2k, 4)$.

Determine:

- o valor do produto misto $\vec{c} \bullet \vec{b} \times \vec{a}$ em função de k .
- o valor de k de modo que:
 - os vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ sejam coplanares.
 - o paralelepípedo definido por $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ tenha volume igual a 6 unidades cúbicas.

Resolução

- (a) A primeira operação a calcular no produto misto $\vec{c} \bullet \vec{b} \times \vec{a}$ é o produto vetorial e então

$$\vec{b} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \circ & \circ & \circ \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1, 1, 1)$$

pelo que $\vec{c} \bullet \vec{b} \times \vec{a} = (0, -2k, 4) \bullet (-1, 1, 1) = 0 - 2k + 4 = -2k + 4$.

- (b) (i) Uma vez que os vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ têm de ser coplanares, então, pelo Teorema 5, $\vec{c} \bullet \vec{b} \times \vec{a} = 0 \Leftrightarrow -2k + 4 = 0 \Leftrightarrow k = 2$.

Logo, os vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ são coplanares apenas quando $k = 2$.

- (ii) Como $\text{Volume}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = |\vec{c} \bullet \vec{b} \times \vec{a}|$ então

$$\begin{aligned} |-2k + 4| = 6 &\Leftrightarrow -2k + 4 = 6 \vee -2k + 4 = -6 \\ &\Leftrightarrow -2k = 2 \vee -2k = -10 \Leftrightarrow k = -1 \vee k = 5. \end{aligned}$$

Logo, o paralelepípedo definido por $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ tem volume igual a 6 unidades cúbicas quando $k \in \{-1, 5\}$.

Exercício 12

Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores de $\mathbb{R}^3$ e λ um escalar tais que:

$$\|\vec{u}\| = 4, \|\vec{v}\| = 2, \vec{u} \parallel \vec{w} \text{ e } \angle(\vec{u}, \vec{v}) = 60^\circ.$$

Determine o valor da expressão $\vec{v} \bullet (\vec{u} - 2\vec{v}) + \|\vec{u} \times (\vec{w} - 2\vec{v})\|$.

Resolução

Uma vez que

$$\begin{aligned}\vec{v} \bullet (\vec{u} - 2\vec{v}) &= \vec{v} \bullet \vec{u} - 2\vec{v} \bullet \vec{v} = \|\vec{v}\| \|\vec{u}\| \cos 60^\circ - 2\|\vec{v}\|^2 \\ &= 2 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot 2^2 = -4\end{aligned}$$

e como $\vec{u} \parallel \vec{w} \Leftrightarrow \vec{u} \times \vec{w} = \vec{0}$, pelo que

$$\begin{aligned}\|\vec{u} \times (\vec{w} - 2\vec{v})\| &= \|\vec{u} \times \vec{w} - 2\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{0} - 2\vec{u} \times \vec{v}\| \\ &= |-2| \|\vec{u} \times \vec{v}\| = 2 \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin 60^\circ \\ &= 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}.\end{aligned}$$

Portanto, $\vec{v} \bullet (\vec{u} - 2\vec{v}) + \|\vec{u} \times (\vec{w} - 2\vec{v})\| = -4 + 8\sqrt{3}$.

Exercício 13

Sabendo que $\vec{v} \times \vec{u} \bullet \vec{w} = -3$, determine o valor da expressão:

- (a) $\vec{w} \times \vec{v} \bullet \vec{u}$. (b) $\vec{u} \times \vec{v} \bullet 2\vec{w}$.
(c) $(2\vec{v} - \vec{w}) \times \vec{u} \bullet \vec{v}$. (d) $(\vec{u} + \vec{v}) \bullet (\vec{u} - \vec{v}) \times \vec{w}$.

Resolução

- (a) $\vec{w} \times \vec{v} \bullet \vec{u} = -\vec{v} \times \vec{w} \bullet \vec{u} = \vec{v} \times \vec{u} \bullet \vec{w} = -3$ (ocorreram duas permutações de vetores).
(b) $\vec{u} \times \vec{v} \bullet 2\vec{w} = 2\vec{u} \times \vec{v} \bullet \vec{w} = 2(-\vec{v} \times \vec{u} \bullet \vec{w}) = 2 \cdot 3 = 6$ (ocorreu uma permutação de vetores).

(c) Tem-se

$$\begin{aligned}(2\vec{v} - \vec{w}) \times \vec{u} \bullet \vec{v} &= 2\vec{v} \times \vec{u} \bullet \vec{v} - \vec{w} \times \vec{u} \bullet \vec{v} \\ &= 2 \cdot 0 - (-\vec{v} \times \vec{u} \bullet \vec{w}) = \vec{v} \times \vec{u} \bullet \vec{w} = -3.\end{aligned}$$

Note que $\vec{v} \times \vec{u} \bullet \vec{v} = 0$, pois os vetores são coplanares ($\vec{v} \parallel \vec{v}$).

(d) Aplicando primeiro a propriedade distributiva ao produto vetorial e depois ao produto escalar tem-se

$$\begin{aligned}(\vec{u} + \vec{v}) \bullet (\vec{u} - \vec{v}) \times \vec{w} &= (\vec{u} + \vec{v}) \bullet (\vec{u} \times \vec{w} - \vec{v} \times \vec{w}) = \\ &= \vec{u} \bullet \vec{u} \times \vec{w} - \vec{u} \bullet \vec{v} \times \vec{w} + \vec{v} \bullet \vec{u} \times \vec{w} - \vec{v} \bullet \vec{v} \times \vec{w} \\ &= 0 - (-\vec{v} \times \vec{u} \bullet \vec{w}) + \vec{v} \bullet \vec{u} \times \vec{w} - 0 \\ &= 2\vec{v} \times \vec{u} \bullet \vec{w} = -6\end{aligned}$$

Observe-se que $\vec{u} \bullet \vec{u} \times \vec{w} = \vec{v} \bullet \vec{v} \times \vec{w} = 0$, pois os três vetores dos produtos mistos são coplanares (existem dois vetores iguais).

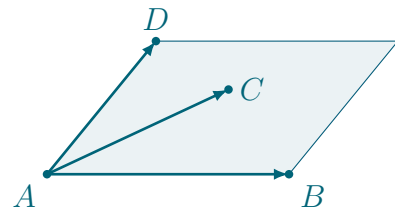
Portanto, $(\vec{u} + \vec{v}) \bullet (\vec{u} - \vec{v}) \times \vec{w} = -6$.

➤ Exercícios da Seção 1.5

- Considere os vetores $\vec{u} = (1, 2, 0)$, $\vec{v} = (1, 0, 3)$ e $\vec{w} = (0, 1, 3)$.
Determine $\vec{u} \times \vec{v} \bullet \vec{w}$.
- Considere os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$. Usando propriedades do produto misto, indique e justifique o valor de $\vec{u} \times \vec{v} \bullet \vec{w}$ nos seguintes casos:
 - $\vec{u} = (1, 0, 0)$, $\vec{v} = (0, 1, 0)$ e $\vec{w} = (0, 0, 1)$.
 - $\vec{u} = (1, 2, 0)$, $\vec{v} = (1, 2, 0)$ e $\vec{w} = (0, 0, 3)$.
 - $\vec{u} = (1, 1, 0)$, $\vec{v} = (1, 1, 1)$ e $\vec{w} = (2, 2, 1)$.
- Mostre que $\vec{u} = \hat{e}_x - \hat{e}_y$, $\vec{v} = \hat{e}_y - \hat{e}_z$ e $\vec{w} = \hat{e}_z - \hat{e}_x$ são vetores coplanares, sendo $\hat{e}_x$, $\hat{e}_y$ e $\hat{e}_z$ os vetores do referencial ortonormado (O, x, y, z) .

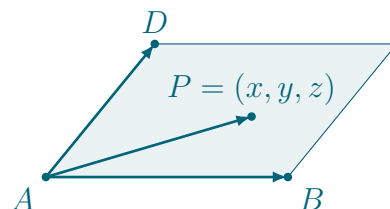
4. Considere os vetores $\vec{u} = (2, 2, 1)$, $\vec{v} = (2, 0, 1)$ e $\vec{w} = (k, 0, 1)$, com k um parâmetro real. Determine k de modo que:
- os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sejam coplanares.
 - o paralelepípedo definido por $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ tenha volume igual a 4 unidades cúbicas.
5. Sabendo que $\vec{u} \times \vec{v} \bullet \vec{w} = 2$, determine:
- $\vec{w} \times \vec{v} \bullet \vec{u}$.
 - $\vec{v} \times \vec{w} \bullet \vec{u}$.
 - $\vec{v} \times 2\vec{u} \bullet \vec{w}$.
 - $\vec{u} \times (\vec{v} - 2\vec{w}) \bullet \vec{v}$.
 - $\vec{w} \times (\vec{u} + \vec{v}) \bullet (\vec{u} - \vec{v})$.
6. Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ e $\vec{t}$ vetores unitários de $\mathbb{R}^3$ tais que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ortogonais, $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são coplanares e $\vec{u} \times \vec{v}$ e $\vec{t}$ são colineares.
- Determine:
- $\vec{w} \bullet \vec{t}$.
 - a área do paralelogramo definido por $\vec{u}$ e $\vec{v}$.
 - $\|(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}\|$.
 - $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{t}$.
7. Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores de $\mathbb{R}^3$ tais que $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = 60^\circ$, $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 2$, $\|\vec{w}\| = 3$, $\vec{w} \perp \vec{u}$ e $\vec{w} \perp \vec{v}$. Determine $\vec{u} \times \vec{v} \bullet \vec{w}$.
8. Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores de $\mathbb{R}^3$.
- Mostre que $(\vec{u} + \vec{v}) \bullet (\vec{v} + \vec{w}) \times (\vec{w} + \vec{u}) = 2 \vec{u} \times \vec{v} \bullet \vec{w}$.
9. Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores de $\mathbb{R}^3$ tais que $\vec{u} \perp \vec{v}$ e $\vec{u} \perp \vec{w}$.
- Mostre que $(\vec{u} \bullet \vec{v} \times \vec{w})^2 = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v} \times \vec{w}\|^2$.
10. Os pontos $A = (1, 1, 2)$, $B = (0, 1, 3)$, $C = (-1, 0, 2)$ e $D = (-2, -1, 1)$ estão no mesmo plano. Justifique.

Sugestão: Mostre que os vetores $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ e $\vec{AD}$ são coplanares.



11. Determine uma equação geral do plano na forma $ax + by + cz + d = 0$ que contém os pontos $A = (0, 1, 0)$, $B = (-1, 0, 1)$ e $C = (2, -1, 0)$.

Sugestão: Determine $P = (x, y, z)$ tal que $\vec{AP} \bullet \vec{AB} \times \vec{AC} = 0$.



► Soluções dos Exercícios

1. -9 .
2. (a) 1. (b) 0. (c) 0.
3. —
4. (a) 2. (b) 4 ou 0.
5. (a) -2 . (b) 2. (c) -4 . (d) 4. (e) -4 .
6. (a) 0. (b) 1. (c) 1. (d) $\vec{0}$.
7. $\pm 6\sqrt{3}$.
8. —
9. —
10. —
11. $x + y + 2z - 1 = 0$.

2

Cálculo Matricial

O cálculo matricial é uma área da álgebra linear que estuda as operações e propriedades envolvendo matrizes. Permite analisar e resolver problemas complexos de forma eficiente e elegante, sendo uma ferramenta essencial em diversas áreas do conhecimento.

As aplicações do cálculo matricial são vastas e abrangem diversas áreas, tais como:

1. Engenharia

O cálculo matricial é utilizado na resolução de sistemas de equações lineares, na modelação de circuitos elétricos, na análise de estruturas e no controlo de processos industriais.

2. Ciência da Computação

Em computação gráfica, as matrizes são utilizadas para representar transformações geométricas, como rotações e homotetias. Além disso, são aplicadas em algoritmos de aprendizagem automática, processamento de imagens e reconhecimento de padrões.

3. Física

As matrizes são usadas para descrever a rotação de objetos tridimensionais, a evolução temporal de sistemas físicos e a solução de problemas em mecânica quântica.

4. Economia

As matrizes são aplicadas em modelos económicos para estudar a interação entre diferentes variáveis, como oferta e procura, investimentos e fluxo de capital.

5. Processamento de Sinais

As matrizes são usadas para representar sinais e realizar operações como filtragem, compressão e análise espectral. Isto é fundamental em áreas como telecomunicações, processamento de áudio e imagem, e tratamento de dados.

6. Engenharia de Controlo

O cálculo matricial é essencial no projeto e análise de sistemas de controlo, onde as matrizes de transferência são utilizadas para descrever o comportamento dinâmico dos sistemas. Controladores, como os PID, podem ser projetados e ajustados com recurso à álgebra linear e à otimização matricial.

7. Estatística e Ciência de Dados

As matrizes são usadas para representar conjuntos de dados multivariados e realizar operações como decomposição em valores singulares, análise de componentes principais e regressão linear múltipla. Estas técnicas são amplamente aplicadas na análise de dados, modelação estatística e aprendizagem automática.

8. Redes Neurais Artificiais

No campo da inteligência artificial, as redes neurais artificiais são frequentemente representadas por matrizes. As camadas de neurónios são organizadas em matrizes de pesos, e as operações de propagação e atualização dos valores são realizadas por meio de cálculos matriciais eficientes.

Este capítulo começa por abordar os conceitos gerais de matrizes, seguindo-se a exploração das operações matriciais fundamentais, incluindo a adição, subtração e multiplicação de matrizes, com ênfase na forma como estas operações são realizadas. Apresenta-se depois a transposição de matrizes, com destaque para as propriedades de matrizes especiais, como as simétricas, antissimétricas e ortogonais. Em seguida, estuda-se a inversa de uma matriz, com a respetiva definição e propriedades, úteis na simplificação de equações matriciais.

Por fim, aborda-se a condensação de matrizes, um método que recorre a operações elementares de linha para transformar a matriz numa forma mais simples, facilitando os cálculos.



Orientação de trabalho: o capítulo apresenta 3 atividades de trabalho e recomendamos que, em cada uma delas, o leitor dedique entre 3 e 5 horas de estudo autónomo. As atividades que propomos encontram-se esquematizadas da seguinte forma:

- ▶ Atividade 6 – 2.1 Conceitos Gerais e 2.2 Operações Matriciais
- ▶ Atividade 7 – 2.3 Transposição e 2.4 Inversão de Matrizes
- ▶ Atividade 8 – 2.5 Condensação de Matrizes

2.1 Conceitos Gerais

Definições 1

Uma **matriz** real A do **tipo** $m \times n$ é um objeto de $m \cdot n$ números reais dispostos em m **linhas** (filas horizontais) e n **colunas** (filas verticais) tal que:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

A matriz A denota-se por $A = [a_{ij}]$, sendo i ($i = 1, \dots, m$) o **índice de linha**, j ($j = 1, \dots, n$) o **índice de coluna** e a_{ij} o **elemento** da matriz que se encontra na linha i e na coluna j .

Observação: O conjunto de todas as matrizes reais do tipo $m \times n$ denota-se por $M_{m \times n}(\mathbb{R})$.

Definições 2

1. Uma matriz **nula** do tipo $m \times n$ tem todos os elementos iguais a zero e denota-se por $O_{m \times n}$.
2. Uma matriz do tipo $1 \times n$ designa-se por matriz **linha** e uma matriz do tipo $m \times 1$ designa-se por matriz **coluna**.
3. A matriz **oposta** de uma matriz A do tipo $m \times n$ é uma matriz B do tipo $m \times n$ tal que $A + B = O_{m \times n}$.
4. Uma matriz do tipo $n \times n$ designa-se por matriz **quadrada de ordem** n . No caso contrário, designa-se por matriz **retangular**.

Exemplo 1

Considere a matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 3 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$.

- Como B tem três linhas e duas colunas então B é uma matriz do tipo 3×2 , pelo que $B \in M_{3 \times 2}(\mathbb{R})$.
- Tem-se $1 = b_{11}$, $2 = b_{12}$, $-4 = b_{21}$, $3 = b_{22}$, $-2 = b_{31}$ e $7 = b_{32}$.

Exemplo 2

Considere as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 10 \\ -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -4 & -5 & -1 \end{bmatrix}.$$

- Indique o tipo das matrizes.
- Identifique as matrizes linha, coluna, retangular e quadrada.
- Indique a matriz oposta de C .

Resolução

- (a) O tipo das matrizes é o indicado na tabela.

Matriz	A	B	C	D
Tipo	2×1	1×3	2×2	2×3

- (b) Matriz(es)

- ▶ linha: B .
- ▶ coluna: A .
- ▶ retangulares: A , B e D .
- ▶ quadrada: C (de ordem 2).

(c) $-C = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -4 & -5 \end{bmatrix}$.

Definições 3

Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz de ordem n .

1. A **diagonal principal** de A é formada pelos elementos $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$, os quais são designados por **elementos principais** de A .
2. A **diagonal secundária** de A é formada pelos elementos $a_{1n}, a_{2n-1}, \dots, a_{n1}$ (ou seja, $i + j = n + 1$), os quais são designados por **elementos secundários** de A .
3. A é uma **matriz triangular superior (inferior)** quando todos os elementos abaixo (acima) da diagonal principal são nulos, isto é, $i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$ ($i < j \Rightarrow a_{ij} = 0$).
4. A é uma matriz **diagonal** quando todos os elementos não principais são nulos, isto é, $a_{ij} = 0$ com $i \neq j$ e denota-se por $A = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$.
5. A é uma matriz **escalar** quando é uma matriz diagonal com todos os elementos principais iguais, isto é, $a_{ii} = \lambda$ com $\lambda \in \mathbb{R}$.

Quando $\lambda = 1$, a matriz A designa-se por matriz **identidade** de ordem n e denota-se por I_n .

Observação: Observe-se que as matrizes $O_{n \times n}$ e I_n são simultaneamente matrizes triangulares superiores e inferiores, matrizes diagonais e matrizes escalares.

Exemplo 3

Considere as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & m \\ k & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

1. Para a matriz C , indique a diagonal principal, a diagonal secundária, os elementos principais e os elementos secundários.
2. Indique as matrizes:

(a) triangulares superiores.	(b) triangulares inferiores.
(c) diagonais.	(d) escalares.

Resolução

1. Diagonal principal de C é constituída pelos elementos principais 1, 2 e -3 e a diagonal secundária é constituída pelos elementos secundários 0, 2 e k .
2. (a) A e C para $k \in \{0\}$ e $m \in \mathbb{R}$. (b) A , B e C para $m \in \{0\}$ e $k \in \mathbb{R}$.
(c) A e C para $k, m \in \{0\}$. (d) A . (Observe-se que $A = 2I_3$.)

Definição 4

Diz-se que duas matrizes do tipo $m \times n$, $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$, são **iguais** quando $a_{ij} = b_{ij}$, $\forall i, j$.

➤ Exercícios da Secção 2.1

1. Considere as matrizes reais $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ b & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -a^2 \\ a+1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Determine os valores dos parâmetros a e b de modo que $A = B$.

2. Considere a matriz real $A = \begin{bmatrix} a^2 & b & 0 \\ 0 & c^2 - 1 & 0 \\ d+1 & 0 & e \end{bmatrix}$.

Determine os valores dos parâmetros a, b, c, d e e de modo que A seja:

- (a) a matriz nula. (b) uma matriz triangular superior.
(c) uma matriz diagonal. (d) a matriz identidade.

➤ Soluções dos Exercícios

1. $(a = 2 \wedge b = 3) \vee (a = -2 \wedge b = -1)$.
2. (a) $a = 0 \wedge b = 0 \wedge c = \pm 1 \wedge d = -1 \wedge e = 0$.
(b) $d = -1 \wedge a, b, c, e \in \mathbb{R}$. (c) $b = 0 \wedge d = -1 \wedge a, c, e \in \mathbb{R}$.
(d) $a = \pm 1 \wedge b = 0 \wedge c = \pm \sqrt{2} \wedge d = -1 \wedge e = 1$.

2.2 Operações Matriciais

Definição 5

Sejam $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ duas matrizes do tipo $m \times n$.

A **soma** ou **adição** de A com B , $A + B$, é a matriz C do tipo $m \times n$ tal que $C = A + B = [c_{ij}]$, onde $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Propriedades 1

Sejam A, B, C e $O_{m \times n}$ matrizes do tipo $m \times n$. A soma de matrizes:

1. é comutativa: $A + B = B + A$.
2. é associativa: $(A + B) + C = A + (B + C)$.
3. admite elemento neutro $O_{m \times n}$: $A + O_{m \times n} = O_{m \times n} + A = A$.
4. admite a matriz oposta $-A$: $A + (-A) = -A + A = O_{m \times n}$.

Definição 6

Sejam $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ duas matrizes do tipo $m \times n$.

A **diferença** ou **subtração** de A com B , $A - B$, é a matriz C do tipo $m \times n$ tal que $C = A - B = [c_{ij}]$, onde $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$.

Definição 7

Sejam $A = [a_{ij}]$ uma matriz do tipo $m \times n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

A **multiplicação** de λ por A , λA , é a matriz C do tipo $m \times n$ tal que $C = \lambda A = [c_{ij}]$, onde $c_{ij} = \lambda a_{ij}$.

Propriedades 2

Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, A e B matrizes do tipo $m \times n$. A multiplicação escalar:

1. é associativa: $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$.
2. é distributiva em relação à adição de escalares: $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.
3. é distributiva em relação à adição de matrizes: $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.
4. admite elemento neutro: $1A = A$.

Exemplo 4

Considere as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Se possível, determine:

- (a) $A + B$. (b) $A - B$. (c) $-2A$. (d) $2A - 3B$. (e) $A + 2C$.

Resolução

Como as matrizes A e B são do tipo 2×3 então é possível calcular as matrizes $A + B$, $A - B$, $-2A$ e $2A - 3B$, e o resultado é uma matriz do tipo 2×3 .

$$(a) A + B = \begin{bmatrix} 1+2 & 0-1 & -1+1 \\ -2-1 & 2-2 & 0+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$(b) A - B = \begin{bmatrix} 1-2 & 0+1 & -1-1 \\ -2+1 & 2+2 & 0-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$(c) -2A = -2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 4 & -4 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$(d) 2A - 3B = 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix} + (-3) \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -4 & 4 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & 3 & -3 \\ 3 & 6 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 3 & -5 \\ -1 & 10 & 0 \end{bmatrix}.$$

- (e) Como A é uma matriz do tipo 2×3 e $2C$ é uma matriz do tipo 2×2 então não é possível determinar a sua soma e portanto, a expressão $A + 2C$ não tem significado.

Observação: A próxima operação a definir entre duas matrizes A e B é o **produto** ou **multiplicação** e denota-se por AB . Primeiro, apresenta-se a multiplicação de uma matriz linha por uma matriz coluna. Em seguida, fornece-se uma definição formal do produto de quaisquer duas matrizes.

Definição 8

Considere as matrizes A e B com igual número de elementos (n):

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

O **produto** ou **multiplicação** de A por B , AB , é uma matriz C de ordem 1 definida por:

$$C = AB = [a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n].$$

Exemplo 5

Determine AB , considerando $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$.

Resolução

Como A é uma matriz linha e B é uma matriz coluna, ambas com o mesmo número de elementos então AB é a matriz de ordem 1 determinada por

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = [-1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot (-2)] = [-3].$$

Definição 9

Sejam $A = [a_{ik}]$ e $B = [b_{kj}]$ matrizes do tipo $m \times p$ e $p \times n$, respectivamente. O **produto** ou **multiplicação** de A por B , AB , é uma matriz C do tipo $m \times n$ tal que $C = AB = [c_{ij}]$, onde:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ip}b_{pj}, \text{ com } i = 1, \dots, m \text{ e } j = 1, \dots, n.$$

Observação: O produto AB só está definido quando o número de colunas da matriz A é igual ao número de linhas da matriz B .

Exemplo 6

Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

Se possível, determine:

- (a) AB . (b) BA .

Resolução

(a) A imagem

$$A_{\textcircled{2} \times \textcircled{2}} B_{\textcircled{2} \times \textcircled{3}} = (AB)_{\textcircled{2} \times \textcircled{3}}$$

ilustra que o produto AB está bem definido, pois o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B . A matriz AB é do tipo 2×3 e é obtida multiplicando as linhas de A pelas colunas de B conforme se ilustra na imagem

$$\begin{bmatrix} \underline{1} & \underline{-1} \\ \underline{2} & \underline{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \textcolor{red}{-1} & \textcolor{red}{-1} & \textcolor{red}{2} \\ \textcolor{green}{1} & \textcolor{green}{0} & \textcolor{green}{-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \textcolor{red}{-2} & \textcolor{green}{-1} & \textcolor{blue}{4} \\ \textcolor{violet}{1} & \textcolor{magenta}{-2} & \textcolor{green}{-2} \end{bmatrix}$$

ou seja

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 & 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 0 & 1 \cdot 2 + (-1) \cdot (-2) \\ 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 & 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 & 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

- (b) O produto BA não está definido pois o número de colunas da matriz B é diferente do número de linhas da matriz A .

Observação: Considerando o exemplo anterior, podemos concluir que o produto de duas matrizes **não é comutativo**, ou seja, em geral $AB \neq BA$.

Definição 10

Duas matrizes A e B de ordem n dizem-se **comutáveis** quando $AB = BA$.

Exercício 1

Considere as matrizes $A \in M_{5 \times 4}(\mathbb{R})$, $B \in M_{4 \times 2}(\mathbb{R})$ e $C \in M_{2 \times 5}(\mathbb{R})$.

Se possível, determine o tipo das matrizes:

- (a) $AB + C$. (b) ABC . (c) CAB .

Resolução

- (a) A soma $AB + C$ não está definida pois a matriz $A_{5 \times 4}B_{4 \times 2}$ é do tipo 5×2 e a matriz C é tipo 2×5 . Logo, as duas matrizes não podem ser somadas porque são de tipos diferentes.
- (b) A matriz $ABC = (AB)_{5 \times 2}C_{2 \times 5}$ está definida e é de ordem 5. Como se verifica, a matriz A tem o mesmo número de colunas que o número de linhas da matriz B e portanto, o produto AB está definido e é do tipo 5×2 . Como esta matriz tem o mesmo número de colunas que o número de linhas da matriz C então o produto ABC está definido e o resultado final é uma matriz de ordem 5.
- (c) A matriz $CAB = C_{2 \times 5}(AB)_{5 \times 2}$ está definida e é de ordem 2 (usando o mesmo raciocínio da explicação da alínea anterior).

Observação: No exemplo anterior, podemos observar que a ordem das matrizes na multiplicação não deve ser trocada pois, como se verificou, os produtos ABC e CAB estão definidos, mas o resultado é uma matriz de diferente tipo.

Exercício 2

Considere as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Se possível, determine:

- (a) AB . (b) BA . (c) DC . (d) CD .

Resolução

(a) O produto AB não está definido pois o número de colunas da matriz A é diferente do número de linhas da matriz B .

(b) Como o número de colunas da matriz B é igual ao número de linhas da matriz A , B tem 2 linhas e A tem 3 colunas, então o produto BA é uma matriz do tipo 2×3 com

$$\begin{aligned} BA &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 & 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 \\ -1 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) & -1 \cdot 0 + 3 \cdot 2 & -1 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -3 & 4 & -1 \\ -7 & 6 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(c) Como o número de colunas da matriz D é igual ao número de linhas da matriz C e D tem 3 linhas e C tem 3 colunas então o produto DC é uma matriz de ordem 3 com

$$\begin{aligned} DC &= \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot 2 & 3 \cdot (-3) \\ 4 \cdot 1 & 4 \cdot 2 & 4 \cdot (-3) \\ -2 \cdot 1 & -2 \cdot 2 & -2 \cdot (-3) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 4 & 8 & -12 \\ -2 & -4 & 6 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(d) Como o número de colunas da matriz C é igual ao número de linhas da matriz D e C tem 1 linha e D tem 1 coluna então o produto CD é uma matriz de ordem 1 com

$$CD = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} = [1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 - 3 \cdot (-2)] = [17].$$

Exercício 3

Considere as matrizes $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ de ordem 50 tais que $a_{1j} = 1$, $j = 1, \dots, 50$ e $b_{i50} = 1$, $i = 1, \dots, 50$ e os restantes elementos de A e B são nulos. Se possível, determine:

- (a) AB . (b) BA .

Resolução

- (a) A matriz AB está definida e é de ordem 50. Os seus elementos são todos nulos, exceto o elemento $(AB)_{150}$ que se obtém multiplicando a primeira linha de A pela última coluna de B , pelo que o seu valor é 50.
- (b) A matriz BA está definida e é a matriz nula O_{50} , pois o valor da multiplicação de qualquer linha de B por qualquer coluna de A é sempre zero.

Propriedades 3

Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e A , B e C três matrizes de tipos adequados de maneira que as operações estejam definidas. A multiplicação de matrizes:

1. é associativa: $(AB)C = A(BC)$.
2. é associativa em relação à multiplicação escalar
 $(\alpha A)B = A(\alpha B) = \alpha(AB)$.
3. é distributiva em relação à adição de matrizes
 $(A + B)C = AC + BC$ e $C(A + B) = CA + CB$.

Observação: Se a matriz A é de ordem n então:

$$AI_n = A = I_n A \text{ e } AO_{n \times n} = O_{n \times n} = O_{n \times n} A,$$

ou seja, qualquer matriz A de ordem n é comutável com as matrizes identidade e nula da mesma ordem.

Exercício 4

Considere a matriz real $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & k \\ 0 & k & 0 \\ k & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Determine os valores do parâmetro k de modo que $A^2 - I_3 \neq O_{3 \times 3}$.

Resolução

Seja $B = A^2 - I_3$. Como a matriz A é uma matriz quadrada de ordem 3 então a matriz B está bem definida e

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & k \\ 0 & k & 0 \\ k & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & k \\ 0 & k & 0 \\ k & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k^2 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & k^2 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & k^2 - 1 \end{bmatrix}.$$

Portanto, $B \neq O_{3 \times 3} \Leftrightarrow k^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow k \neq -1 \wedge k \neq 1$, ou seja, $A^2 - I_3 \neq O_{3 \times 3}$ para $k \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

► Exercícios da Seção 2.2

1. Considere as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ e} \\ D = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Se possível, determine:

- (a) DC . (b) CD . (c) BC . (d) $A^2 + 2I_3$. (e) $AB - B$.

2. Considere as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- (a) Determine $(4I_5 + 2A)_{22}$.

- (b) Determine $(AB)_{21}$, $(AB)_{34}$, $(BA)_{33}$ e $(BA)_{34}$.
- (c) As matrizes A e B são comutáveis? Justifique.
- (d) Determine $(2BA - 3I_5)_{14}$. (e) Determine $(3I_5 - 4AB)_{22}$.
- (f) Determine $(B^2 + 3A - I_5)_{55}$.
3. Considere as matrizes $A \in M_{3 \times 4}(\mathbb{R})$, $B \in M_{4 \times 3}(\mathbb{R})$ e $C \in M_{1 \times 3}(\mathbb{R})$. Indique, justificando, se as expressões estão definidas e, em caso afirmativo, indique o tipo de matriz resultante:
- (a) ABC . (b) CAB . (c) BAC .
4. Complete o quadro sabendo que as matrizes estão bem definidas.
- | Matriz | A | B | C | ABC | CBA |
|-------------------|-----|-----|-----|-------|-------|
| Número de linhas | | | | 3 | |
| Número de colunas | | | | | 2 |
5. Indique a matriz $A \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$, sabendo que $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i+j \text{ é par} \\ -1 & \text{se } i+j \text{ é ímpar} \end{cases}$ e determine $(A^2)_{11} + (A^2)_{22} + (A^2)_{33}$.
6. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$. Determine todas as matrizes B de modo que $AB = O_{2 \times 2}$.
7. Indique duas matrizes A e B de ordem 2 tais que:
- (a) $AB \neq BA$. (b) $AB = AC$, com $A \neq O_{2 \times 2}$ e $B \neq C$.
8. Sejam A e B matrizes de ordem n . Simplifique a expressão $(A + B)^2$ quando:
- (a) A e B não são comutáveis. (b) A e B são comutáveis.

➤ Soluções dos Exercícios

1. (a) $[3]$. (b) $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$. (c) $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$.

$$(d) \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}. \quad (e) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. (a) $(4I_5 + 2A)_{22} = 8$.

(b) $(AB)_{21} = 0, (AB)_{34} = 0, (BA)_{33} = -2$ e $(BA)_{34} = 2$.

(c) Não, pois $(AB)_{34} \neq (BA)_{34}$.

(d) $(2BA - 3I_5)_{14} = 2$.

(e) $(3I_5 - 4AB)_{22} = -5$.

(f) $(B^2 + 3A - I_5)_{55} = 6$.

3. (a) Não definida.

(b) Definida e é uma matriz do tipo 1×3 .

(c) Não definida.

4.

Matriz	A	B	C	ABC	CBA
Número de linhas	3	2	3	3	3
Número de colunas	2	3	2	2	2

5. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ e $(A^2)_{11} + (A^2)_{22} + (A^2)_{33} = 9$.

6. $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ z & w \end{bmatrix}, \forall z, w \in \mathbb{R}$.

7. (a) Por exemplo, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

(b) Por exemplo, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$.

8. (a) $A^2 + AB + BA + B^2$.

(b) $A^2 + 2AB + B^2$.

2.3 Transposição

Definição 11

Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz do tipo $m \times n$.

A **matriz transposta** da matriz A , $A^T = [a'_{ji}]$, é a matriz do tipo $n \times m$ que se obtém de A trocando as linhas pelas colunas, ou seja, $a'_{ji} = a_{ij}, \forall i, j$.

Exemplo 7

Determine a matriz transposta da matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

Resolução

Como A uma matriz do tipo 3×2 então a sua matriz transposta é uma matriz do tipo 2×3 e é definida por $A^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Propriedades 4

Sejam $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, $C \in M_{n \times p}(\mathbb{R})$, $k \in \mathbb{N}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Então:

1. $(A^T)^T = A$.
2. $(A + B)^T = A^T + B^T$.
3. $(\lambda A)^T = \lambda A^T$.
4. $(AC)^T = C^T A^T$.
5. $(A^k)^T = (A^T)^k$ para $m = n$.

Exercício 5

Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Determine o elemento da 1.^a linha e da 2.^a coluna da matriz $(AB^T)^T$.

Resolução

Observe que a matriz $(AB^T)^T$ é de ordem 2 e $(AB^T)^T = (B^T)^T A^T = BA^T$.

O elemento pretendido é obtido multiplicando a 1.^a linha da matriz B pela 2.^a coluna da matriz A^T (2.^a linha de A), ou seja

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = -1.$$

Definições 12

Seja A uma matriz de ordem n . Diz-se que A é:

- **simétrica** quando $A^T = A$.
- **antissimétrica** quando $A^T = -A$.
- **ortogonal** quando $A^T A = I_n = AA^T$.

Observações:

1. A matriz $O_{n \times n}$ é simétrica e antissimétrica. A matriz I_n é simétrica e ortogonal.
2. Se A é uma matriz simétrica então os elementos da diagonal principal podem ser quaisquer números e os elementos dispostos simetricamente em relação à diagonal principal são iguais.
3. Se A é uma matriz antissimétrica então os elementos da diagonal principal são nulos e os elementos dispostos simetricamente em relação à diagonal principal são simétricos.
4. As colunas de uma matriz ortogonal são **ortonormadas**, isto é, as colunas são ortogonais entre si e têm norma unitária.

Exemplo 8

Indique, justificando, se as matrizes são simétricas ou antissimétricas:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Resolução

Tendo em conta que

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, B^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } C^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

então

- ▶ A não é simétrica nem antissimétrica, pois $A^T \neq A$ e $A^T \neq -A$.
- ▶ B é antissimétrica, pois $B^T = -B$.
- ▶ C é simétrica, pois $C^T = C$.

Exemplo 9

Indique, justificando, se as matrizes são ortogonais:

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Resolução

Tendo em conta que

- ▶ $AA^T = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$
- ▶ $BB^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \neq I_2$
- ▶ $CC^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$

então as matrizes A e C são ortogonais, mas a matriz B não é ortogonal.

Propriedades 5

1. Se A e B são matrizes simétricas de ordem 2 e 3, respectivamente, então:

$$A = \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{bmatrix}$$

pelo que A e B têm, respectivamente, três e seis parâmetros livres.

2. Uma matriz simétrica de ordem n tem $\frac{n^2 + n}{2}$ parâmetros livres (porquê?).

Propriedades 6

1. Se A e B são matrizes antissimétricas de ordem 2 e 3, respectivamente, então:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}$$

pelo que A e B têm, respectivamente, um e três parâmetros livres.

2. Uma matriz antissimétrica de ordem n tem $\frac{n^2 - n}{2}$ parâmetros livres (porquê?).

Exercício 6

Sejam A e B duas matrizes simétricas de ordem n .

Mostre que a matriz AB é simétrica se e só se A e B são comutáveis.

Resolução

Como A e B são matrizes simétricas então $A^T = A$ e $B^T = B$.

Uma vez que $M = AB$ é simétrica se e só se $M^T = M$ então

$$M^T = M \Leftrightarrow (AB)^T = AB \Leftrightarrow B^T A^T = AB \Leftrightarrow BA = AB$$

o que é equivalente a afirmar que as matrizes A e B são matrizes comutáveis.

Exercício 7

Sejam A e B duas matrizes de ordem n tais que a matriz A é ortogonal e a matriz B é antissimétrica.

Determine a matriz X que satisfaz a equação $A^T (X^T - 2B) = A^T B$.

Resolução

Dado que a matriz A é ortogonal então $AA^T = I_n = A^T A$. Como a matriz B é antissimétrica ($B^T = -B$) então

$$\begin{aligned} A^T (X^T - 2B) &= A^T B \Leftrightarrow (A^T (X^T - 2B))^T = (A^T B)^T \\ \Leftrightarrow (X^T - 2B)^T (A^T)^T &= B^T (A^T)^T \\ \Leftrightarrow ((X^T)^T - 2B^T) A &= -BA \\ \Leftrightarrow (X + 2B) \underbrace{(AA^T)}_{=I_n} &= -B \underbrace{(AA^T)}_{=I_n} \\ \Leftrightarrow X + 2B &= -B \Leftrightarrow X = -3B \end{aligned}$$

e portanto, $X = -3B$ é a matriz que satisfaz a equação.

➤ Exercícios da Secção 2.3

1. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$.

Se possível, determine:

(a) $2A^T + B$.

(b) $(AB)^T$.

(c) $(BA)^T$.

2. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Determine o elemento indicado da matriz:

(a) $(2A + B^T)_{23}$.

(b) $((AB)^T)_{32}$.

(c) $(2AB^T)_{24}$.

3. Mostre que se o produto ABC está definido então $(ABC)^T = C^T B^T A^T$.

4. Indique, justificando, quais das matrizes são simétricas e quais são antissimétricas:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

5. Mostre que a matriz $A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ é ortogonal.
6. Seja A uma matriz de ordem n . Mostre que:
- (a) a matriz $A + A^T$ é simétrica.
 - (b) a matriz AA^T é simétrica.
 - (c) a matriz $A - A^T$ é antissimétrica.
 - (d) se a matriz A é simétrica então a matriz A^2 é simétrica.
 - (e) se a matriz A é antissimétrica então a matriz A^3 é antissimétrica.
7. Sejam A e B duas matrizes de ordem n . Mostre que:
- (a) se a matriz B é simétrica então a matriz ABA^T é simétrica.
 - (b) se a matriz A é simétrica e a matriz B é antissimétrica então a matriz BAB é simétrica.
 - (c) se as matrizes A e B são antissimétricas então a matriz AB é simétrica se e só se as matrizes A e B são comutáveis.
8. Sejam A, B, X e I_n matrizes de ordem n .
Determine a matriz X que verifica a equação:
- (a) $X^T + A^T = B.$
 - (b) $X^T - A = B^T.$
 - (c) $(A + X^T)^T = I_n.$
9. Sejam A, B, C e X matrizes de ordem n tais que A é simétrica, B é antissimétrica e C é ortogonal. Determine a matriz X que é solução da equação:
- (a) $X^T C + A^T B = 2B^T C - AB^T.$
 - (b) $C(B + X^T) = [(A + B)C^T]^T.$

► Soluções dos Exercícios

$$1. (a) \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (b) \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 5 & 2 & -7 \end{bmatrix}. \quad (c) \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}.$$

$$2. (a) 3. \quad (b) 6. \quad (c) 8.$$

$$3. —$$

$$4. \text{Matrizes simétricas: } A \text{ e } D. \text{ Matrizes antissimétricas: } C.$$

$$5. —$$

$$6. —$$

$$7. —$$

$$8. (a) X = B^T - A. \quad (b) X = B + A^T. \quad (c) X = I_n - A^T.$$

$$9. (a) X = 2B. \quad (b) X = A + 2B.$$

2.4 Matrizes Invertíveis

A inversão de matrizes está relacionada com a resolução de equações matriciais do tipo $AX = B$, de forma análoga ao que ocorre na álgebra linear com números reais. Para certas matrizes quadradas, é possível determinar outra matriz que, multiplicada pela original à esquerda e à direita, origina a matriz identidade. Apresenta-se de seguida a definição formal.

Definições 13

Sejam A e B duas matrizes de ordem n . Diz-se que a matriz:

- ▶ A é **invertível** ou **regular** se existe uma matriz B tal que $AB = I_n = BA$.
- ▶ B é a matriz **inversa** de A e denota-se por A^{-1} .
- ▶ A é **não invertível** ou **singular** quando não admite matriz inversa.

Propriedades 7

Sejam A e B matrizes invertíveis de ordem n , $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $k \in \mathbb{N}$. Então a matriz:

1. inversa de A é única.
2. A^{-1} é invertível e $(A^{-1})^{-1} = A$.
3. λA é invertível e $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$.
4. AB é invertível e $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$.
5. A^k é invertível e $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$.
6. A^T é invertível e $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.
7. A é ortogonal se e só se $A^{-1} = A^T$.

Observação: Observe-se que, para duas matrizes invertíveis A e B , pode não existir a inversa da matriz $A + B$. Quando existe, em geral, $(A + B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}$.

Exercício 8

Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3/2 & -1/2 \\ -1 & 1/2 \end{bmatrix}$.

- (a) Mostre que B é a matriz inversa de A .
- (b) Determine a inversa da matriz $\frac{1}{2}A$.
- (c) Determine a inversa da matriz A^2 .

Resolução

- (a) Para mostrar que a matriz B é a matriz inversa da matriz A basta verificar apenas uma das igualdades, $AB = I_2$ ou $BA = I_2$. Como

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/2 & -1/2 \\ -1 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

então está provado que B é a inversa de A .

- (b) A matriz inversa da matriz $\frac{1}{2}A$ é dada por

$$\left(\frac{1}{2}A\right)^{-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} A^{-1} = 2A^{-1} = 2 \begin{bmatrix} 3/2 & -1/2 \\ -1 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

- (c) Como $(A^2)^{-1} = (AA)^{-1} = A^{-1}A^{-1}$ então a matriz inversa da matriz A^2 é dada por

$$(A^2)^{-1} = \begin{bmatrix} 3/2 & -1/2 \\ -1 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/2 & -1/2 \\ -1 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11/4 & -1 \\ -2 & 3/4 \end{bmatrix}.$$

Exercício 9

Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{bmatrix}$.

Verifique se a matriz A é ortogonal e, caso exista, indique a sua matriz inversa.

Resolução

Uma vez que

$$AA^T = \begin{bmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/5 & 4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

então A é ortogonal e portanto, $A^{-1} = A^T = \begin{bmatrix} 3/5 & 4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{bmatrix}$.

Exercício 10

Mostre que se A e B são matrizes simétricas de ordem n e A é uma matriz invertível então $A(BA^{-1})^T = B$.

Resolução

Como as matrizes A e B são simétricas então $A^T = A$ e $B^T = B$. Além disso, A é invertível e portanto, $AA^{-1} = I_n = A^{-1}A$. Assim

$$A(BA^{-1})^T = A(A^{-1})^T B^T = A(A^T)^{-1} B = (AA^{-1}) B = I_n B = B.$$

Exercício 11

Sejam A e B matrizes de ordem n tais que A é ortogonal e B é antissimétrica. Simplifique a matriz $M = A^{-1}(BA^T)^T A^T + 2BA^{-1}$.

Resolução

Como A é ortogonal então $AA^T = I_n = A^T A \Leftrightarrow A^{-1} = A^T$. Além disso, B é antissimétrica e portanto, $B^T = -B$. Assim

$$\begin{aligned} M &= A^{-1}(BA^T)^T A^T + 2BA^{-1} = A^{-1}(A^T)^T B^T A^T + 2BA^{-1} \\ &= (A^{-1}A)(-B)A^T + 2BA^T = I_n(-BA^T) + 2BA^T \\ &= -BA^T + 2BA^T = BA^T \end{aligned}$$

e consequentemente, $M = BA^T$.

Exercício 12

Sejam A e B matrizes de ordem n tais que A é ortogonal e B é invertível. Determine a matriz X que satisfaz a equação $(AB^{-1})^{-1}X = (AB^T)^T$.

Resolução

Como A ortogonal então $AA^T = I_n = A^T A$ e $A^{-1} = A^T$. Por outro lado, B é invertível e portanto, $BB^{-1} = I_n = B^{-1}B$. Portanto

$$\begin{aligned} (AB^{-1})^{-1}X &= (AB^T)^T \Leftrightarrow (B^{-1})^{-1}A^{-1}X = (B^T)^T A^T \\ \Leftrightarrow BA^{-1}X &= BA^T \Leftrightarrow (B^{-1}B)A^{-1}X = (B^{-1}B)A^T \\ \Leftrightarrow I_n(A^{-1}X) &= I_n A^T \Leftrightarrow A^{-1}X = A^T \\ \Leftrightarrow (AA^{-1})X &= AA^T \Leftrightarrow I_n X = I_n \Leftrightarrow X = I_n \end{aligned}$$

e portanto, a matriz que satisfaz a equação é $X = I_n$.

Exercício 13

Sejam A e B matrizes de ordem n tais que $AA^T = A^T A = I_n$ e A e B são matrizes comutáveis. Determine a matriz Y que é solução da equação:

$$A(Y^T - (B^T A)^T B) = (A - B)(A + B)$$

Resolução

Como as matrizes A e B são matrizes comutáveis então $AB = BA$ e assim

$$(A - B)(A + B) = A^2 + AB - BA - B^2 = A^2 - B^2.$$

Por outro lado $AA^T = I_n = A^T A \Leftrightarrow A^T = A^{-1}$ e

$$\begin{aligned} A(Y^T - (B^T A)^T B) &= (A - B)(A + B) \\ \Leftrightarrow (A^{-1}A)(Y^T - A^T(B^T)^T B) &= A^{-1}(A^2 - B^2) \\ \Leftrightarrow I_n(Y^T - A^T B^2) &= A^{-1}A^2 - A^{-1}B^2 \\ \Leftrightarrow Y^T - A^T B^2 &= (A^{-1}A)A - A^T B^2 \\ \Leftrightarrow Y^T = I_n A &\Leftrightarrow (Y^T)^T = A^T \Leftrightarrow Y = A^T. \end{aligned}$$

Logo, a matriz Y que satisfaz a equação é a matriz $Y = A^T$.

► Exercícios da Secção 2.4

1. Mostre que B é matriz inversa de A , sabendo que:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

2. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix}$ tais que $abc \neq 0$.

Determine a matriz X tal que $AX = B$.

3. Sejam A , B e X matrizes de ordem n invertíveis. Determine a matriz X que verifica as equações:

(a) $XA = B$. (b) $AX = B$. (c) $X^{-1}A = B$.

(d) $AX^{-1} = B$. (e) $A^2X^TB = AB$.

(f) $(A^TX^{-1})^T = B^T + I_n$.

4. Sejam A , B e X matrizes de ordem n tais que A é antissimétrica, B é ortogonal e X é invertível. Determine a matriz X que é solução da equação:

$$(B^{-1}X^{-1} - BA)^T = AB^T + 2B.$$

► Soluções dos Exercícios

1. —

2. $X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$

3. (a) $X = BA^{-1}$. (b) $X = A^{-1}B$. (c) $X = AB^{-1}$.

(d) $X = B^{-1}A$. (e) $X = (A^{-1})^T$. (f) $X = (B + I_n)^{-1}A^T$.

4. $X = \frac{1}{2}I_n$.

2.5 Condensação de Matrizes

A condensação de matrizes é uma técnica utilizada para simplificar matrizes de grandes dimensões, reduzindo-as a uma forma mais simples sem perder as suas propriedades. Esta técnica é particularmente útil em cálculos numéricos e na resolução de sistemas de equações lineares, onde trabalhar com matrizes de menores dimensões pode simplificar bastante os cálculos, permitindo reduzir o tempo e os recursos necessários.

Definição 14

Seja A uma matriz do tipo $m \times n$. Designam-se por **transformações** ou **operações elementares sobre as linhas** de A , as operações:

1. troca da linha i pela linha j e denota-se por $L'_i = L_j$, $L'_j = L_i$ ou $L_i \leftrightarrow L_j$.
2. multiplicação da linha i pelo escalar $\alpha \neq 0$ e denota-se por $L'_i = \alpha L_i$, $L_i \rightarrow \alpha L_i$ ou $L_i \leftarrow \alpha L_i$.
3. adição à linha i de α vezes a linha j e denota-se por $L'_i = L_i + \alpha L_j$, $L_i \rightarrow L_i + \alpha L_j$ ou $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$.

Observação: As definições de **operações elementares sobre as colunas** da matriz A são similares às anteriores.

Exemplo 10

Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Então:

- A' é a matriz que se obtém de A trocando a linha 2 pela linha 3:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = A'.$$

- A'' é a matriz que se obtém de A multiplicando a linha 3 por -2 :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L'_3 = -2L_3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -6 & 0 & -4 \end{bmatrix} = A''.$$

► A''' é a matriz que se obtém de A somando à linha 3 a linha 1 multiplicada por -2 :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L'_3 = L_3 - 2L_1} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 4 \end{bmatrix} = A''.$$

Definição 15

Diz-se que duas matrizes A e B são **equivalentes por linhas (colunas)**, quando a partir da matriz A podemos obter a matriz B aplicando um número finito de operações elementares sobre as linhas (colunas) da matriz A .

Exemplo 11

No exemplo anterior, as matrizes A' , A'' e A''' são equivalentes por linhas à matriz A .

Definição 16

Diz-se que uma matriz A do tipo $m \times n$ está na **forma escalonada por linhas (FEL)** ou simplesmente na **forma escalonada (FE)**, quando $A = O_{m \times n}$ ou quando apresenta as seguintes propriedades:

1. se houver linhas nulas então estas encontram-se abaixo de todas as linhas não nulas.
2. o primeiro elemento não nulo de cada linha (com exceção da primeira) situa-se à direita do primeiro elemento não nulo da linha anterior.
3. todos os elementos localizados abaixo do primeiro elemento não nulo de cada linha (exceto, eventualmente, na última linha não nula) são nulos.

Observação: A terceira propriedade decorre das duas anteriores e, por vezes, pode ser omitida da definição formal.

Definição 17

Designa-se por **pivô** o primeiro elemento **não nulo** de cada linha não nula de uma matriz na FEL.

Exemplo 12

1. A matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{-1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ está na FEL, e os seus três pivôs encontram-se assinalados.

2. A matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ não está na FEL e, portanto, não podem ser assinalados os seus pivôs.

Definição 18

Designa-se por **condensação** o processo de transformar qualquer matriz numa matriz na FEL, recorrendo apenas a operações elementares sobre as linhas.

Teorema 1

Seja A uma matriz do tipo $m \times n$. Todas as matrizes na FEL que sejam equivalentes por linhas à matriz A têm o mesmo número de pivôs.

Definição 19

Designa-se por **característica** de uma matriz A e denota-se por $\text{car}(A)$, o número de pivôs das matrizes na FEL equivalentes por linhas a A .

Observações:

1. $\text{car}(O_{m \times n}) = 0$ e $\text{car}(I_n) = n$.
2. Todas as matrizes equivalentes por linhas a uma matriz possuem a mesma característica. No entanto, matrizes com a mesma característica geralmente não são equivalentes.

Exemplo 13

Determine a característica da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Resolução

Para determinar a característica da matriz A é necessário obter uma matriz equivalente por linhas A' na FEL. Assim

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{L'_2 = L_2 - L_1 \\ L'_3 = L_3 - 2L_1}} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{-1} & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L'_3 = L_3 - 3L_2} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{-1} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-4} & -1 \end{bmatrix} = A'.$$

O processo de condensação seguiu a estratégia:

- ▶ foi assinalado o 1.º elemento não nulo da 1.ª linha e que vai ser pivô de A' .
- ▶ usando a 1.ª linha realizaram-se as operações elementares de modo a obter os elementos nulos abaixo do elemento assinalado na 1.ª linha.
- ▶ foi assinalado o 1.º elemento não nulo da 2.ª linha e que vai ser pivô de A' .
- ▶ usando a 2.ª linha realizou-se a operação elementar de modo a obter o elemento nulo abaixo do elemento assinalado na 2.ª linha.

- foi assinalado o 1.º elemento não nulo da 3.ª linha e que vai ser pivô de A' .
- como a matriz A' está na FEL o processo de condensação termina.

Portanto, $\text{car}(A) = \text{car}(A') = n.º \text{ de pivôs de } A' = 3$.

Exercício 14

Determine a característica da matriz $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Resolução

Para obter a matriz B' na FEL, a partir de B , procedeu-se da seguinte forma

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} L'_3 = L_3 - L_1 \\ L'_4 = L_4 + 2L_1 \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} L'_3 = L_3 - 2L_2 \\ L'_4 = L_4 + 2L_2 \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B'.$$

O processo de condensação seguiu a estratégia:

- o 1.º elemento não nulo da 1.ª linha está na 2.ª coluna. No entanto, existem elementos não nulos na 1.ª coluna de outras linhas, pelo que é necessário realizar uma troca de linhas. Optou-se por realizar a troca entre a linha 1 e a linha 2. Se fosse realizada outro tipo de trocas entre as linhas da matriz, a matriz final na FEL seria outra, mas a característica seria a mesma.
- foi assinalado o 1.º elemento não nulo da 1.ª linha e que vai ser pivô de B' .
- usando a 1.ª linha realizaram-se as operações elementares de modo a obter os elementos nulos abaixo do elemento assinalado na 1.ª linha.
- foi assinalado o 1.º elemento não nulo da 2.ª linha e que vai ser pivô de B' .
- usando a 2.ª linha realizaram-se as operações elementares de modo a obter os elementos nulos abaixo do elemento assinalado na 2.ª linha.

- observa-se que a 3.^a e a 4.^a linhas são nulas, pelo que B' está na FEL e o processo de condensação termina.

Assim, $\text{car}(B) = \text{car}(B') = 2$.

Exercício 15

Seja α um parâmetro real e considere-se a matriz $A = \begin{bmatrix} \alpha & 2 & -1 \\ 2 & \alpha & \alpha \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$.

Determine a característica de A em função α .

Resolução

Como A depende de α então começamos por realizar o processo de condensação de modo a obter a matriz A'

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 2 & -1 \\ 2 & \alpha & \alpha \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & \alpha & \alpha \\ \alpha & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} L'_2 = L_2 - 2L_1 \\ L'_3 = L_3 - \alpha L_1 \end{array}} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & -2 \\ 0 & \alpha - 2 & 4 + \alpha \\ 0 & 2 - \alpha & -1 + 2\alpha \end{bmatrix} \xrightarrow{L'_3 = L_3 + L_2} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & -2 \\ 0 & \alpha - 2 & 4 + \alpha \\ 0 & 0 & 3 + 3\alpha \end{bmatrix} = A'.$$

Observe-se que A' pode não estar na FEL tal como sucede para $\alpha = 2$.

Para analisar a característica de A é usual começar por verificar quando é que a matriz A' tem o máximo de pivôs, ou seja

- (i) se $\alpha - 2 \neq 0 \wedge 3 + 3\alpha \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 2 \wedge \alpha \neq -1$ então $\text{car}(A) = \text{car}(A') = 3$.
- (ii) em seguida, considera-se os valores do parâmetro excluídos anteriormente, começando em 1.^o lugar por $3 + 3\alpha = 0$, ou seja
 - se $\alpha = -1$ então $\text{car}(A) = \text{car}(A') = 2$, pois

$$A' = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & -2 \\ 0 & \boxed{-3} & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- (iii) por último analisa-se quando $\alpha - 2 = 0$, ou seja

- se $\alpha = 2$ então A' não está na FEL pelo que é necessário continuar o processo de condensação para obter uma matriz A'' na FEL

$$A' = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{L'_3 = L_3 - \frac{3}{2}L_2} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{6} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A''$$

e $\text{car}(A) = \text{car}(A') = 2$.

Portanto, $\text{car}(A) = \begin{cases} 3 & \text{se } \alpha \neq -1 \wedge \alpha \neq 2 \\ 2 & \text{se } \alpha = -1 \vee \alpha = 2 \end{cases}$.

Exercício 16

Considere os parâmetros reais a e b e a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & a & -1 & b \\ 0 & 2a+2 & b+1 & 1 \\ 0 & 0 & a-3 & b \end{bmatrix}$.

Determine a característica de A em função de a e de b .

Resolução

A forma da matriz A permite discutir a sua característica para alguns valores de a e b . Procedendo de forma análoga ao exercício anterior, tem-se

► se $2a+2 \neq 0 \wedge a-3 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq -1 \wedge a \neq 3$ então $\text{car}(A) = 3, \forall b \in \mathbb{R}$.

► se $a-3 = 0 \Leftrightarrow a = 3$ então $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & b \\ 0 & 8 & b+1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{bmatrix}$ e portanto

▷ se $a = 3 \wedge b \neq 0$ então $\text{car}(A) = 3$.

▷ se $a = 3 \wedge b = 0$ então $\text{car}(A) = 2$.

► se $2a+2 = 0 \Leftrightarrow a = -1$ então é necessário continuar o processo de condensação

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{1} & -1 & -1 & b \\ 0 & 0 & b+1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & b \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{bmatrix} \boxed{1} & -1 & -1 & b \\ 0 & 0 & -4 & b \\ 0 & 0 & b+1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L'_2 = -\frac{1}{4}L_2} \begin{bmatrix} \boxed{1} & -1 & -1 & b \\ 0 & 0 & 1 & -b/4 \\ 0 & 0 & b+1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L'_3 = L_3 - (b+1)L_2} \begin{bmatrix} \boxed{1} & -1 & -1 & b \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -b/4 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{k} \end{bmatrix}$$

com $k = \frac{1}{4}(b^2 + b + 4)$. Dado que $b^2 + b + 4 = 0$ não tem soluções reais então

para $a = -1 \wedge \forall b \in \mathbb{R}$ tem-se $\text{car}(A) = 3$.

$$\text{Assim, } \text{car}(A) = \begin{cases} 3 & \text{se } a \neq 3 \vee b \neq 0 \\ 2 & \text{se } a = 3 \wedge b = 0 \end{cases}.$$

► Exercícios da Secção 2.5

1. Indique quais as matrizes que se encontram na forma escalonada por linhas.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Determine a característica das matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & -3 \\ 1 & 3 & 0 \\ 6 & 0 & -2 \end{bmatrix} \text{ e } F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Discuta a característica das matrizes reais em função dos parâmetros a e b :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & a \\ 1 & a & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & a & a & 1 \\ 1 & a & 2a-1 & a \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1 \\ 0 & 0 & ab & 0 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & a+2 & 2 \end{bmatrix},$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & a & 1 \\ 1 & 0 & b & a \\ 1 & a & a & b+1 \end{bmatrix} \text{ e } G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & a & b+1 & b+1 \\ 0 & 0 & b+2 & a \end{bmatrix}.$$

► Soluções dos Exercícios

1. São as matrizes A, B, D, E e G .

Observação: Nos exercícios 2 e 3, as matrizes que se apresentam são exemplos particulares da matriz na FEL obtida por condensação de forma a discutir a característica da matriz.

$$2. A \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \text{ car}(A) = 3; B \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \text{ car}(B) = 3;$$

$$C \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ car}(C) = 2; D \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ car}(D) = 2;$$

$$E \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -9/2 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ car}(E) = 3 \text{ e } F \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ car}(F) = 3.$$

$$3. A \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -a & a+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ car}(A) = \begin{cases} 2 & \text{se } a = 0 \\ 3 & \text{se } a \neq 0 \end{cases};$$

$$B \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & a-2 \\ 0 & 0 & 3a-a^2 \end{bmatrix}, \text{ car}(B) = \begin{cases} 2 & \text{se } a = 0 \vee a = 3 \\ 3 & \text{se } a \neq 0 \wedge a \neq 3 \end{cases};$$

$$C \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & a & a & 2 \\ 0 & 0 & a-1 & a-1 \end{bmatrix}, \text{ car}(C) = \begin{cases} 2 & \text{se } a = 1 \\ 3 & \text{se } a \neq 1 \end{cases};$$

$$D \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1 \\ 0 & 0 & ab & 0 \end{bmatrix}, \text{car}(D) = \begin{cases} 2 & \text{se } a = 0 \vee b = 0 \\ 3 & \text{se } a \neq 0 \wedge b \neq 0 \end{cases};$$

$$E \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & a+1 & 1 \end{bmatrix}, \text{car}(E) = \begin{cases} 2 & \text{se } a = 0 \\ 3 & \text{se } a \neq 0 \end{cases};$$

$$F \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & a & 1 \\ 0 & 0 & b & a \\ 0 & 0 & 0 & b \end{bmatrix},$$

$$\text{car}(F) = \begin{cases} 2 & \text{se } a = 0 \wedge b = 0 \\ 3 & \text{se } (a = 0 \wedge b \neq 0) \vee (a \neq 0 \wedge b = 0) \\ 4 & \text{se } a \neq 0 \wedge b \neq 0 \end{cases};$$

$$G \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & a & b+1 & b+1 \\ 0 & 0 & b+2 & a \end{bmatrix},$$

$$\text{car}(G) = \begin{cases} 2 & \text{se } a = 0 \wedge (b = -1 \vee b = -2) \\ 3 & \text{se } a \neq 0 \vee (b \neq -1 \wedge b \neq -2) \end{cases}.$$



3

Sistemas de Equações Lineares

Os sistemas de equações lineares constituem conjuntos de equações que podem ser representados e resolvidos através de técnicas de álgebra linear. Estas técnicas permitem analisar e resolver problemas complexos de forma eficiente e estruturada, sendo fundamentais em múltiplas áreas do conhecimento. As suas aplicações são vastas e incluem, entre outras:

1. Engenharia

Utilizados na modelação e análise de circuitos elétricos, estruturas mecânicas e processos industriais.

2. Ciência da Computação

Usados em computação gráfica para resolver problemas de transformações geométricas e renderização, além de algoritmos de aprendizagem automática e processamento de imagens.

3. Física

Aplicados para descrever a evolução temporal de sistemas físicos e resolver problemas em mecânica quântica e dinâmica de fluidos.

4. Economia

Utilizados na construção de modelos económicos que analisam interações entre variáveis como oferta, procura, investimento e fluxos de capital.

5. Processamento de Sinais

Aplicados na representação e manipulação de sinais em telecomunicações, áudio, imagem e análise de dados.

6. Engenharia de Controlo

Utilizados no projeto e análise de sistemas dinâmicos, modelando e otimizando o seu comportamento.

7. Redes Neurais Artificiais

Aplicados no treino e ajuste de redes, permitindo a propagação eficiente de valores e a atualização dos pesos durante o processo de aprendizagem.

Neste capítulo, começamos por apresentar alguns conceitos gerais associados aos sistemas de equações lineares e, de seguida, estudamos o método de eliminação de Gauss. Por fim, analisamos a classificação de sistemas dependentes de parâmetros, de modo semelhante ao realizado no capítulo anterior com a discussão da característica de matrizes.

Orientação de trabalho: o capítulo apresenta 2 atividades de trabalho e em cada uma delas o leitor deve dedicar entre 3 horas e 5 horas de estudo autónomo. As atividades que propomos encontram-se esquematizadas da seguinte forma:

- ▶ Atividade 9 – 3.1 Conceitos Gerais e 3.2 Método de Eliminação de Gauss
- ▶ Atividade 10 – 3.3 Classificação de Sistemas

3.1 Conceitos Gerais

Em diversos domínios, como a Matemática, a Engenharia, a Física ou a Economia, surgem frequentemente problemas cuja resolução exige a determinação de valores desconhecidos que satisfaçam, em simultâneo, um conjunto de equações. Quando estas equações são lineares - isto é, quando cada uma envolve apenas combinações lineares das incógnitas, sem potências, produtos entre incógnitas ou outras expressões não lineares - diz-se que estamos perante um sistema de equações lineares. Apresenta-se, de seguida, a definição formal.

Definições 1

Um sistema S com m equações e n incógnitas $x_1, x_2, \dots, x_n$, da forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

designa-se por **sistema de equações lineares**.

Na forma matricial, o sistema S escreve-se como $AX = B$, onde:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

sendo:

- ▶ $A_{m \times n} = [a_{ij}]$ a **matriz dos coeficientes**.
- ▶ $X_{n \times 1} = [x_j]$ a **matriz das incógnitas** ou **variáveis**.
- ▶ $B_{m \times 1} = [b_i]$ a **matriz dos termos independentes**.

Definição 2

Diz-se que o sistema de equações lineares $AX = B$, com A do tipo $m \times n$, é **homogêneo** se $B = O_{m \times 1}$. Neste caso, o sistema tem a forma $AX = O_{m \times 1}$.

Definição 3

Uma **solução** de um sistema de equações lineares é qualquer conjunto de valores das incógnitas que satisfaz simultaneamente todas as equações do sistema.

Definições 4

Um sistema de equações lineares diz-se:

1. **possível (SP)** quando tem pelo menos uma solução.
2. **possível e determinado (SPD)** quando a solução é única.
3. **possível e indeterminado (SPI)** quando admite mais do que uma solução, sendo o grau de indeterminação (**g**) o número de variáveis livres.
4. **impossível (SI)** quando não admite solução.

Teorema 1

Um sistema homogêneo da forma $AX = O_{m \times 1}$, com A do tipo $m \times n$, admite sempre, pelo menos, a **solução trivial**, dada por $X = O_{n \times 1}$.

Assim, um sistema homogêneo é sempre possível, podendo ser **determinado** ou **indeterminado**.

Exemplo 1

Seja S o sistema de equações lineares, nas incógnitas x, y, z e w , definido por:

$$\begin{cases} x + y + w = 1 \\ -x + 2z = 3 \\ x + y + z = 0 \\ y - z - w = -3 \end{cases}.$$

- (a) Represente S na forma matricial e identifique cada uma das matrizes.
 (b) Verifique se $X_1 = [-1 \ 0 \ 1 \ 2]^T$ e $X_2 = [0 \ 1 \ -1 \ 0]^T$ são soluções de S .

Resolução

- (a) Na forma matricial, S denota-se por $AX = B$ com

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$$

onde A é a matriz dos coeficientes, X é a matriz das incógnitas ou variáveis e B é a matriz dos termos independentes.

- (b) $X_1 = [-1 \ 0 \ 1 \ 2]^T$ é solução de S pois

$$AX_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} = B$$

e $X_2 = [0 \ 1 \ -1 \ 0]^T$ não é solução de S pois

$$AX_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \neq B.$$

► Exercícios da Secção 3.1

1. O sistema S é escrito na forma matricial $AX = B$ por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Sem resolver o sistema, verifique se $X_1 = [-1 \ 1 \ 2]^T$ e $X_2 = [0 \ 2 \ 1]^T$ são soluções de S .

2. Seja S o sistema $AX = B$, onde $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ e $B \in M_{m \times 1}(\mathbb{R})$. Mostre que se X_1 é solução de S e X_2 é solução do sistema homogéneo $AX = O_{m \times 1}$ então, para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$, tem-se que $X_1 + \alpha X_2$ é solução de S .

► Soluções dos Exercícios

1. X_1 é solução de S pois $AX_1 = B$. X_2 não é solução de S pois $AX_2 \neq B$.
2. $X_1 + \alpha X_2$ é solução de S pois $A(X_1 + \alpha X_2) = B$.

3.2 Método de Eliminação de Gauss

Definição 5

Seja S um sistema de equações lineares na forma $AX = B$.

A matriz $[A|B]$, obtida pela justaposição da matriz dos coeficientes A com a matriz dos termos independentes B , designa-se por **matriz ampliada** de S .

Definição 6

Dois sistemas de equações lineares dizem-se **equivalentes** quando têm o mesmo conjunto de soluções.

Teorema 2

Se a matriz $[A|B]$ é equivalente por linhas à matriz $[A'|B']$ então os sistemas de equações lineares $AX = B$ e $A'X = B'$ são equivalentes.

Definição 7

Designa-se por **método de eliminação de Gauss** o processo utilizado para resolver sistemas de equações lineares, que se desenvolve em duas fases:

- ▶ 1.^a fase: a partir da matriz ampliada $[A|B]$, obter uma matriz $[A'|B']$ na forma escalonada por linhas (FEL);
- ▶ 2.^a fase: determinar o conjunto solução do sistema $A'X = B'$.

Exemplo 2

Considere os três sistemas de equações lineares, de incógnitas x, y e z , em que mudam apenas os coeficientes que se encontram identificados:

$$S_1 : \begin{cases} 2x - y + 3z = -4 \\ -2x + 2y - 2z = 2 \\ 2x + y + \boxed{-5}z = \boxed{-8} \\ -6x + 3y - 9z = 12 \end{cases}, \quad S_2 : \begin{cases} 2x - y + 3z = -4 \\ -2x + 2y - 2z = 2 \\ 2x + y + \boxed{5}z = \boxed{-8} \\ -6x + 3y - 9z = 12 \end{cases} \text{ e}$$

$$S_3 : \begin{cases} 2x - y + 3z = -4 \\ -2x + 2y - 2z = 2 \\ 2x + y + \boxed{5}z = \boxed{8} \\ -6x + 3y - 9z = 12 \end{cases}.$$

Usando o método de eliminação de Gauss, determine o conjunto solução e classifique os sistemas S_1, S_2 e S_3 .

Resolução

► O sistema S_1 é escrito na forma matricial $AX = B$ por

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & \boxed{-5} \\ -6 & 3 & -9 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ \boxed{-8} \\ 12 \end{bmatrix}.$$

Numa 1.^a fase, transforme-se a matriz $[A|B]$ de S_1 numa matriz $[A'|B']$ na FEL

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & -4 \\ -2 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & \boxed{-5} & \boxed{-8} \\ -6 & 3 & -9 & 12 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} L_2 \rightarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \rightarrow L_4 + 3L_1 \end{array}} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -8 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 - 2L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] = [A'|B'].$$

O sistema S'_1 correspondente à matriz $[A'|B']$ é resolvido de baixo para cima.

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = -4 \\ y + z = -2 \\ -10z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2 + 0 = -4 \\ y = -2 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = -2 \\ z = 0 \end{cases}.$$

Como S_1 é equivalente a S'_1 então o seu conjunto solução é $CS = \{(-3, -2, 0)\}$. Uma vez que admite apenas uma solução então S_1 é um SPD.

- Considerando as mesmas operações elementares que foram usadas para obter a matriz ampliada de S_1 na FEL, obtém-se a matriz ampliada do sistema S_2

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & -4 \\ -2 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & -8 \\ -6 & 3 & -9 & 12 \end{array} \right] \rightarrow \cdots \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] = [A'|B'].$$

Resolvendo o sistema associado à matriz $[A'|B']$ tem-se

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = -4 \\ y + z = -2 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = y - 3z - 4 \\ y = -2 - z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 - 2z \\ y = -2 - z \end{cases}.$$

O conjunto solução de S_2 é $CS = \{(-3 - 2z, -2 - z, z) : z \in \mathbb{R}\}$ e uma vez que S_2 tem um número infinito de soluções, dependentes da variável livre z , então é um SPI com grau de indeterminação $g = 1$.

- Considerando as mesmas operações elementares que foram usadas para obter a matriz ampliada de S_1 na FEL, obtém-se a matriz ampliada do sistema S_3

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & -4 \\ -2 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & 8 \\ -6 & 3 & -9 & 12 \end{array} \right] \rightarrow \cdots \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] = [A'|B'].$$

Assim, o sistema associado à matriz $[A'|B']$ é

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = -4 \\ y + z = -2 \\ 0 = 16 \\ 0 = 0 \end{cases}.$$

Como a 3.^a equação apresenta uma igualdade falsa então S_3 não tem soluções e o seu conjunto solução é $CS = \emptyset$ (conjunto vazio). Logo, S_3 é um SI.

➤ Exercícios da Seção 3.2

1. Considere os três sistemas de equações lineares, S_1 e S_2 de incógnitas x, y e z , e S_3 de incógnitas x, y, z e w :

$$S_1 : \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ x - 2z = 1 \\ -x - 2y + z = 0 \end{cases}, \quad S_2 : \begin{cases} x + y + 3z = 0 \\ 2x + 2z = 1 \\ -x + y + z = 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad S_3 : \begin{cases} x + 2y + 4w = 0 \\ z + 2w = 1 \\ -2z - 2w = 0 \end{cases}.$$

Para cada um dos sistemas:

- a partir da matriz ampliada $[A|B]$, obtenha uma matriz $[A'|B']$ na FEL.
 - determine o conjunto solução.
 - indique, justificando, a sua classificação.
2. Considere os três sistemas de equações lineares, S_1 de incógnitas x, y e z , S_2 de incógnitas x, y, z e w , e S_3 de incógnitas x, y, z, w e t :

$$S_1 : \begin{cases} x - y - z + 1 = 0 \\ -2x + 2z = 1 \\ -x - y + z = 0 \end{cases}, \quad S_2 : \begin{cases} x + y + z + w = -1 \\ 2z + w = -2 \\ x + y - z = 1 \end{cases} \quad \text{e}$$

$$S_3 : \begin{cases} x - y + 2z - w + t = 0 \\ x - y + z = -1 \\ z - w + t = 1 \end{cases}.$$

Para cada um dos sistemas:

- a partir da matriz ampliada $[A|B]$, obtenha uma matriz $[A'|B']$ na FEL.
- determine o conjunto solução.
- indique, justificando, o grau de indeterminação.

➤ Soluções dos Exercícios

1. (a) $S_1 : [A|B] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{array} \right], \quad S_2 : [A|B] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right],$

$$S_3 : [A|B] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right].$$

(b) $CS_1 = \left\{ \left(1, -\frac{1}{2}, 0 \right) \right\}$, $CS_2 = \emptyset$ e $CS_3 = \{(-2y - 4, y, -1, 1) : y \in \mathbb{R}\}$.

(c) S_1 é um SPD porque tem apenas uma solução, S_2 é um SI pois não tem soluções e S_3 é um SPI com $g = 1$ porque tem infinitas soluções e uma variável livre.

2. (a) $S_1 : [A|B] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$, $S_2 : [A|B] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$,
 $S_3 : [A|B] \rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$.

(b) $CS_1 = \left\{ \left(z - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, z \right) : z \in \mathbb{R} \right\}$,

$CS_2 = \{(-y + z + 1, y, z, -2z - 2) : y, z \in \mathbb{R}\}$,

$CS_3 = \{(y - z - 1, y, z, w, -z + w + 1) : y, z, w \in \mathbb{R}\}$.

(c) S_1 tem $g = 1$, S_2 tem $g = 2$ e S_3 tem $g = 3$.

3.3 Classificação de Sistemas

No Exemplo 2 da página 90, a classificação dos sistemas foi realizada com base no respectivo conjunto solução. Contudo, essa classificação pode ser efetuada sem o conhecimento prévio da solução, bastando para tal analisar as características da matriz dos coeficientes e da matriz ampliada do sistema, conforme estabelecido no resultado seguinte.

Teorema 3

Sejam S um sistema de equações lineares $AX = B$ e $[A'|B']$ uma matriz na FEL, obtida a partir da matriz ampliada $[A|B]$. Então:

1. $\text{car}(A) = \text{car}(A')$ e $\text{car}[A|B] = \text{car}[A'|B']$.
2. $\text{car}[A|B] = \text{car}(A)$ ou $\text{car}[A|B] = \text{car}(A) + 1$.

Teorema 4

Sejam S um sistema de equações lineares $AX = B$, com m equações e n incógnitas, e $[A|B]$ a matriz ampliada. Então:

1. se $\text{car}(A) = \text{car}[A|B]$ então S é um **SP**:
 - i) se $\text{car}(A) = \text{car}[A|B] = n$ então S é um **SPD**.
 - ii) se $\text{car}(A) = \text{car}[A|B] < n$ então S é um **SPI**, sendo o **grau de indeterminação** dado por $g = n - \text{car}(A)$.
2. se $\text{car}(A) \neq \text{car}[A|B]$ então S é um **SI**.

Exemplo 3

Considere os três sistemas de equações lineares do Exemplo 2 da página 90. Usando o teorema anterior, classifique os sistemas.

Resolução

As matrizes ampliadas na forma escalonada por linhas (FEL), $[A'|B']$, dos sistemas S_1 , S_2 e S_3 são, respectivamente:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right], \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad \text{e} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Todos os sistemas têm quatro equações e três variáveis ($n = 3$).

- ▶ No sistema S_1 , a matriz $[A'|B']$ tem uma linha nula, tornando uma equação irrelevante e reduzindo o sistema a três equações compatíveis. Como $\text{car}(A) = \text{car}[A|B] = 3 = n$, S_1 é um SPD, ou seja, admite uma única solução.
- ▶ No sistema S_2 , duas linhas nulas em $[A'|B']$ indicam duas equações irrelevantes, reduzindo o sistema a duas equações compatíveis. Uma vez que $\text{car}(A) = \text{car}[A|B] = 2 < 3 = n$ então S_2 é um SPI, com infinitas soluções e grau de indeterminação $g = n - \text{car}(A) = 3 - 2 = 1$.
- ▶ No sistema S_3 , apesar de uma linha nula, existe incompatibilidade entre as outras equações, pois $\text{car}(A) = 2 \neq \text{car}[A|B] = 3$. Assim, S_3 é SI, ou seja, não tem solução.

Exercício 1

Considere o sistema de equações lineares reais S , de incógnitas x, y, z e w , e de parâmetros a e b :

$$\begin{cases} ax + y + z + w = 0 \\ ay + az + aw = 1 \\ (a - 2)w = b \end{cases}.$$

Classifique S em função de a e de b .

Resolução

Para $a \neq 0$ matriz ampliada de S está na FEL, pois

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} a & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & a & a & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a - 2 & b \end{array} \right]$$

O sistema tem 4 variáveis, pelo que $n = 4$. Para analisar as características de A e de $[A|B]$, em função de a e b , considere-se o procedimento do Exemplo 28 da página 77.

► se $a \neq 0 \wedge a - 2 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0 \wedge a \neq 2$ então $\text{car}(A) = \text{car}[A|B] = 3 < 4 = n$, $\forall b \in \mathbb{R}$ e S é um SPI com grau de indeterminação $g = 4 - 3 = 1$.

► se $a = 2$ então a matriz $[A|B]$ é

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{array} \right]$$

e a classificação de S depende dos valores do parâmetro b

▷ se $b \neq 0$ então $\text{car}(A) = 2 \neq 3 = \text{car}[A|B]$ e S é um SI.

▷ se $b = 0$ então $\text{car}(A) = \text{car}[A|B] = 2 < 4 = n$ e S é um SPI com $g = 4 - 2 = 2$.

► Se $a = 0$ então a matriz $[A|B]$ não está na FEL, pelo que é necessário obter uma matriz na FEL

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & b \end{array} \right] \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

e como $\text{car}(A) = 2 \neq 3 = \text{car}[A|B]$, $\forall b \in \mathbb{R}$ então S é um SI.

Conclusão: a classificação de S é

$$\begin{cases} \text{SPI}, g = 1 & \text{se } a \neq 0 \wedge a \neq 2 \\ \text{SPI}, g = 2 & \text{se } a = 2 \wedge b = 0 \\ \text{SI} & \text{se } a = 0 \vee (a = 2 \wedge b \neq 0) \end{cases}.$$

Exercício 2

Considere o sistema de equações lineares reais S , de incógnitas x, y e z , e de parâmetros α e β :

$$\begin{cases} x + 2y + \alpha z = 1 \\ 2\alpha y - 2z = 2\alpha + 2 \\ (1 - \alpha)z = \beta + 1 \end{cases}.$$

(a) Classifique S em função de α e de β .

(b) Determine o conjunto solução de S para $\alpha = 1$ e $\beta = -1$.

Resolução

(a) Para $\alpha \neq 0$ matriz ampliada de S está na FEL, pois

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & \alpha & 1 \\ 0 & 2\alpha & -2 & 2\alpha + 2 \\ 0 & 0 & 1 - \alpha & \beta + 1 \end{array} \right].$$

Assim

► se $2\alpha \neq 0 \wedge 1 - \alpha \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0 \wedge \alpha \neq 1$ então S é um SPD pois $\text{car}(A) = \text{car}[A|B] = 3 = n, \forall \beta \in \mathbb{R}$,

► se $1 - \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1$ então a matriz ampliada é

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \beta + 1 \end{array} \right]$$

e a classificação de S depende dos valores de β pois

▷ se $\beta + 1 \neq 0 \Leftrightarrow \beta \neq -1$ então $\text{car}(A) = 2 \neq 3 = \text{car}[A|B]$, pelo que S é um SI.

▷ se $\beta + 1 = 0 \Leftrightarrow \beta = -1$ então $\text{car}(A) = \text{car}[A|B] = 2 < 3 = n$, ou seja, S é um SPI com $g = n - \text{car}(A) = 3 - 2 = 1$.

► se $2\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ então a matriz ampliada é

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \beta + 1 \end{array} \right]$$

e não está na FEL, pelo que será necessário obter uma matriz na FEL

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \beta + 1 \end{array} \right] \xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 + \frac{1}{2}L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \beta + 2 \end{array} \right].$$

A classificação de S depende dos valores de β . Assim

▷ se $\beta + 2 \neq 0 \Leftrightarrow \beta \neq -2$ então $\text{car}(A) = 2 \neq 3 = \text{car}[A|B]$ e S é um SI.

▷ se $\beta + 2 = 0 \Leftrightarrow \beta = -2$ então $\text{car}(A) = \text{car}[A|B] = 2 < 3 = n$ e S é um SPI com $g = n - \text{car}(A) = 3 - 2 = 1$.

Conclusão: a classificação de S é

$$\begin{cases} \text{SPD} & \text{se } \alpha \neq 0 \wedge \alpha \neq 1 \\ \text{SPI, } g = 1 & \text{se } (\alpha = 1 \wedge \beta = -1) \vee (\alpha = 0 \wedge \beta = -2) \\ \text{SI} & \text{se } (\alpha = 1 \wedge \beta \neq -1) \vee (\alpha = 0 \wedge \beta \neq -2) \end{cases}.$$

(b) Para $\alpha = 1$ e $\beta = -1$, a resolução do sistema conduz à forma

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2y - 2z = 4 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 - 3z \\ y = 2 + z \end{cases}$$

pelo que o conjunto solução é $CS = \{(-3 - 3z, 2 + z, z) : z \in \mathbb{R}\}$.

Exercício 3

Considere o sistema de equações lineares reais S , de incógnitas x, y, z e w , e de parâmetros a e b :

$$\begin{cases} ax + ay + az + aw = a \\ ay + az + aw = 0 \\ az + w = 1 \\ (b - 1)w = a - 1 \end{cases}$$

Classifique S em função de a e de b .

Resolução

A matriz ampliada de S é

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} a & a & a & a & a \\ 0 & a & a & a & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 & a-1 \end{array} \right]$$

e assim

- se $a \neq 0 \wedge b \neq 1$ então $\text{car}(A) = \text{car}[A|B] = 4 = n$ e S é um SPD.
- se $a \neq 0 \wedge b = 1$ então $\text{car}(A) = 3$ e $\text{car}[A|B]$ depende do parâmetro a

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} a & a & a & a & a \\ 0 & a & a & a & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-1 \end{array} \right].$$

Logo

- ▷ se $a \neq 1$ então $\text{car}(A) = 3 \neq 4 = \text{car}[A|B]$ e S é um SI.
- ▷ se $a = 1$ então $\text{car}(A) = \text{car}[A|B] = 3 < 4 = n$ e S é um SPI com $g = 4 - 3 = 1$.

► se $a = 0 \wedge b \neq 1$ então a matriz $[A|B]$ é

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 & -1 \end{array} \right]$$

e não está na FEL, pelo que é necessário obter a matriz na FEL

$$\begin{aligned} [A|B] &= \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{L_1 \leftrightarrow L_3 \\ L_2 \leftrightarrow L_4}} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 - (b-1)L_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

e conseqüentemente, $\text{car}(A) = 1$ e $\text{car}[A|B]$ depende do parâmetro b

- ▷ se $b \neq 0$ então $\text{car}(A) = 1 \neq 2 = \text{car}[A|B]$ e S é um SI.
- ▷ se $b = 0$ então $\text{car}(A) = \text{car}[A|B] = 1 < 4 = n$ e S é um SPI com $g = 4 - 1 = 3$.

► se $a = 0 \wedge b = 1$ então a matriz $[A|B]$ é

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right]$$

e embora a matriz não esteja na FEL, podemos observar que a 1.^a e a 3.^a equações do sistema são incompatíveis.

Portanto, S é um SI porque $\text{car}(A) = 1 \neq 2 = \text{car}[A|B]$.

Conclusão: a classificação de S é

$$\begin{cases} \text{SPD} & \text{se } a \neq 0 \wedge b \neq 1 \\ \text{SPI}, g = 1 & \text{se } a = 1 \wedge b = 1 \\ \text{SPI}, g = 3 & \text{se } a = 0 \wedge b = 0 \\ \text{SI} & \text{se } (a \neq 0 \wedge a \neq 1 \wedge b = 1) \vee (a = 0 \wedge b \neq 0) \end{cases}.$$

➤ Exercícios da Seção 3.3

1. Considere os três sistemas de equações lineares reais de parâmetro real k , S_1 e S_2 de incógnitas x e y , e S_3 de incógnitas x , y e z :

$$S_1 : \begin{cases} x + y = k \\ x + ky = k^2 \end{cases}, \quad S_2 : \begin{cases} x + y = 1 \\ x + k^2y = k \end{cases} \quad \text{e} \quad S_3 : \begin{cases} x + y - kz = 1 \\ x - y + kz = 1 \\ kx + ky - z = k \end{cases}$$

Classifique os sistemas em função de k .

2. Considere os três sistemas de equações lineares reais de parâmetros a e b , S_1 de incógnitas x , y e z , e S_2 e S_3 de incógnitas x , y , z e w :

$$S_1 : \begin{cases} x + 2y - 2bz = 2b \\ ay - 2bz = b \\ bz = a + b \end{cases}, \quad S_2 : \begin{cases} x + ay + bz - w = a \\ ay + w = 0 \\ ay + bz = a \\ x + ay + bz = a \end{cases}$$

$$S_3 : \begin{cases} x + y + z + w = a \\ y - z - w = a \\ y - az - w = b \\ y - z + bw = a \end{cases}$$

Classifique os sistemas em função de a e de b .

3. Indique, justificando convenientemente, se as afirmações são verdadeiras ou falsas.

- (a) Sejam $A \in M_{4 \times 5}(\mathbb{R})$ e $B \in M_{4 \times 1}(\mathbb{R})$, e S o sistema de equações lineares $AX = B$.

Se $\text{car}(A) = \text{car}[A|B] = 3$ então S é possível e indeterminado com grau de indeterminação 3.

- (b) Sejam $A \in M_{6 \times 5}(\mathbb{R})$ e $B \in M_{6 \times 1}(\mathbb{R})$, e S o sistema de equações lineares $AX = B$.

Se $\text{car}(A) = \text{car}[A|B] = 5$ então o sistema é possível e indeterminado com grau de indeterminação igual a 1.

- (c) Seja S o sistema de equações lineares $AX = B$, onde A é de ordem 5 e $B \in M_{5 \times 1}(\mathbb{R})$.

Se $\text{car}(A) < \text{car}[A|B]$ então S é possível e determinado.

- (d) O sistema de equações lineares homogêneo $AX = O_{n \times 1}$, de n equações a n incógnitas, é sempre possível e determinado.

(e) Sejam $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ e $B \in M_{n \times 1}(\mathbb{R})$.

O sistema $AX = B$ é possível e determinado se e só se a matriz A é invertível.

(f) Seja S um sistema de m equações e n incógnitas.

Se $m > n$ então S é impossível.

(g) Seja S um sistema de m equações e n incógnitas.

Se $m < n$ então S é possível e indeterminado.

► Soluções dos Exercícios

$$1. S_1 : [A|B] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & k \\ 0 & k-1 & k(k-1) \end{array} \right], \quad S_1 \text{ é } \begin{cases} \text{SPD} & \text{se } k \neq 1 \\ \text{SPI}, g=1 & \text{se } k = 1 \end{cases}.$$

$$S_2 : [A|B] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & k^2-1 & k-1 \end{array} \right], \quad S_2 \text{ é } \begin{cases} \text{SPD} & \text{se } k \neq -1 \wedge k \neq 1 \\ \text{SPI}, g=1 & \text{se } k = 1 \\ \text{SI} & \text{se } k = -1 \end{cases}.$$

$$S_3 : [A|B] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -k & 1 \\ 0 & -2 & 2k & 0 \\ 0 & 0 & k^2-1 & 0 \end{array} \right], \quad S_3 \text{ é } \begin{cases} \text{SPD} & \text{se } k \neq -1 \wedge k \neq 1 \\ \text{SPI}, g=1 & \text{se } k = 1 \vee k = -1 \end{cases}.$$

$$2. S_1 : [A|B] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2b & 2b \\ 0 & a & -2b & b \\ 0 & 0 & b & a+b \end{array} \right],$$

$$S_1 \text{ é } \begin{cases} \text{SPD} & \text{se } a \neq 0 \wedge b \neq 0 \\ \text{SPI}, g=2 & \text{se } a = 0 \wedge b = 0 \\ \text{SI} & \text{se } (a \neq 0 \wedge b = 0) \vee (a = 0 \wedge b \neq 0) \end{cases}.$$

$$S_2 : [A|B] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & a & b & -1 & a \\ 0 & a & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b & -1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right], \quad S_2 \text{ é } \begin{cases} \text{SPD} & \text{se } a \neq 0 \wedge b \neq 0 \\ \text{SPI}, g=1 & \text{se } a = 0 \wedge b \neq 0 \\ \text{SPI}, g=2 & \text{se } a = 0 \wedge b = 0 \\ \text{SI} & \text{se } a \neq 0 \wedge b = 0 \end{cases}.$$

$$S_3 : [A|B] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & -1 & -1 & a \\ 0 & 0 & 1-a & 0 & b-a \\ 0 & 0 & 0 & b+1 & 0 \end{array} \right],$$

$$S_3 \text{ é } \begin{cases} \text{SPD} & \text{se } a \neq 1 \wedge b \neq -1 \\ \text{SPI}, g=1 & \text{se } (a = 1 \wedge b = 1) \vee (a \neq 1 \wedge b = -1) \\ \text{SI} & \text{se } a = 1 \wedge b \neq 1 \end{cases}.$$

3. (a) S tem $m = 4$ equações e $n = 5$ incógnitas.
Uma vez que $\text{car}(A) = \text{car}[A|B]$ então S é um SP.
Sendo $\text{car}(A) = \text{car}[A|B] = 3 < 5$ então S é um SPI com grau de indeterminação igual a $g = 5 - 3 = 2$.
A afirmação é **falsa**.
- (b) S tem $m = 6$ equações e $n = 5$ incógnitas.
Como $\text{car}(A) = \text{car}[A|B]$ então S é um SP.
Atendendo a que $\text{car}(A) = \text{car}[A|B] = 5$ então S é um SPD.
A afirmação é **falsa**.
- (c) S tem $m = 5$ equações e $n = 5$ incógnitas.
Como $\text{car}(A) < \text{car}[A|B]$ então S é um SI.
A afirmação é **falsa**.
- (d) Um sistema S de equações lineares homogêneo, de n equações a n incógnitas, $AX = O_{n \times 1}$ é sempre possível pois tem a solução $X = O_{n \times 1}$.
Contudo, S é um SPD se e só se $\text{car}(A) = n$ e é um SPI se e só se $\text{car}(A) < n$.
A afirmação é **falsa**.
- (e) Se a matriz real A é uma matriz invertível então $\text{car}(A) = \text{car}[A|B] = n$ e S é um SPD.
A afirmação é **verdadeira**.
- (f) Seja S um sistema de equações lineares $AX = B$, com $m > n$. Como S tem mais equações do que incógnitas então $\text{car}(A) \leq \min \{m, n\} = n$.
Assim, podem ocorrer as três situações:
► se $\text{car}(A) = \text{car}[A|B] = n$ então S é um SPD.
► se $\text{car}(A) = \text{car}[A|B] < n$ então S é um SPI.
► se $\text{car}(A) < \text{car}[A|B]$ então S é um SI.
A afirmação é **falsa**.
- (g) Seja S um sistema de equações lineares $AX = B$, $m < n$
Como S tem menos equações do que incógnitas então S nunca é um SPD pois $\text{car}(A) \leq \min \{m, n\} = m < n$.
Assim, só podem ocorrer as duas situações:
► se $\text{car}(A) = \text{car}[A|B]$ então S é um SPI.
► se $\text{car}(A) < \text{car}[A|B]$ então S é um SI.
A afirmação é **falsa**.

4

Determinantes

O estudo dos determinantes constitui uma parte importante da Álgebra Linear, sendo particularmente útil para compreender propriedades fundamentais das matrizes quadradas, como a invertibilidade ou o cálculo de volumes de paralelepípedos definidos por três vetores. Embora o seu uso direto em aplicações práticas seja, por vezes, limitado, os determinantes desempenham um papel teórico relevante em diversos contextos. Destacam-se, entre outros, os seguintes:

1. Análise de Dados

Na dedução do polinómio característico de matrizes de covariância, os determinantes são utilizados na obtenção de valores próprios, embora os algoritmos práticos recorram a métodos numéricos mais robustos.

2. Engenharia e Física

Contribuem para caracterizar a existência e unicidade de soluções de sistemas lineares que modelam circuitos elétricos, estruturas mecânicas e fenómenos físicos diversos.

3. Geometria e Computação Gráfica

São usados no cálculo de áreas, volumes e na verificação da orientação em transformações lineares, com aplicações em renderização e simulações geométricas.

4. Engenharia de Controlo

Na análise de estabilidade e controlabilidade de sistemas dinâmicos, os determinantes surgem no cálculo do polinómio característico de matrizes associadas ao sistema.

Na sequência dos três capítulos anteriores, este capítulo é dedicado aos determinantes, entendidos como uma função definida no conjunto das matrizes quadradas com valores reais e que associa a cada matriz um número real. Esta função possui propriedades fundamentais, como a multilinearidade, a alternância e a normalização, que permitem estabelecer resultados teóricos relevantes e formular conclusões rigorosas em diversas aplicações. Serão ainda analisadas algumas das suas utilizações no contexto do cálculo matricial, nomeadamente na caracterização da invertibilidade de matrizes e na resolução de sistemas de equações lineares.

Orientação de trabalho: o capítulo apresenta 3 atividades de trabalho e recomendamos que, em cada uma delas, o leitor dedique entre 3 e 5 horas de estudo autónomo. As atividades que propomos encontram-se esquematizadas da seguinte forma:

- ▶ Atividade 11 – 4.1 Conceitos Gerais e 4.2 Regras Práticas
- ▶ Atividade 12 – 4.3 Teorema de Laplace e 4.4 Propriedades
- ▶ Atividade 13 – 4.5 Matriz Inversa e 4.6 Regra de Cramer

4.1 Conceitos Gerais

Definição 1

Seja n um número natural positivo. Uma **permutação** dos números $1, 2, \dots, n$ é qualquer sequência formada por estes números, sem omissões nem repetições.

Propriedade 1

O número de permutações de $1, 2, \dots, n$ é igual a $n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$.

As permutações permitem descrever, de forma sistemática, todas as maneiras de selecionar elementos de uma matriz escolhendo exatamente um elemento de cada linha e de cada coluna, ou equivalentemente, todas as possíveis escolhas de colunas associadas a essas seleções.

Definições 2

Numa permutação $j_1 j_2 \dots j_n$, diz-se que os elementos j_p e j_q formam uma **inversão** quando o maior antecede o menor, isto é, quando $j_p > j_q$ com $p < q$.

Uma permutação diz-se **par (ímpar)** quando o seu número total de inversões é par (ímpar). Por convenção, $1\ 2 \dots n$ é uma permutação **par**.

Observação: O número de inversões de uma permutação pode ser obtido contando, para cada elemento, o número de elementos à sua direita que são menores do que ele. A soma desses valores corresponde ao número total de inversões.

Exemplo 1

1. Permutação 24153. Contando o número de inversões:

$$\begin{array}{ccccc} \underbrace{2}_{1} & \underbrace{4}_{2} & \underbrace{1}_{0} & \underbrace{5}_{1} & \underbrace{3}_{0} \end{array}$$

obtem-se $1 + 2 + 0 + 1 + 0 = 4$ inversões. Como 4 é par, a permutação 24153 é **par**.

2. Permutação 2134. Contando o número de inversões:

$$\begin{array}{cccc} \underbrace{2}_{1} & \underbrace{1}_{0} & \underbrace{3}_{0} & \underbrace{4}_{0} \end{array}$$

obtem-se 1 inversão. Como 1 é ímpar, a permutação 2134 é **ímpar**.

Definição 3

Seja A uma matriz de ordem n .

Designa-se por **produto elementar** de A qualquer produto de n elementos da matriz A de modo que se tenha um único elemento de cada linha e de cada coluna. Um produto elementar pode escrever-se na forma $a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$, onde $j_1 j_2 \cdots j_n$ é uma permutação de $1, 2, \dots, n$.

Observação: Qualquer produto elementar pode ser escrito nesta forma ordenada, reordenando os índices das linhas ou das colunas.

Definições 4

Seja A uma matriz quadrada de ordem n .

Um produto elementar $a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ da matriz A , multiplicado por $+1$ ou -1 , designa-se por **produto elementar com sinal**, tendo sinal positivo (negativo) se $j_1 j_2 \cdots j_n$ é uma permutação par (ímpar).

Designa-se por **determinante** de A a soma de todos os seus produtos elementares com sinal. Este valor denota-se por $\det(A)$ ou $|A|$.

Exemplo 2

Calcule o determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

Resolução

Para obter os produtos elementares de A , é necessário escolher exatamente um elemento de cada linha e de cada coluna, considerando apenas os não nulos.

Nas três primeiras linhas, existe apenas um elemento não nulo em cada uma:

$$a_{12} = -3, a_{21} = 3, a_{33} = 2.$$

Na quarta linha, existem dois elementos não nulos, mas apenas $a_{44} = -2$ pode ser escolhido.

Assim, $a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}$ é o único produto elementar não nulo e a permutação associada é 2134, que é ímpar (tem 1 inversão).

Logo, $|A| = -a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} = (-1) \cdot (-3) \cdot 3 \cdot 2 \cdot (-2) = -36$.

Exercício 1

Calcule o determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Resolução

Dado que a matriz A possui muitos elementos nulos, é vantajoso restringir o cálculo do determinante aos produtos elementares não nulos. Para tal, seleciona-se, em cada linha, um elemento não nulo, garantindo que as colunas correspondentes sejam todas distintas. Nas quatro primeiras linhas, há apenas um elemento não nulo em cada uma delas, ou seja

► linha 1: $a_{13} = 1$. linha 2: $a_{22} = -1$.

► linha 3: $a_{31} = 2$. linha 4: $a_{45} = -1$.

Na linha 5, todos os elementos são não nulos, mas as colunas 1, 2, 3 e 5 já

foram utilizadas nas linhas 3, 2, 1 e 4, respectivamente. Assim, apenas a coluna 4 permanece disponível, onde $a_{54} = 2$.

Assim, $a_{13}a_{22}a_{31}a_{45}a_{54}$ é o único produto elementar não nulo de A , correspondente à permutação 32154. Esta é par, pois tem quatro inversões (os pares (3, 2), (3, 1), (2, 1) e (5, 4)). Logo, $e_{32154} = 1$, pelo que o determinante é

$$|A| = e_{32154} \cdot a_{13}a_{22}a_{31}a_{45}a_{54} = 1 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 2 \cdot (-1) \cdot 2 = 4.$$

Casos particulares importantes

A definição de determinante envolve a soma de produtos elementares com sinal, sendo cada produto associado a uma permutação das colunas. Para matrizes de pequena dimensão, é possível enumerar todos os produtos elementares com sinal e, conseqüentemente, obter fórmulas concretas para o determinante.

Exercício 2

Considere uma matriz A de ordem n .

1. Determine todos os produtos elementares com sinal quando $n = 2$.
2. Determine todos os produtos elementares com sinal quando $n = 3$.

Resolução

Para uma matriz de ordem 2,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

existem duas permutações: 12 (par) e 21 (ímpar). Assim, os produtos elementares com sinal são

$$+a_{11}a_{22} \quad \text{e} \quad -a_{12}a_{21}.$$

Para uma matriz de ordem 3,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

existem seis permutações. Os produtos elementares com sinal correspondentes são:

$$\begin{aligned} &+a_{11}a_{22}a_{33} \quad +a_{12}a_{23}a_{31} \quad +a_{13}a_{21}a_{32} \\ &-a_{12}a_{21}a_{33} \quad -a_{11}a_{23}a_{32} \quad -a_{13}a_{22}a_{31} \end{aligned}$$

Os produtos elementares com sinal obtidos correspondem às diferentes permutações das colunas, bem como aos respectivos sinais associados. Somando esses produtos, obtêm-se as seguintes expressões.

Proposição 1

Seja $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ uma matriz de ordem 2. Então,

$$|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$
Proposição 2

Seja $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ uma matriz de ordem 3. Então,

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

As expressões anteriores resultam diretamente da enumeração de todos os produtos elementares com sinal. No entanto, o seu cálculo pode ser organizado de forma mais simples, recorrendo a regras operacionais específicas, que se apresentam na secção seguinte.

► Exercícios da Secção 4.1

1. Indique se as permutações são pares ou ímpares.

(a) 53241. (b) 24153. (c) 43512.

2. Usando a definição, determine o valor do determinante das matrizes reais.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} a & a & a & a & a \\ 0 & a & a & a & a \\ 0 & 0 & a & a & a \\ 0 & 0 & 0 & a & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{e } G = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

► Soluções dos Exercícios

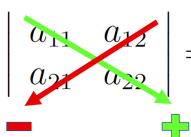
- (a) Permutação par. (b) Permutação par. (c) Permutação ímpar.
- $|A| = 12$, $|B| = a^4$, $|C| = 8$, $|D| = 0$, $|E| = a^5$, $|F| = -a^6$ e $|G| = 30$.

4.2 Regras Práticas

As fórmulas do determinante para matrizes de ordem 2 e 3, obtidas na secção anterior a partir da definição e da enumeração dos produtos elementares com sinal, podem ser aplicadas de forma mais simples através das **regras práticas** que se seguem. Estas regras não introduzem novos conceitos: correspondem apenas a uma forma organizada de calcular os produtos elementares com sinal dessas expressões. Note-se que as regras práticas aplicam-se exclusivamente a matrizes de ordem 2 e 3. Para matrizes de ordem superior, recorre-se ao teorema de Laplace ou à condensação, que serão estudados adiante.

Regra Prática 2

Para calcular o determinante de uma matriz A de ordem 2, pode usar-se a **regra prática** ilustrada na

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$


ou seja:

- ▶ multiplicam-se os elementos da diagonal principal e afeta-se do sinal +.
- ▶ multiplicam-se os elementos da diagonal secundária e afeta-se o sinal -.
- ▶ o determinante é igual à soma dos dois produtos anteriores.

Exemplo 3

Usando a regra prática, calcule o determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$.

Resolução

O determinante da matriz A é igual a $|A| = 1 \cdot (-3) - (-1) \cdot 2 = -1$.

Regra Prática 3

Para calcular o determinante de uma matriz A de ordem 3, podem usar-se as regras práticas ilustradas nas figuras

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

ou seja:

- ▶ acrescentam-se as duas primeiras colunas (linhas) da matriz.
- ▶ consideram-se o produto dos elementos da diagonal principal e os produtos dos elementos de cada paralela a essa diagonal, e afetam-se os três produtos do sinal +.
- ▶ consideram-se o produto dos elementos da diagonal secundária e os produtos dos elementos de cada paralela a essa diagonal, e afetam-se os três produtos do sinal -.
- ▶ o determinante é igual à soma dos seis produtos anteriores.

Exemplo 4

Usando a regra prática, calcule o determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Resolução

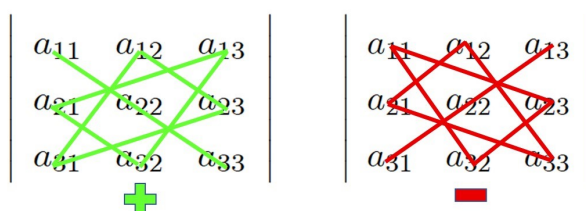
Começando por acrescentar as duas primeiras colunas de A tem-se

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} |A| &= 2 \cdot (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot 1 - [1 \cdot (-1) \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \cdot 1] \\ &= -2 + 0 + 1 - (-2 + 2 + 0) = -1. \end{aligned}$$

Regra Prática 4

O cálculo do determinante de A pode efetuar-se aplicando a **regra de Sarrus**. Esta regra está esquematizada na figura



ou seja:

- ▶ multiplicam-se os elementos da diagonal principal bem como os elementos de cada triângulo com base paralela a essa diagonal, e afetam-se os três produtos do sinal $+$ (lado esquerdo da figura).
- ▶ multiplicam-se os elementos da diagonal secundária bem como os elementos de cada triângulo com base paralela a essa diagonal, e afetam-se os três produtos do sinal $-$ (lado direito da figura).
- ▶ o determinante é igual à soma dos seis produtos anteriores.

Exemplo 5

Usando a regra de Sarrus, calcule o determinante da matriz do exemplo anterior.

Resolução

Aplicando a regra de Sarrus tem-se

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \cdot (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot 1 - [1 \cdot (-1) \cdot 2 + 0 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 2] = -1.$$

➤ Exercícios da Seção 4.2

1. Usando as regras práticas, calcule o determinante das matrizes reais.

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & 3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 10^3 & 10^7 \\ 10^{-2} & 10^2 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$G = \begin{bmatrix} \tan \theta & 1 & 0 \\ -1 & \tan \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Usando as regras práticas, determine o conjunto de valores $x \in \mathbb{R}$ que satisfazem a relação:

$$(a) \begin{vmatrix} x & 3 \\ -2 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 \\ -2 & -4 \end{vmatrix}. \quad (b) \begin{vmatrix} x & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$(c) \begin{vmatrix} 1 & x & 0 \\ x & 2 & 0 \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 0 & x \\ 0 & x & 0 \\ x & 0 & x+1 \end{vmatrix}.$$

➤ Soluções dos Exercícios

1. $|A| = 4$, $|B| = 0$, $|C| = 1$, $|D| = 0$, $|E| = -8$, $|F| = 1$ e $|G| = 1 + \tan^2 \theta$.

2. (a) $x \in \{-2\}$. (b) $x \in \{-3, 5\}$. (c) $x \in \{-2, 0, 1\}$.

4.3 Teorema de Laplace

Definição 5

Seja A uma matriz de ordem n . Designa-se por **complemento algébrico** do elemento a_{ij} de A o valor $a_{ij}^c = (-1)^{i+j} |A_{ij}|$, onde A_{ij} é a matriz que se obtém da matriz A eliminando a linha i e a coluna j .

Exemplo 6

Determine os complementos algébricos da matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

Resolução

A matriz A tem 9 complementos algébricos, associados a cada um dos 9 elementos da matriz.

$$a_{11}^c = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$a_{12}^c = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$a_{13}^c = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$a_{21}^c = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$a_{22}^c = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$a_{23}^c = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4$$

$$a_{31}^c = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$a_{32}^c = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 2$$

$$a_{33}^c = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Observação: Os sinais $(-1)^{i+j}$ podem ser obtidos da seguinte matriz de sinais

$$\begin{bmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \cdots \\ + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}.$$

Teorema 1 Teorema de Laplace

Seja A uma matriz de ordem n . O determinante de A é igual à soma algébrica dos produtos dos elementos de uma linha i (ou coluna j) pelos respectivos complementos algébricos.

Desenvolvendo segundo a

- linha i : $|A| = a_{i1}a_{i1}^c + a_{i2}a_{i2}^c + \cdots + a_{in}a_{in}^c$;
- coluna j : $|A| = a_{1j}a_{1j}^c + a_{2j}a_{2j}^c + \cdots + a_{nj}a_{nj}^c$.

Observação: O teorema de Laplace pode ser aplicado a qualquer linha ou coluna de uma matriz de ordem n . Se a linha ou coluna escolhida não contiver zeros, será necessário calcular n determinantes de matrizes de ordem $n - 1$. Por esse motivo, para facilitar o cálculo do determinante, recomenda-se selecionar a linha ou coluna que contenha o maior número de zeros.

Exemplo 7

Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

Calcule o determinante de A aplicando o teorema de Laplace à:

- (a) 1.^a linha (b) 2.^a linha (c) 2.^a coluna (d) 3.^a coluna

Resolução

(a) Aplicando o teorema de Laplace à 1.^a linha tem-se

$$|A| = 2 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ + 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 \cdot (-2) + 0 + 0 = -4.$$

(b) Para a 2.^a linha tem-se

$$|A| = 0 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ + (-1) \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 + 0 + (-1) \cdot (-1) \cdot (-4) = -4.$$

(c) Para a 2.^a coluna tem-se

$$|A| = 0 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ + (-2) \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 + 0 + (-2) \cdot (-1) \cdot (-2) = -4.$$

(d) Para a 3.^a coluna tem-se

$$|A| = 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\ + 1 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 + (-1) \cdot (-1) \cdot (-4) + 0 = -4.$$

Propriedade 5

Sejam $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$, $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ e $\vec{w} = (w_x, w_y, w_z)$ vetores em $\mathbb{R}^3$.

O produto misto $\vec{u} \times \vec{v} \bullet \vec{w}$ é igual ao determinante da matriz cujas colunas (ou linhas) são os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, ou seja

$$\vec{u} \times \vec{v} \bullet \vec{w} = \begin{vmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{vmatrix}$$

Demonstração

Consideremos a matriz formada pelos vetores como colunas

$$M = \begin{bmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{bmatrix}.$$

Pelo Teorema de Laplace, desenvolvendo o determinante pela 3.^a coluna:

$$\begin{aligned} |M| &= w_x \begin{vmatrix} u_y & v_y \\ u_z & v_z \end{vmatrix} - w_y \begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_z & v_z \end{vmatrix} + w_z \begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{vmatrix} \\ &= \left(\begin{vmatrix} u_y & v_y \\ u_z & v_z \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_z & v_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{vmatrix} \right) \bullet (w_x, w_y, w_z) \\ &= \vec{u} \times \vec{v} \bullet \vec{w} \end{aligned}$$

Exemplo 8

Considere os vetores $\vec{u} = (1, 2, 3)$, $\vec{v} = (0, -1, 4)$ e $\vec{w} = (2, 1, 0)$.
Determine o produto misto $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$.

Resolução

De acordo com a propriedade anterior, produto misto é dado por

$$\vec{u} \times \vec{v} \bullet \vec{w} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 16 - (-6 + 0 + 4) = 18.$$

Exercício 3

Usando o teorema de Laplace, calcule o determinante da matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Resolução

Aplicando o teorema de Laplace às linhas ou colunas com o maior número de zeros, tem-se

$$\begin{aligned}
 |A| &\underset{L_4}{=} -3 \cdot (-1)^{4+2} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
 &\underset{L_2}{=} -3 \cdot (-1) \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \underset{C_4}{=} 3 \cdot 4 \cdot (-1)^{3+4} \begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} \\
 &\underset{C_1}{=} -12 \cdot 2 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -24 \cdot (-2) = 48.
 \end{aligned}$$

► Exercícios da Seção 4.3

1. Usando o teorema de Laplace, calcule o determinante das matrizes:

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & -4 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & -4 \end{bmatrix}, \\
 D &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & -2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

► Soluções dos Exercícios

1. $|A| = 10$, $|B| = -24$, $|C| = 0$, $|D| = 12$ e $|E| = -2$.

4.4 Propriedades

Nesta secção apresenta-se um conjunto de 10 propriedades que visam facilitar o cálculo do determinante de uma matriz.

Sejam A e B matrizes de ordem n .

Propriedade 1: $|A^T| = |A|$.

Observação: Esta propriedade é uma consequência imediata da definição de determinante pois as matrizes A e A^T têm os mesmos produtos elementares com sinal.

Exemplo 9

Considere as matrizes A e A^T

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} \text{ e } A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Usando a regra de Sarrus tem-se, $|A| = 3 + 0 - 6 - (0 - 2 - 6) = 5$ e $|A^T| = 3 - 6 + 0 - (0 - 2 - 6) = 5$.

Propriedade 2: Se A é uma matriz que tem pelo menos uma linha (ou coluna) nula então $|A| = 0$.

Observação: Esta propriedade é uma consequência imediata da definição de determinante.

Exemplo 10

Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 7 & -4 & 5 \end{bmatrix}$.

Aplicando o teorema de Laplace à 2.^a linha (nula) de A tem-se

$$|A| = 0 \times a_{21}^c + 0 \times a_{22}^c + 0 \times a_{23}^c = 0.$$

Propriedade 3: Se A é uma matriz que tem pelo menos duas linhas (ou colunas) iguais então $|A| = 0$.

Exemplo 11

Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 7 & -4 & 5 \end{bmatrix}$.

Aplicando o teorema de Laplace à 3.^a linha de A tem-se

$$\begin{aligned} |A| &= 7 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - 4 \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 5 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 7 \cdot 0 - 4 \cdot 0 + 5 \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Propriedade 4: Se A é uma matriz triangular então $|A| = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}$ (produto dos elementos da diagonal principal).

Observação: Esta propriedade resulta de aplicar sucessivamente o teorema de Laplace à primeira coluna se a matriz for triangular superior ou aplicar sucessivamente à primeira linha se a matriz for triangular inferior.

Exemplo 12

Considere a matriz real triangular superior $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}$.

Aplicando o teorema de Laplace sucessivamente à 1.^a coluna tem-se

$$|A| = a \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} d & e \\ 0 & f \end{vmatrix} = a \cdot d \cdot (-1)^{1+1} |f| = adf.$$

Propriedade 5: $|AB| = |A||B|$.

Exemplo 13

Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.
 Como $AB = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ e $BA = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$ então
 $|AB| = 15 = |BA| = 5 \cdot 3 = |A||B|$.

Definição 6

Uma **matriz elementar** é qualquer matriz obtida a partir da matriz identidade I_n por meio de uma única operação elementar por linha.

A seguir, apresentamos três matrizes elementares obtidas a partir de I_3 , cada uma correspondente a um tipo de operação elementar por linha, e ilustramos seus efeitos sobre uma matriz genérica

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

► **Troca de duas linhas:** $L_1 \leftrightarrow L_2$

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow E_1 A = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

A primeira e a segunda linhas de A trocam de lugar.

► **Multiplicação de uma linha por um escalar:** $L_2 \rightarrow 3L_2$

$$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow E_2 A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 3a_{21} & 3a_{22} & 3a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

A segunda linha de A é multiplicada por 3.

- **Adição de um múltiplo de uma linha a outra:** $L_3 \rightarrow L_3 + 2L_1$

$$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow E_3 A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + 2a_{11} & a_{32} + 2a_{12} & a_{33} + 2a_{13} \end{bmatrix}.$$

A terceira linha de A é somada com o dobro da primeira.

Propriedade 6: Da aplicação das operações elementares sobre as linhas (colunas) de uma matriz tem-se que:

- se a matriz B é a matriz que se obtém da matriz A realizando uma troca de duas linhas (colunas) então $|B| = -|A|$.

Exemplo 14

Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 1 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

A matriz B obtém-se a partir da matriz A trocando a primeira e a terceira linhas, pelo que $|B| = -|A|$.

De facto,

$$|A| = 3 + 8 - 6 - (-3 - 6 - 8) = 22 \text{ e } |B| = -3 - 8 - 6 - (3 - 6 + 8) = -22.$$

Observação: Observe-se que $B = E_1 A$, onde E_1 é a matriz elementar que se obtém de I_3 efetuando a troca entre a 1.ª e a 3.ª linhas, ou seja:

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e pela Propriedade 5, $|B| = |E_1 A| = |E_1| |A| = (-1) \cdot 22 = -22$.

- se a matriz B é a matriz que se obtém da matriz A multiplicando uma linha (coluna) da matriz A por um escalar não-nulo k então $|B| = k|A|$.

Exemplo 15

Considere a matriz A do exemplo anterior. Multiplicando por -2 a sua 2.^a linha obtém-se

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 2 & -8 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

Observe-se que $|C| = -6 - 16 + 12 - (6 + 12 + 16) = -44 = -2|A|$.

Observação: Observe-se que $C = E_2A$, onde E_2 é a matriz elementar que se obtém de I_3 efetuando a mesma operação que se efetuou em A , ou seja:

$$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e pela Propriedade 5, $|C| = |E_2A| = |E_2||A| = (-2) \cdot 22 = -44$.

- se a matriz B é a matriz que se obtém da matriz A adicionando a uma linha da matriz A , outra linha de A multiplicada por um escalar não-nulo então $|B| = |A|$.

Exemplo 16

Considere a operação elementar realizada sobre a matriz A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 - L_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} = D.$$

Esta operação não altera o determinante. De facto

$$|D| = 9 + 2 + 0 - (-9 + 0 - 2) = 22 = |A|.$$

Observação: Observe-se que $D = E_3A$, onde E_3 é a matriz elementar que se obtém de I_3 efetuando a mesma operação que se efetuou em A , ou seja:

$$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e pela Propriedade 5, $|D| = |E_3A| = |E_3||A| = 1 \cdot 22 = 22$.

A próxima propriedade é uma consequência das Propriedades 3 e 6.

Propriedade 7: Se a matriz A tem pelo menos duas linhas (ou colunas) proporcionais então $|A| = 0$.

Exemplo 17

Considere as matrizes reais $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ \alpha a & \alpha b & \alpha c \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ a & b & c \end{bmatrix}$.

Como $|A| = \alpha|B|$ e B tem duas linhas iguais então $|A| = \alpha|B| = \alpha \cdot 0 = 0$.

Propriedade 8: Se as matrizes A e B têm $n - 1$ linhas iguais e se a matriz C é formada pelas mesmas $n - 1$ linhas e a restante linha é a soma da restante linha de A e de B então $|C| = |A| + |B|$.

Observação: Esta propriedade exprime a linearidade do determinante relativamente a cada linha (ou coluna), mantendo as restantes fixas.

Exemplo 18

Considere as matrizes reais:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ j & k & l \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g+j & h+k & i+l \end{bmatrix}.$$

Para verificar que $|C| = |A| + |B|$, aplica-se o teorema de Laplace à 3.ª linha de cada uma das matrizes. Assim

$$\begin{aligned} |C| &= (g+j) \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} - (h+k) \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} + (i+l) \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \\ &= g \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} - h \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} + i \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} + j \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} - k \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} + l \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ j & k & l \end{vmatrix} = |A| + |B|. \end{aligned}$$

Propriedade 9: $|\lambda A| = \lambda^n |A|$, para $\lambda \in \mathbb{R}$.

Demonstração

Como λI_n é uma matriz com todos os n elementos da diagonal principal iguais a λ , e aplicando as Propriedades 4 e 5, tem-se

$$|\lambda A| = |\lambda I_n A| = |\lambda I_n| \cdot |A| = \lambda^n |A|. \quad \blacksquare$$

Exemplo 19

Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & -8 \\ -2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$.

Observe-se que $|A| = 0 + 8 + 0 - (0 - 2 + 8) = 2$, $|B| = 0 - 64 + 0 - (0 + 16 - 64) = -16$ e $B = -2A$, ou seja, $|B| = (-2)^3 |A|$.

Propriedade 10: Se a matriz A é invertível então $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$.

Demonstração

Se a matriz A é invertível então existe uma matriz A^{-1} tal que $AA^{-1} = I_n$, pelo que

$$|AA^{-1}| = |I_n| \Leftrightarrow |A||A^{-1}| = 1 \Leftrightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}. \quad \blacksquare$$

Exemplo 20

Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 5/2 & 1/2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Como $|A| = 2 \neq 0$, conclui-se que A é invertível e, pela Propriedade 10,

$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{2}$. Por outro lado, observe-se que $AB = I_3$, isto é, $B = A^{-1}$.

Calculando diretamente o determinante de B , obtém-se

$$|A^{-1}| = |B| = -2 - 2 + 0 - \left(-2 - \frac{5}{2} + 0\right) = \frac{1}{2}.$$

Observação: Observe-se que, em geral, $|A + B| \neq |A| + |B|$, como se ilustra no contra-exemplo seguinte.

Exemplo 21

Considerando as matrizes $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$ tem-se

$$|A + B| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \neq -18 = -8 - 10 = |A| + |B|.$$

Exercício 4

Sejam A e B matrizes de ordem 5 tais que $|A| = 4$ e B é a matriz que se obtém de A por aplicação das sucessivas operações elementares:

$$L_3 \rightarrow L_3 - 4L_2, L_3 \leftrightarrow L_5 \text{ e } L_4 \rightarrow -3L_4.$$

Calcule o determinante da matriz $M = -\frac{1}{2}A^T B$.

Resolução

Como

$$|A| \xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 - 4L_2} |A_1| \xrightarrow{L_3 \leftrightarrow L_5} -|A_2| \xrightarrow{L_4 \rightarrow -3L_4} -\frac{1}{-3}|B| = \frac{1}{3}|B|$$

então $|B| = 3|A| = 3 \cdot 4 = 12$ e assim

$$|M| = \left(-\frac{1}{2}\right)^5 |A^T B| = -\frac{1}{32} |A^T| |B| = -\frac{1}{32} \cdot 4 \cdot 12 = -\frac{3}{2}.$$

Exercício 5

Sejam A e B duas matrizes de ordem 4 tais que $|A| = 9$ e $|B| = -\frac{1}{3}$.

Calcule o determinante da matriz $M = \left(\frac{1}{3}A^2 B^{-1}\right)^T$.

Resolução

Recorrendo às propriedades dos determinantes tem-se

$$\begin{aligned} |M| &= \left| \left(\frac{1}{3} A^2 B^{-1} \right)^T \right| = \left| \frac{1}{3} A^2 B^{-1} \right| = \left(\frac{1}{3} \right)^4 |A A B^{-1}| = \frac{1}{81} |A| |A| |B^{-1}| \\ &= \frac{1}{81} \cdot 9 \cdot 9 \cdot \frac{1}{|B|} = -3. \end{aligned}$$

O próximo resultado é uma consequência imediata da Propriedade 10.

Teorema 2

Uma matriz A é invertível se e só se $|A| \neq 0$.

Exercício 6

Verifique se as seguintes matrizes são invertíveis:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Resolução

Como $|A| = 2 - (-2) = 4 \neq 0$ então A é invertível. No entanto, B não é invertível pois $|B| = 0$, uma vez que a terceira coluna é simétrica da primeira.

Exercício 7

Determine os valores de x para os quais é invertível a matriz real

$$A = \begin{bmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+x \end{bmatrix}.$$

Resolução

Começando por calcular o determinante da matriz A tem-se

$$\begin{aligned}
 |A|_{L_1 \leftrightarrow L_2} &= - \begin{vmatrix} 1 & 1+x & 1 & 1 \\ 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} L_2 \rightarrow L_2 - (1+x)L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \rightarrow L_4 - L_1 \end{array}} \\
 &= - \begin{vmatrix} 1 & 1+x & 1 & 1 \\ 0 & 1-(1+x)^2 & -x & -x \\ 0 & -x & x & 0 \\ 0 & -x & 0 & x \end{vmatrix} \stackrel{C_1}{=} - \begin{vmatrix} -2x-x^2 & -x & -x \\ -x & x & 0 \\ -x & 0 & x \end{vmatrix} \\
 &= -(-x)(-x)(-x) \begin{vmatrix} 2+x & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \\
 &= x^3 [2+x+0+0 - (-1-1+0)] = x^3(x+4).
 \end{aligned}$$

Assim, A é invertível se e só se $|A| \neq 0$, ou seja

$$x^3(x+4) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \wedge x \neq -4.$$

Portanto, a matriz A é invertível para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{-4, 0\}$.

Com base nas propriedades estudadas sobre determinantes, podemos agora apresentar um resultado fundamental que sintetiza diversas ideias abordadas até aqui. Este teorema estabelece uma ligação clara entre a invertibilidade de uma matriz, a sua equivalência por linhas à matriz identidade, a sua característica e o valor do seu determinante.

Teorema 3

Seja A uma matriz de ordem n . Então:

$$A \text{ é invertível} \Leftrightarrow A \text{ é equivalente por linhas a } I_n \Leftrightarrow \text{car}(A) = n \Leftrightarrow |A| \neq 0.$$

➤ Exercícios da Seção 4.4

1. Sabendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -5$, use as propriedades para calcular o determinante das matrizes reais:

$$A = \begin{bmatrix} -d & -e & -f \\ 2a & 2b & 2c \\ 3g & 3h & 3i \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2b & c & 3a \\ -2e & f & 3d \\ -2h & i & 3g \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} h & g & i \\ e & d & f \\ 2b & 2a & 2c \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 2a & 2b & 6c \\ d & e & 3f \\ g & h & 3i \end{bmatrix} \text{ e } E = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ -2a+g & -2b+h & -2c+i \end{bmatrix}.$$

2. Caso necessário, use as operações elementares para determinar o(s) valor(es) de(os) parâmetros a e b que não anulam o determinante das matrizes reais:

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a+2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} a-1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a-1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & b & 1 \\ 0 & 0 & b-1 & b-1 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ a & b & a & a \\ a & a & b & a \\ a & a & a & b \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & b & a \\ 1 & b & a+b^2 & ab \\ 1 & b & a+b^2 & ab+b \end{bmatrix},$$

$$F = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ a & b & 1 & 1 \\ a & b & a & 1 \\ a & b & a & b \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} a & b & a & 0 \\ a & ab & a & 0 \\ 1 & b & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ab \end{bmatrix} \text{ e } H = \begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b \\ b & 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}.$$

3. Sejam A e B matrizes de ordem 3 tais que $|A| = 2$ e $|B| = -1$. Calcule:

(a) $|2A^2B^T|$. (b) $| -A^{-1}B |$. (c) $\left| \frac{1}{2}(A^2)^T (B^T)^{-1} \right|$.

4. Seja A uma matriz de ordem n . Mostre que:

- (a) se A é uma matriz ortogonal então $|A| = \pm 1$.
 (b) se A é uma matriz tal que $A^2 = A$ então $|A| = 0 \vee |A| = 1$.
 (c) se n é ímpar e A é uma matriz antissimétrica então $|A| = 0$.

► Soluções dos Exercícios

1. $|A| = -30$, $|B| = 30$, $|C| = -10$, $|D| = -30$ e $|E| = -5$.
2. $|A| = ab(a+2)(a-1) \neq 0 \Leftrightarrow a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 1\} \wedge b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
 $|B| = (a-1)^2(b-1)^2 \neq 0 \Leftrightarrow a \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \wedge b \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$,
 $|C| = (a-b)^2(a+b)^2 \neq 0 \Leftrightarrow a, b \in \mathbb{R} \wedge a \neq b \wedge a \neq -b$,
 $|D| = a(b-a)^3 \neq 0 \Leftrightarrow a, b \in \mathbb{R} \wedge a \neq b \wedge a \neq 0$,
 $|E| = b(a-1) \neq 0 \Leftrightarrow a \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \wedge b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
 $|F| = a(a-1)(b-1)^2 \neq 0 \Leftrightarrow a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \wedge b \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$,
 $|G| = a^2b^2(a-1)(b-1) \neq 0 \Leftrightarrow a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \wedge b \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ e
 $|H| = a^5 + b^5 \neq 0 \Leftrightarrow a, b \in \mathbb{R} \wedge a \neq -b$.
3. (a) -32 . (b) $\frac{1}{2}$. (c) $-\frac{1}{2}$.
4. —

4.5 Matriz Inversa

Definições 7

Seja A uma matriz de ordem n . Designa-se por:

- **matriz dos complementos algébricos** de A , a matriz que se obtém de A substituindo cada um dos seus elementos pelo respetivo complemento algébrico e denota-se por $A^C = [a_{ij}^c]$ ou $\hat{A} = [\hat{a}_{ij}]$;
- **matriz adjunta** de A a transposta da sua matriz A^C , denotando-se por $\text{Adj}(A) = (A^C)^T$.

Propriedade 6

Para qualquer matriz A de ordem n tem-se $A \text{Adj}(A) = |A| I_n = \text{Adj}(A) A$.

Teorema 4

Se a matriz A é invertível então $A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A)}{|A|}$.

Demonstração

Como a matriz A é invertível então $|A| \neq 0$ e assim

$$A \text{Adj}(A) = |A| I_n = \text{Adj}(A) A \Leftrightarrow A \frac{\text{Adj}(A)}{|A|} = I_n = \frac{\text{Adj}(A)}{|A|} A$$

ou seja, $A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A)}{|A|}$. ■

Exemplo 22

Determine, caso exista, a matriz inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Resolução

Para determinar a inversa de A , caso exista, há que realizar os seguintes passos.

- Começar por calcular o determinante de A

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 0 - 4 - (0 - 4 + 4) = -4.$$

Como $|A| = -4 \neq 0$ então A é invertível.

- Calcular a matriz dos complementos algébricos de A

$$A^C = \begin{bmatrix} +(-4) & -(-2) & +(-4) \\ -(0) & +(1) & -(2) \\ +(4) & -(4) & +(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 4 & -4 & 4 \end{bmatrix}.$$

- Calcular a matriz adjunta de A

$$\text{Adj}(A) = (A^C)^T = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & -4 \\ -4 & -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

- Finalmente, calcular a matriz inversa de A

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A)}{|A|} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1/2 & -1/4 & 1 \\ 1 & 1/2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Propriedade 7

Se a matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ é invertível então $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$.

Demonstração

$$\text{Como } A^C = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{bmatrix} \text{ então } A^{-1} = \frac{(A^C)^T}{|A|} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

Observação: A inversa de uma matriz de ordem 2 é a matriz que dela se obtém trocando os elementos da diagonal principal e trocando o sinal aos elementos da diagonal secundária, seguida da divisão pelo determinante.

Exercício 8

Determine a matriz inversa de $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$.

Resolução

Como $|A| = -2 \neq 0$ então A é invertível e pela Propriedade 7 tem-se

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1/2 & -3/2 \end{bmatrix}.$$

Exercício 9

Considere a matriz real $A = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 0 & k & 1 \end{bmatrix}$, onde $k \in \mathbb{R}$.

Determine:

- (a) os valores do parâmetro real k para os quais existe a matriz A^{-1} .
- (b) $(A^{-1})_{45}$, ou seja, o elemento da 4.ª linha e 5.ª coluna da matriz A^{-1} .

Resolução

(a) Primeiro vamos calcular o $|A|$ usando, por exemplo, os dois processos.

1.º processo: Aplicando sucessivamente o teorema de Laplace, por exemplo, à 1.ª coluna tem-se

$$|A| = \begin{vmatrix} k & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 0 & k & 1 \end{vmatrix} = k(k-1)(1-k) \begin{vmatrix} 1 & k \\ k & 1 \end{vmatrix}$$

ou seja, $|A| = k(k-1)(1-k)(1-k^2)$.

2.º processo: Usando a operação elementar $L'_5 = L_5 - kL_4$ que não altera $|A|$ tem-se

$$|A| = \begin{vmatrix} k & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-k^2 \end{vmatrix} = k(k-1)(1-k)(1-k^2).$$

Portanto, existe A^{-1} se e só se $|A| \neq 0$, ou seja, para $k \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$.

(b) Uma vez que

$$(A^{-1})_{45} = \frac{(\text{Adj}|A|)_{45}}{|A|} = \frac{\left((A^c)^T\right)_{45}}{|A|} = \frac{(A^c)_{54}}{|A|}$$

então

$$(A^{-1})_{45} = \frac{-1}{|A|} \begin{vmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k \end{vmatrix} = \frac{k^2(k-1)^2}{k(k+1)(k-1)^3} = \frac{k}{k^2-1}$$

com $k \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$.

Teorema 5

Seja $AX = B$ um sistema de equações lineares.

Se A é invertível então a solução do sistema é dada por $X = A^{-1}B$.

Observação: A forma de calcular a solução de um sistema de equações lineares descrita no teorema anterior é usualmente conhecida por **método da matriz inversa**.

Exemplo 23

Usando o método da matriz inversa, determine o conjunto solução do sistema de equações lineares S definido por:

$$\begin{cases} 2x + y = 6 \\ -x + 3y = -10 \end{cases}.$$

Resolução

S é definido matricialmente $AX = B$ por

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 6 \\ -10 \end{bmatrix} \text{ e } X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Como $|A| = 7 \neq 0$ então a matriz A é invertível e

$$A^{-1} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Aplicando o método da matriz inversa, a solução X de S é

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

pelo que o conjunto solução do sistema é $CS = \{(4, -2)\}$.

➤ Exercícios da Secção 4.5

1. Calcule o determinante, a matriz adjunta e a matriz inversa (se existir) das matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 0 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Determine os elementos $(A^{-1})_{13}$, $(A^{-1})_{24}$ e $(A^{-1})_{42}$ da matriz A^{-1} .

3. Seja A uma matriz de ordem n . Mostre que se:

- (a) A é uma matriz escalar então a matriz $\text{Adj}(A)$ é uma matriz escalar.
- (b) A é uma matriz diagonal então a matriz $\text{Adj}(A)$ é uma matriz diagonal.
- (c) $|A| = 1$ então $\text{Adj}(A) = A^{-1}$.
- (d) $n = 2$ então $\text{Adj}(\text{Adj}(A)) = A$.

4. Seja S o sistema de equações lineares $AX = B$, onde:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- (a) Determine a matriz A^{-1} .
- (b) Use o método da matriz inversa para determinar o conjunto solução de S .

5. Seja S o sistema de equações lineares $AX = B$, onde:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Use o método da matriz inversa para determinar a solução X de S .

► Soluções dos Exercícios

1. $|A| = 2$, $\text{Adj}(A) = \begin{bmatrix} -6 & 1 & 4 \\ 4 & -1 & -2 \\ -6 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ e $A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 1/2 & 2 \\ 2 & -1/2 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

$$|B| = 0, \text{ Adj}(B) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B^{-1} \text{ não existe.}$$

$$|C| = -1, \text{ Adj}(C) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } C^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -3 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$|D| = 0, \text{ Adj}(D) = \begin{bmatrix} 5 & 5 & -5 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } D^{-1} \text{ não existe.}$$

$$|E| = 1, \text{ Adj}(E) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & -4 & 2 & -1 & 0 \\ 16 & -8 & 4 & -2 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } E^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & -4 & 2 & -1 & 0 \\ 16 & -8 & 4 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. $|A| = -2,$

$$(A^{-1})_{13} = \frac{[(a_{13}^c)^T]_{13}}{|A|} = \frac{a_{31}^c}{|A|} = 0, (A^{-1})_{24} = \frac{a_{42}^c}{|A|} = -1 \text{ e } (A^{-1})_{42} = \frac{a_{24}^c}{|A|} = -\frac{1}{2}.$$

3. —

$$4. \text{ (a) } A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad \text{ (b) } X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$5. X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 5/2 & -1/2 & -1 \\ -3/2 & 1/2 & 1 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

4.6 Regra de Cramer

Teorema 6

Seja S o sistema de equações lineares $AX = B$, nas incógnitas $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Se $|A| \neq 0$ então S tem uma única solução e os valores das incógnitas são dados por:

$$x_j = \frac{|A_{x_j}|}{|A|}, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

onde A_{x_j} representa a matriz que se obtém da matriz A substituindo a coluna j pela matriz B dos termos independentes.

Exemplo 24

Use a regra de Cramer para determinar o conjunto solução do sistema de equações lineares S definido por:

$$\begin{cases} u - v = 7 \\ 2u + v = 2 \end{cases}.$$

Resolução

S é definido por $AX = B$, sendo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ e } X = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}.$$

Como $|A| = 3 \neq 0$ então podemos aplicar a regra de Cramer para calcular a única solução de S . Assim

$$u = \frac{|A_u|}{|A|} = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \text{ e } v = \frac{|A_v|}{|A|} = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4.$$

Logo, o conjunto solução de S é $CS = \{(3, -4)\}$.

Exercício 10

Use a regra de Cramer para determinar o conjunto solução do sistema de equações lineares:

$$S : \begin{cases} x + y + z = 2 \\ y + z + u = 0 \\ z + u + v = 0 \\ u + v + w = 0 \\ v - w = 0 \\ v + w = 0 \end{cases}.$$

Resolução

S é definido por $AX = B$ com

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ u \\ v \\ w \end{bmatrix}.$$

Como $|A| = 2 \neq 0$ então podemos aplicar a regra de Cramer.

► Como B é o dobro da coluna dos coeficientes da variável x de S então

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2|A|$$

pelo que $x = \frac{|A_x|}{|A|} = 2$.

► Substituindo cada uma das colunas dos coeficientes das restantes variáveis pela matriz B , verifica-se que o determinante que daí se obtém é nulo, pois tem duas colunas múltiplas uma da outra. Logo, as restantes incógnitas de S têm valores nulos.

Portanto, $CS = \{(2, 0, 0, 0, 0, 0)\}$ é o conjunto solução de S .

► Exercícios da Seção 4.6

1. Use a regra de Cramer para determinar o conjunto solução dos sistemas de equações lineares:

$$S_1 : \begin{cases} 3x + y = -2 \\ 5x + 2y = -5 \end{cases} \quad S_2 : \begin{cases} x - 2y = 1 \\ y - 2z = 0 \\ 2x - 5z = 5 \end{cases} \quad S_3 : \begin{cases} x - 2y = 1 \\ y - z = 0 \\ z - w = 1 \\ x + w = 0 \end{cases}.$$

2. Use a regra de Cramer para determinar **apenas o valor de z** da solução do sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ y - z = 0 \\ z + v = 1 \\ v - w = 0 \\ x + w = 1 \end{cases}.$$

3. Use a regra de Cramer para determinar o conjunto solução do sistema de equações lineares reais:

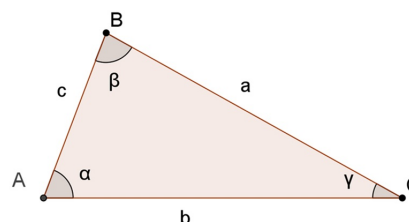
$$\begin{cases} x + y + z + w = 1 \\ ax + by + cz + dw = a \\ a^2x + b^2y + c^2z + d^2w = a^2 \\ a^3x + b^3y + c^3z + d^3w = a^3 \end{cases}.$$

onde a, b e c são parâmetros.

Nota: Utilize a metodologia aplicada na resolução do exemplo da página 140.

4. Considere o triângulo da figura para o qual são válidas as seguintes relações

$$\begin{cases} c \cos \beta + b \cos \gamma = a \\ c \cos \alpha + a \cos \gamma = b \\ b \cos \alpha + a \cos \beta = c \end{cases}.$$



Use a regra de Cramer para determinar a solução do sistema em ordem a $x = \cos \alpha$, $y = \cos \beta$ e $z = \cos \gamma$, e confirme a lei dos cossenos, ou seja:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha, \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta \quad \text{e} \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

► Soluções dos Exercícios

1. $CS_{S_1} = \{(1, -5)\}$, $CS_{S_2} = \{(5, 2, 1)\}$ e $CS_{S_3} = \{(1, 0, 0, -1)\}$.

2. $z = \frac{1}{2}$.

3. $CS = \{(1, 0, 0, 0)\}$.

4. Como
$$\begin{cases} \cos \alpha = \frac{1}{2bc}(-a^2 + b^2 + c^2) \\ \cos \beta = \frac{1}{2ac}(a^2 - b^2 + c^2) \\ \cos \gamma = \frac{1}{2ab}(a^2 + b^2 - c^2) \end{cases} \quad \text{então} \quad \begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \end{cases} .$$

5

Espaços Vetoriais Reais

Um espaço vetorial é um conjunto de vetores que podem ser somados entre si e multiplicados por números, formando novas combinações de vetores. Esses vetores podem representar uma variedade de entidades matemáticas ou físicas, desde coordenadas geométricas a funções, sinais, forças, entre outros.

Os espaços vetoriais mais familiares, como $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, permitem uma interpretação geométrica clara, correspondendo a planos e espaços tridimensionais. A generalização do conceito de vetor a outros espaços e com outras dimensões permite organizar certos conjuntos de objetos em estruturas com a mesma formulação teórica.

A importância teórica dos espaços vetoriais reside na sua estrutura algébrica bem definida, que permite a definição de conceitos fundamentais como base, dimensão, dependência linear e aplicações lineares. Esta estrutura proporciona um quadro unificador para a resolução de problemas lineares, permitindo uma descrição abstrata e versátil de fenómenos em diversas áreas.

Os espaços vetoriais têm aplicações transversais em múltiplos domínios do conhecimento, nomeadamente:

1. Geometria

Utilizados na descrição de objetos geométricos, os espaços vetoriais permitem representar retas, planos e hipersuperfícies em diferentes dimensões, bem como analisar transformações geométricas.

2. Engenharia

Aplicados na modelação e análise de sistemas físicos e estruturais, os espaços vetoriais são essenciais para representar forças, deslocamentos e tensões em engenharia mecânica, civil e elétrica.

3. Física

Em mecânica clássica e quântica, os espaços vetoriais são usados para representar estados físicos e operadores. Além disso, aparecem em eletromagnetismo e relatividade para descrever campos vetoriais.

4. Computação Gráfica

Utilizados para representar e manipular objetos em três dimensões, os espaços vetoriais permitem realizar transformações, projeções e renderizações realistas em gráficos computacionais.

5. Processamento de Sinais

Fundamentais para a representação de sinais em telecomunicações e áudio, os espaços vetoriais são usados na decomposição de sinais em séries de Fourier e na compressão de dados.

6. Controlo e Automação

Na engenharia de controlo, os espaços vetoriais permitem modelar sistemas dinâmicos e projetar controladores eficientes, garantindo estabilidade e desempenho otimizado.

Neste capítulo, exploraremos os conceitos fundamentais de espaço vetorial, subespaço vetorial, combinação linear, subespaço gerado, independência linear, base e dimensão. Estes conceitos são essenciais para compreender a estrutura e as propriedades dos espaços vetoriais e a sua aplicação em diversas áreas da matemática e da engenharia.

Orientação de trabalho: o capítulo apresenta 4 atividades de trabalho e, em cada uma delas, o leitor deve dedicar entre 3 e 5 horas de estudo autónomo. As atividades que propomos encontram-se esquematizadas da seguinte forma:

- ▶ Atividade 14 – 5.1 Conceitos Gerais e 5.2 Combinação Linear
- ▶ Atividade 15 – 5.3 Subespaço Vetorial Gerado e 5.4 Dependência Linear
- ▶ Atividade 16 – 5.5 Propriedades da Dependência Linear e 5.6 Base
- ▶ Atividade 17 – 5.7 Dimensão

5.1 Conceitos Gerais

Seja E um conjunto não vazio onde estão definidas duas operações:

1. **soma ou adição, "+"**: a cada par $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, com $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in E$, associa um e um só elemento $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in E$.
2. **multiplicação escalar, "."**: a cada par $(\alpha, \mathbf{u})$, com $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{u} \in E$, associa um e um só elemento $\alpha \cdot \mathbf{u} \in E$.

Definições 1

Diz-se que $(E, +, \cdot)$ é um **espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{R}$** ou que E é um **espaço vetorial real** se forem verificados os seguintes axiomas para a:

1. soma ou adição (+)

- (i) fecho: se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in E$ então $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in E$.
- (ii) comutatividade: $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$.
- (iii) associatividade: $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$.
- (iv) existência de elemento neutro: $\exists \mathbf{0}_E \in E : \mathbf{u} + \mathbf{0}_E = \mathbf{0}_E + \mathbf{u} = \mathbf{u}$.
- (v) existência de elemento simétrico:
 $\forall \mathbf{u} \in E, \exists (-\mathbf{u}) \in E : \mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = (-\mathbf{u}) + \mathbf{u} = \mathbf{0}_E$.

2. multiplicação escalar (.)

- (i) fecho: se $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{u} \in E$ então $\alpha \cdot \mathbf{u} \in E$.
- (ii) distributividade em relação à adição de E : $\alpha \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha \cdot \mathbf{u} + \alpha \cdot \mathbf{v}$.
- (iii) distributividade em relação à adição de $\mathbb{R}$: $(\alpha + \beta) \cdot \mathbf{u} = \alpha \cdot \mathbf{u} + \beta \cdot \mathbf{u}$.
- (iv) associatividade mista: $\alpha \cdot (\beta \cdot \mathbf{u}) = (\alpha\beta) \cdot \mathbf{u}$.
- (v) existência de elemento unidade de $\mathbb{R}$: $1 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}$.

Observação: Na multiplicação por um escalar é usual omitir-se o símbolo ".".

Definições 2

Os elementos do espaço vetorial E designam-se por **vetores** e os elementos do corpo $\mathbb{R}$ designam-se por **escalares**.

Exemplo 1

São espaços vetoriais reais, com as operações usuais de adição e multiplicação escalar, o conjunto $\mathbb{R}^n$ e o conjunto $M_{m \times n}(\mathbb{R})$.

Propriedades 1

Sejam E um espaço vetorial real, $\mathbf{u} \in E$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. O elemento neutro $\mathbf{0}_E$ é único.
2. o elemento simétrico $-\mathbf{u}$ é único.
3. $\alpha \mathbf{u} = \mathbf{0}_E \Leftrightarrow \alpha = 0 \vee \mathbf{u} = \mathbf{0}_E$.

Definição 3

Seja V um subconjunto não vazio do espaço vetorial E . Diz-se que V é um **subespaço vetorial** de E se V , com as operações definidas em E , é um espaço vetorial.

Teorema 1

Se V é um subespaço vetorial de E então $\mathbf{0}_E \in V$.

Observação: Se $\mathbf{0}_E \notin V$ então V não é um subespaço vetorial de E .

Esta observação mostra que a presença do vetor nulo é uma condição **necessária**, mas não suficiente, para que um subconjunto de um espaço vetorial seja um subespaço vetorial. A caracterização completa é apresentada no teorema seguinte, que

reúne as condições essenciais e substitui a verificação direta dos axiomas de espaço vetorial.

Teorema 2

V é um subespaço vetorial de E se e só se satisfaz as seguintes condições:

- (i) $V \subseteq E$.
- (ii) $\mathbf{0}_E \in V$.
- (iii) $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V : \mathbf{u} + \mathbf{v} \in V$.
- (iv) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{u} \in V : \alpha \mathbf{u} \in V$.

Exemplo 2

Verifique se $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0\}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$.

Resolução

V não é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$ pois sendo constituído por vetores de $\mathbb{R}^3$ não está contido em $\mathbb{R}^2$. Não se verifica a condição (i) do teorema anterior para ser subespaço vetorial.

Exercício 1

O conjunto $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1\}$ não é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$. Justifique.

Resolução

V não é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$ pois o vetor nulo $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3} = (0, 0, 0) \notin V$. Existe falha na condição (ii) do teorema anterior para ser subespaço vetorial.

Exercício 2

Verifique se $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xy \geq 0\}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

Resolução

Como $xy \geq 0 \Leftrightarrow (x \geq 0 \wedge y \geq 0) \vee (x \leq 0 \wedge y \leq 0)$, o conjunto V não é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$, pois falha a condição (iii) do Teorema 2.

Tomando, por exemplo, $\mathbf{u} = (2, 1, 0) \in V$ e $\mathbf{v} = (-1, -2, 0) \in V$ (pois em ambos $xy \geq 0$), tem-se

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (1, -1, 0) \notin V$$

uma vez que $xy = 1 \cdot (-1) = -1 < 0$.

Observação: Observe-se que V satisfaz as restantes condições do Teorema 2:

- (i) $V \subseteq \mathbb{R}^3$ por definição.
- (ii) O vetor nulo está em V , pois $(0, 0, 0) \in V$.
- (iv) Para $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{u} = (x, y, z) \in V$ com $xy \geq 0$, tem-se

$$\alpha \mathbf{u} = (\alpha x, \alpha y, \alpha z) \in V$$

pois $(\alpha x)(\alpha y) = \alpha^2 xy \geq 0$.

Exercício 3

Verifique se $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0 \wedge y \geq 0\}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

Resolução

V não verifica a condição (iv) do Teorema 2 para ser subespaço vetorial, pois considerando, por exemplo, $\alpha = -1$ e $\mathbf{u} = (1, 1, 1) \in V$ tem-se

$$\alpha \mathbf{u} = (-1)(1, 1, 1) = (-1, -1, -1) \notin V$$

pois a 1.^a e a 2.^a componentes são negativas.

Observação: Note que V satisfaz as restantes condições do Teorema 2 pois

- (i) $V \subseteq \mathbb{R}^3$ por definição.
- (ii) Escolhendo $x = y = z = 0$ obtém-se $(0, 0, 0) \in V$.
- (iii) Sejam $\mathbf{u} = (x_1, y_1, z_1) \in V$ e $\mathbf{v} = (x_2, y_2, z_2) \in V$. Logo $x_1 \geq 0, y_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ e $y_2 \geq 0$. Assim

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \in V$$

pois $x_1 + x_2 \geq 0$ e $y_1 + y_2 \geq 0$, ou seja, $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V : \mathbf{u} + \mathbf{v} \in V$.

Teorema 3

Para qualquer subespaço vetorial definido por um sistema de equações lineares, é sempre possível determinar uma **descrição paramétrica**, isto é, escrever o seu **vetor genérico** em função das variáveis livres.

Exercício 4

Mostre que $V = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x - y = 0 \wedge y - w = 0\}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$.

Resolução

Como

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ y - w = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ w = y \end{cases}$$

então o conjunto V fica definido pelo seu vetor genérico (y, y, z, y) , ou seja, $V = \{(y, y, z, y) : y, z \in \mathbb{R}\}$. Assim, quanto à verificação das condições do Teorema 2, tem-se

- (i) $V \subseteq \mathbb{R}^4$ por definição.
- (ii) Escolhendo $y = z = 0$ obtém-se $(0, 0, 0, 0) \in V$.
- (iii) Sejam $\mathbf{u} = (y_1, y_1, z_1, y_1) \in V$ e $\mathbf{v} = (y_2, y_2, z_2, y_2) \in V$. Tem-se

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (y_1 + y_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2, y_1 + y_2) = (y, y, z, y) \in V.$$

- (iv) Tomando $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{u} = (y_1, y_1, z_1, y_1) \in V$ tem-se

$$\alpha \mathbf{u} = \alpha(y_1, y_1, z_1, y_1) = (\alpha y_1, \alpha y_1, \alpha z_1, \alpha y_1) = (y, y, z, y) \in V.$$

Logo V é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$.

Exercício 5

Mostre que $V = \{A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : A \text{ é simétrica}\}$ é um subespaço vetorial de $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.

Resolução

Para mostrar o pretendido vamos considerar dois procedimentos.

1.º procedimento: Como $A^T = A$ então V fica definido pelo seu vetor genérico

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Assim, quanto à verificação das condições do Teorema 2 tem-se

- (i) $V \subseteq M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ por definição.
- (ii) Escolhendo $a = b = c = 0$, obtém-se $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in V$.
- (iii) Sejam $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} a_1 & c_1 \\ c_1 & b_1 \end{bmatrix} \in V$ e $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a_2 & c_2 \\ c_2 & b_2 \end{bmatrix} \in V$. Então

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & c_1 + c_2 \\ c_1 + c_2 & b_1 + b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix} \in V.$$
- (iv) Tomando $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} a_1 & c_1 \\ c_1 & b_1 \end{bmatrix} \in V$ tem-se

$$\alpha \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \alpha a_1 & \alpha c_1 \\ \alpha c_1 & \alpha b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix} \in V.$$

Logo V é um subespaço vetorial de $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.

2.º procedimento: Observe-se que $A \in V$ se e só se $A^T = A$. Assim, quanto à verificação das condições do Teorema 2, tem-se

- (i) $V \subseteq M_{n \times n}(\mathbb{R})$ por definição.
- (ii) $O_{n \times n} \in V$ pois $O_{n \times n}^T = O_{n \times n}$ (a matriz nula é simétrica).
- (iii) Sejam $A, B \in V$. Então $A^T = A$ e $B^T = B$.

A matriz $M = A + B \in V$ uma vez que

$$M^T = (A + B)^T = A^T + B^T = A + B = M$$

ou seja, $A + B$ é uma matriz simétrica.

- (iv) Tomando $\alpha \in \mathbb{R}$ e $A \in V$ tem-se

$$M^T = (\alpha A)^T = \alpha A^T = \alpha A = M$$

ou seja, αA é uma matriz simétrica.

Portanto, V é um subespaço vetorial de $M_{n \times n}(\mathbb{R})$.

Observação: Seja E um espaço vetorial real. Como E é fechado para a soma (a soma de vetores de E é um vetor de E) e para a multiplicação escalar (a multiplicação de um escalar por um vetor de E é um vetor de E), faz sentido reunir estas duas propriedades como se segue.

Teorema 4

Se $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n \in E$ e $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ então $\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{u}_n \in E$.

► Exercícios da Secção 5.1

- Considere o subconjunto $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \leq 0\}$ de $\mathbb{R}^3$.
 - $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3} = (0, 0, 0) \in V$? Justifique.
 - Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ então $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in V$? Justifique.
 - Encontre um vetor $\mathbf{u} \in V$ e um escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha \mathbf{u} \notin V$.
- Justifique que o conjunto V não é subespaço do espaço vetorial indicado:
 - $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > x\}$ de $\mathbb{R}^2$.
 - $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : yz = 0\}$ de $\mathbb{R}^3$.
 - $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y + 3z - 1 = 0\}$ de $\mathbb{R}^3$.
 - $V = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : y = 2x \vee x + 2w = 0\}$ de $\mathbb{R}^4$.
 - $V = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : b = c = 1 \right\}$ de $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.
- Justifique que V é um subespaço do espaço vetorial indicado:
 - $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$ de $\mathbb{R}^2$.
 - $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = 0\}$ de $\mathbb{R}^3$.
 - $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z - 2y = 0 \wedge x - y = 2z\}$ de $\mathbb{R}^3$.
 - $V = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : b = c \wedge d = 2a \right\}$ de $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.

► Soluções dos Exercícios

1. (a) $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3} = (0, 0, 0) \in V$ pois $(0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ e tem a primeira coordenada não positiva.
- (b) Sim, pois a soma de dois vetores de $\mathbb{R}^3$ com primeira coordenada não positiva resulta num vetor com primeira coordenada não positiva.
- (c) Por exemplo, considerando $\mathbf{u} = (-2, 1, 0) \in V$ ($-2 \leq 0$) e $\alpha = -1$ tem-se $\alpha \mathbf{u} = -\mathbf{u} = (2, -1, 0) \notin V$ ($2 \leq 0$ é falso).
2. (a) V não é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$ pois $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2} = (0, 0) \notin V$.
- (b) V não é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$ pois, por exemplo, $\mathbf{u} = (0, 1, 0) \in V$ e $\mathbf{v} = (0, 0, 1) \in V$ mas $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (0, 1, 1) \notin V$.
- (c) V não é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$ pois $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3} = (0, 0, 0) \notin V$.
- (d) V não é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$, por exemplo, $\mathbf{u} = (1, 2, 0, 0) \in V$ e $\mathbf{v} = (2, 0, 0, -1) \in V$, mas $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (3, 2, 0, -1) \notin V$.
- (e) V não é subespaço vetorial de $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ pois $\mathbf{0}_{M_{2 \times 2}(\mathbb{R})} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \notin V$.
3. —

5.2 Combinação Linear de Vetores

Seja E um espaço vetorial real.

Definição 4

Diz-se que $\mathbf{v} \in E$ é uma **combinação linear** de $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_r \in E$ quando existem escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r \in \mathbb{R}$ tais que $\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 + \dots + \alpha_r \mathbf{u}_r$.

Exemplo 3

Mostre que o vetor $\mathbf{v} = (4, 5, -7)$ é combinação linear dos vetores $\mathbf{u}_1 = (1, 2, -3)$ e $\mathbf{u}_2 = (2, 1, -1)$ e determine-a.

Resolução

O vetor $\mathbf{v}$ é combinação linear dos vetores $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ se e só se existem escalares α e β tais que $\alpha \mathbf{u}_1 + \beta \mathbf{u}_2 = \mathbf{v}$. Tem-se

$$\begin{aligned}\alpha(1, 2, -3) + \beta(2, 1, -1) &= (4, 5, -7) \\ \Leftrightarrow (\alpha + 2\beta, 2\alpha + \beta, -3\alpha - \beta) &= (4, 5, -7) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta = 4 \\ 2\alpha + \beta = 5 \\ -3\alpha - \beta = -7 \end{cases} & \quad (\text{sistema } S).\end{aligned}$$

Para determinar a solução de S apresentam-se dois procedimentos (em geral, compensa usar o segundo quando o sistema é mais complexo).

1.º procedimento: A resolução de S pode ser feita por inspeção. Somando os respectivos membros das duas últimas equações vem $-\alpha = -2$, ou seja, $\alpha = 2$.

Como

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 4 \\ 2 \cdot 2 + \beta = 5 \\ \alpha = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 + 2 \cdot 1 = 4 \\ \beta = 1 \\ \alpha = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 1 \end{cases}$$

então $\mathbf{v}$ é combinação linear dos vetores $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ pois $\mathbf{v} = 2\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$.

2.º procedimento: Para a obtenção da solução de S pode recorrer-se ao método de eliminação de Gauss.

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ -3 & -1 & -7 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{L_2 \rightarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 + 3L_1}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 5 & 5 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 + \frac{5}{3}L_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Como $\text{car}(A) = \text{car}[A|B] = 2 = n.^\circ$ de incógnitas então S é um SPD, pelo tem uma única solução, ou seja, $\mathbf{v}$ é combinação linear de $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$. Para encontrar essa combinação linear, observa-se que S é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 4 \\ -3\beta = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 1 \end{cases}$$

donde $\mathbf{v} = 2\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$.

Exercício 6

Mostre que $\mathbf{v}$ não é combinação linear de $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$, sendo:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Resolução

O vetor $\mathbf{v}$ é uma combinação linear dos vetores $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ se e só se existem escalares α e β tais que

$$\alpha \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha + \beta = -1 \\ \alpha = -2 \\ -\alpha + \beta = 5 \\ \alpha - \beta = 5 \end{cases}.$$

Por inspeção observa-se que a 3.ª e a 4.ª equações são incompatíveis. Logo, não existem α e β tais que $\alpha\mathbf{u}_1 + \beta\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}$, o que significa que $\mathbf{v}$ não é combinação linear de $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$.

Exercício 7

Determine o valor de k de modo que $\mathbf{v} = (-1, 3, 2k, k)$ seja combinação linear de $\mathbf{u}_1 = (1, -1, 0, 0)$, $\mathbf{u}_2 = (2, -1, -1, 1)$ e $\mathbf{u}_3 = (0, 1, 1, 1)$ e escreva-a.

Resolução

O vetor $\mathbf{v}$ é combinação linear de $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ e $\mathbf{u}_3$ se e só se existem escalares α , β e λ tais que $\alpha\mathbf{u}_1 + \beta\mathbf{u}_2 + \lambda\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}$. Tem-se

$$\alpha(1, -1, 0, 0) + \beta(2, -1, -1, 1) + \lambda(0, 1, 1, 1) = (-1, 3, 2k, k)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta = -1 \\ -\alpha - \beta + \lambda = 3 \\ -\beta + \lambda = 2k \\ \beta + \lambda = k \end{cases} \quad (\text{sistema } S).$$

Pelo método de eliminação de Gauss tem-se

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 2k \\ 0 & 1 & 1 & k \end{array} \right] \xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 + L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 2k \\ 0 & 1 & 1 & k \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{\begin{array}{l} L_3 \rightarrow L_3 + L_2 \\ L_4 \rightarrow L_4 - L_2 \end{array}} \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 2k + 2 \\ 0 & 0 & 0 & k - 2 \end{array} \right].$$

Daqui decorre que

- se $k \neq 2$ então $\text{car}(A) = 3 \neq 4 = \text{car}[A|B]$, pelo que S é um SI, e portanto, $\mathbf{v}$ não é combinação linear dos vetores $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ e $\mathbf{u}_3$.
- se $k = 2$ então $\text{car}(A) = \text{car}[A|B] = 3 = n.^\circ$ de incógnitas, pelo que S é um SPD. Logo, $\mathbf{v}$ é combinação linear de $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ e $\mathbf{u}_3$. Para obter essa combinação linear, resolve-se o sistema

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = -1 \\ \beta + \lambda = 2 \\ 2\lambda = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -1 \\ \lambda = 3 \end{cases}$$

concluindo-se que $\mathbf{v} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 + 3\mathbf{u}_3$.

➤ Exercícios da Secção 5.2

1. Por inspeção, averigue se o vetor:

(a) $\mathbf{v} = (0, -1, 0)$ é combinação linear de $\mathbf{u}_1 = (1, 0, 1)$ e $\mathbf{u}_2 = (1, 1, 1)$.

(b) $\mathbf{v} = (1, 2, 3, 0)$ é combinação linear de $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 1, 0)$ e $\mathbf{u}_2 = (0, 1, 2, 0)$.

(c) $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$ é combinação linear de $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

(d) $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ é combinação linear de $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

2. Averigue se $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ é combinação linear de $\mathbf{u}_1 = (1, -1, 1)$ e $\mathbf{u}_2 = (-1, 2, 2)$:

(a) $\mathbf{v} = (3, -4, 0)$.

(b) $\mathbf{v} = (-3, 2, 3)$.

3. Averigue se $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ é combinação linear de $\mathbf{u}_1 = (1, 0, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (-1, 1, 0)$ e $\mathbf{u}_3 = (0, 1, 1)$:

(a) $\mathbf{v} = (5, -3, 3)$.

(b) $\mathbf{v} = (1, -1, 0)$.

4. Escreva, se possível, A como combinação linear de B , C e D com

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

5. Considere os vetores reais $\mathbf{u}_1 = (k, 1, -1)$, $\mathbf{u}_2 = (-1, 1, 1)$ e $\mathbf{u}_3 = (0, -1, -2)$.

(a) Determine k sabendo que $\mathbf{u}_1$ é combinação linear de $\mathbf{u}_2$ e $\mathbf{u}_3$.

(b) Escreva $\mathbf{u}_1$ como combinação linear de $\mathbf{u}_2$ e $\mathbf{u}_3$.

➤ Soluções dos Exercícios

1. (a) Sim pois $\mathbf{v} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$.

(b) Sim pois $\mathbf{v} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$.

(c) Sim pois $\mathbf{v} = 2\mathbf{u}_1 - 3\mathbf{u}_2$.

(d) Não, porque o elemento da 2.^a linha e 2.^a coluna não pode ser obtido por uma expressão linear envolvendo os elementos das matrizes colocados na mesma posição pois são nulos.

2. (a) É combinação linear porque $\mathbf{v} = 2\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$.

(b) Não é combinação linear porque $\nexists \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \mathbf{v} = \alpha\mathbf{u}_1 + \beta\mathbf{u}_2$.

3. (a) Não é combinação linear porque $\nexists \alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{R} : \mathbf{v} = \alpha\mathbf{u}_1 + \beta\mathbf{u}_2 + \lambda\mathbf{u}_3$.

(b) É combinação linear porque $\mathbf{v} = -\lambda\mathbf{u}_1 + (-1-\lambda)\mathbf{u}_2 + \lambda\mathbf{u}_3, \lambda \in \mathbb{R}$. Por exemplo, $\mathbf{v} = 0\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 + 0\mathbf{u}_3$.

4. $A = 2B + C - D$.

$$5. (a) \begin{cases} -\alpha = k \\ \alpha - \beta = 1 \\ \alpha - 2\beta = -1 \end{cases}, \quad \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & k \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & k \\ 0 & -1 & k+1 \\ 0 & 0 & -k-3 \end{array} \right].$$

O sistema é um SP se e só se $\text{car}(A) = \text{car}[A|B] \Leftrightarrow -k-3=0$ ou seja $k=-3$. Sendo um SPD ($\text{car}(A) = \text{car}[A|B] = 2 = n.^{\circ}$ de vetores) então a combinação linear é única para $k=-3$.

(b) Para $k=-3$ tem-se $\mathbf{u}_1 = 3\mathbf{u}_2 + 2\mathbf{u}_3$.

5.3 Subespaço Vetorial Gerado

Sejam E um espaço vetorial real e $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_r$ vetores de E .

Propriedades 2

Seja V o conjunto de todas as combinações lineares de $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_r$. Então:

1. V é um subespaço vetorial de E .
2. V é o menor subespaço vetorial de E que contém os vetores $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_r$.

Observação: Para simplificar, por vezes diz-se apenas que V é um espaço vetorial, em vez de especificar que V é um subespaço vetorial de E .

Definições 5

O espaço vetorial V definido anteriormente é designado por **subespaço vetorial gerado** por $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_r$ e denota-se por $V = \text{ger} \{ \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_r \}$. Diz-se que $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_r$ são os **geradores** de V .

Exemplo 4

Determine o subespaço vetorial V de $\mathbb{R}^3$ gerado por $C = \{(1, -1, 1), (1, 1, 1)\}$.

Resolução

O subespaço vetorial V gerado pelos vetores de C é, por definição, o conjunto de todas as combinações lineares dos vetores de C , ou seja, são todos os vetores $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ para os quais existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que

$$\alpha(1, -1, 1) + \beta(1, 1, 1) = (x, y, z).$$

A partir desta equação obtém-se o sistema S definido por

$$\begin{cases} \alpha + \beta = x \\ -\alpha + \beta = y \\ \alpha + \beta = z \end{cases}.$$

Usando o método de eliminação de Gauss tem-se

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ -1 & 1 & y \\ 1 & 1 & z \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{L_2 \rightarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 - L_1}} \left[\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & 1 & x \\ 0 & \boxed{2} & y+x \\ 0 & 0 & z-x \end{array} \right].$$

O sistema S admite solução (é um SP) quando

$$\text{car}[A|B] = \text{car}(A) = 2 \Leftrightarrow z - x = 0 \Leftrightarrow z = x.$$

Portanto, $V = \text{ger}\{(1, -1, 1), (1, 1, 1)\} = \{(x, y, x) : x, y \in \mathbb{R}\}$, ou seja, apenas os vetores do tipo (x, y, x) é que são combinações lineares dos vetores de C .

Exercício 8

Determine o espaço vetorial V gerado por:

$$C = \{(1, 0, -1, 0), (1, 1, 0, -1), (0, -1, -1, 1)\}.$$

Resolução

O espaço vetorial V é formado pelos vetores $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$ para os quais a equação $\alpha(1, 0, -1, 0) + \beta(1, 1, 0, -1) + \lambda(0, -1, -1, 1) = (x, y, z, w)$ admite solução com $\alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{R}$. A partir desta equação obtém-se o sistema S

$$\begin{cases} \alpha + \beta = x \\ \beta - \lambda = y \\ -\alpha - \lambda = z \\ -\beta + \lambda = w \end{cases}.$$

Usando o método de eliminação de Gauss tem-se

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & -1 & y \\ -1 & 0 & -1 & z \\ 0 & -1 & 1 & w \end{array} \right] \xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 + L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & -1 & y \\ 0 & 1 & -1 & z+x \\ 0 & -1 & 1 & w \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{\substack{L_3 \rightarrow L_3 - L_2 \\ L_4 \rightarrow L_4 + L_2}} \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 0 & x \\ 0 & \boxed{1} & -1 & y \\ 0 & 0 & 0 & z+x-y \\ 0 & 0 & 0 & w+y \end{array} \right].$$

Assim, S é um SP se e só se $\text{car}[A|B] = \text{car}(A) = 2$, ou seja, quando

$$\begin{cases} z + x - y = 0 \\ w + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -x + y \\ w = -y \end{cases}.$$

Portanto, $V = \{(x, y, -x + y, -y) : x, y \in \mathbb{R}\}$.

Exercício 9

Determine o espaço vetorial V gerado por

$$C = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Resolução

O espaço vetorial V é formado pelas matrizes $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ para as quais a equação

$$\alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

admite solução com $\alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{R}$. A partir desta equação obtém-se o sistema S

$$\begin{cases} \alpha - \beta + 2\lambda = a \\ \beta - 2\lambda = b \\ \beta - 2\lambda = c \\ 2\alpha - 2\beta + \lambda = d \end{cases}.$$

Usando o método de eliminação de Gauss tem-se

$$\begin{aligned} [A|B] &= \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & a \\ 0 & 1 & -2 & b \\ 0 & 1 & -2 & c \\ 2 & -2 & 1 & d \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{L_4 \rightarrow L_4 - 2L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 - L_2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & a \\ 0 & 1 & -2 & b \\ 0 & 0 & 0 & c - b \\ 0 & 0 & -3 & d - 2a \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{L_3 \leftrightarrow L_4} \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -1 & 2 & a \\ 0 & \boxed{1} & -2 & b \\ 0 & 0 & \boxed{-3} & d - 2a \\ 0 & 0 & 0 & c - b \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Assim, S é um SP se e só se $\text{car}[A|B] = \text{car}(A) = 3$, ou seja, quando $c = b$.

Portanto, $V = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} : a, b, d \in \mathbb{R} \right\}$ e representa o conjunto de todas as matrizes simétricas de ordem 2.

Nos exercícios anteriores, determinou-se o espaço vetorial gerado por um conjunto de vetores. Agora, iremos apresentar dois exercícios que ilustram como, a partir de um espaço vetorial, se pode determinar um conjunto de vetores geradores.

Exercício 10

Determine um conjunto de geradores do espaço vetorial:

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 0\}.$$

Resolução

Como $x + y = 0 \Leftrightarrow y = -x$ então o vetor genérico de V pode assumir a forma $(x, -x, z)$, pelo que

$$\begin{aligned} V &= \{(x, -x, z) : x, z \in \mathbb{R}\} = \{(x, -x, 0) + (0, 0, z) : x, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1, -1, 0) + z(0, 0, 1) : x, z \in \mathbb{R}\} = \text{ger}\{(1, -1, 0), (0, 0, 1)\}. \end{aligned}$$

Portanto, $A = \{(1, -1, 0), (0, 0, 1)\}$ é um conjunto de geradores de V .

Exercício 11

Determine um conjunto de geradores do espaço vetorial:

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} : a - b + c = 0 \right\}.$$

Resolução

Como $a - b + c = 0 \Leftrightarrow a = b - c$ então o vetor genérico de V pode assumir a forma $\begin{bmatrix} b - c & b & c \end{bmatrix}$, pelo que

$$\begin{aligned} V &= \left\{ \begin{bmatrix} b - c & b & c \end{bmatrix} : b, c \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ b \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} : b, c \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \text{ger} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Portanto, $A = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ é um conjunto de geradores de V .

➤ Exercícios da Secção 5.3

- Considere o conjunto $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0 \wedge z = -2x\}$.
 - Determine um vetor $\mathbf{v}$ tal que $G = \text{ger}\{\mathbf{v}\}$. Justifique que isto permite concluir que G é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.
 - Interprete geometricamente G .
- Considere o conjunto $F = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : z = 2x \wedge x - z - w + y = 0\}$.
 Determine vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ tais que $F = \text{ger}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$. Justifique que isto permite concluir que F é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$.
- Determine o espaço vetorial V gerado pelos vetores:
 - $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 0)$ e $\mathbf{u}_2 = (2, 1, 1)$.
 - $\mathbf{u}_1 = (1, -1, 0)$, $\mathbf{u}_2 = (-2, 1, 1)$ e $\mathbf{u}_3 = (1, 0, -1)$.
 - $\mathbf{u}_1 = (1, -1, 1, 0)$, $\mathbf{u}_2 = (2, -1, 2, 1)$, $\mathbf{u}_3 = (0, 1, 0, 1)$ e $\mathbf{u}_4 = (-1, 0, -1, -1)$.
 - $\mathbf{u}_1 = (1, 0, -1, 0)$, $\mathbf{u}_2 = (1, -1, 1, 0)$, $\mathbf{u}_3 = (-1, 1, 0, -1)$ e $\mathbf{u}_4 = (1, 0, 0, -1)$.
 - $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$.
 - $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.
- Averigue se $\mathbb{R}^3$ pode ser gerado pelos vetores:
 - $\mathbf{u}_1 = (2, -1, 0)$, $\mathbf{u}_2 = (-1, 1, 1)$ e $\mathbf{u}_3 = (1, 0, 1)$.
 - $\mathbf{u}_1 = (1, -1, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (-1, 2, 0)$ e $\mathbf{u}_3 = (1, 1, 2)$.

➤ Soluções dos Exercícios

- $G = \{(x, 0, -2x) : x \in \mathbb{R}\} = \text{ger}\{\mathbf{v}\}$ com, por exemplo, $\mathbf{v} = (1, 0, -2)$.
 Como G é gerado por $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ então G é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.
 - G é o conjunto de vetores posição $\overrightarrow{OP} = (x, 0, -2x)$, onde P é qualquer ponto da reta definida pelas equações $y = 0 \wedge z = -2x$.

2. $F = \{(x, x + w, 2x, w) : x, w \in \mathbb{R}\} = \text{ger } \{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ com, por exemplo, $\mathbf{u} = (1, 1, 2, 0)$ e $\mathbf{v} = (0, 1, 0, 1)$. Como F é gerado por $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^4$ então F é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$.
3. Para determinar o vetor genérico de V em cada alínea, basta verificar quando o sistema é um SP, ou seja, quando $\text{car}[A|B] = \text{car}(A)$.

$$(a) \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 0 & -1 & y - x \\ 0 & 0 & y - x + z \end{array} \right],$$

$$\text{car}[A|B] = \text{car}(A) = 2 \Leftrightarrow y - x + z = 0,$$

$$V = \text{ger } \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\} = \{(x, y, x - y) : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

$$(b) \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & x \\ 0 & -1 & 1 & x + y \\ 0 & 0 & 0 & x + y + z \end{array} \right],$$

$$\text{car}[A|B] = \text{car}(A) = 2 \Leftrightarrow x + y + z = 0,$$

$$V = \text{ger } \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\} = \{(x, y, -x - y) : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

$$(c) \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & x \\ 0 & 1 & 1 & -1 & x + y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & z - x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & w - x - y \end{array} \right],$$

$$\text{car}[A|B] = \text{car}(A) = 2 \Leftrightarrow z - x = 0 \wedge w - x - y = 0,$$

$$V = \text{ger } \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\} = \{(x, y, x, x + y) : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

$$(d) \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & x \\ 0 & -1 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 1 & x + 2y + z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & w + x + 2y + z \end{array} \right],$$

$$\text{car}[A|B] = \text{car}(A) = 3 \Leftrightarrow w + x + 2y + z = 0,$$

$$V = \text{ger } \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\} = \{(x, y, z, -x - 2y - z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}.$$

$$(e) \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & -1 & b - a \\ 0 & 0 & 0 & c - 2b \\ 0 & 0 & 0 & d - b + a \end{array} \right],$$

$$\text{car}[A|B] = \text{car}(A) = 2 \Leftrightarrow c - 2b = 0 \wedge d - b + a = 0,$$

$$V = \text{ger} \{ \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 2b & -a+b \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

$$(f) \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & a \\ 0 & 2 & -1 & b-a \\ 0 & 0 & -2 & -a+c-b \end{array} \right],$$

$$\text{car}[A|B] = \text{car}(A) = 3, \forall a, b, c \in \mathbb{R},$$

$$V = \text{ger} \{ \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \} = M_{1 \times 3}(\mathbb{R}).$$

$$4. (a) \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & x \\ 0 & 1 & 1 & x+2y \\ 0 & 0 & 0 & z-x-2y \end{array} \right],$$

O sistema é um SP $\Leftrightarrow \text{car}(A) = \text{car}[A|B] \Leftrightarrow z - x - 2y = 0$,

$\text{ger} \{ \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \} = \{ (x, y, x+2y) : x, y \in \mathbb{R} \} \neq \mathbb{R}^3$ e portanto $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ e $\mathbf{u}_3$ não geram $\mathbb{R}^3$.

$$(b) \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & x \\ 0 & 1 & 2 & x+y \\ 0 & 0 & -1 & z-y-2x \end{array} \right],$$

O sistema é um SP, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ pois $\text{car}(A) = \text{car}[A|B] = 3, \forall x, y, z \in \mathbb{R}$, pelo que $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ e $\mathbf{u}_3$ geram $\mathbb{R}^3$.

5.4 Dependência Linear de Vetores

Seja E um espaço vetorial real.

Definições 6

Sejam $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_r \in E$, e $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ escalares que satisfazem a equação:

$$\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 + \dots + \alpha_r \mathbf{u}_r = \mathbf{0}_E.$$

Diz-se que os vetores $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_r$ são:

1. **linearmente independentes (LI)** quando a equação admite apenas a solução trivial ($\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_r = 0$).
2. **linearmente dependentes (LD)** quando existem escalares não todos nulos que satisfazem a equação.

Exemplo 5

Análise a dependência linear dos vetores $\mathbf{u} = (2, -1, 0)$, $\mathbf{v} = (0, 1, -2)$ e $\mathbf{w} = (1, 0, 4)$ de $\mathbb{R}^3$.

Resolução

A equação $\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v} + \lambda \mathbf{w} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}$ admite pelo menos a solução $\alpha = \beta = \lambda = 0$. Se esta for a única solução os vetores são LI. Caso existam outras soluções (haverá uma infinidade de soluções) os vetores são LD. Resolvendo a equação

$$\begin{aligned} \alpha(2, -1, 0) + \beta(0, 1, -2) + \lambda(1, 0, 4) &= (0, 0, 0) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha + \lambda = 0 \\ -\alpha + \beta = 0 \\ -2\beta + 4\lambda = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -2\alpha \\ \beta = \alpha \\ -2\alpha - 8\alpha = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \beta = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

obtem-se apenas a solução trivial, pelo que $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ são LI. Neste caso, pode-se também dizer que o conjunto $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ é LI.

Exercício 12

Verifique os vetores $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ são linearmente dependentes.

Resolução

Os vetores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ são LD se e só se a equação $\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} + \lambda\mathbf{w} = \mathbf{0}_{M_{2 \times 2}(\mathbb{R})}$ admite uma infinidade de soluções. Resolvendo a equação tem-se

$$\alpha \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha + \lambda = 0 \\ -4\alpha + \beta - \lambda = 0 \\ 4\alpha + \beta + 3\lambda = 0 \\ 2\alpha - \beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -2\alpha \\ \text{---} \\ \beta = 2\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -2\alpha \\ -4\alpha + 2\alpha + 2\alpha = 0 \\ 4\alpha + 2\alpha - 6\alpha = 0 \\ \beta = 2\alpha \end{cases}$$

ou seja, $\beta = 2\alpha \wedge \lambda = -2\alpha$, pelo que as soluções são da forma $(\alpha, 2\alpha, -2\alpha)$, com $\alpha \in \mathbb{R}$. Portanto, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ são LD, o que é equivalente a dizer que $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ é LD.

Exercício 13

Os vetores $\mathbf{u} = (1, -1, 0, 3)$, $\mathbf{v} = (1, -2, 1, -2)$ e $\mathbf{w} = (1, 0, -1, 8)$ de $\mathbb{R}^4$ são linearmente dependentes? Justifique.

Resolução

Uma vez que

$$\alpha(1, -1, 0, 3) + \beta(1, -2, 1, -2) + \lambda(1, 0, -1, 8) = (0, 0, 0, 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \lambda = 0 \\ -\alpha - 2\beta = 0 \\ \beta - \lambda = 0 \\ 3\alpha - 2\beta + 8\lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -2\beta \\ \lambda = \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\beta + \beta + \beta = 0 \\ \alpha = -2\beta \\ \lambda = \beta \\ -6\beta - 2\beta + 8\beta = 0 \end{cases}$$

ou seja, $\alpha = -2\beta \wedge \lambda = \beta$, pelo que as soluções são da forma $(-2\beta, \beta, \beta)$, com $\beta \in \mathbb{R}$.

Portanto, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ são LD, o que é equivalente a dizer que $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ é LD.

Exercício 14

Determine os valores de $k \in \mathbb{R}$ tal que U é LI com

$$U = \{(1, 0, -1, 0), (1, 1, 0, -1), (0, -1, -1, k)\}.$$

Resolução

Uma vez que

$$\alpha(1, 0, -1, 0) + \beta(1, 1, 0, -1) + \lambda(0, -1, -1, k) = (0, 0, 0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \beta - \lambda = 0 \\ -\alpha - \lambda = 0 \\ -\beta + k\lambda = 0 \end{cases}$$

então usando o método de eliminação de Gauss tem-se

$$\begin{aligned} [A|B] &= \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & k & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 + L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & k & 0 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{\substack{L_3 \rightarrow L_3 - L_2 \\ L_4 \rightarrow L_4 + L_2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k-1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{L_3 \leftrightarrow L_4} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & k-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Como o sistema tem 3 incógnitas (igual ao número de vetores) então U é LI se e só se o sistema é um SPD. Logo, $\text{car}(A) = \text{car}[A|B] = 3 \Leftrightarrow k-1 \neq 0 \Leftrightarrow k \neq 1$. Portanto, o conjunto U é LI quando $k \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

➤ Exercícios da Secção 5.4

1. Analise a dependência linear dos seguintes vetores:

(a) $\mathbf{u}_1 = (1, -1, 0)$, $\mathbf{u}_2 = (0, 1, 2)$ e $\mathbf{u}_3 = (1, 2, 4)$.

(b) $\mathbf{u}_1 = (1, 2, -1)$, $\mathbf{u}_2 = (0, 1, 1)$ e $\mathbf{u}_3 = (-1, -3, 0)$.

(c) $\mathbf{u}_1 = (1, -1, 1, 0)$, $\mathbf{u}_2 = (0, 1, -1, 1)$ e $\mathbf{u}_3 = (0, 0, 1, -1)$.

(d) $\mathbf{u}_1 = (1, 0, 0, -1)$, $\mathbf{u}_2 = (0, 1, 1, 0)$, $\mathbf{u}_3 = (1, 0, 0, 1)$ e $\mathbf{u}_4 = (0, -1, 1, 0)$.

(e) $\mathbf{u}_1 = (1, 0, -1, -1)$, $\mathbf{u}_2 = (0, 1, 1, 1)$, $\mathbf{u}_3 = (1, 0, 1, -1)$ e $\mathbf{u}_4 = (1, 1, 1, 0)$.

$$(f) \ A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$(g) \ A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

2. Determine os valores de $k \in \mathbb{R}$ de forma que os seguintes vetores sejam linearmente independentes:

$$(a) \ \mathbf{u}_1 = (1, 0, 0), \mathbf{u}_2 = (1, k^2, k) \text{ e } \mathbf{u}_3 = (2, k, k).$$

$$(b) \ \mathbf{u}_1 = (1, 1, k, 0), \mathbf{u}_2 = (1, -k, 2, 1), \mathbf{u}_3 = (0, 1, k, 0) \text{ e } \mathbf{u}_4 = (1, -1, 2, 1).$$

$$(c) \ A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & k \end{bmatrix}.$$

► Soluções dos Exercícios

1. (a) LI. (b) LD. (c) LI. (d) LI. (e) LD. (f) LD. (g) LD.

2. (a) $k \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. (b) $k \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ (c) $k \in \mathbb{R} \setminus \{7\}$.

5.5 Propriedades da Dependência Linear

Sejam E um espaço vetorial real e 0_E o elemento neutro de E .

Apresentam-se de seguida um conjunto de propriedades que facilitam a análise da dependência linear de vetores.

Propriedade 1: $\{0_E\}$ é LD.

Observação: $\{0_E\}$ é LD pois a equação $\alpha 0_E = 0_E$ é válida para todos os valores de $\alpha \in \mathbb{R}$.

Propriedade 2: Se $v \neq 0_E$ então $\{v\}$ é LI.

Observação: Para $v \neq 0_E$ tem-se $\alpha v = 0_E \Leftrightarrow \alpha = 0$, ou seja, $\{v\}$ é LI.

Propriedade 3: Um conjunto de dois vetores não nulos é LI se e só se os vetores não são múltiplos um do outro.

Exemplo 6

O conjunto $U = \{(2, -1, 0), (1, 0, -2)\}$ é LI uma vez que não existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $(2, -1, 0) = \alpha(1, 0, -2)$.

Propriedade 4: Se $U = \{u_1, u_2, \dots, u_r\}$ contém o vetor nulo então U é LD.

Exemplo 7

O conjunto $U = \{(2, -1, 0), (0, 0, 0), (1, 0, -2)\}$ é LD pois a equação

$$\alpha(2, -1, 0) + \beta(0, 0, 0) + \lambda(1, 0, -2) = (0, 0, 0)$$

é válida para qualquer $\beta \in \mathbb{R}$.

Propriedade 5: O conjunto $U = \{u_1, u_2, \dots, u_r\}$ é LD se e só se pelo menos um dos vetores de U é combinação linear dos restantes.

Observação: De forma equivalente, U é LI se e só se nenhum dos vetores de U é combinação linear dos restantes.

Exemplo 8

Verifique que $U = \{(2, 0, 1), (1, 2, 0), (3, -2, 2)\}$ é LD.

Resolução

Para verificar que U é LD, apresentam-se dois procedimentos.

1.º procedimento: Atendendo a que

$$\begin{aligned} \alpha(2, 0, 1) + \beta(1, 2, 0) + \lambda(3, -2, 2) &= (0, 0, 0) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha + \beta + 3\lambda = 0 \\ 2\beta - 2\lambda = 0 \\ \alpha + 2\lambda = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \lambda \\ \alpha = -2\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4\lambda + \lambda + 3\lambda = 0 \\ \beta = \lambda \\ \alpha = -2\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \lambda \\ \alpha = -2\lambda \end{cases} \end{aligned}$$

então é um SPI, pelo que U é LD. Portanto, existe pelo menos um vetor de U que é combinação linear dos restantes. De facto, considerando, por exemplo, $\lambda = 1$ tem-se $\beta = 1 \wedge \alpha = -2$, ou seja

$$-2\mathbf{u} + 1\mathbf{v} + 1\mathbf{w} = (0, 0, 0) \Leftrightarrow \mathbf{w} = 2\mathbf{u} - \mathbf{v} \text{ (ou } \mathbf{v} = 2\mathbf{u} - \mathbf{w}).$$

2.º procedimento: Para analisar a dependência linear de U a aplicamos o método de eliminação de Gauss e verificamos que se obtém um SPI. Tem-se

$$\begin{aligned} [A|B] &= \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} L_1 \leftrightarrow L_3 \\ L_2 \rightarrow \frac{1}{2}L_2 \end{array}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 - 2L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 - L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] = [A'|B'] \end{aligned}$$

e como $\text{car}(A) = \text{car}[A|B] = 2 < 3 = n.º$ de vetores então é um SPI, pelo que U é LD.

Observação: Constatase que:

- ▶ como a 3.^a coluna da matriz $[A'|B']$ não tem pivô então w é combinação linear de u e v .
- ▶ a $\text{car}(A)$ representa o número máximo de vetores de U que são LI.

Propriedade 6: Se $U = \{u_1, u_2, \dots, u_r\}$ admite um subconjunto LD então U é LD.

Exemplo 9

Considere os vetores $u = (2, 0, 1)$, $v = (1, 2, 0)$, $w = (3, -2, 2)$ e $t = (4, 2, -5)$. Analise a dependência linear de $U = \{u, v, w, t\}$.

Resolução

Atendendo ao exemplo anterior, sabe-se que $\{u, v, w\}$ é LD pois $w = 2u - v$. Isto implica que $w = 2u - v + 0t$, pelo que U é LD.

Propriedade 7: Se $U = \{u_1, \dots, u_i, \dots, u_r\}$ é LD (LI) então para qualquer α não nulo tem-se que $U' = \{u_1, \dots, \alpha u_i, \dots, u_r\}$ é LD (LI).

Exemplo 10

Sejam $u = (2, 0, 1)$, $v = (1, 2, 0)$, $w = (3, -2, 2)$. Analise a dependência linear de $U' = \{u', v, w\}$ com $u' = -2u$.

Resolução

Como u, v e w são os vetores do exemplo anterior então $w = 2u - v$, pelo que

$$w = 2u - v \Leftrightarrow w = (-1)(-2u) - v \Leftrightarrow w = -u' - v$$

então w é combinação linear de u' e v , pelo que U' é LD.

Propriedade 8: Se $U = \{u_1, \dots, u_i, \dots, u_j, \dots, u_r\}$ é LD (LI) então para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$ tem-se que $U' = \{u_1, \dots, u_i, \dots, u_j + \alpha u_i, \dots, u_r\}$ é LD (LI).

Exemplo 11

Considere U do exemplo anterior e $U' = \{u, v', w\}$, onde $v' = v + 2u$. Analise a dependência linear de U' .

Resolução

Como $w = 2u - v$ então

$$w = 2u - v \Leftrightarrow w = 2u - (v' - 2u) \Leftrightarrow w = 4u - v'$$

ou seja, w é combinação linear de u e v' , pelo que U' é LD.

Propriedade 9: Sejam $U = \{u_1, u_2, \dots, u_r\}$ um conjunto LI e $U' = U \cup \{v\}$.

(a) Se U' é LD então v é combinação linear dos vetores de U .

Exemplo 12

Sejam $u = (1, 0, 0)$, $v = (0, 1, 0)$ e $w = (2, -3, 0)$.

O conjunto $U = \{u, v\}$ é LI (u não é múltiplo de v). Como $w = 2u - 3v$ então w é combinação linear de u e v , pelo que $U' = \{u, v, w\}$ é LD.

(b) Se v não é combinação linear dos vetores de U então U' é LI.

Exemplo 13

Sejam $u = (1, 0, 0)$, $v = (0, 1, 0)$ e $t = (2, -1, 1)$.

O conjunto $U = \{u, v\}$ é LI. Como t não é combinação linear de u e v (u e v têm a 3.^a componente nula e t não) então $U' = \{u, v, t\}$ é LI.

➤ Exercícios da Secção 5.5

1. Observe os vetores em cada alínea e, com base nas propriedades já estudadas, indique, justificando, se são ou não linearmente independentes.

(a) $u_1 = (1, 2, 3, 4, 5)$ e $u_2 = (2, 4, 6, 8, 10)$.

(b) $u_1 = (1, 0, 0)$, $u_2 = (0, 1, 0)$ e $u_3 = (1, 1, 0)$.

(c) $\mathbf{u}_1 = (0, 0, 0, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (0, 0, 1, 0)$ e $\mathbf{u}_3 = (0, 1, 0, 0)$.

(d) $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}$.

(e) $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

► Soluções dos Exercícios

1. (a) São LD pois os vetores $\mathbf{u}_2 = 2\mathbf{u}_1$.

(b) São LD porque $\mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$.

(c) São LI porque os vetores $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ não sendo múltiplos são LI e $\mathbf{u}_3$ não é combinação linear dos outros dois.

(d) São LD porque $\mathbf{u}_2 = -2\mathbf{u}_1$.

(e) São LI porque os vetores $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ não sendo múltiplos são LI e $\mathbf{u}_3$ não é combinação linear dos outros dois.

5.6 Base

Seja E um espaço vetorial real de dimensão finita.

Definição 7

Seja $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_r\}$ um conjunto de vetores de E .

Diz-se que B é uma **base** de E quando satisfaz as duas condições:

1. B é LI.
2. B gera E , ou seja, $E = \text{ger}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_r\}$.

Observações:

1. O subespaço vetorial nulo $\{\mathbf{0}_E\}$ tem dimensão zero, e a sua única base é o **conjunto vazio**, representado por $\emptyset$ ou $\{\}$.
2. Em alguns espaços vetoriais, existe uma base particular designada por **base canónica**. Por exemplo, a base canónica de:
 - $\mathbb{R}^n$ é o conjunto $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$, onde $\mathbf{e}_i$ é o vetor com 1 na i -ésima posição e 0 nas restantes.
 - $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ é o conjunto das matrizes E_{ij} com 1 na posição ij e 0 nas restantes.

Contudo, salvo casos particulares, os subespaços destes espaços não possuem uma base canónica.

Exemplo 14

1. Em $\mathbb{R}^2$, a base **canónica** é $C = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, onde $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ e $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$.

Como $(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1), \forall x, y \in \mathbb{R}$ então $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$ geram $\mathbb{R}^2$. Uma vez que $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$ não são múltiplos um do outro então são LI.

2. Em $\mathbb{R}^3$, a base **canónica** é $C = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$.

3. Em $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, a base **canónica** é $C = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ com

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{e}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

De facto, tem-se

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$, então e_1, e_2, e_3 e e_4 geram $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$. Como estes vetores são LI então formam a base **canónica** de $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.

Exemplo 15

Determine uma base para o espaço vetorial:

$$V = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x - 2y + z = 0 \wedge 2y + z - w = 0\}.$$

Resolução

Para determinar o vetor genérico de V , é necessário resolver o sistema definido pelas suas condições. Assim, resolvendo, por exemplo, em ordem a y e z , tem-se

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2y + z - w = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y - z \\ w = 2y + z \end{cases}.$$

Assim, $V = \{(2y - z, y, z, 2y + z) : y, z \in \mathbb{R}\}$.

► Para determinar um conjunto gerador de V , podemos reescrever V como

$$\begin{aligned} V &= \{(2y, y, 0, 2y) + (-z, 0, z, z) : y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{y(2, 1, 0, 2) + z(-1, 0, 1, 1) : y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{ger} \{(2, 1, 0, 2), (-1, 0, 1, 1)\}. \end{aligned}$$

ou seja, os vetores $u = (2, 1, 0, 2)$ e $v = (-1, 0, 1, 1)$ geram V .

► Para verificar se u e v são LI pode-se usar dois processos.

1.º processo: Atendendo a que

$$y(2, 1, 0, 2) + z(-1, 0, 1, 1) = (0, 0, 0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} 2y - z = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

então u e v são LI.

2.º processo: Como $u = (2, 1, 0, 2)$ e $v = (-1, 0, 1, 1)$ não são múltiplos um do outro então são LI.

Logo, como u e v são geradores de V e LI então formam uma base, ou seja, $B = \{(2, 1, 0, 2), (-1, 0, 1, 1)\}$ é base de V .

Exercício 15

Determine uma base para o espaço vetorial:

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : -b + 2d = 0 \wedge a - d - c = 0 \right\}.$$

Resolução

Uma vez que

$$\begin{cases} -b + 2d = 0 \\ a - d - c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2d \\ a = c + d \end{cases}$$

$$\text{então } V = \left\{ \begin{bmatrix} c + d & 2d \\ c & d \end{bmatrix} : c, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

► Atendendo a que

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} c + d & 2d \\ c & d \end{bmatrix} : c, d \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ c \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\text{então os vetores } \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ geram } V.$$

► Como $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ não são múltiplos um do outro então são LI.

Logo, como $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são geradores de V e LI então formam uma base, ou seja, $B = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ é base de V .

Exercício 16

Considere os vetores $\mathbf{u} = (-1, 2, 0)$, $\mathbf{v} = (2, -1, -3)$ e $\mathbf{w} = (1, -3, 1)$, e o espaço vetorial $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x = -y - z\}$.

- Mostre que $\mathbf{v}$ é combinação linear de $\mathbf{u}$ e de $\mathbf{w}$.
- Indique, justificando, se a afirmação "A equação $\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} + \lambda\mathbf{w} = (0, 0, 0)$ com $\alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{R}$, tem uma infinidade de soluções" é verdadeira.
- Determine uma base para V .
- Mostre que V é gerado por $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$.

Resolução

(a) Resolvendo a equação $\alpha(-1, 2, 0) + \beta(1, -3, 1) = (2, -1, -3)$ tem-se

$$\begin{cases} -\alpha + \beta = 2 \\ 2\alpha - 3\beta = -1 \\ \beta = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -5 \\ \beta = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -(-5) - 3 = 2 \\ \alpha = -5 \\ \beta = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -5 \\ \beta = -3 \end{cases}.$$

Portanto, $\mathbf{v} = -5\mathbf{u} - 3\mathbf{w}$.

(b) Uma vez que $\mathbf{v} = -5\mathbf{u} - 3\mathbf{w}$ então $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ são LD, ou seja, a equação $\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} + \lambda\mathbf{w} = (0, 0, 0)$ tem uma infinidade de soluções, pelo que a afirmação é verdadeira.

(c) Como $2x = -y - z \Leftrightarrow z = -2x - y$ então $V = \{(x, y, -2x - y) : x, y \in \mathbb{R}\}$.

► Encontrar os geradores de V . Como

$$V = \{x(1, 0, -2) + y(0, 1, -1) : x, y \in \mathbb{R}\} = \text{ger}\{(1, 0, -2), (0, 1, -1)\}$$

então $\mathbf{u}_1 = (1, 0, -2)$ e $\mathbf{u}_2 = (0, 1, -1)$ são geradores de V .

► Verificar se $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ são LI por dois processos.

1.º processo: Atendendo a que

$$x(1, 0, -2) + y(0, 1, -1) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ -2x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

então $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ são LI.

2.º processo: Como $\mathbf{u}_1$ não é múltiplo de $\mathbf{u}_2$ então $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ são LI.

Portanto, $B = \{(1, 0, -2), (0, 1, -1)\}$ é base de V .

(d) Para determinar que vetores são gerados por $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, considere equação $\alpha(-1, 2, 0) + \beta(2, -1, -3) + \lambda(1, -3, 1) = (x, y, z)$, equivalente ao sistema

$$S : \begin{cases} -\alpha + 2\beta + \lambda = x \\ 2\alpha - \beta - 3\lambda = y \\ -3\beta + \lambda = z \end{cases} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & x \\ 2 & -1 & -3 & y \\ 0 & -3 & 1 & z \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 + 2L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & x \\ 0 & 3 & -1 & y + 2x \\ 0 & -3 & 1 & z \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 + L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & x \\ 0 & 3 & -1 & y + 2x \\ 0 & 0 & 0 & z + y + 2x \end{array} \right] = [A'|B'].$$

S é um SP $\Leftrightarrow \text{car}(A) = \text{car}[A|B] = 2$, ou seja, $z + y + 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = -y - z$. Portanto, $\text{ger}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\} = V$.

Observação: Como não houve troca de colunas e as primeiras duas colunas da matriz A' contêm pivôs, os vetores $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ são LI. Por outro lado, a terceira coluna não contém pivô, o que implica que $\mathbf{w}$ é combinação linear de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$. Assim, $V = \text{ger}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\} = \text{ger}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$. Logo, $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\} = \{(-1, 2, 0), (2, -1, -3)\}$ é também uma base de V .

► Exercícios da Secção 5.6

1. Para cada um dos espaços vetoriais V , determine a forma mais simples possível de o descrever em função do seu vetor genérico e indique uma base para V .

(a) $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 2y\}$.

(b) $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = -z\}$.

(c) $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y\}$.

(d) $V = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x = 2z = -w\}$.

(e) $V = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x = -z\}$.

(f) $V = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y + w = 0 \wedge 2x + y + 2z + 2w = 0$
 $\wedge 2x + y + z + 3w = 0\}$.

(g) $V = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : a = d \wedge c = -2b \right\}$.

(h) $V = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : d = 0 \right\}$.

(i) $V = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \in M_{2 \times 3}(\mathbb{R}) : a + b + c - d + e - f = 0 \wedge \right.$
 $\left. \wedge b + c + e - f = 0 \wedge a + c - d - f = 0 \right\}$.

(j) $V = \{A \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) : A \text{ é uma matriz diagonal}\}$.

► Soluções dos Exercícios

1. Denote-se por B a base de cada um dos subespaços vetoriais:

(a) $V = \{(2y, y) : y \in \mathbb{R}\}$ e $B = \{(2, 1)\}$.

(b) $V = \{(-z, -z, z) : z \in \mathbb{R}\}$ e $B = \{(-1, -1, 1)\}$.

(c) $V = \{(y, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\}$ e $B = \{(1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$.

(d) $V = \{(2z, y, z, -2z) : y, z \in \mathbb{R}\}$ e $B = \{(0, 1, 0, 0), (2, 0, 1, -2)\}$.

(e) $V = \{(-z, y, z, w) : y, z, w \in \mathbb{R}\}$ e $B = \{(0, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$.

(f)
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right],$$

$V = \{(-3w, 2w, w, w) : w \in \mathbb{R}\}$ e $B = \{(-3, 2, 1, 1)\}$.

(g) $V = \left\{ \begin{bmatrix} d & b \\ -2b & d \end{bmatrix} : b, d \in \mathbb{R} \right\}$ e $B = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$.

(h) $V = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & 0 \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ e $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$.

(i)
$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right],$$

$V = \left\{ \begin{bmatrix} d & -e & f \\ d & e & f \end{bmatrix} : d, e, f \in \mathbb{R} \right\}$ e

$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$.

(j) $V = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} : a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn} \in \mathbb{R} \right\}$ e

$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \right\}.$

5.7 Dimensão

Seja E espaço vetorial real de dimensão finita.

Teorema 5

1. Todo o espaço vetorial admite uma base.
2. Todas as bases de um espaço vetorial têm o mesmo número de elementos.

Definição 8

Diz-se que o espaço vetorial E tem **dimensão** n quando admite uma base B com n elementos. Denota-se por $\dim E = \#B = n$.

Observações:

1. A base do espaço vetorial nulo $\{\mathbf{0}_E\}$ é o conjunto vazio, pelo que $\dim \{\mathbf{0}_E\} = 0$.
2. Todo o subespaço vetorial de E tem dimensão menor ou igual a $\dim E$.
3. A dimensão de um espaço vetorial coincide com o **número de variáveis livres** do seu vetor genérico.

Exemplo 16

1. A dimensão do espaço vetorial real $\mathbb{R}^n$ é $\dim \mathbb{R}^n = n$, pois a sua base canónica tem n elementos.
2. A dimensão do espaço vetorial $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ é $\dim M_{m \times n}(\mathbb{R}) = m \cdot n$, pois a sua base canónica tem tantas matrizes quanto o número de elementos das matrizes de $M_{m \times n}(\mathbb{R})$. A base é constituída por todas as matrizes M_{ij} , onde o elemento da linha i e coluna j é 1 e os restantes são nulos, $i = 1, 2, \dots, m$ e $j = 1, 2, \dots, n$.

Exemplo 17

Determine a dimensão do espaço vetorial $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x - y = 0\}$.

Resolução

Para determinar a dimensão de V são considerados dois processos.

1.º processo: A equação $2x - y = 0$ equivale a $y = 2x$, logo

$$V = \{(x, 2x) : x \in \mathbb{R}\} = \{x(1, 2) : x \in \mathbb{R}\} = \text{ger} \{(1, 2)\}$$

O vetor $(1, 2)$ é linearmente independente e gera V , pelo que $B = \{(1, 2)\}$ é uma base de V e $\dim V = \#B = 1$.

2.º processo: Como $V = \{(x, 2x) : x \in \mathbb{R}\}$ então o seu vetor genérico depende de uma variável livre, pelo que $\dim V = 1$.

Exercício 17

Determine a dimensão do espaço vetorial:

$$V = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x - y + z = 0 \wedge y - z = 0\}.$$

Resolução

Uma vez que

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y - z \\ y = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases}$$

então $V = \{(0, z, z, w) : z, w \in \mathbb{R}\}$. Para determinar a dimensão de V são considerados dois processos.

1.º processo: Como

$$V = \{(0, z, z, w) : z, w \in \mathbb{R}\} = \{z(0, 1, 1, 0) + w(0, 0, 0, 1) : z, w \in \mathbb{R}\}$$

então $V = \text{ger} \{(0, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$. Uma vez os geradores de V são LI (não são múltiplos um do outro) então $B = \{(0, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ é base de V , pelo que $\dim V = \#B = 2$.

2.º processo: Como $V = \{(0, z, z, w) : z, w \in \mathbb{R}\}$ então o seu vetor genérico depende de duas variáveis, pelo que $\dim V = 2$.

Exercício 18

Determine a dimensão do espaço vetorial:

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : a - c + d = 0 \wedge 2a - b - c = 0 \wedge a - b - d = 0 \right\}.$$

Resolução

Uma vez que

$$\begin{cases} a - c + d = 0 \\ 2a - b - c = 0 \\ a - b - d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = -a + c \\ b = 2a - c \\ a - 2a + c + a - c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = -a + c \\ b = 2a - c \end{cases}$$

$$\text{então } V = \left\{ \begin{bmatrix} a & 2a - c \\ c & -a + c \end{bmatrix} : a, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Para determinar a dimensão de V são considerados dois processos.

1.º processo: Como

$$V = \left\{ a \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} : a, c \in \mathbb{R} \right\} = \text{ger} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Uma vez que os vetores geradores de V são LI (não são múltiplos um do outro)

$$\text{então } B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\} \text{ é base de } V, \text{ pelo que } \dim V = \#B = 2.$$

2.º processo: Como $V = \left\{ \begin{bmatrix} a & 2a - c \\ c & -a + c \end{bmatrix} : a, c \in \mathbb{R} \right\}$ então o seu vetor genérico depende de duas variáveis, pelo que $\dim V = 2$.

Propriedades 3

Sejam E um espaço vetorial de dimensão n e U um conjunto de r vetores de E . Tem-se que:

1. se $r > n$ então U é LD. Logo, U não é base de E .
2. se $r < n$ então U não gera E . Logo, U não é base de E .
3. se $r = n$ e U é LI então U é base de E .
4. se $r = n$ e U gera E então U é base de E .

Exemplo 18

Indique, justificando, se $U = \{(1, 1), (1, -1), (0, 1)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$.

Resolução

Como U é um conjunto de vetores de $\mathbb{R}^2$ e $\#U = 3 > 2 = \dim \mathbb{R}^2$ então U é LD, pelo que U não é base de $\mathbb{R}^2$. De facto, U é LD pois $(1, 1) = (1, -1) + 2(0, 1)$.

Exercício 19

O conjunto $U = \{(1, 1, 0), (1, -1, 0)\}$ é uma base $\mathbb{R}^3$? Justifique.

Resolução

Como U é um conjunto de vetores de $\mathbb{R}^3$ e $\#U = 2 < 3 = \dim \mathbb{R}^3$, os vetores de U não geram $\mathbb{R}^3$, pelo que U não é base de $\mathbb{R}^3$.

Observações:

1. Pode observar-se que a combinação linear destes vetores permite obter um vetor genérico de $\mathbb{R}^3$ com a 3.^a componente igual a zero, ou seja, com a forma $(x, y, 0)$.
2. Como U não é base de $\mathbb{R}^3$, mas é LI então $U' = U \cup \{\mathbf{u}\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$ desde que $\mathbf{u} \notin \text{ger}\{U\}$. Considerando, por exemplo, $\mathbf{u} = (0, 0, 1) \notin \text{ger}\{U\}$ então $U' = \{(1, 1, 0), (1, -1, 0), (0, 0, 1)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.

Exercício 20

Verifique que $U = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ é uma base $\mathbb{R}^3$.

Resolução

O conjunto $U = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ é LI pois, por inspeção, os dois primeiros vetores são LI (não são múltiplos um do outro) e o terceiro vetor não é combinação linear dos dois primeiros vetores (a terceira componente não é nula). O espaço vetorial gerado por U tem dimensão 3 logo será o próprio $\mathbb{R}^3$. Conclui-se então que U é base de $\mathbb{R}^3$.

Exercício 21

Considere os vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ e o subespaço vetorial V definidos por:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } V = \left\{ \begin{bmatrix} a & a+b \\ a-b & b \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Indique, justificando, que $B = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ é base de V .

Resolução

Como o vetor genérico de V tem duas variáveis livres então $\dim V = 2$.

Uma vez que

$$V = \left\{ a \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\} = \text{ger } \{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$$

então $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ geram V . Atendendo a que $\dim V = 2 = \#B$ então $B = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ é base de V .

Teorema 6

Se $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_r\}$ é uma base do espaço vetorial E então qualquer vetor $\mathbf{u} \in E$ escreve-se, de forma única, como combinação linear de $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_r$, ou seja, existem escalares **únicos** $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ tais que:

$$\mathbf{u} = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 + \dots + \alpha_r \mathbf{u}_r \quad (5.1)$$

Definição 9

Os escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ que satisfazem a equação (5.1) são designados por **coordenadas** ou **componentes** de $\mathbf{u}$ na base B e denota-se por $\mathbf{u} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r)_B$.

Exemplo 19

Considere o vetor $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$ e a base $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ do

exemplo anterior. Determine as componentes de $\mathbf{w}$ na base B .

Resolução

As componentes de w na base B são os valores de α e de β que satisfazem a equação

$$\alpha \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \alpha + \beta = -1 \\ \alpha - \beta = 5 \\ \beta = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = -3 \end{cases}$$

ou seja, as componentes de w são 2 e -3 , pelo que $w = (2, -3)_B$.

Exercício 22

Considere em $\mathbb{R}^2$, a base canónica $C = \{\hat{e}_x, \hat{e}_y\}$, onde $\hat{e}_x = (1, 0)$ e $\hat{e}_y = (0, 1)$, e a base $B = \{\vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'}\}$, com $\vec{e}_{x'} = (-2, -1)$ e $\vec{e}_{y'} = (1, -3)$.

- Determine as componentes do vetor $u = (6, -4)_C$ na base B .
- Represente geometricamente os vetores das bases C e B e os eixos por eles induzidos, o vetor u e as suas coordenadas nas bases C e B .

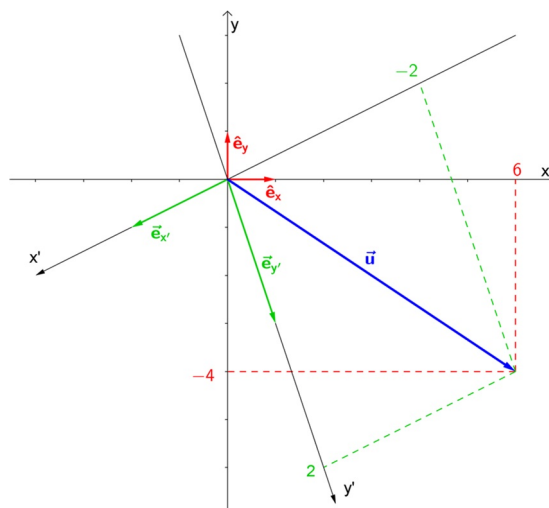
Resolução

- Na base B , $u = \alpha \vec{e}_{x'} + \beta \vec{e}_{y'} = (\alpha, \beta)_B$, onde α e β são escalares tais que

$$\alpha(-2, -1) + \beta(1, -3) = (6, -4) \Leftrightarrow \begin{cases} -2\alpha + \beta = 6 \\ -\alpha - 3\beta = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8 + 6\beta + \beta = 6 \\ \alpha = 4 - 3\beta \end{cases}$$

ou seja, $\alpha = -2 \wedge \beta = 2$. Logo as componentes de u são -2 e 2 , pelo que $u = (-2, 2)_B$.

- A figura ilustra a representação geométrica solicitada.



Obtenção de uma base a partir de um conjunto de geradores de um espaço vetorial

Seja $U = \{u_1, u_2, \dots, u_r\}$ um conjunto de vetores de um espaço vetorial E . Para determinar o subespaço vetorial V gerado por U , é necessário verificar para que vetores $v \in E$ existem escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ tais que:

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_r u_r = v.$$

A resolução desta equação é equivalente à resolução do sistema $AX = B$, com incógnitas $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$, onde as colunas $c_1, c_2, \dots, c_r$ da matriz A são constituídas pelas componentes dos vetores de U , e B é o vetor das componentes de v .

Se $\text{car}(A) = m \leq r$, então, utilizando operações elementares sobre as linhas, é possível transformar A numa matriz A' na FEL, com m colunas contendo pivôs. Pode provar-se que as colunas de A correspondentes às colunas com pivô de A' são LI, pelo que os vetores de U associados a essas colunas formam uma base de V .

Teorema 7

Sejam V o espaço vetorial gerado por $U = \{u_1, u_2, \dots, u_r\}$, A uma matriz cujas colunas são formadas pelas componentes dos vetores de U e A' uma matriz na FEL obtida a partir de A .

Uma base de V é constituída pelos vetores de U que correspondem às colunas de A associadas às colunas de A' que contêm pivôs.

Exercício 23

Considere em $\mathbb{R}^4$, o conjunto $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ com $u_1 = (1, 0, 0, 1)$, $u_2 = (1, -1, -1, 1)$, $u_3 = (1, 2, 2, 1)$ e $u_4 = (2, -2, 1, -1)$.

- Determine o subespaço vetorial V gerado por U .
- Indique, justificando, duas bases para V .

Resolução

- Para determinar os vetores de $\mathbb{R}^4$ gerados por U , considera-se a equação

$$\alpha(1, 0, 0, 1) + \beta(1, -1, -1, 1) + \lambda(1, 2, 2, 1) + \theta(2, -2, 1, -1) = (x, y, z, w)$$

que é equivalente a

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \lambda + 2\theta = x \\ -\beta + 2\lambda - 2\theta = y \\ -\beta + 2\lambda + \theta = z \\ \alpha + \beta + \lambda - \theta = w \end{cases} \text{ (sistema } S) \rightarrow [A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & x \\ 0 & -1 & 2 & -2 & y \\ 0 & -1 & 2 & 1 & z \\ 1 & 1 & 1 & -1 & w \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{\substack{L_4 \rightarrow L_4 - L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 - L_2}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & x \\ 0 & -1 & 2 & -2 & y \\ 0 & 0 & 0 & 3 & z - y \\ 0 & 0 & 0 & -3 & w - x \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{L_4 \rightarrow L_4 + L_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & x \\ 0 & -1 & 2 & -2 & y \\ 0 & 0 & 0 & 3 & z - y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & w - x + z - y \end{array} \right] = [A'|B'].$$

Logo, S é um SP $\Leftrightarrow \text{car}(A) = \text{car}[A|B] = 3 \Leftrightarrow w - x + z - y = 0$.

Assim, $V = \text{ger}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\} = \{(x, y, z, x + y - z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$.

(b) Como V depende de três variáveis livres então a sua dimensão é 3, pelo que qualquer conjunto de 3 vetores LI de V é uma base de V . Assim

- para a 1.ª base, como durante a condensação não houve troca de colunas e a 1.ª, 2.ª e 4.ª colunas de A' contêm pivôs então

$$B_1 = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_4\} = \{(1, 0, 0, 1), (1, -1, -1, 1), (2, -2, 1, -1)\}$$

é um conjunto LI, ou seja, B_1 é base de V .

- para a 2.ª base, se trocarmos a 2.ª com a 3.ª coluna de A , os pivôs permanecem nas mesmas posições. Assim

$$B_2 = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\} = \{(1, 0, 0, 1), (1, 2, 2, 1), (2, -2, 1, -1)\}$$

é um conjunto LI, ou seja, B_2 é também uma base de V .

► Exercícios da Secção 5.7

1. Determine a dimensão dos espaços vetoriais.

(a) $V = \{(x, y, z, t, u, v) \in \mathbb{R}^6 : x = y = 2z = -t = u\}$.

(b) $V = \text{ger}\{(1, 0, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 0, 1), (0, -1, 0, 0, -1), (1, -1, 0, 0, 0)\}$.

(c) $V = \{X \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : AX = X\}$ com $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(d) $V = \text{ger} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$.

2. Justifique porque os vetores não formam uma base do espaço vetorial indicado.

(a) $\mathbf{u}_1 = (1, -1)$ e $\mathbf{u}_2 = (-2, 2)$ de $\mathbb{R}^2$.

(b) $\mathbf{u}_1 = (1, 2)$, $\mathbf{u}_2 = (1, 1)$ e $\mathbf{u}_3 = (3, 0)$ de $\mathbb{R}^2$.

(c) $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 0)$ e $\mathbf{u}_2 = (-2, 1, 1)$ de $\mathbb{R}^3$.

(d) $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 0)$, $\mathbf{u}_2 = (1, -1, 0)$ e $\mathbf{u}_3 = (2, 1, 0)$ de $\mathbb{R}^3$.

(e) $\mathbf{u}_1 = (1, -1, 1, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (-1, 2, -1, 1)$, $\mathbf{u}_3 = (0, 1, 0, 2)$ e $\mathbf{u}_4 = (1, -3, 1, -3)$ de $\mathbb{R}^4$.

(f) $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{u}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ de $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.

3. Considere o espaço vetorial:

$$V = \text{ger}\{(1, 0, 1, 1), (0, 1, 1, -1), (-1, 0, -1, -1), (0, 2, 2, -2)\}.$$

(a) Determine V e a sua dimensão.

(b) Determine uma base de V .

(c) Indique, se existir, uma base de V que contenha o vetor $(1, 2, 3, -1)$.

(d) Determine k de modo que o vetor $\mathbf{u} = (1, k^2, 2, 0) \in V$.

4. Considere o espaço vetorial:

$$V = \{(x, y, z, t, w) \in \mathbb{R}^5 : x + y = y + z = z + w = w + x\}.$$

(a) Determine a dimensão de V .

(b) Determine uma base de V .

(c) Indique, se existir, uma base de V que contenha o vetor $(1, 2, 1, 0, 2)$.

(d) Indique uma base de $\mathbb{R}^5$ que contenha uma base de V .

5. Considere no espaço vetorial $\mathbb{R}^2$, a base canônica $C = \{(1, 0), (0, 1)\}$, e as bases $B_1 = \{(1, 1), (-2, 2)\}$ e $B_2 = \{(1, 2), (1, -2)\}$.

(a) Determine, em relação à base B_1 , as coordenadas dos vetores:

$$(i) \mathbf{u} = (1, 3)_C \quad (ii) \mathbf{v} = (1, -3)_C$$

(b) Determine, em relação à base B_2 , as coordenadas dos seguintes vetores:

$$(i) \mathbf{u} = (2, 0)_C \quad (ii) \mathbf{v} = (0, -4)_C$$

(c) Para cada uma das alíneas (a) e (b), represente geometricamente os vetores das bases e os eixos por eles induzidos, e os vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ e as suas coordenadas nas respectivas bases.

► Soluções dos Exercícios

1. (a) $V = \{(2z, 2z, z, -2z, 2z, v) : z, v \in \mathbb{R}\}$ e $\dim V = 2$.

(b) $\alpha(1, 0, 0, 0, 1) + \beta(0, 1, 0, 0, 1) + \lambda(0, -1, 0, 0, -1) + \theta(1, -1, 0, 0, 0) = (x, y, z, w, t)$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 1 & -1 & -1 & y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & w \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t - x - y \end{array} \right],$$

$$V = \{(x, y, 0, 0, x + y) : x, y \in \mathbb{R}\} \text{ e } \dim V = 2.$$

Outra alternativa: Observa-se que o 3.º vetor é múltiplo do 2.º e o 4.º vetor é a soma do 1.º com o 2.º, donde $V = \text{ger}\{(1, 0, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 0, 1)\}$. Como os vetores geradores são LI vem que $\dim V = 2$.

(c) Resolvendo a equação $AX = X$, obtém-se $z = -x \wedge w = -y$, pelo que

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ -x & -y \end{bmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\} \text{ e } \dim V = 2.$$

$$(d) \alpha \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & x \\ 0 & 1 & 1 & w \\ 0 & 0 & 0 & z - x + 3w \\ 0 & 0 & 0 & x + y - 2w \end{array} \right],$$

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : z - x + 3w = 0 \wedge x + y - 2w = 0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} x & -x + 2w \\ x - 3w & w \end{bmatrix} : x, w \in \mathbb{R} \right\} \text{ e } \dim V = 2.$$

2. Para justificar que os vetores não formam uma base basta verificar que são LD ou que não geram o subespaço vetorial:

(a) $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ são LD pois $\mathbf{u}_2$ é múltiplo de $\mathbf{u}_1$ ($\mathbf{u}_2 = -2\mathbf{u}_1$).

(b) Como $\dim \mathbb{R}^2 = 2$ então qualquer conjunto de com mais de dois vetores de $\mathbb{R}^2$ é LD. Logo $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ e $\mathbf{u}_3$ são LD.

Observação: O sistema de equações $\alpha \mathbf{u}_1 + \beta \mathbf{u}_2 + \lambda \mathbf{u}_3 = \mathbf{0}$ tem 2 equações e 3 incógnitas. Sendo um sistema homogêneo é possível. Como tem mais incógnitas do que equações é um SPI. Logo a solução $\alpha = \beta = \lambda = 0$ não é única.

(c) $\mathbb{R}^3$ tem dimensão igual a 3, logo qualquer base de $\mathbb{R}^3$ é constituída por 3 vetores. Portanto, os vetores não geram $\mathbb{R}^3$.

(d) Todos os vetores têm a terceira componente igual a zero, pelo que os vetores não geram $\mathbb{R}^3$.

Ou, pode verificar-se que $\mathbf{u}_3 = \frac{3}{2}\mathbf{u}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{u}_2$, o que implica que os vetores são LD.

Ou, ainda que o sistema de equações $\alpha \mathbf{u}_1 + \beta \mathbf{u}_2 + \lambda \mathbf{u}_3 = \mathbf{0}$ de 3 equações e 3 incógnitas, α, β e λ tem matriz ampliada

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\text{e } \text{car}(A) = \text{car}[A|B] = 2 < 3.$$

Donde o sistema é um SPI, $g = 1$ e a solução não é única. Logo, os vetores são LD.

- (e) O sistema de equações $\alpha \mathbf{u}_1 + \beta \mathbf{u}_2 + \lambda \mathbf{u}_3 + \delta \mathbf{u}_4 = \mathbf{0}$ de 4 equações e 4 incógnitas, α, β, λ e δ tem matriz ampliada

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -3 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

e $\text{car}(A) = \text{car}[A|B] = 2 < 4$.

Donde o sistema é um SPI, $g = 2$ e a solução não é única. Isto implica que os vetores são LD.

Observação: Como $g = 2$, dois dos vetores podem ser escritos em termos dos outros dois. Por exemplo, $\mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$ e $\mathbf{u}_4 = -\mathbf{u}_1 - 2\mathbf{u}_2$.

- (f) Todas as matrizes (vetores) têm a 2.^a linha nula, pelo que as matrizes não geram $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.

Ou, tem-se $\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_4$ e $\mathbf{u}_3 = 2\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_4$, pelo que os vetores são LD.

$$3. \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & 2 & y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & z - x - y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & w - x + y \end{array} \right]$$

- (a) $\dim V = 2$ pois

$$\begin{aligned} V &= \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : -x - y + z = 0 \wedge -x + y + w = 0\} \\ &= \{(x, y, x + y, x - y) : x, y \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

- (b) Base de V : $\{(1, 0, 1, 1), (0, 1, 1, -1)\}$.

- (c) O vetor $(1, 2, 3, -1)$ pertence a V , pois, ao tomar $x = 1$ e $y = 2$ na descrição da alínea (a), obtém-se $(1, 2, 3, -1)$. Assim, uma base de V pode ser, por exemplo, $\{(1, 2, 3, -1), (1, 0, 1, 1)\}$.

- (d) $k = \pm 1$.

4. (a) $V = \{(x, y, x, t, y) : x, y, t \in \mathbb{R}\}$ e $\dim V = 3$.

- (b) $B = \{(1, 0, 1, 0, 0), (0, 1, 0, 0, 1), (0, 0, 0, 1, 0)\}$ é base de V .

- (c) Como $\dim V = 3$, qualquer base de V é formada por 3 vetores LI de V .

Seja $\mathbf{v} = (1, 2, 1, 0, 2)$. Observe-se que $\mathbf{v} \in V$, pois verifica as condições que definem V (isto é, $z = x$ e $w = y$). Considerando os vetores da base B

$$\mathbf{u}_1 = (1, 0, 1, 0, 0), \mathbf{u}_2 = (0, 1, 0, 0, 1), \mathbf{u}_3 = (0, 0, 0, 1, 0),$$

podemos construir novas bases de V substituindo um dos elementos de B por $\mathbf{v}$. Por exemplo

$$A_1 = \{\mathbf{v}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3\} \quad \text{e} \quad A_2 = \{\mathbf{v}, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$$

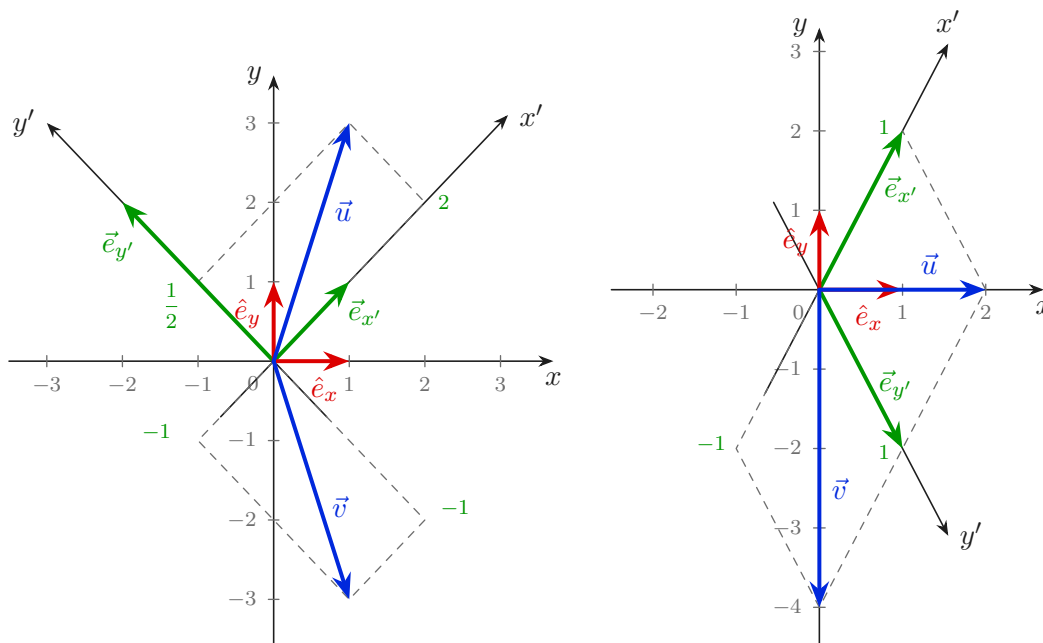
são bases de V , pois os seus elementos são LI e pertencem a V .

- (d) Uma base de $\mathbb{R}^5$ contém 5 vetores LI de $\mathbb{R}^5$. Como deve conter uma base de V , escolhendo a base determinada na alínea (b) tem-se

$$\{(1, 0, 1, 0, 0), (0, 1, 0, 0, 1), (0, 0, 0, 1, 0), \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$$

sendo $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ vetores LI não pertencentes a V , que podem ser, por exemplo, $\mathbf{v}_1 = (0, 0, 1, 0, 0)$ e $\mathbf{v}_2 = (0, 0, 0, 0, 1)$.

5. (a) (i) $\mathbf{u} = \left(2, \frac{1}{2}\right)_{B_1}$. (ii) $\mathbf{v} = (-1, -1)_{B_1}$.
 (b) (i) $\mathbf{u} = (1, 1)_{B_2}$. (ii) $\mathbf{v} = (-1, 1)_{B_2}$.
 (c)



6

Transformações Lineares

Uma transformação linear é uma função entre dois espaços vetoriais que preserva a adição de vetores e a multiplicação por escalares. Permite representar operações como rotações, reflexões, homotetias e projeções no plano ou no espaço, sendo fundamental para manipular e analisar dados de forma sistemática.

Estas transformações simplificam problemas complexos e permitem soluções eficazes, sendo fundamentais para o desenvolvimento de técnicas e modelos em várias áreas da engenharia:

1. Geometria

Descrições de rotações, reflexões, homotetias e projeções, facilitando a análise e visualização de transformações em várias dimensões.

2. Robótica

Essenciais para converter coordenadas entre sistemas de referência e controlar movimentos de braços robóticos e veículos autônomos.

3. Engenharia de Controle

Aplicadas na modelação de sistemas dinâmicos e no projeto de controladores que permitem prever e ajustar o comportamento do sistema.

4. Computação Gráfica

Utilizadas em animações e visualizações tridimensionais, possibilitando a manipulação eficiente de objetos no espaço.

5. Processamento de Sinais

Facilitam a representação e transformação de sinais em sistemas de comunicação, áudio e imagem.

Neste capítulo, exploraremos os conceitos de transformações lineares e suas propriedades, como núcleo, imagem, injetividade e sobrejetividade. Também abordaremos transformações planas, casos particulares no plano. Compreender estes conceitos é essencial para perceber o funcionamento das transformações lineares entre espaços vetoriais.

Orientação de trabalho: este capítulo apresenta 3 atividades de estudo autónomo, com duração estimada de 3 a 5 horas cada. As atividades estão organizadas da seguinte forma:

- ▶ Atividade 18 – 6.1 Conceitos Gerais e 6.2 Operações
- ▶ Atividade 19 – 6.3 Núcleo e Imagem
- ▶ Atividade 20 – 6.4 Transformações Planas

6.1 Conceitos Gerais

Sejam E e E' espaços vetoriais reais.

Definição 1

Diz-se que uma transformação $T : E \rightarrow E'$ é uma **transformação linear** (TL) se e só se satisfaz cada uma das condições:

- (i) $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in E : T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$.
- (ii) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{u} \in E : T(\alpha \mathbf{u}) = \alpha T(\mathbf{u})$.

Definições 2

1. A transformação $T : E \rightarrow E'$ definida por $T(\mathbf{u}) = \mathbf{0}_{E'}, \forall \mathbf{u} \in E$ é designada por **transformação nula**.
2. A transformação $T : E \rightarrow E$ definida por $T(\mathbf{u}) = \mathbf{u}, \forall \mathbf{u} \in E$ é designada por **transformação identidade** de E .

Exemplo 1

Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a transformação definida por $T(x, y, z) = (x + y, x - y)$.
Mostre que T é uma transformação linear.

Resolução

Sejam $\mathbf{u} = (x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3, \mathbf{v} = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

Como $T(\mathbf{u}) = (x_1 + y_1, x_1 - y_1)$ e $T(\mathbf{v}) = (x_2 + y_2, x_2 - y_2)$ então

- (i) $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 : T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$ pois

$$\begin{aligned} T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= T(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \\ &= (x_1 + x_2 + y_1 + y_2, x_1 + x_2 - (y_1 + y_2)) \\ &= (x_1 + y_1, x_1 - y_1) + (x_2 + y_2, x_2 - y_2) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}). \end{aligned}$$

(ii) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3 : T(\alpha \mathbf{u}) = \alpha T(\mathbf{u})$ uma vez que

$$\begin{aligned} T(\alpha \mathbf{u}) &= T(\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1) = (\alpha x_1 + \alpha y_1, \alpha x_1 - \alpha y_1) \\ &= \alpha(x_1 + y_1, x_1 - y_1) = \alpha T(\mathbf{u}). \end{aligned}$$

De (i) e (ii) mostra-se que T é TL.

Teorema 1

Se $T : E \rightarrow E'$ é uma TL então $T(\mathbf{0}_E) = \mathbf{0}_{E'}$, ou de forma equivalente, se $T(\mathbf{0}_E) \neq \mathbf{0}_{E'}$ então $T : E \rightarrow E'$ não é uma TL.

Demonstração

Seja $T : E \rightarrow E'$ uma transformação linear. Então, para todo $\mathbf{u} \in E$, tem-se

$$T(\mathbf{0}_E) = T(0 \cdot \mathbf{u}) = 0 \cdot T(\mathbf{u}) = \mathbf{0}_{E'}.$$

Exercício 1

Justifique porque as transformações não são lineares.

1. $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y, z) = (x - 2, y, x + z)$.
2. $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y, z) = (x - y, yz)$.
3. $T : M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a + d, 3b + c, |b|)$.

Resolução

1. Como $T(0, 0, 0) = (-2, 0, 0) \neq (0, 0, 0) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}$ então T não é TL.

2. Considerando, por exemplo, $\mathbf{u} = (0, 1, 0)$ e $\mathbf{v} = (0, 0, 1)$, tem-se

$$T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(0, 1, 1) = (-1, 1)$$

$$T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}) = T(0, 1, 0) + T(0, 0, 1) = (-1, 0) + (0, 0) = (-1, 0)$$

ou seja, $T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}) \neq T(\mathbf{u} + \mathbf{v})$, pelo que $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 : T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$ é uma condição falsa. Logo, T não é TL.

3. Considerando, por exemplo, $\alpha = -2$ e $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ tem-se

$$T(\alpha \mathbf{u}) = T\left(\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = (0, -6, 2)$$

$$\alpha T(\mathbf{u}) = -2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = -2(0, 3, 1) = (0, -6, -2) \neq T(\alpha \mathbf{u})$$

e portanto, a condição $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{u} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : T(\alpha \mathbf{u}) = \alpha T(\mathbf{u})$ é falsa, pelo que T não é TL.

Definição 3

Sejam $T : E \rightarrow E'$ uma TL, $C = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ a base canónica de E e $C' = \{\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_m\}$ a base canónica de E' . Designa-se por **matriz canónica** de T , a matriz M definida por:

$$M = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{bmatrix},$$

onde as suas colunas são as coordenadas das imagens, por T , dos vetores da base C na base C' .

Exercício 2

Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(1, 0, 0) = (1, 2)$, $T(0, 1, 0) = (-1, 1)$ e $T(0, 0, 1) = (0, 1)$. Determine:

- (a) a matriz canónica de T . (b) $T(x, y, z)$. (c) $T(1, 2, -1)$.

Resolução

- (a) Como $C = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ e $C' = \{(1, 0), (0, 1)\}$ são as bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$, respetivamente, e uma vez que

► $T(1, 0, 0) = (1, 2) = 1(1, 0) + 2(0, 1) = (1, 2)_{C'}$

► $T(0, 1, 0) = \cdots = (-1, 1)_{C'}$

► $T(0, 0, 1) = \cdots = (0, 1)_{C'}$

então a matriz canônica de T é $M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(b) Para calcular $T(x, y, z)$ são apresentados dois processos.

1.º processo: Como

$$(x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1), \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

e T é uma TL tem-se

$$\begin{aligned} T(x, y, z) &= xT(1, 0, 0) + yT(0, 1, 0) + zT(0, 0, 1) \\ &= x(1, 2) + y(-1, 1) + z(0, 1) = (x - y, 2x + y + z) \end{aligned}$$

ou seja, $T(x, y, z) = (x - y, 2x + y + z)$.

2.º processo: Atendendo a que $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e usando a matriz M tem-se

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - y \\ 2x + y + z \end{bmatrix}$$

pelo que $T(x, y, z) = (x - y, 2x + y + z)$.

(c) Apresentam-se dois processos para calcular $T(1, 2, -1)$.

1.º processo: Como $T(x, y, z) = (x - y, 2x + y + z)$ então

$$T(1, 2, -1) = (1 - 2, 2 \cdot 1 + 2 - 1) = (-1, 3).$$

2.º processo: Usando a matriz M tem-se

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

pelo que $T(1, 2, -1) = (-1, 3)$.

➤ Exercícios da Secção 6.1

1. Mostre que as transformações são lineares.

(a) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (2x, -y)$.

(b) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y, z) = (0, z, y)$.

(c) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ definida por $T(x, y, z) = \begin{bmatrix} x & y \\ z & 0 \end{bmatrix}$.

(d) $T : M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $T\left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}\right) = x + w$.

2. Justifique porque as transformações não são lineares.

(a) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y, z) = (x + 1, y - 1)$.

(b) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y, z) = (xy, y, z)$.

(c) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y, z) = (|x|, y, z)$.

(d) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ definida por $T(x, y, z) = \begin{bmatrix} x^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

► Soluções dos Exercícios

1. —

2. (a) T não é linear porque $T(0, 0, 0) = (1, -1) \neq (0, 0)$.

(b) Considerando, por exemplo, $\mathbf{u} = (1, 0, 0)$ e $\mathbf{v} = (0, 1, 0)$ tem-se

► $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(1, 1, 0) = (1, 1, 0)$

► $T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}) = (0, 0, 0) + (0, 1, 0) = (0, 1, 0) \neq T(\mathbf{u} + \mathbf{v})$

ou seja, não é válida a 1.^a condição para que T seja TL.

(c) Considere-se, por exemplo, $\mathbf{u} = (1, 0, 0)$ e $\mathbf{v} = (-1, 0, 0)$.

Tendo em conta que

► $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(0, 0, 0) = (0, 0, 0)$

► $T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}) = (1, 0, 0) + (1, 0, 0) = (2, 0, 0)$

então $T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}) \neq T(\mathbf{u} + \mathbf{v})$, pelo que T não é linear pois não verifica a 1.^a condição para que seja TL.

(d) Considere-se, por exemplo, $\mathbf{u} = (1, 0, 0)$ e $\mathbf{v} = (-1, 0, 0)$.

Como

► $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(0, 0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

► $T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

então $T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}) \neq T(\mathbf{u} + \mathbf{v})$, pelo que T não é linear pois não verifica a 1.^a condição para que seja TL.

6.2 Operações

Sejam T_1 e T_2 as TL cujas matrizes canônicas são M_1 e M_2 , respetivamente.

Definição 4

Diz-se que a **soma** ou **adição** de $T_1 : E \rightarrow E'$ e $T_2 : E \rightarrow E'$ é a transformação $T_1 + T_2 : E \rightarrow E'$ definida por $(T_1 + T_2)(\mathbf{u}) = T_1(\mathbf{u}) + T_2(\mathbf{u}), \forall \mathbf{u} \in E$.

Teorema 2

Se $T_1 : E \rightarrow E'$ e $T_2 : E \rightarrow E'$ são TL então $T_1 + T_2 : E \rightarrow E'$ é uma TL e a sua matriz canônica é definida por $M_{T_1+T_2} = M_1 + M_2$.

Definição 5

Diz-se que a **multiplicação escalar** de $T_1 : E \rightarrow E'$ por $\alpha \in \mathbb{R}$ é a transformação $\alpha T_1 : E \rightarrow E'$ definida por $(\alpha T_1)(\mathbf{u}) = \alpha T_1(\mathbf{u}), \forall \mathbf{u} \in E$.

Teorema 3

Se $T_1 : E \rightarrow E'$ é uma TL e $\alpha \in \mathbb{R}$ então $\alpha T_1 : E \rightarrow E'$ é uma TL e a sua matriz canônica é definida por $M_{\alpha T_1} = \alpha M_1$.

Definição 6

Diz-se que a **composição de** $T_2 : E' \rightarrow E''$ **após** $T_1 : E \rightarrow E'$ é a transformação $T_2 \circ T_1 : E \rightarrow E''$ definida por $(T_2 \circ T_1)(\mathbf{u}) = T_2(T_1(\mathbf{u})), \forall \mathbf{u} \in E$.

Teorema 4

Se $T_1 : E \rightarrow E'$ e $T_2 : E' \rightarrow E''$ são TL então $T_2 \circ T_1 : E \rightarrow E''$ é uma TL e a sua matriz canónica é definida por $M_{T_2 \circ T_1} = M_2 M_1$.

Definição 7

Se $T_2 \circ T_1 = T_1 \circ T_2$ ($M_2 M_1 = M_1 M_2$) então as transformações T_1 e T_2 dizem-se **comutáveis**.

Definição 8

Diz-se que $T_1 : E \rightarrow E$ é **invertível** se existe uma transformação $T_1^{-1} : E \rightarrow E$ tal que $(T_1 \circ T_1^{-1})(\mathbf{u}) = (T_1^{-1} \circ T_1)(\mathbf{u}) = \mathbf{u}, \forall \mathbf{u} \in E$.

Teorema 5

Se $T_1 : E \rightarrow E$ é uma TL invertível então $T_1^{-1} : E \rightarrow E$ é uma TL e a sua matriz canónica é definida por $M_{T_1^{-1}} = (M_1)^{-1}$.

Para analisar quando uma transformação linear é invertível, é essencial compreender a ligação entre a transformação e a sua matriz canónica. O próximo teorema resume as condições equivalentes para a invertibilidade, destacando que a existência e a invertibilidade da inversa da transformação dependem da invertibilidade da matriz canónica.

Teorema 6

Seja $T : E \rightarrow E$ uma TL e M a sua matriz canónica. Então:

$$T \text{ é invertível} \Leftrightarrow T^{-1} \text{ existe e é invertível} \Leftrightarrow M \text{ é invertível} \Leftrightarrow |M| \neq 0.$$

Exercício 3

Sejam $T_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $T_3 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ as TL definidas por:

$$M_1 = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad T_2(x, y, z) = (x + 2y, x - y - z) \text{ e } T_3(x, y, z) = (-x + y, y + z),$$

onde M_1 é a matriz canônica de T_1 . Caracterize, se possível, as TL na forma analítica e na forma matricial:

- (a) $T_2 + T_3$. (b) $T_2 - 3T_3$. (c) $2T_1 + T_3$. (d) $T_1 \circ T_2$.
 (e) $T_2 \circ T_1$. (f) T_1^{-1} . (g) T_2^{-1} .

Resolução

Sejam M_2 e M_3 as matrizes canônicas de T_2 e T_3 , respectivamente. Uma vez que as colunas destas matrizes correspondem às imagens dos vetores da base canônica de $\mathbb{R}^3$, então

$$\blacktriangleright T_2(1, 0, 0) = (1, 1), \quad T_2(0, 1, 0) = (2, -1), \quad T_2(0, 0, 1) = (0, -1),$$

$$\blacktriangleright T_3(1, 0, 0) = (-1, 0), \quad T_3(0, 1, 0) = (1, 1), \quad T_3(0, 0, 1) = (0, 1),$$

$$\text{ou seja, } M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \text{ e } M_3 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Seja $T = T_2 + T_3$. Tem-se

$$M_T = M_2 + M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e então T pode ser caracterizada na forma

$$\blacktriangleright \text{matricial por } T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ com } M_T = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\blacktriangleright \text{analítica por } T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ com } T(x, y, z) = (3y, x) \text{ pois}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3y \\ x \end{bmatrix}.$$

(b) Seja $S = T_2 - 3T_3$. Tem-se

$$M_S = M_2 - 3M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 1 & -4 & -4 \end{bmatrix}$$

e portanto, na forma

► matricial tem-se $S : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ com $M_S = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 1 & -4 & -4 \end{bmatrix}$.

► analítica tem-se $S : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ com $S(x, y, z) = (4x - y, x - 4y - 4z)$.

- (c) Como T_1 e T_3 têm domínios diferentes então $2T_1 + T_3$ não está definida. De outro modo, como M_1 e M_3 são matrizes de tipos diferentes então não é possível efetuar o cálculo de $2M_1 + M_3$, pelo que $2T_1 + T_3$ não está definida.
- (d) Seja $G = T_1 \circ T_2$. Como o contradomínio de T_2 é igual ao domínio de T_1 então G está definida e tem-se

$$M_G = M_1 M_2 = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 2 \\ 0 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

ou seja, na forma:

► matricial tem-se $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ com $M_G = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 2 \\ 0 & 6 & 2 \end{bmatrix}$.

► analítica tem-se $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ com $G(x, y, z) = (x + 8y + 2z, 6y + 2z)$.

- (e) Uma vez que o número de colunas de M_2 é diferente do número de linhas de M_1 então $T_2 \circ T_1$ não está definida.
- (f) Para calcular T_1^{-1} , caso exista, consideram-se dois processos.

1.º processo: Como

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x - 2y \\ 2x - 2y \end{bmatrix}$$

então $T_1(x, y) = (3x - 2y, 2x - 2y)$. Para determinar a expressão analítica da inversa de T_1 é necessário obter x e y em função de a e b resolvendo a equação $T_1(x, y) = (a, b)$ que é equivalente a

$$\begin{cases} 3x - 2y = a \\ 2x - 2y = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3}a + \frac{2}{3}y \\ \frac{2}{3}a - \frac{2}{3}y = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ y = a - \frac{3}{2}b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a - b \\ y = a - \frac{3}{2}b \end{cases}.$$

Como é um SPD então existe T_1^{-1} . Assim $T^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e é definida por

$$T^{-1}(a, b) = \left(a - b, a - \frac{3}{2}b \right)$$

2.º processo: Como $|M_1| = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ então T_1 é invertível.

Recorde-se que $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ e assim

$$M_{T_1^{-1}} = (M_1)^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -3/2 \end{bmatrix}.$$

Portanto, na forma

► matricial tem-se $T_1^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ com $M_{T_1^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -3/2 \end{bmatrix}$.

► analítica tem-se $T_1^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ com $T_1^{-1}(a, b) = \left(a - b, a - \frac{3}{2}b\right)$.

(g) Uma vez que a matriz canónica de T_2 é uma matriz do tipo 2×3 então não admite matriz inversa, o que equivale a afirmar que não existe T_2^{-1} .

Exercício 4

Determine a inversa da transformação $T : M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^4$ definida por:

$$T \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = (-a, a + b, a + d, c - d).$$

Resolução

Como a equação $T \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = (x, y, z, w)$ é equivalente a

$$\begin{cases} -a = x \\ a + b = y \\ a + d = z \\ c - d = w \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -x \\ b = y + x \\ d = z + x \\ c = d + w \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -x \\ b = y + x \\ d = z + x \\ c = z + x + w \end{cases}$$

então é um SPD, pelo que existe T^{-1} .

Assim $T^{-1} : \mathbb{R}^4 \rightarrow M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ e é definida por

$$T^{-1}(x, y, z, w) = \begin{bmatrix} -x & x + y \\ x + z + w & x + z \end{bmatrix}.$$

► Exercícios da Secção 6.2

1. Sejam $T_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $T_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ as TL definidas por:

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ e } T_2(x, y) = (-x, y)$$

onde M_1 é a matriz canónica de T_1 . Caracterize as transformações na forma analítica.

- (a) $T_1 + T_2$. (b) $T_1 - 2T_2$. (c) $T_1 \circ T_1$. (d) $T_1 \circ T_2$.
 (e) $T_2 \circ T_1$. (f) T_1^{-1} .

2. Seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma TL. Determine $T^{-1}(a, b)$, caso seja possível, quando T é definida por:

- (a) $T(x, y) = (2x + 2y, 3x + 4y)$. (b) $T(x, y) = (x + 2y, x + y)$.
 (c) $T(x, y) = (-x + 2y, x - 2y)$.

3. Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma TL. Determine $T^{-1}(a, b, c)$, caso seja possível, quando T é definida por:

- (a) $T(x, y, z) = (x + y, x - y, z)$. (b) $T(x, y, z) = (2x + 2z, -y + z, x + y)$.
 (c) $T(x, y, z) = (x + z, y + 2z, x - z)$.

4. Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a TL cuja matriz canónica é $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

- (a) Determine $T^{-1}(a, b, c)$.
 (b) Determine $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ tal que $T(\mathbf{u}) = (1, 2, 3)$.

5. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow M_{1 \times 3}(\mathbb{R})$ cuja matriz canónica é

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

- (a) Determine $T(x, y, z)$.
 (b) Caracterize analiticamente T^{-1} .

6. Sejam $T_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $T_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ as TL definidas por:

$$T_1(x, y) = (x + 2y, y) \text{ e } T_2(x, y) = (-x, y).$$

- (a) Caracterize analiticamente $T_2 \circ T_1$ e $T_1 \circ T_2$.
- (b) Caracterize analiticamente T_1^{-1} , T_2^{-1} , $(T_2 \circ T_1)^{-1}$ e $(T_1 \circ T_2)^{-1}$.
- (c) Verifique que $(T_2 \circ T_1)^{-1} = T_1^{-1} \circ T_2^{-1}$ e $(T_1 \circ T_2)^{-1} = T_2^{-1} \circ T_1^{-1}$.

► Soluções dos Exercícios

1. (a) $T_1 + T_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (2y, x)$.

(b) $T_1 - 2T_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (3x + 2y, x - 3y)$.

(c) $T_1 \circ T_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (3x, 3y)$.

(d) $T_1 \circ T_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (-x + 2y, -x - y)$.

(e) $T_2 \circ T_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (-x - 2y, x - y)$.

(f) $T_1^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T_1^{-1}(x, y) = \left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y, \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y\right)$.

2. (a) $|M| = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, logo T é invertível.

$$\text{Como } M^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3/2 & 1 \end{bmatrix} \text{ então } T^{-1}(a, b) = \left(2a - b, -\frac{3}{2}a + b\right).$$

(b) $|M| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, logo T é invertível.

$$\text{Uma vez que } M^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ então } T^{-1}(a, b) = (-a + 2b, a - b).$$

(c) $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$, logo T não é invertível e T^{-1} não está definida.

3. (a) $|M| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, logo T é invertível.

Uma vez que

$$\begin{cases} x + y = a \\ x - y = b \\ z = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a - y \\ a - 2y = b \\ z = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ y = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b \\ z = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b \\ y = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b \\ z = c \end{cases}$$

então $T^{-1}(a, b, c) = \left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b, \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b, c \right)$.

(b) $|M| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$, logo T não é invertível e T^{-1} não está definida.

(c) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, logo T é invertível.

Como

$$\begin{cases} x + z = a \\ y + 2z = b \\ x - z = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a - z \\ y = b - 2z \\ a - 2z = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ \text{---} \\ z = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}c \\ y = b - a + c \\ z = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}c \end{cases}$$

então $T^{-1}(a, b, c) = \left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}c, -a + b + c, \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}c \right)$.

4. (a) $|M| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$, logo T^{-1} existe.

Como

$$M^{-1} = \frac{1}{|M|}, (M^C)^T = \begin{bmatrix} -1 & -(-1) & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

então $T^{-1} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ e $T^{-1}(a, b, c) = (-a + c, a - b, 2a - c)$.

(b) $\mathbf{u} = (2, -1, -1)$, pois $T^{-1}(1, 2, 3) = (2, -1, -1)$.

5. (a) Como $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow M_{1 \times 3}(\mathbb{R})$ e

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + 2z \\ -x + y - 2z \\ 2x + 2z \end{bmatrix}$$

então $T(x, y, z) = \begin{bmatrix} x + 2z & -x + y - 2z & 2x + 2z \end{bmatrix}$.

(b) $|M| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2$, logo T^{-1} existe.

Como

$$M^{-1} = \frac{1}{|M|} (M^C)^T = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

então $T^{-1} : M_{1 \times 3}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$ e $T^{-1} \left(\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \right) = \left(-a + c, a + b, a - \frac{1}{2}c \right)$.

6. (a) $T_2 \circ T_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $(T_2 \circ T_1)(x, y) = (-x - 2y, y)$ e

$T_1 \circ T_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $(T_1 \circ T_2)(x, y) = (-x + 2y, y)$.

(b) $T_1^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $(T_1^{-1})(a, b) = (a - 2b, b)$,

$T_2^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $(T_2^{-1})(a, b) = (-a, b)$,

$(T_2 \circ T_1)^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $(T_2 \circ T_1)^{-1}(a, b) = (-a - 2b, b)$ e

$(T_1 \circ T_2)^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $(T_1 \circ T_2)^{-1}(a, b) = (-a + 2b, b)$.

(c) —

6.3 Núcleo e Imagem

Sejam $T : E \rightarrow E'$ uma TL, e E e E' espaços vetoriais de dimensão finita.

Definição 9

O **núcleo** de $T : E \rightarrow E'$ é o subespaço vetorial de E definido por:

$$\text{Nuc}(T) = \{\mathbf{u} \in E : T(\mathbf{u}) = \mathbf{0}_{E'}\}.$$

Definição 10

Diz-se que $T : E \rightarrow E'$ é **injetiva** quando $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in E : \mathbf{u} \neq \mathbf{v} \Rightarrow T(\mathbf{u}) \neq T(\mathbf{v})$.

Observação: Se T é uma TL então $T(\mathbf{0}_E) = \mathbf{0}_{E'}$, pelo que $\mathbf{0}_E \in \text{Nuc}(T)$. Uma vez que todos os vetores de $\text{Nuc}(T)$ têm $\mathbf{0}_{E'}$ como imagem então se T for injetiva, o único elemento de $\text{Nuc}(T)$ será $\mathbf{0}_E$.

Teorema 7

Seja $T : E \rightarrow E'$ uma TL. Então:

$$T \text{ é injetiva} \Leftrightarrow \text{Nuc}(T) = \{\mathbf{0}_E\} \Leftrightarrow \dim \text{Nuc}(T) = 0.$$

Definição 11

A **imagem** ou **contradomínio** de $T : E \rightarrow E'$ é o subespaço vetorial de E' definido por $\text{Im}(T) = \{\mathbf{u}' \in E' : \text{existe } \mathbf{u} \in E : T(\mathbf{u}) = \mathbf{u}'\}$.

Definição 12

Diz-se que $T : E \rightarrow E'$ é **sobrejetiva** quando $\forall \mathbf{u}' \in E', \exists \mathbf{u} \in E : T(\mathbf{u}) = \mathbf{u}'$.

Observação: Como $\text{Im}(T) \subseteq E'$ então $\dim \text{Im}(T) = \dim E'$ se e só se $\text{Im}(T) = E'$.

Teorema 8

Se $T : E \rightarrow E'$ é uma TL então:

T é sobrejetiva $\Leftrightarrow \text{Im}(T) = E' \Leftrightarrow \dim \text{Im}(T) = \dim E'$.

O próximo resultado é conhecido por **teorema das dimensões**.

Teorema 9

Seja $T : E \rightarrow E'$ uma transformação linear.

Se E tem dimensão finita então $\dim E = \dim \text{Nuc}(T) + \dim \text{Im}(T)$.

Exercício 5

Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a TL definida por $T(x, y, z) = (x - y, x + y)$.

- Verifique se $\mathbf{u} = (1, -1, 1) \in \text{Nuc}(T)$.
- Determine $\text{Nuc}(T)$ e a sua dimensão.
- Verifique se T é injetiva.
- Verifique se $\mathbf{u}' = (1, 3) \in \text{Im}(T)$.
- Determine $\dim \text{Im}(T)$.
- Verifique se T é sobrejetiva.

Resolução

- Como $T(1, -1, 1) = (2, 0) \neq (0, 0)$ então $(1, -1, 1) \notin \text{Nuc}(T)$.
- Para calcular $\text{Nuc}(T) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : T(x, y, z) = (0, 0)\}$ é necessário resol-

ver a equação $T(x, y, z) = (0, 0)$ que é equivalente a

$$(x - y, x + y) = (0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ y + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}.$$

Portanto, $\text{Nuc}(T) = \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}$. Como $\text{Nuc}(T)$ depende apenas de uma variável livre então $\dim \text{Nuc}(T) = 1$.

(c) Para verificar se T é injetiva consideram-se dois processos.

1.º processo: Como $\text{Nuc}(T) \neq \{(0, 0, 0)\}$ então T não é injetiva.

2.º processo: Sendo $\dim \text{Nuc}(T) = 1 \neq 0$ vem que T não é injetiva.

(d) Como $\mathbf{u}' = (1, 3) \in \text{Im}(T) \Leftrightarrow$ existe $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tal que $T(x, y, z) = (1, 3)$, então

$$(x - y, x + y) = (1, 3) \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + y \\ 1 + y + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

Como, $T(2, 1, z) = (1, 3), \forall z \in \mathbb{R}$, então existe um número infinito de vetores de $\mathbb{R}^3$ cuja imagem é o vetor $\mathbf{u}'$.

(e) Para calcular $\dim \text{Im}(T)$ consideram-se dois processos.

1.º processo: A partir do vetor genérico $(x - y, x + y)$ de $\text{Im}(T)$ é possível obter os seus geradores, pois

$$(x - y, x + y) = x(1, -1) + y(1, 1)$$

pelo que $\text{Im}(T) = \text{ger}\{(1, -1), (1, 1)\}$. Como os vetores são LI (não são múltiplos um do outro) eles formam uma base para a imagem de T . Portanto, $\dim \text{Im}(T) = 2$.

2.º processo: Recorrendo ao teorema das dimensões tem-se

$$\dim \mathbb{R}^3 = \dim \text{Nuc}(T) + \dim \text{Im}(T) \Leftrightarrow 3 = 1 + \dim \text{Im}(T)$$

ou seja, $\dim \text{Im}(T) = 2$.

(f) Uma vez que $\text{Im}(T) \subseteq \mathbb{R}^2$ e $\dim \text{Im}(T) = \dim \mathbb{R}^2 = 2$ então $\text{Im}(T) = \mathbb{R}^2$, pelo que T é sobrejetiva.

Exercício 6

Seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a TL definida por $T(x, y) = (x + 2y, x + 2y)$.

- (a) Determine o núcleo de T e a sua dimensão.
- (b) Verifique se T é injetiva.
- (c) Determine $\dim \text{Im}(T)$ e verifique se T é sobrejetiva.
- (d) Determine $\text{Im}(T)$.

Resolução

- (a) Como $\text{Nuc}(T) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : T(x, y) = (0, 0)\}$ e

$$T(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow (x + 2y, x + 2y) = (0, 0) \Leftrightarrow x = -2y$$

então $\text{Nuc}(T) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = -2y\} = \{(-2y, y) : y \in \mathbb{R}\}$ e depende apenas de uma variável, pelo que $\dim \text{Nuc}(T) = 1$.

- (b) Para analisar a injetividade consideram-se os dois processos.

1.º processo: Como $\text{Nuc}(T) \neq \{(0, 0)\}$, logo T não é injetiva.

2.º processo: Sendo $\dim \text{Nuc}(T) = 1 \neq 0$, vem que T não é injetiva.

- (c) Consideram-se os dois processos.

1.º processo: Atendendo a que

$$(x + 2y, x + 2y) = x(1, 1) + y(2, 2)$$

então $\text{Im}(T) = \text{ger}\{(1, 1), (2, 2)\} = \text{ger}\{(1, 1)\}$. Como o vetor $(1, 1)$ é LI então $B = \{(1, 1)\}$ é base de $\text{Im}(T)$, ou seja, $\dim \text{Im}(T) = 1$.

2.º processo: Recorrendo ao teorema das dimensões tem-se

$$\dim \mathbb{R}^2 = \dim \text{Nuc}(T) + \dim \text{Im}(T) \Leftrightarrow 2 = 1 + \dim \text{Im}(T)$$

donde $\dim \text{Im}(T) = 1$.

Logo, T não é sobrejetiva pois $\dim \text{Im}(T) \neq 2 = \dim \mathbb{R}^2$.

- (d) Pela alínea anterior, tem-se que $\text{Im}(T) = \text{ger}\{(1, 1)\} = \{(a, a) : a \in \mathbb{R}\}$.

Exercício 7

Seja $T : M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $T \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = (a + b, b - c, 2c + d)$.

- (a) Determine o núcleo de T e a sua dimensão.
- (b) Verifique se T é injetiva.
- (c) Determine $\dim \text{Im}(T)$ e verifique se T é sobrejetiva.
- (d) Indique, justificando, a $\text{Im}(T)$.

Resolução

(a) Como $\text{Nuc}(T) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : T \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = (0, 0, 0) \right\}$ e

$$(a + b, b - c, 2c + d) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ b - c = 0 \\ 2c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -b \\ c = b \\ d = -2b \end{cases}$$

então $\text{Nuc}(T) = \left\{ \begin{bmatrix} -b & b \\ b & -2b \end{bmatrix} : b \in \mathbb{R} \right\}$, o qual depende apenas de uma variável, pelo que $\dim \text{Nuc}(T) = 1$.

(b) Como $\dim \text{Nuc}(T) = 1 \neq 0$, vem que T não é injetiva.

(c) Recorrendo ao teorema das dimensões tem-se

$$\dim M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) = \dim \text{Nuc}(T) + \dim \text{Im}(T) \Leftrightarrow 4 = 1 + \dim \text{Im}(T)$$

donde $\dim \text{Im}(T) = 3$.

Portanto, T é sobrejetiva pois $\dim \text{Im}(T) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$.

(d) Como T é sobrejetiva então $\text{Im}(T) = \mathbb{R}^3$.

Exercício 8

Seja $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^5$ a TL definida por $T(x, y, z, w) = (x + y, z + w, w, z, z)$.

- (a) Determine a matriz canónica M de T .
- (b) Use a matriz M para determinar $\dim \text{Nuc}(T)$ e $\dim \text{Im}(T)$.
- (c) Determine $\text{Nuc}(T)$.
- (d) Determine $\text{Im}(T)$.

Resolução

(a) As imagens dos vetores da base canônica de $\mathbb{R}^4$ são obtidas através da expressão analítica $T(x, y, z, w) = (x + y, z + w, w, z, z)$, pelo que

$$\blacktriangleright T(1, 0, 0, 0) = (1, 0, 0, 0, 0), \quad T(0, 1, 0, 0) = (1, 0, 0, 0, 0),$$

$$\blacktriangleright T(0, 0, 1, 0) = (0, 1, 0, 1, 1) \text{ e } T(0, 0, 0, 1) = (0, 1, 1, 0, 0).$$

Como a matriz canônica de T tem por colunas as imagens dos vetores da base canônica de $\mathbb{R}^4$ então

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(b) Fazendo a condensação de M , obtém-se a matriz M' na FEL

$$\begin{array}{l} \xrightarrow{L_4 \rightarrow L_4 - L_2} \\ L_5 \rightarrow L_5 - L_2 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} L_4 \rightarrow L_4 + L_3 \\ L_5 \rightarrow L_5 + L_3 \end{array}} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = M'.$$

O $\text{Nuc}(T)$ é o conjunto dos vetores $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$ que satisfazem o sistema homogêneo $MX = O_{5 \times 1}$ que é equivalente a $M'X = O_{5 \times 1}$.

Como $\text{car}(M) = \text{car}[M|O_{5 \times 1}] = 3 < 4 = n^\circ$ de incógnitas, o sistema é um SPI com $g = 1$, ou seja, $\text{Nuc}(T)$ tem uma única variável livre, que pode ser y , pois corresponde à coluna sem pivô. Assim, $\dim \text{Nuc}(T) = 1$.

A $\text{Im}(T)$ é o conjunto dos elementos $(a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^5$ que conduzem ao sistema possível definido por $MX = B$, com $B = \begin{bmatrix} a & b & c & d & e \end{bmatrix}^T$. Para tal $\text{car}[M|B] = \text{car}(M) = 3$, o que implica ter duas linhas de zeros, ou seja, duas restrições para as variáveis a, b, c, d e e . Logo, $\dim \text{Im}(T) = 5 - 2 = 3$, que corresponde ao número de pivôs.

(c) Em termos matriciais $\text{Nuc}(T) = \{X \in M_{4 \times 1}(\mathbb{R}) : MX = O_{5 \times 1}\}$. Como

$$MX = O_{5 \times 1} \Leftrightarrow M'X = O_{5 \times 1} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ z + w = 0 \\ w = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ z = 0 \\ w = 0 \end{cases}$$

então $\text{Nuc}(T) = \{(-y, y, 0, 0) : y \in \mathbb{R}\}$.

(d) Em termos matriciais $\text{Im}(T) = \{B \in M_{5 \times 1} : MX = B, X \in M_{4 \times 1}(\mathbb{R})\}$.

Como $MX = B \Leftrightarrow M'X = B'$, onde B' é a matriz que se obtém de B aplicando às linhas de B as operações elementares que foram realizadas aquando da condensação da matriz M . Assim

$$B' = \begin{bmatrix} a & b & c & d - b + c & e - b + c \end{bmatrix}^T$$

e como as linhas 4 e 5 de B' devem ser nulas então $d - b + c = 0$ e $e - b + c = 0$.

Uma vez que

$$\begin{cases} d - b + c = 0 \\ e - b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = b - c \\ e = b - c \end{cases}$$

então $\text{Im}(T) = \{(a, b, c, b - c, b - c) : a, b, c \in \mathbb{R}\}$.

► Exercícios da Secção 6.3

1. Sabendo que T é uma TL, determine o núcleo e indique se é injetiva.

(a) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (y, -x)$.

(b) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y, z) = (x + y, -x + 2y)$.

(c) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y, z) = (0, 0, y)$.

(d) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y) = (x, y, x + y)$.

(e) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ definida por $T(x, y, z) = \begin{bmatrix} x & y \\ z & 0 \end{bmatrix}$.

(f) $T : M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $T\left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}\right) = x + w$.

2. Seja $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a TL definida por $T(x, y, z, w) = (x + z, x + y, z - y)$.

(a) Verifique se os vetores pertencem ao $\text{Nuc}(T)$.

(i) $u = (1, -1, -1, 4)$.

(ii) $v = (1, 0, -1, 4)$.

(b) Determine uma base e a dimensão de $\text{Nuc}(T)$.

(c) Verifique se os vetores pertencem a $\text{Im}(T)$.

(i) $u' = (1, 1, 1)$.

(ii) $v' = (2, 1, 1)$.

- (d) Determine $\text{Im}(T)$.
- (e) Verifique se T é injetiva e se é sobrejetiva.

3. Seja $T : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^4$ a TL definida por:

$$T(x, y, z, w, t) = (x - y - w + t, y + z - t, z + 2w, 2y + z - 2w - 2t).$$

- (a) Determine $\text{Im}(T)$ na sua forma mais simplificada.
- (b) Indique, justificando, uma base e a dimensão de $\text{Im}(T)$.
- (c) $\mathbf{v} = (2, 0, 1, -1) \in \text{Im}(T)$? Justifique.
- (d) T é sobrejetiva? Justifique.
- (e) Determine k de modo que $\mathbf{u} = (k, 0, -2, 1, -2) \in \text{Nuc}(T)$.
- (f) Determine $\text{Nuc}(T)$ na sua forma mais simplificada.
- (g) Determine uma base e a dimensão de $\text{Nuc}(T)$.
- (h) T é injetiva? Justifique.

4. Seja $T : M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$ a TL definida por $T \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = (a, d + b, -a)$.

- (a) Verifique se $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ são vetores de $\text{Nuc}(T)$.
- (b) Determine uma base e a dimensão de $\text{Nuc}(T)$.
- (c) T é injetiva? Justifique.
- (d) Verifique se $\mathbf{w}_1 = (-1, 0, -1)$ e $\mathbf{w}_2 = (1, 2, -1)$ são vetores de $\text{Im}(T)$.
- (e) Determine uma base e a dimensão de $\text{Im}(T)$.
- (f) T é sobrejetiva? Justifique.
- (g) T é invertível? Justifique.

5. Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ a TL definida por $T(x, y, z) = \begin{bmatrix} x & y \\ y & y \end{bmatrix}$.

- (a) Determine uma base e a dimensão de $\text{Nuc}(T)$.
- (b) T é injetiva? Justifique.
- (c) Determine a e b de modo que $\mathbf{u} = (a + 2b + 1, a - b - 2, a + b) \in \text{Nuc}(T)$.
- (d) Determine uma base e a dimensão de $\text{Im}(T)$.
- (e) T é sobrejetiva? Justifique.

6. Considere os vetores $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 0, 1)$ e $\mathbf{v}_3 = (1, 1, 1)$ de $\mathbb{R}^3$ e $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a TL tal que $T(\mathbf{v}_1) = (1, 0)$, $T(\mathbf{v}_2) = (1, 1)$ e $T(\mathbf{v}_3) = (2, 2)$.
- (a) Determine (x, y, z) como combinação linear de $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$.
- (b) Indique, justificando, se $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.
- (c) Determine, na forma mais simplificada, $T(x, y, z)$.
7. Seja $T : E \rightarrow F$ uma TL. Considere que $A = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ é uma base de E e que o núcleo de T é gerado pelos vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.
- (a) Determine $T(-2\mathbf{u} + 3\mathbf{v})$.
- (b) Mostre que $T(\mathbf{w})$ gera $\text{Im}(T)$.
8. Seja $T : E \rightarrow E$ uma TL tal que $\dim E = n$.
Mostre que se T é injetiva então T é sobrejetiva.

► Soluções dos Exercícios

1. (a) $\text{Nuc}(T) = \{(0, 0)\}$, T é injetiva.
- (b) $\text{Nuc}(T) = \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\} \neq \{(0, 0, 0)\}$, T não é injetiva.
- (c) $\text{Nuc}(T) = \{(x, 0, z) : x, z \in \mathbb{R}\} \neq \{(0, 0, 0)\}$, T não é injetiva.
- (d) $\text{Nuc}(T) = \{(0, 0)\}$, T é injetiva.
- (e) $\text{Nuc}(T) = \{(0, 0, 0)\}$, T é injetiva.
- (f) $\text{Nuc}(T) = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & -x \end{bmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\} \neq \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$, T não é injetiva.
2. (a) (i) $\mathbf{u} \in \text{Nuc}(T)$ pois $T(\mathbf{u}) = (0, 0, 0)$.
(ii) $\mathbf{v} \notin \text{Nuc}(T)$ pois $T(\mathbf{v}) \neq (0, 0, 0)$.
- (b) $\text{Nuc}(T) = \{(x, -x, -x, w) : x, w \in \mathbb{R}\}$, $A = \{(1, -1, -1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ é uma base de $\text{Nuc}(T)$ e $\dim \text{Nuc}(T) = \#A = 2$.
- (c) (i) $\mathbf{u}' \notin \text{Im}(T)$. (ii) $\mathbf{v}' \in \text{Im}(T)$.
- (d) $\text{Im}(T) = \{(a, b, a - b) : a, b \in \mathbb{R}\}$.
- (e) T não é injetiva nem é sobrejetiva.

3. (a) $\text{Im}(T) = \{(a, b, c, 2b - c) : a, b, c \in \mathbb{R}\}$.
- (b) Por exemplo, uma base de $\text{Im}(T)$ é $A = \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 2), (0, 0, 1, -1)\}$ e $\dim \text{Im}(T) = \#A = 3$.
- (c) $\mathbf{v} = (2, 0, 1, -1) \in \text{Im}(T)$ pois $(a, b, c, 2b - c) = (2, 0, 1, -1)$ para $a = 2 \wedge b = 0 \wedge c = 1$.
- (d) T não é sobrejetiva pois $\dim \text{Im}(T) = 3 \neq 4 = \dim \mathbb{R}^4$.
- (e) $k = 3$.
- (f) $\text{Nuc}(T) = \{(3w, 2w + t, -2w, w, t) : w, t \in \mathbb{R}\}$.
- (g) Por exemplo, uma base de $\text{Nuc}(T)$ é $B = \{(3, 2, -2, 1, 0), (0, 1, 0, 0, 1)\}$ e $\dim \text{Nuc}(T) = \#B = 2$.
- (h) T não é injetiva pois $\dim \text{Nuc}(T) = 2 \neq 0$.
4. (a) $u_1 \notin \text{Nuc}(T)$ e $u_2 \in \text{Nuc}(T)$.
- (b) $\text{Nuc}(T) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & b \\ c & -b \end{bmatrix} : b, c \in \mathbb{R} \right\}$, $A = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ é uma base de $\text{Nuc}(T)$ e $\dim \text{Nuc}(T) = \#A = 2$.
- (c) T não é injetiva pois $\dim \text{Nuc}(T) = 2 \neq 0$.
- (d) $w_1 \notin \text{Im}(T)$ e $w_2 \in \text{Im}(T)$.
- (e) $\text{Im}(T) = \{(x, y, -x) : x, y \in \mathbb{R}\}$.
Uma base de $\text{Im}(T)$ é $B = \{(1, 0, -1), (0, 1, 0)\}$ e $\dim \text{Im}(T) = \#B = 2$.
- (f) T não é sobrejetiva pois $\text{Im}(T) \neq \mathbb{R}^3$ ou $\dim \text{Im}(T) = 2 \neq 3 = \dim \mathbb{R}^3$.
- (g) A análise sobre se T é invertível pode ser efetuada de duas formas.
- T não é invertível pois não é bijetiva.
 - A matriz canónica de T é $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.
- Como a matriz M não é quadrada então não admite inversa, pelo que T não é invertível.

5. (a) Base de $\text{Nuc}(T) = \{(0, 0, 1)\}$ e $\dim \text{Nuc}(T) = 1$.
 (b) T não é injetiva porque $\text{Nuc}(T) = \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\} \neq \{(0, 0, 0)\}$.
 (c) $a = 1 \wedge b = -1$.
 (d) Base de $\text{Im}(T) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ e $\dim \text{Im}(T) = 2$.
 (e) T não é sobrejetiva porque $\dim \text{Im}(T) \neq \dim M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) = 4$.
6. (a) $(x, y, z) = (x - z) \mathbf{v}_1 + (z - y) \mathbf{v}_2 + y \mathbf{v}_3$.
 (b) $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.
 (c) $T(x, y, z) = (x - z) T(\mathbf{v}_1) + (z - y) T(\mathbf{v}_2) + y T(\mathbf{v}_3) = (x + y, y + z)$.
7. (a) $T(-2\mathbf{u} + 3\mathbf{v}) = 0_F$. (b) —
8. —

6.4 Transformações Planas

Definição 13

Uma TL que tenha $\mathbb{R}^2$ como domínio e conjunto de chegada é designada por **transformação plana** (TP).

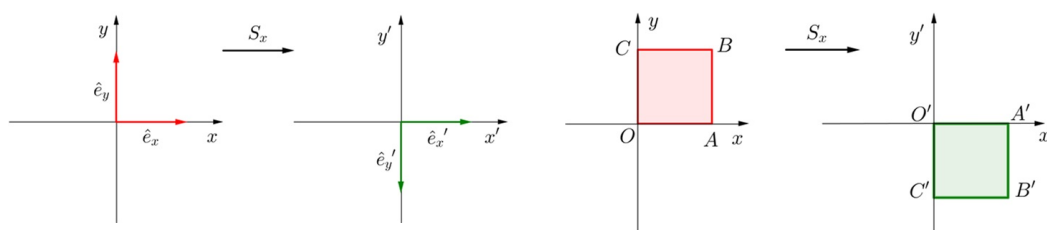
Observação: Um vetor $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tem por imagem $T(x, y) = (a, b)$ e em termos matriciais vem $MX = B$, onde $X = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}^T$ e $B = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}^T$.

1. Reflexões

Uma **reflexão** é uma TP que espelha uma figura ou um vetor em relação a um eixo ou a um ponto. Esta transformação inverte as componentes dos vetores em relação ao eixo ou ao ponto de reflexão, mas preserva:

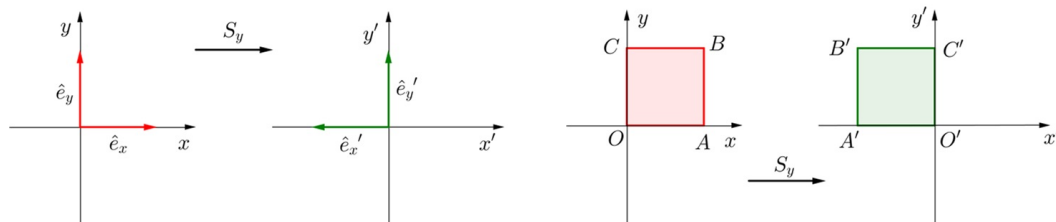
- **as distâncias entre os pontos:** a distância entre quaisquer dois pontos antes da reflexão será a mesma após a reflexão. Isso significa que a transformação não altera o tamanho ou a forma da figura, apenas a sua orientação.
- **a linearidade:** as linhas retas permanecem retas após a reflexão. Se dois pontos estão em uma linha reta antes da reflexão, eles continuarão em uma linha reta depois da reflexão.

1.1 Reflexão em relação ao eixo x



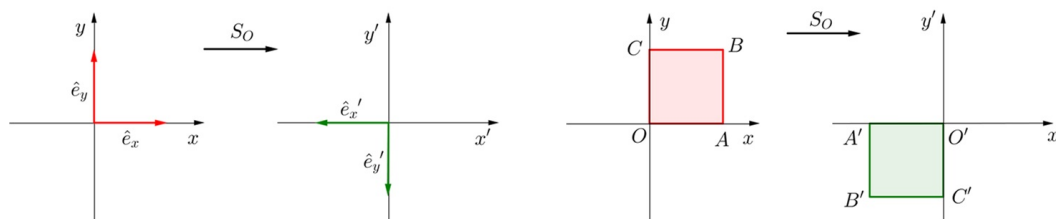
Uma reflexão em relação ao eixo Ox denota-se por R_x e tem como:

- matriz canónica: $M_{R_x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.
- caracterização analítica: $R_x : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $R_x(x, y) = (x, -y)$.

1.2 Reflexão em relação ao eixo y 

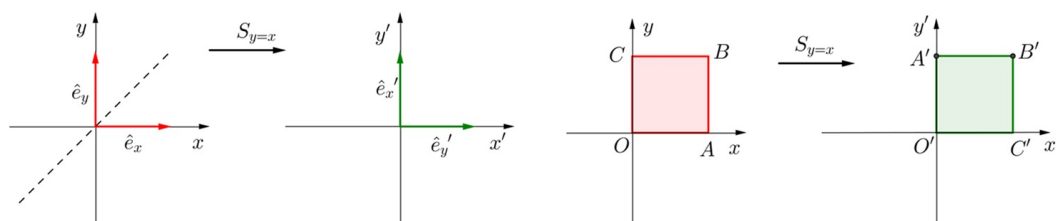
Uma reflexão em relação ao eixo Oy denota-se por R_y e tem como:

- matriz canónica: $M_{R_y} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.
- caracterização analítica: $R_y : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $R_y(x, y) = (-x, y)$.

1.3 Reflexão em relação à origem O 

Uma reflexão em relação à origem O é uma reflexão em relação aos dois eixos e denota-se por R_O e tem como:

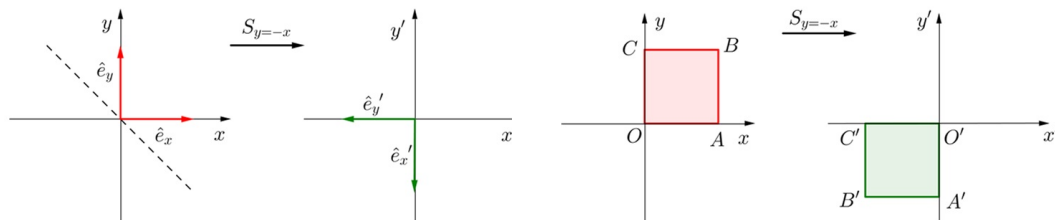
- matriz canónica: $M_{R_O} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.
- caracterização analítica: $R_O : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $R_O(x, y) = (-x, -y)$.

1.4 Reflexão em relação à reta $y = x$ 

Uma reflexão em relação à reta $y = x$ denota-se por $R_{y=x}$ e tem como:

- matriz canónica: $M_{R_{y=x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.
- caracterização analítica: $R_{y=x} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $R_{y=x}(x, y) = (y, x)$.

1.5 Reflexão em relação à reta $y = -x$



Uma reflexão em relação à reta $y = -x$ denota-se por $R_{y=-x}$ e tem como:

► matriz canónica: $M_{R_{y=-x}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

► caracterização analítica:

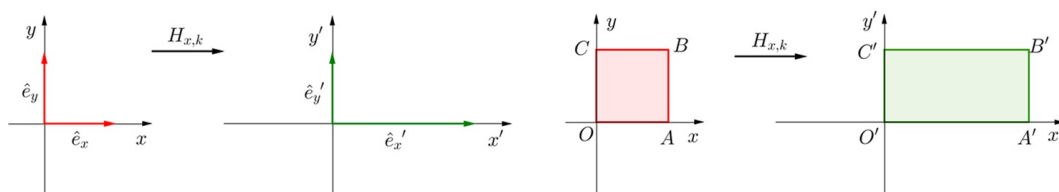
$R_{y=-x} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $R_{y=-x}(x, y) = (-y, -x)$.

2. Homotetias ou Mudança de Escala

As **homotetias** ou **mudanças de escala** são TP que alteram o tamanho de uma figura exceto se $k = 1$. Estas transformações são definidas por um **fator de escala** k (com $k \geq 0$) e um ponto fixo chamado **centro** de homotetia que será a origem O . Consoante o valor de k tem-se que:

- se $k = 0$ então ocorre a contração máxima.
- se $0 < k < 1$ então a homotetia designa-se por **contração** ou **redução** de fator k .
- se $k = 1$ então não há alterações.
- se $k > 1$ então a homotetia designa-se por **ampliação** ou **dilatação** de fator k .

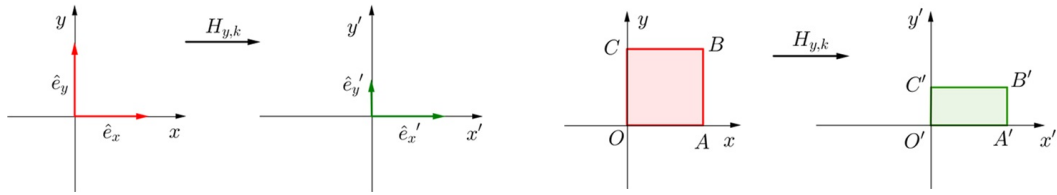
2.1 Homotetia de fator k em relação ao eixo x



Nas imagens está representada uma homotetia de fator $k > 1$ (ampliação ou dilatação). No entanto, qualquer homotetia $H_{x,k}$ de fator $k \geq 0$ em relação ao eixo Ox tem como:

- ▶ matriz canônica: $M_{H_{x,k}} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.
- ▶ caracterização analítica: $H_{x,k} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $H_{x,k}(x, y) = (kx, y)$.

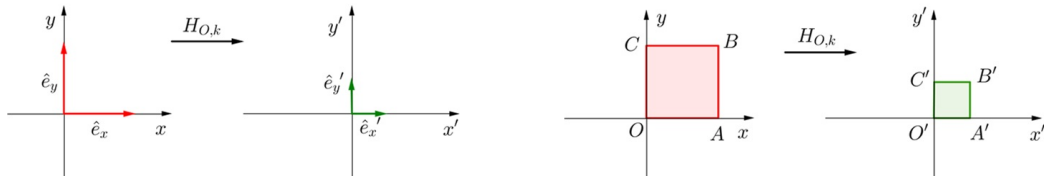
2.2 Homotetia de fator k em relação ao eixo y



Nas imagens está representada uma homotetia de fator k , $0 < k < 1$ (redução ou contração). No entanto, qualquer homotetia $H_{y,k}$ de fator $k \geq 0$ em relação ao eixo Oy tem como:

- ▶ matriz canônica: $M_{H_{y,k}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$.
- ▶ caracterização analítica: $H_{y,k} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $H_{y,k}(x, y) = (x, ky)$.

2.3 Homotetia de fator k em relação à origem



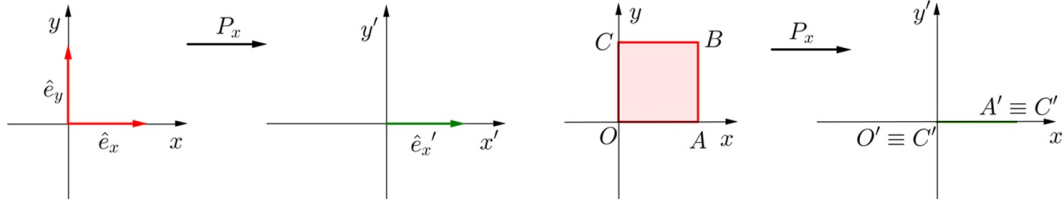
As imagens ilustram uma homotetia de fator $k < 1$ (redução ou contração). No entanto, qualquer homotetia $H_{O,k}$ de fator $k \geq 0$ em relação à origem tem como:

- ▶ matriz canônica: $M_{H_{O,k}} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$.
- ▶ caracterização analítica: $H_{O,k} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $H_{O,k}(x, y) = (kx, ky)$.

3. Projeções

Em TP, uma **projeção** é uma transformação que transforma vetores em um subespaço específico, de forma que aplicar a projeção duas vezes resulta no mesmo vetor que aplicar uma vez. Formalmente, uma projeção P é uma TP $P : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $P \circ P = P$.

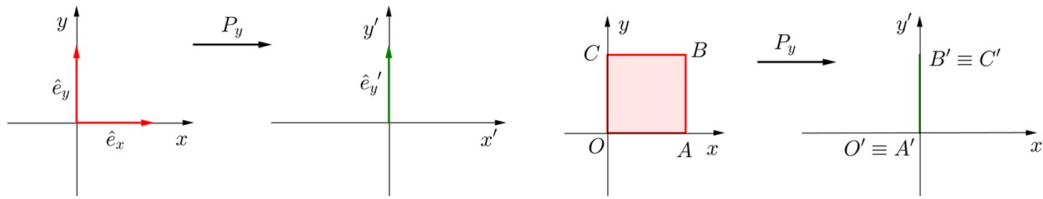
3.1 Projeção sobre o eixo x



Uma projeção sobre o eixo Ox denota-se por P_x e tem como:

- matriz canônica: $M_{P_x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.
- caracterização analítica: $P_x : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $P_x(x, y) = (x, 0)$.

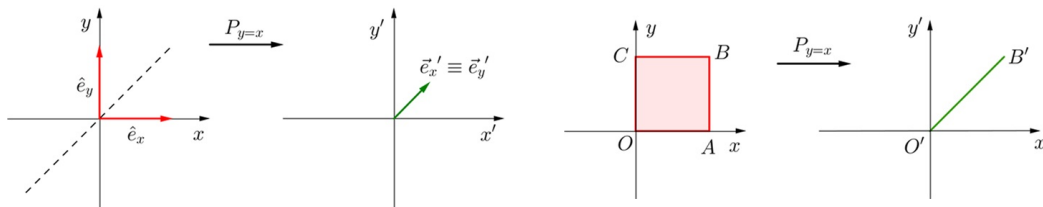
3.2 Projeção sobre o eixo y



Uma projeção sobre o eixo Oy denota-se por P_y e tem como:

- matriz canônica: $M_{P_y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.
- caracterização analítica: $P_y : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $P_y(x, y) = (0, y)$.

3.3 Projeção sobre a reta $y = x$

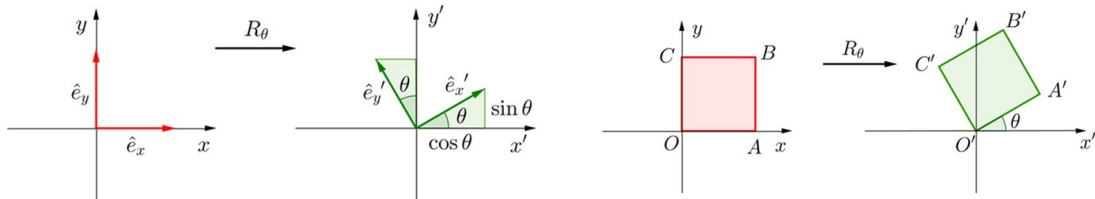


Uma projeção sobre a reta $y = x$ denota-se por $P_{y=x}$ e tem como:

- matriz canônica: $M_{P_{y=x}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.
- caracterização analítica: $P_{y=x} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $P_{y=x}(x, y) = \left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2}, \frac{x}{2} + \frac{y}{2} \right)$.

4. Rotação no plano em torno da origem

Uma rotação no plano é uma transformação que roda todos os vetores em torno da origem por um ângulo θ . Esta transformação preserva o comprimento dos vetores e a orientação relativa entre eles.



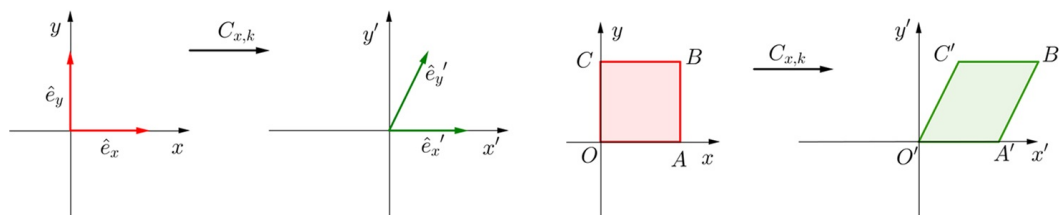
A rotação no plano de um ângulo θ em torno da origem é denotada por R_θ e tem como:

- matriz canónica: $M_{R_\theta} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$.
- caracterização analítica: $R_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $R_\theta(x, y) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta)$.

5. Cortes ou Cisalhamentos

Uma TP de **corte** ou **cisalhamento de fator k** inclina os vetores na direção desejada. Se k for positivo, os vetores movem-se na direção positiva do eixo e se for negativo, na direção negativa. Esta transformação altera a forma da figura mas preserva sempre a sua área (o determinante da sua matriz canónica é sempre igual a 1). O valor de k determina a intensidade do cisalhamento.

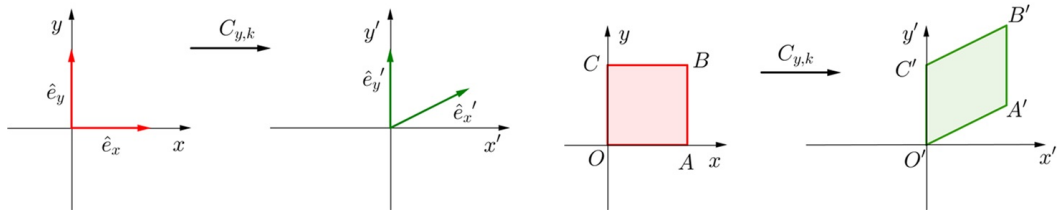
5.1 Corte ou cisalhamento de fator k na direção do eixo x



Nas imagens está representado um corte ou cisalhamento de fator k ($0 < k < 1$) na direção do eixo Ox . No entanto, qualquer corte ou cisalhamento de fator k na direção do eixo Ox denota-se por $C_{x,k}$ e tem como:

- ▶ matriz canônica: $M_{C_{x,k}} = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.
- ▶ caracterização analítica: $C_{x,k} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $C_{x,k}(x, y) = (x + ky, y)$.

5.2 Corte de fator k na direção do eixo dos yy

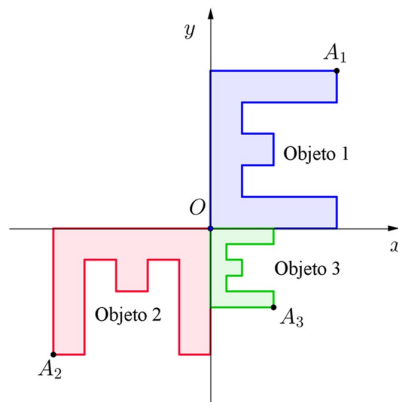


Nas imagens está representado um corte ou cisalhamento de fator k ($0 < k < 1$) na direção do eixo Oy . No entanto, qualquer corte ou cisalhamento de fator k na direção do eixo Oy denota-se por $C_{y,k}$ e tem como:

- ▶ matriz canônica: $M_{C_{y,k}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$.
- ▶ caracterização analítica: $C_{y,k} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $C_{y,k}(x, y) = (x, kx + y)$.

Exercício 9

A figura contém 3 objetos, sendo que os objetos 1 e 2 têm o mesmo tamanho e o objeto 3 tem metade do tamanho.



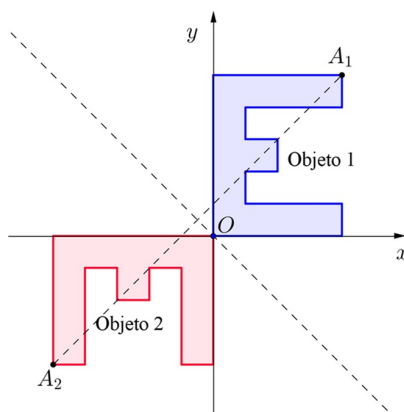
Considere as transformações lineares:

- ▶ T_1 : transforma o objeto 1 no objeto 2.
- ▶ T_2 : transforma o objeto 1 no objeto 3.

- (a) Classifique T_1 .
- (b) Classifique e caracterize T_2 .
- (c) Sabendo que o ponto $A_1 = (4, 5)$, determine o ponto A_3 .
- (d) Mostre que T_2 pode ser definida pela sequência de três transformações: T_1 , seguida de uma rotação de 90° , e seguida de uma homotetia de fator 0.5 em relação à origem O .

Resolução

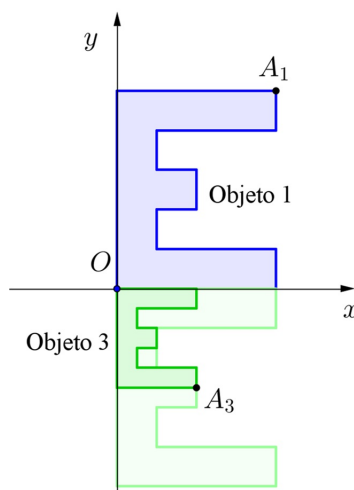
(a)



Como se pode observar, T_1 representa uma reflexão em relação à reta $y = -x$.

- (b) A transformação T_2 representa a sequência das duas transformações
- uma reflexão em relação ao eixo Ox
 - seguida de uma homotetia de fator 0.5 em relação à origem O .

tal como é ilustrado na figura seguinte.



Sendo a matriz canônica de T_2 definida por

$$M_2 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix}$$

e a imagem do vetor posição $\overrightarrow{OP}$ de um ponto qualquer $P = (x, y)$ do objeto 1 é dada por

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5x \\ -0.5y \end{bmatrix}$$

ou seja, $T_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é definida por $T_2(x, y) = (0.5x, -0.5y)$.

(c) A matriz M_2 é aplicada ao vetor posição $\overrightarrow{OA_1}$ obtendo-se

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2.5 \end{bmatrix} \Leftrightarrow A_3 = (2, -2.5).$$

(d) Fazendo o produto das matrizes canônicas das três transformações tem-se

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix} = M_2.$$

► Exercícios da Seção 6.4

1. Considere a transformação plana $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e o quadrado Q definido de vértices $O = (0, 0)$, $A = (1, 0)$, $B = (1, 1)$ e $C = (0, 1)$.

Represente o quadrado Q e a sua imagem por T e classifique T :

- (a) $T(x, y) = (0, 2y)$.
- (b) $T(x, y) = (x, 2y)$.
- (c) $T(x, y) = \left(-2x, \frac{1}{2}y\right)$.
- (d) $T(x, y) = (-2y, 2x)$.

2. Defina analiticamente a transformação plana $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que representa a sequência de transformações:

- (a) contração de fator $\frac{1}{2}$ em relação ao eixo Ox , seguida de uma dilatação de fator 3 em relação ao eixo Oy .
- (b) rotação de 90° em torno da origem O , seguida de uma reflexão em relação à reta $y = x$.
- (c) projeção sobre o eixo Oy , seguida de uma contração de fator $\frac{1}{2}$ em relação à origem O .

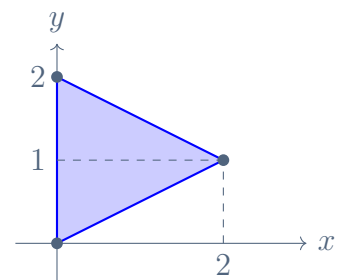
- (d) rotação de 60° em torno da origem O , seguida de uma projeção sobre o eixo Ox , seguida de uma reflexão em relação à reta $y = x$.
- (e) reflexão em relação à reta $y = -x$, seguida de uma dilatação de fator 2 em relação ao eixo Ox .
3. Sejam $T_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a transformação plana que define a reflexão em relação à reta $y = -x$ e $T_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a transformação plana que define uma dilatação de fator 2 em relação ao eixo Ox . Mostre que $T_1 \circ T_2 \neq T_2 \circ T_1$.
4. Mostre que a transformação inversa de uma:
- (a) reflexão em relação ao eixo Ox é uma reflexão em relação ao eixo Ox .
- (b) redução de fator $\frac{1}{\alpha}$ em relação ao eixo Ox é uma dilatação de fator α em relação ao eixo Ox com $\alpha \neq 0$.
- (c) rotação do plano de um ângulo α em torno da origem O é a rotação do plano do ângulo $-\alpha$ em torno da origem O .
5. Sejam T_1, T_2 e T_3 as transformações planas cujas matrizes canônicas associadas são, respectivamente, M_1, M_2 e M_3

$$M_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } M_3 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

- (a) Classifique e defina analiticamente T_1, T_2 e T_3 .
- (b) Defina analiticamente a TL plana $T = T_2 \circ T_1 \circ T_3$.
6. Sejam T_1 e T_2 as transformações lineares planas cujas matrizes canônicas associadas são, respectivamente, M_1 e M_2 :

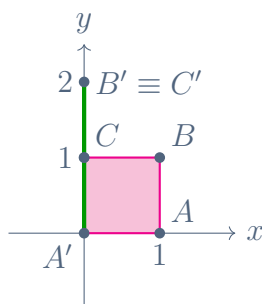
$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad M_2 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}.$$

- (a) Classifique e defina analiticamente T_1 e T_2 .
- (b) Considere a transformação plana $T = T_2 \circ T_1$. Defina analiticamente T e T^{-1} .
- (c) Represente geometricamente o resultado de T aplicado ao triângulo representado na figura.

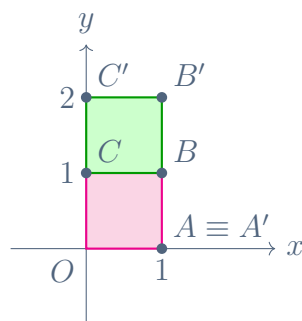


► Soluções dos Exercícios

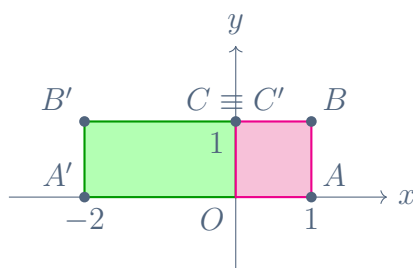
1. (a) Projeção sobre o eixo Oy , seguida de uma dilatação de fator 2 em relação ao eixo Oy .



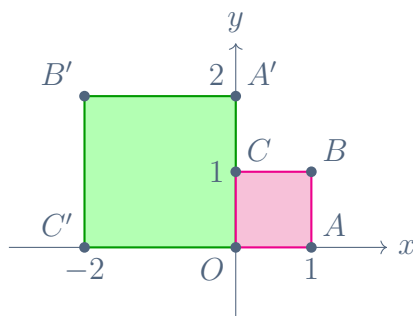
- (b) Dilatação de fator 2 em relação ao eixo Oy .



- (c) Contração de fator $\frac{1}{2}$ em relação ao eixo Oy , seguida de uma dilatação de fator 2 em relação ao eixo Ox , seguida de uma reflexão em relação ao eixo Oy .



- (d) Dilatação de fator 2 em relação à origem O , seguida de uma rotação de 90° em torno da origem O .



2. (a) Matriz canônica:

$$M_{H_y \circ H_x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Caracterização analítica:

$$H_y \circ H_x : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ definida por } (H_y \circ H_x)(x, y) = \left(\frac{1}{2}x, 3y\right).$$

(b) Matriz canônica:

$$M_{R_{y=x} \circ R_{90^\circ}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Caracterização analítica:

$$R_{y=x} \circ R_{90^\circ} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ definida por } (R_{y=x} \circ R_{90^\circ})(x, y) = (x, -y).$$

(c) Matriz canônica:

$$M_{H_O \circ P_y} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Caracterização analítica:

$$H_O \circ P_y : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ definida por } (H_O \circ P_y)(x, y) = \left(0, \frac{1}{2}y\right).$$

(d) Matriz canônica:

$$M_{R_{y=x} \circ P_x \circ R_{60^\circ}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{bmatrix}.$$

Caracterização analítica:

$$R_{y=x} \circ P_x \circ R_{60^\circ} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ definida por}$$

$$(R_{y=x} \circ P_x \circ R_{60^\circ})(x, y) = \left(0, \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y\right).$$

(e) Matriz canônica:

$$M_{H_x \circ R_{y=-x}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Caracterização analítica:

$$H_x \circ R_{y=-x} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ definida por } (H_x \circ R_{y=-x})(x, y) = (-2y, -x).$$

3. Como

$$M_{T_1} M_{T_2} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = M_{T_2} M_{T_1}$$

então $T_1 \circ T_2 \neq T_2 \circ T_1$.

4. —

5. (a) Tem-se

- $T_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T_1(x, y) = (-x, -y)$ e é uma reflexão em relação à origem O .
- $T_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T_2(x, y) = (y, x)$ e é uma reflexão em relação à reta $y = x$.
- $T_3 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T_3(x, y) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y, \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y \right)$ e é uma rotação de ângulo $\theta = 45^\circ$ em torno da origem O .

(b) $M_T = M_{T_2 \circ T_1 \circ T_3} = M_2 M_1 M_3$ onde

$$M_T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$$

e $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y, -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y \right)$.

6. (a) Tem-se

- $T_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T_1(x, y) = (x, 2y)$ e é uma ampliação de fator $k = 2$ em relação ao eixo Oy .
- $T_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T_2(x, y) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y, \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \right)$ e é uma rotação de ângulo $\theta = 30^\circ$ em torno da origem O .

(b) Como

$$M_{T_2 \circ T_1} = M_2 M_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1 \\ 1/2 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

então $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é definida por $T(x, y) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x - y, \frac{1}{2}x + \sqrt{3}y \right)$.

$$\text{Assim, } M_{T^{-1}} = (M_T)^{-1} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/4 & \sqrt{3}/4 \end{bmatrix}$$

e $T^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é definida por $T^{-1}(x, y) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y, -\frac{1}{4}x + \frac{\sqrt{3}}{4}y \right)$.

(c) Geometricamente o resultado é o triângulo de vértices $O' = T(0, 0) = (0, 0)$, $A' = T(2, 1) = (\sqrt{3} - 1, \sqrt{3} + 1)$ e $B' = T(0, 2) = (-2, 2\sqrt{3})$.

7

Valores e Vetores Próprios

Os valores e vetores próprios são conceitos fundamentais na análise de transformações lineares e matrizes. Quando uma transformação linear é aplicada a um vetor próprio, o resultado é o mesmo vetor multiplicado por um escalar - o valor próprio. Estes elementos não dependem da matriz específica usada, mas sim da própria transformação, sendo por isso propriedades estruturais do sistema.

Na engenharia, os valores e vetores próprios são especialmente úteis para simplificar problemas, prever comportamentos e modelar sistemas complexos de forma eficiente. São aplicados em várias áreas com grande relevância prática.

As aplicações principais incluem:

1. Engenharia

Utilizados para analisar vibrações, estabilidade de estruturas, e comportamento de sistemas dinâmicos - por exemplo, em análises modais de pontes e edifícios sujeitos a forças variáveis.

2. Economia

Aplicados na modelação de sistemas económicos para prever a sua evolução ao longo do tempo e estudar equilíbrios e tendências.

3. Computação e Ciência de Dados

Ferramentas como a Análise de Componentes Principais usam valores próprios para reduzir a complexidade de grandes volumes de dados, facilitando a visualização e a extração de padrões.

4. Estatística

Usados na decomposição de matrizes de covariância para identificar direções principais de variação dos dados e construir representações mais simples.

5. Processamento de Sinais

Fundamentais na decomposição de sinais em frequências (como na Transformada de Fourier), permitindo uma análise mais eficaz de áudio, imagem ou comunicação digital.

6. Controlo de Sistemas

Permitem estudar a estabilidade e a resposta de sistemas dinâmicos, sendo essenciais para projetar controladores eficientes.

Neste capítulo, vamos explorar os conceitos de valores e vetores próprios, as suas propriedades fundamentais e o processo de diagonalização de matrizes.

Orientação de trabalho: O capítulo apresenta duas atividades de trabalho, e o leitor deve dedicar de 3 a 5 horas de estudo autónomo para cada uma delas.

- ▶ Atividade 21 – 7.1 Conceitos Gerais e 7.2 O Cálculo Analítico
- ▶ Atividade 22 – 7.3 Diagonalização de Matrizes

7.1 Conceitos Gerais

Seja E um espaço vetorial real de dimensão n .

Definições 1

Sejam $T : E \rightarrow E$ uma TL e v um vetor não nulo de E .

Diz-se que v é um **vetor próprio** de T quando existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $T(v) = \lambda v$.

O valor λ é designado por **valor próprio** de T associado ao vetor próprio v .

Observações: Sejam v um vetor próprio de T (com V a sua forma matricial) e M a matriz canónica de T .

1. Como $T(v) = \lambda v \Leftrightarrow MV = \lambda V$ então diz-se também que v é um **vetor próprio** de M associado ao **valor próprio** λ .
2. Se v é um vetor próprio de M associado ao valor próprio λ então

$$MV = \lambda V \Leftrightarrow MV - \lambda V = O_{n \times 1} \Leftrightarrow (M - \lambda I_n)V = O_{n \times 1}$$

e uma vez que o sistema $(M - \lambda I_n)V = O_{n \times 1}$ admite pelo menos a solução v e a solução nula então é um SPI, pelo que $|M - \lambda I_n| = 0$.

Definições 2

Sejam v um vetor próprio de M e V a sua forma matricial.

1. O polinómio $p(\lambda) = |M - \lambda I_n|$, de grau n , designa-se por **polinómio característico**, e a equação $p(\lambda) = 0$ por **equação característica** de M .
2. O conjunto S_λ constituído por todas as soluções de $(M - \lambda I_n)V = O_{n \times 1}$ é um subespaço vetorial de E e é designado por **subespaço próprio associado ao valor próprio** λ .

Exercício 1

Sejam $\mathbf{u} = (2, 2, 0)$, $\mathbf{v} = (1, -1, -2)$ e $\mathbf{w} = (2, 2, -2)$ vetores de $\mathbb{R}^3$, $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a TL definida por $T(x, y, z) = (-x + y, x - y, -2z)$ e M a matriz canônica de T .

- Verifique se $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ são vetores próprios de T (e de M).
- Verifique se 2 e -2 são valores próprios de T (e de M).
- Verifique se, para quaisquer $x, z \in \mathbb{R}$, $\mathbf{r} = (-x, x, z) \neq (0, 0, 0)$ é vetor próprio de T . Indique o valor próprio associado.
- Determine o subespaço próprio de T e os vetores próprios associados a $\lambda = 0$.

Resolução

- (a) Como $T(1, 0, 0) = (-1, 1, 0)$, $T(0, 1, 0) = (1, -1, 0)$ e $T(0, 0, 1) = (0, 0, -2)$ então a matriz canônica de T é

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Relembre-se que os vetores próprios de T são iguais aos vetores próprios da sua matriz canônica.

Para verificar se $\mathbf{u}$ é vetor próprio consideram-se dois processos.

1.º processo: $\mathbf{u}$ é vetor próprio de T se existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $T(\mathbf{u}) = \lambda \mathbf{u}$. Como

$$T(\mathbf{u}) = T(2, 2, 0) = (0, 0, 0) = 0(2, 2, 0) = 0\mathbf{u}$$

então $\mathbf{u}$ é vetor próprio de T associado ao valor próprio $\lambda = 0$.

2.º processo: $\mathbf{u}$ é vetor próprio de M quando existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $M\mathbf{u} = \lambda \mathbf{u}$.

Como

$$M\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = 0\mathbf{u}$$

então $\mathbf{u}$ é vetor próprio de M associado ao valor próprio $\lambda = 0$, pelo que $\mathbf{u}$ também é vetor próprio de T associado ao valor próprio $\lambda = 0$.

Por outro lado, $\mathbf{v}$ é vetor próprio de T (e de M) associado ao valor próprio $\lambda = -2$ pois

$$T(\mathbf{v}) = T(1, -1, -2) = (-2, 2, 4) = -2(1, -1, -2) = -2\mathbf{v}.$$

Além disso, $\mathbf{w}$ não é vetor próprio de T (e de M) pois

$$T(\mathbf{w}) = T(2, 2, -2) = (0, 0, 4) \neq \lambda(2, 2, -2), \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

(b) Uma vez que

$$p(2) = |M - 2I_3| = \begin{vmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = -32 \neq 0$$

então 2 não é valor próprio de T (e de M).

O valor $\lambda = -2$ é valor próprio de T (e de M) pois

$$p(-2) = |M + 2I_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

(c) Uma vez que $T(x, y, z) = (-x + y, x - y, -2z)$ então

$$T(\mathbf{r}) = T(x, -x, z) = (-2x, 2x, -2z) = -2(x, -x, z) = -2\mathbf{r}$$

o que implica que $\mathbf{r} \neq (0, 0, 0)$ seja um vetor próprio de T associado ao valor próprio $\lambda = -2$.

(d) Os vetores próprios de T associados ao valor próprio $\lambda = 0$ são os vetores não nulos (x, y, z) tais que $T(x, y, z) = 0(x, y, z)$, ou seja

$$(-x + y, x - y, -2z) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y = 0 \\ x - y = 0 \\ -2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ z = 0 \end{cases}.$$

O subespaço vetorial próprio de T associado a $\lambda = 0$ é $S_{\lambda=0} = \{(x, x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ e os vetores próprios são todos os vetores com a forma $(x, x, 0) = x(1, 1, 0)$, com $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

► Exercícios da Secção 7.1

1. Sejam $\mathbf{u} = (0, 2, 0)$, $\mathbf{v} = (2, 0, -2)$, $\mathbf{w} = (1, 0, 1)$ e $\mathbf{r} = (1, 2, 1)$ vetores de $\mathbb{R}^3$, $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a TL definida por $T(x, y, z) = (3x + z, 2y, x + 3z)$, e M a matriz canónica de T .
 - (a) Verifique se $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ e $\mathbf{r}$ são vetores próprios de T (e de M).
 - (b) Verifique se, para qualquer $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathbf{s} = (x, 0, x)$ é vetor próprio de T . Indique o valor próprio associado.
 - (c) Determine o subespaço próprio de M associado a $\lambda = 2$.

► Soluções dos Exercícios

1. (a) ► $T(\mathbf{u}) = T(0, 2, 0) = (0, 4, 0) = 2\mathbf{u}$ e portanto, $\mathbf{u}$ é vetor próprio de T associado ao valor próprio $\lambda = 2$.
 - $T(\mathbf{v}) = T(2, 0, -2) = (4, 0, -4) = 2\mathbf{v}$ e portanto, $\mathbf{v}$ é vetor próprio de T associado ao valor próprio $\lambda = 2$.
 - $T(\mathbf{w}) = T(1, 0, 1) = (4, 0, 4) = 4\mathbf{w}$ e portanto, $\mathbf{w}$ é vetor próprio de T associado ao valor próprio $\lambda = 4$.
 - $T(\mathbf{r}) = T(1, 2, 1) = (4, 4, 4) \neq \lambda(1, 2, 1), \forall \lambda \in \mathbb{R}$ e portanto, $\mathbf{r}$ não é vetor próprio de T .

Como $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ são vetores próprios de T então também são vetores próprios de M .

- (b) $\mathbf{s} \neq (0, 0, 0)$ é um vetor próprio de T associado ao valor próprio $\lambda = 4$ pois

$$T(\mathbf{s}) = T(x, 0, x) = (4x, 0, 4x) = 4(x, 0, x) = 4\mathbf{s}.$$

- (c) $S_{\lambda=2} = \{(x, y, -x) : x, y \in \mathbb{R}\}$.

7.2 O Cálculo Analítico

Os valores próprios de matrizes reais podem ser números complexos. No entanto, no que segue, opta-se por considerar transformações lineares e matrizes que tenham apenas números reais como valores próprios.

Observações: Seja M a matriz canónica de uma transformação linear $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ com todos os valores próprios reais. Para calcular os valores e os vetores próprios de M (e de T), deve-se seguir os seguintes passos:

1. Calcular o polinómio característico, de grau n , $p(\lambda) = |M - \lambda I_n|$.
2. Determinar as n raízes de $p(\lambda)$, ou seja, as soluções da equação característica $p(\lambda) = 0$, que correspondem aos valores próprios de M .
3. Para cada valor λ , resolver a equação $(M - \lambda I_n)V = 0$. As soluções não nulas v desta equação são os vetores próprios de M associados a λ .

Definições 3

Seja M a matriz canónica de uma transformação linear $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

1. Designa-se por **espectro** de M (e de T), denotando-se por $\sigma(M)$ (e $\sigma(T)$), o conjunto de todos os seus **valores próprios**, ou seja,

$$\sigma(M) = \sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{R} : |M - \lambda I_n| = 0\}.$$

2. Diz-se que $\lambda \in \sigma(M)$ tem:

- (a) **multiplicidade algébrica** k se λ é raiz de multiplicidade k do polinómio característico e denota-se por $m_a(\lambda) = k$.
- (b) **multiplicidade geométrica** k se o subespaço próprio S_λ associado a λ tem-se dimensão k , e denota-se por $m_g(\lambda) = \dim S_\lambda = k$.

Teorema 1

Seja M uma matriz de ordem n . Então:

1. para qualquer $\lambda \in \sigma(M)$ tem-se $1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$.
2. se M é uma matriz triangular então os seus valores próprios são os elementos da sua diagonal principal.
3. se M é uma matriz simétrica então $\sigma(M) \subset \mathbb{R}$ e os vetores próprios associados a valores próprios distintos são ortogonais.

Exercício 2

Considere a matriz $M = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

- (a) Mostre que o polinómio característico de M é $p(\lambda) = -\lambda(\lambda + 2)^2$.
- (b) Determine os valores próprios de M e indique as suas multiplicidades algébricas.
- (c) Determine os subespaços vetoriais próprios de M e indique as respetivas multiplicidades geométricas dos valores próprios.

Resolução

(a) Para o cálculo de $p(\lambda) = |M - \lambda I_3|$ consideram-se dois processos.

1.º processo: Aplicando regras práticas ao determinante tem-se

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (-1-\lambda)(-1-\lambda)(-2-\lambda) + 0 + 0 - (0 + 0 - 2 - \lambda) \\ &= (-2-\lambda)[(-1-\lambda)(-1-\lambda) - 1] = -(\lambda+2)(\lambda^2 + 2\lambda) \\ &= -\lambda(\lambda+2)^2. \end{aligned}$$

2.º processo: Aplicando o teorema de Laplace à 3.ª linha (ou à 3.ª coluna) tem-se

$$\begin{aligned}
p(\lambda) &= \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (-2-\lambda)(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+2) [(-1-\lambda)^2 - 1] \\
&= -(\lambda+2)(\lambda^2 + 2\lambda) = -\lambda(\lambda+2)^2
\end{aligned}$$

(b) Como os valores próprios de M são as raízes da equação $p(\lambda) = 0$ então

$$-\lambda(\lambda+2)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \vee \lambda = -2.$$

pelo que -2 e 0 são os valores próprios de M , ou seja, $\sigma(M) = \{-2, 0\}$.
Tem-se $m_a(0) = 1$ e $m_a(-2) = 2$.

(c) ► Os vetores próprios associados a $\lambda = -2$ são as soluções não nulas de $(M - (-2)I_3)V = O_{3 \times 1}$, ou seja

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ x+y=0 \\ 0=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x \\ \\ \end{cases}.$$

Assim, $S_{\lambda=-2} = \{(x, -x, z) : x, z \in \mathbb{R}\}$ é o subespaço próprio de M associado a $\lambda = -2$. Uma vez que este subespaço depende de duas variáveis livres então $m_g(-2) = \dim S_{\lambda=-2} = 2$.

► De forma análoga, os vetores próprios de M associados a $\lambda = 0$ são as soluções não nulas de $(M - 0I_3)V = O_{3 \times 1}$. Assim, tendo em conta que

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x+y=0 \\ x-y=0 \\ -2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x \\ \\ z=0 \end{cases}.$$

tem-se que $S_{\lambda=0} = \{(x, x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ é o subespaço próprio de M associado a $\lambda = 0$. Uma vez que este subespaço depende de uma variável livre então $m_g(0) = \dim S_{\lambda=0} = 1$.

Observação: Os vetores do subespaço próprio $S_{\lambda=-2}$ são ortogonais aos vetores de $S_{\lambda=0}$, uma vez que M é uma matriz simétrica. De facto, para quaisquer vetores $(x, -x, z) \in S_{\lambda=-2}$ e $(x, x, 0) \in S_{\lambda=0}$, tem-se

$$(x, -x, z) \cdot (x, x, 0) = x^2 - x^2 + 0 = 0.$$

Propriedades 1

1. O **traço** de uma matriz (soma dos elementos da diagonal principal) é igual à soma dos seus valores próprios.
2. O **determinante** de uma matriz é igual ao produto dos seus valores próprios.

Observação: Como o determinante de uma matriz é igual ao produto dos seus valores próprios, conclui-se que uma matriz é invertível se e só se não tiver 0 como valor próprio.

Exercício 3

Seja A uma matriz não invertível de ordem 4 com valores próprios reais e:

- com traço igual a 2.
- com 2 valores próprios distintos, um deles com multiplicidade algébrica 2.

Indique, justificando, se 1 é valor próprio de A .

Resolução

Como A é de ordem 4 então tem 4 valores próprios. Uma vez que A tem só dois valores próprios distintos e um deles tem multiplicidade algébrica igual a 2, o outro terá também multiplicidade algébrica igual a 2. Denotem-se esses valores próprios por λ_1 e λ_2 . Uma vez que a multiplicidade algébrica de ambos é 2 então $|A| = \lambda_1^2 \lambda_2^2$.

Como A não é invertível então $|A| = 0$, pelo que um dos valores próprios λ é igual a zero. Considere-se, por exemplo, $\lambda_1 = 0$.

Como $\text{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_2 = 2$, vem que $0 + 0 + \lambda_2 + \lambda_2 = 2$, ou seja, $\lambda_2 = 1$, e consequentemente, 1 é valor próprio de A .

Interpretação geométrica

Seja $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, com $n = 2$ ou $n = 3$, uma TL cuja matriz canónica é M . Os vetores próprios de T (e de M) indicam as direções de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$ em relação às quais as imagens dos vetores sofrem apenas dilatações ou contrações de valor igual aos respetivos valores próprios. Estas direções são designadas por **direções**

próprias. No caso dos valores próprios positivos os sentidos mantêm-se e quando são negativos os sentidos são invertidos.

Exercício 4

Considere a matriz $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$.

- Determine os valores próprios de M .
- Determine as direções próprias.
- Considere um triângulo T cujos vértices são $A = (1, 0)$, $B = \left(1, \frac{5}{2}\right)$ e $C = (-2, 2)$.
 - Determine a imagem T' de T pela TL cuja matriz canónica é M .
 - Represente geometricamente T e T' , identificando as direções próprias.

Resolução

- (a) Resolvendo a equação característica tem-se

$$|M - \lambda I_2| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 5 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1 - \lambda)(4 - \lambda) - 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 5\lambda - 6 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 6 \vee \lambda = -1$$

então -1 e 6 são os valores próprios de M .

- (b) ► Para $\lambda = 6$ tem-se

$$\begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow -5x + 2y = 0 \Leftrightarrow y = \frac{5}{2}x$$

e a direção própria associada a $\lambda = 6$ é a da reta de equação $y = \frac{5}{2}x$, ou seja, tem a direção do vetor $(2, 5)$.

O subespaço próprio associado a $\lambda = 6$ define-se por

$$S_{\lambda=6} = \{(2x, 5x) : x \in \mathbb{R}\} = \text{ger}\{(2, 5)\}.$$

- Para $\lambda = -1$ tem-se

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow 2x + 2y = 0 \Leftrightarrow y = -x$$

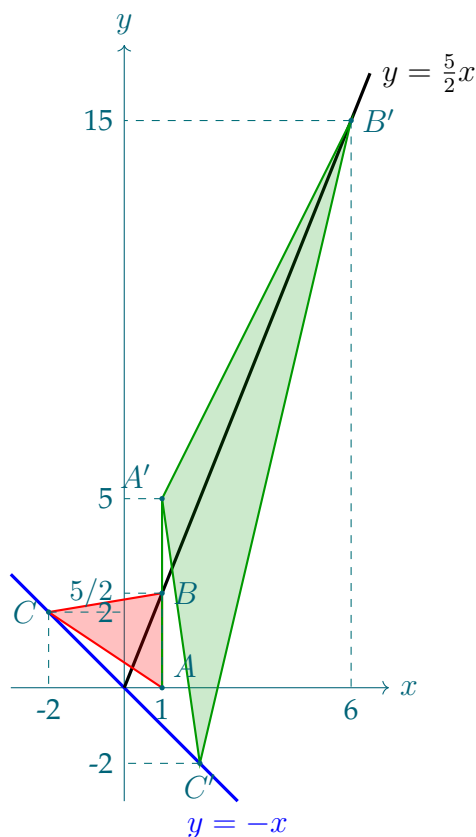
e a direção própria associada a $\lambda = -1$ é a da reta de equação $y = -x$, ou seja, tem a direção do vetor $(1, -1)$.

- (c) (i) Considerando os vértices do triângulo definidos pelos seus vetores posição $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OC}$, as suas imagens são obtidas fazendo o produto da matriz M pela **matriz dos vértices** V (matriz que tem por colunas os vetores posição)

$$MV = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 5/2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 5 & 15 & -2 \end{bmatrix} = V'$$

e a partir das colunas de V' vem que $\overrightarrow{OA'} = (1, 5)$, $\overrightarrow{OB'} = (6, 15)$ e $\overrightarrow{OC'} = (2, -2)$, pelo que T' tem vértices dados por $A' = (1, 5)$, $B' = (6, 15)$ e $C' = (2, -2)$.

- (ii) Note que $\overrightarrow{OB'} = (6, 15) = 6(1, 5/2)$ e $\overrightarrow{OC'} = (2, -2) = -1(-2, 2)$ são vetores próprios cujas direções são as direções próprias, identificadas na figura pelas retas de equações $y = -x$ e $y = \frac{5}{2}x$.



► Exercícios da Secção 7.2

1. Seja M a matriz canónica da transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y, z) = (3x + z, 2y, x + 3z)$.

- (a) Mostre que o polinómio característico de M é $p(\lambda) = (4 - \lambda)(\lambda - 2)^2$.
- (b) Determine os valores próprios de M e indique as respetivas multiplicidades algébricas.
- (c) Determine os subespaços próprios de M e indique as respetivas dimensões.
- (d) A matriz M é invertível? Justifique.

2. Considere a matriz $M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

- (a) Mostre que o polinómio característico de M é $p(\lambda) = \lambda(\lambda - 4)(\lambda + 1)^2$.
- (b) Determine os valores próprios de M e indique as respetivas multiplicidades algébricas.
- (c) Determine o subespaço vetorial próprio de M associado ao menor dos valores próprios de M e indique a respetiva dimensão.
- (d) A matriz M é invertível? Justifique.

3. Seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a TP cuja matriz canónica é $M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

- (a) Defina analiticamente T .
- (b) Determine os valores próprios de M .
- (c) Determine uma base de cada um dos subespaços próprios de M .
- (d) Considere o retângulo $\mathbf{R}$ de vértices $A = (-1, 0)$, $B = (1, 0)$, $C = (1, 1)$ e $D = (-1, 1)$.
 - (i) Determine as imagens por T dos vetores $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ e $\overrightarrow{OD}$, sendo O a origem do referencial.
 - (ii) Represente geometricamente a imagem de $\mathbf{R}$ por T .
 - (iii) Atendendo às alíneas anteriores, indique, justificando, quais dos vetores $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ e $\overrightarrow{OD}$ são vetores próprios de T .

4. Seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a TL definida por $T(x, y) = (x + 2y, -x + 4y)$.
- Determine a matriz canónica M associada a T .
 - Considere o paralelogramo P cujos vértices são $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$, $C = (2, 1)$ e $D = (1, 1)$.
 - Determine as imagens por T dos vetores $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ e $\overrightarrow{OD}$, sendo O a origem do referencial.
 - Represente geometricamente a imagem de P por T .
 - Atendendo às alíneas anteriores, indique, justificando, quais dos vetores $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ e $\overrightarrow{OD}$ são vetores próprios de T e quais os valores próprios associados.
5. Para as seguintes matrizes, determine os valores próprios, os subespaços próprios e respectivas dimensões.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$E = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \text{ e } G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

► Soluções dos Exercícios

1. (a) —
- (b) $p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow (4 - \lambda)(\lambda - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 4 \vee \lambda = 2$,
 $m_a(2) = 2$ e $m_a(4) = 1$.
- (c) $S_{\lambda=2} = \{(x, y, -x) : x, y \in \mathbb{R}\}$, $\dim S_{\lambda=2} = 2$,
 $S_{\lambda=4} = \{(x, 0, x) : x \in \mathbb{R}\}$, $\dim S_{\lambda=4} = 1$.
- (d) A matriz M é invertível pois 0 não é valor próprio de M .
2. (a) —
- (b) $p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda - 4)(\lambda + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \vee \lambda = 4 \vee \lambda = -1$,
 $m_a(-1) = 2$, $m_a(0) = 1$ e $m_a(4) = 1$.

(c) $S_{\lambda=-1} = \{(0, y, 0, w) : y, w \in \mathbb{R}\}$ e $\dim S_{\lambda=-1} = 2$.

(d) A matriz M não é invertível pois 0 é valor próprio de M .

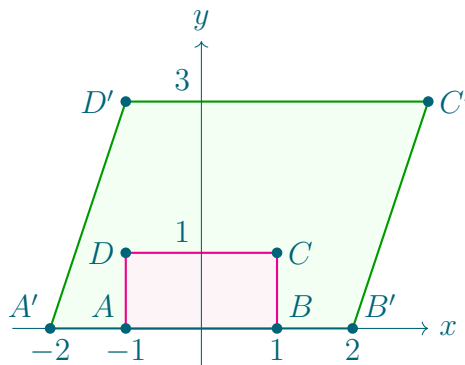
3. (a) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (2x + y, 3y)$.

(b) $\lambda = 2 \vee \lambda = 3$.

(c) Base de $S_{\lambda=2} = \{(1, 0)\}$ e Base de $S_{\lambda=3} = \{(1, 1)\}$.

(d) (i) $\overrightarrow{OA'} = (-2, 0)$, $\overrightarrow{OB'} = (2, 0)$, $\overrightarrow{OC'} = (3, 3)$ e $\overrightarrow{OD'} = (-1, 3)$.

(ii)

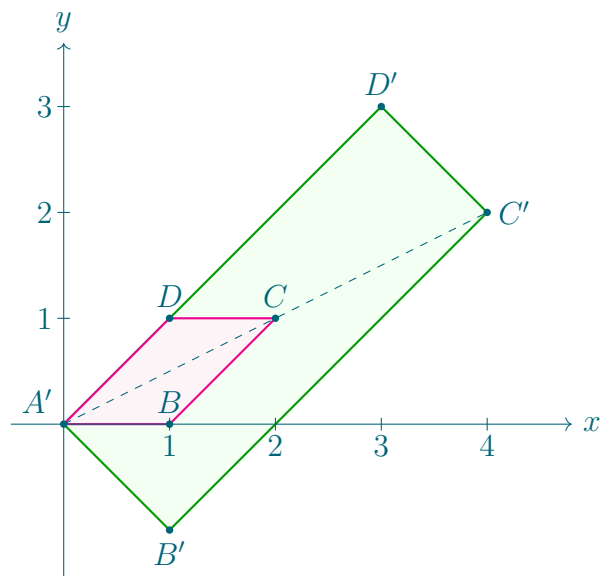


(iii) $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OC}$ são vetores próprios de T pois $\overrightarrow{OA'} = 2\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB'} = 2\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OC'} = 3\overrightarrow{OC}$.

4. (a) $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$.

(b) (i) $\overrightarrow{OA'} = (0, 0)$, $\overrightarrow{OB'} = (1, -1)$, $\overrightarrow{OC'} = (4, 2)$ e $\overrightarrow{OD'} = (3, 3)$.

(ii)



(iii) $\overrightarrow{OC}$ e $\overrightarrow{OD}$ são vetores próprios de T associados, respetivamente, aos valores próprios $\lambda = 2$ e $\lambda = 3$ porque $\overrightarrow{OC'} = 2\overrightarrow{OC}$ e $\overrightarrow{OD'} = 3\overrightarrow{OD}$.

5. ► **matriz A :** $\lambda = 1 \vee \lambda = -3$, $S_{\lambda=1} = \left\{ \left(x, \frac{3}{4}x \right) : x \in \mathbb{R} \right\}$,
 $S_{\lambda=-3} = \{(0, y) : y \in \mathbb{R}\}$, $\dim S_{\lambda=1} = 1$ e $\dim S_{\lambda=-3} = 1$.
- **matriz B :** $\lambda = 2$ ($m_a = 2$), $S_{\lambda=2} = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}$ e $\dim S_{\lambda=2} = 1$.
- **matriz C :** $\lambda = 0 \vee \lambda = 2$, $S_{\lambda=0} = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}$, $S_{\lambda=2} = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}$,
 $\dim S_{\lambda=0} = 1$ e $\dim S_{\lambda=2} = 1$.
- **matriz D :** $\lambda = 0 \vee \lambda = 1 \vee \lambda = 3$, $S_{\lambda=0} = \{(x, x, x) : x \in \mathbb{R}\}$,
 $S_{\lambda=1} = \{(x, 0, -x) : x \in \mathbb{R}\}$, $S_{\lambda=3} = \{(x, -2x, x) : x \in \mathbb{R}\}$,
 $\dim S_{\lambda=0} = 1$, $\dim S_{\lambda=1} = 1$ e $\dim S_{\lambda=3} = 1$.
- **matriz E :** $\lambda = 1$ ($m_a = 2$) $\vee \lambda = 3$,
 $S_{\lambda=1} = \{(x, y, -x) : x, y \in \mathbb{R}\}$, $S_{\lambda=3} = \{(x, 0, x) : x \in \mathbb{R}\}$,
 $\dim S_{\lambda=1} = 2$ e $\dim S_{\lambda=3} = 1$.
- **matriz F :** $\lambda = 0$ ($m_a = 2$) $\vee \lambda = -2$,
 $S_{\lambda=0} = \{(x, x, x) : x \in \mathbb{R}\}$, $S_{\lambda=-2} = \{(x, x, -x) : x \in \mathbb{R}\}$,
 $\dim S_{\lambda=0} = 1$ e $\dim S_{\lambda=-2} = 1$.
- **matriz G :** $\lambda = 1$ ($m_a = 4$), $S_{\lambda=1} = \{(x, 0, 0, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ e $\dim S_{\lambda=1} = 1$.

7.3 Diagonalização de Matrizes

A diagonalização de matrizes é um processo que permite representar certas matrizes como o produto de três matrizes, sendo uma delas diagonal. Este método transforma a matriz original numa matriz diagonal, desde que esta seja diagonalizável, isto é, que possua um conjunto de vetores próprios linearmente independentes em número igual à ordem da matriz.

A diagonalização simplifica bastante os cálculos, uma vez que operações com matrizes diagonais são mais simples de executar.

Definição 4

Uma matriz A de ordem n diz-se **diagonalizável** se existem uma matriz invertível P de ordem n e uma matriz diagonal D de ordem n tais que:

$$A = PDP^{-1} \Leftrightarrow P^{-1}AP = D.$$

Teorema 2

Seja A uma matriz de ordem n . As seguintes proposições são equivalentes.

1. A é diagonalizável.
2. A possui n vetores próprios linearmente independentes.
3. A soma das multiplicidades geométricas dos valores próprios de A é igual a n .
4. Para qualquer $\lambda \in \sigma(A)$, $m_g(\lambda) = m_a(\lambda)$.

Observações:

1. Uma matriz A de ordem n é diagonalizável se e só se existe uma base de $\mathbb{R}^n$ formada por vetores próprios de A .
2. Se A é diagonalizável então existem uma matriz invertível P e uma matriz diagonal D tais que $A = PDP^{-1}$. Neste caso:

- ▶ as colunas de P são vetores próprios LI de A que geram os subespaços próprios associados aos respectivos valores próprios.
 - ▶ os elementos da diagonal principal de D são os valores próprios de A .
 - ▶ $A^n = PD^nP^{-1}$, para $n \in \mathbb{N}$.
3. O próximo resultado é uma consequência imediata do ponto 4 do teorema anterior e do ponto 1 do Teorema 1 da página 240.

Teorema 3

Uma matriz M é diagonalizável se e só se

$$m_g(\lambda) = m_a(\lambda), \text{ para qualquer } \lambda \in \sigma(M) \text{ com } m_a(\lambda) \geq 2.$$

Exercício 5

Considere a matriz $M = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. Verifique se M é diagonalizável e, em caso afirmativo, determine as matrizes P , D e M^4 .

Resolução

Para verificar se M é diagonalizável, é necessário verificar se existem três vetores próprios LI de M . Para isso realizam-se as seguintes três etapas.

- ▶ **1.ª etapa:** Como M é uma matriz triangular superior então, pelo Teorema 1, os seus valores próprios são os elementos da sua diagonal principal. Portanto, os valores próprios de M são $\lambda = 4$ e $\lambda = 3$, com $m_a(4) = 1$ e $m_a(3) = 2$.
- ▶ **2.ª etapa:** Como 3 é o único valor próprio com multiplicidade algébrica diferente de 1 então M é diagonalizável se e só se $m_g(3) = m_a(3) = 2$.

Assim, para $\lambda = 3$, os vetores próprios associados são as soluções não nulas de $(M - 3I_3)V = O_{3 \times 1}$, ou seja

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x + y + 2z = 0 \Leftrightarrow x = -y - 2z.$$

Logo, $S_{\lambda=3} = \{(-y - 2z, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\} = \text{ger} \{v_1, v_2\}$, onde $v_1 = (-1, 1, 0)$ e $v_2 = (-2, 0, 1)$ são vetores LI. Como $m_g(3) = 2$ então a matriz M é diagonalizável.

Para definir a matriz P falta determinar um vetor gerador do subespaço próprio associado a $\lambda = 4$. Assim, resolvendo a equação $(M - 4I_3)V = O_{3 \times 1}$, tem-se

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y + 2z = 0 \\ -y = 0 \\ -z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

ou seja, $S_{\lambda=4} = \{(x, 0, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ é o subespaço próprio que pode ser gerado por $v_3 = (1, 0, 0)$.

- **3.^a etapa:** Portanto, $P^{-1}MP = D$, onde as colunas da matriz P são formadas por v_1, v_2 e v_3 que são vetores próprios LI de M e a matriz diagonal D é formada pelos valores próprios de M , ou seja

$$P = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Observação: Vamos provar que $P^{-1}MP = D$. De facto, como $|P| = 1$ e

$$|P| = 1 \text{ e } \text{Adj}(P) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^T \text{ então } P^{-1} = \frac{1}{|P|} \text{Adj}(P) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

pelo que

$$\begin{aligned} P^{-1}MP &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 4 & 4 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = D. \end{aligned}$$

O cálculo de M^4 pode ser obtido tendo em conta que $M^4 = PD^4P^{-1}$, pelo que

$$M^4 = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3^4 & 0 & 0 \\ 0 & 3^4 & 0 \\ 0 & 0 & 4^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -81 & -162 & 256 \\ 81 & 0 & 0 \\ 0 & 81 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 256 & 175 & 350 \\ 0 & 81 & 0 \\ 0 & 0 & 81 \end{bmatrix}.$$

Exercício 6

Verifique se a matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ é diagonalizável.

Resolução

Considere-se o mesmo procedimento do exemplo anterior.

► **1.ª etapa:** Determinar os valores próprios.

Aplicando o teorema de Laplace à 3.ª coluna e as regras práticas tem-se

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (3-\lambda)[(4-\lambda)(2-\lambda) + 1] = (3-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 9) \\ &= (3-\lambda)(\lambda-3)^2 = -(\lambda-3)^3. \end{aligned}$$

Portanto, $\lambda = 3$ é o único valor próprio de A e $m_a(\lambda = 3) = 3$.

► **2.ª etapa:** Determinar os vetores próprios. Como

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x = y.$$

Assim, $S_{\lambda=3} = \{(y, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\} = \text{ger}\{(1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ é o subespaço próprio. Portanto, A não é diagonalizável pois $m_g(3) = 2 \neq 3 = m_a(3)$.

Teorema 4

Se A é uma matriz simétrica de ordem n então existe uma matriz ortogonal P e uma matriz diagonal D tais que $P^T A P = D$, onde a diagonal principal de D é formada pelos valores próprios de A e as colunas de P são os vetores próprios ortonormais (ortogonais e unitários) de A que geram os subespaços próprios.

Exercício 7

Considere a matriz $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. Verifique que M é diagonalizável e determine as matrizes P e D de modo que $P^T M P = D$.

Resolução

Uma vez que $M^T = M$ então M é uma matriz simétrica, pelo que é diagonalizável. Para determinar os 3 vetores próprios LI de M , considere-se o mesmo procedimento do exemplo anterior.

► **1.^a etapa:** Determinar os valores próprios. Como

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{L_2 \rightarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 + L_1}} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 2-\lambda & 2-\lambda & 0 \\ 2-\lambda & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 [1-\lambda+0+0-(1+1+0)] \\ &= (2-\lambda)^2 (-1-\lambda) \end{aligned}$$

então $p(\lambda) = 0$ para $\lambda = 2 \vee \lambda = -1$. Assim, os valores próprios de M são 2 e -1 , com $m_a(2) = 2$ e $m_a(-1) = 1$.

► **2.^a etapa:** Assim, para $\lambda = -1$, resolvendo a equação $(M + I_3)V = O_{3 \times 1}$, tem-se

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = -2x - y \\ x + 2y + 2x + y = 0 \\ \text{---} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -2x - y \\ y = -x \\ \text{---} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -x \\ y = -x \\ x + x - 2x = 0 \end{cases}$$

ou seja, $S_{\lambda=-1} = \{(x, -x, -x) : x \in \mathbb{R}\} = \text{ger}\{\mathbf{v}_1\}$, onde $\mathbf{v}_1 = (-1, 1, 1)$.

Para $\lambda = 2$, tem-se

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow -x + y + z = 0 \Leftrightarrow x = y + z.$$

Logo, $S_{\lambda=2} = \{(y+z, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\}$. Observe-se que agora não basta encontrar dois vetores LI geradores deste subespaço próprio, mas também é necessário que sejam ortogonais. Como os vetores de $S_{\lambda=2}$ são ortogonais aos vetores de $S_{\lambda=-1}$ então um dos vetores pode ser $\mathbf{v}_2 = (1, 1, 0)$. O outro vetor $\mathbf{v}_3$ além da forma $(y+z, y, z)$, terá que ser ortogonal a $\mathbf{v}_2$, pelo que

$$(y+z, y, z) \bullet (1, 1, 0) \Leftrightarrow y+z+y=0 \Leftrightarrow z=-2y$$

ou seja, $\mathbf{v}_3$ tem de ter a forma $(-y, y, -2y)$. O vetor $\mathbf{v}_3$ pode ser, por exemplo, $(1, -1, 2)$.

- **3.^a etapa:** Dividindo os vetores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$, pelas respectivas normas tem-se $P^T M P = D$, onde

$$P = \begin{bmatrix} -\sqrt{3}/3 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{6}/6 \\ \sqrt{3}/3 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{6}/6 \\ \sqrt{3}/3 & 0 & 2\sqrt{6}/6 \end{bmatrix}, \text{ e } D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Observação: Vamos confirmar que $P^T M P = D$. De facto,

$$\begin{aligned} P^T M P &= \begin{bmatrix} -\sqrt{3}/3 & \sqrt{3}/3 & \sqrt{3}/3 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{6}/6 & -\sqrt{6}/6 & 2\sqrt{6}/6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} P \\ &= \begin{bmatrix} \sqrt{3}/3 & -\sqrt{3}/3 & -\sqrt{3}/3 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{6}/3 & -\sqrt{6}/3 & 2\sqrt{6}/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sqrt{3}/3 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{6}/6 \\ \sqrt{3}/3 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{6}/6 \\ \sqrt{3}/3 & 0 & 2\sqrt{6}/6 \end{bmatrix} = D \end{aligned}$$

► Exercícios da Secção 7.3

1. Verifique se as matrizes são diagonalizáveis e, em caso afirmativo, identifique as matrizes P e D que permitem decompô-las no produto PDP^{-1} .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$E = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Considere as matrizes A e B definidas por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

- (a) Justifique que as matrizes são diagonalizáveis.
 (b) Para cada uma das matrizes determine as matrizes P e D .
 (c) Calcule A^5 e B^4 .

► Soluções dos Exercícios

1. ► $A: \lambda = 1 \vee \lambda = -3$.

Como A tem valores próprios distintos então é diagonalizável.

$$S_{\lambda=1} = \left\{ \left(x, \frac{3}{4}x \right) : x \in \mathbb{R} \right\} = \text{ger} \{ (4, 3) \},$$

$$S_{\lambda=-3} = \{ (0, y) : y \in \mathbb{R} \} = \text{ger} \{ (0, 1) \}.$$

$$P = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

- $B: \lambda = 2$ com $m_a(2) = 2$, $S_{\lambda=2} = \{ (x, -x) : x \in \mathbb{R} \} = \text{ger} \{ (1, -1) \}$

B não é diagonalizável pois $m_g(2) = 1 \neq 2 = m_a(2)$.

- $C: \lambda = 0 \vee \lambda = 2$.

Como C tem valores próprios distintos então é diagonalizável.

$$S_{\lambda=0} = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\} = \text{ger} \{(1, 1)\},$$

$$S_{\lambda=2} = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\} = \text{ger} \{(1, -1)\}.$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

- $E: \lambda = 0 \vee \lambda = -2$ com $m_a(0) = 2$,

$$S_{\lambda=0} = \{(x, x, x) : x \in \mathbb{R}\} = \text{ger} \{(1, 1, 1)\},$$

E não é diagonalizável pois $m_g(0) = 1 \neq 2 = m_a(0)$.

- $F: \lambda = 1$ com $m_a(1) = 4$,

$$S_{\lambda=1} = \{(x, 0, 0, 0) : x \in \mathbb{R}\} = \text{ger} \{(1, 0, 0, 0)\}$$

F não é diagonalizável pois $m_g(1) = 1 \neq 4 = m_a(1)$.

2. (a) Como A e B são matrizes simétricas então são diagonalizáveis.

- (b) ► $A: \lambda = 0 \vee \lambda = 1 \vee \lambda = 3$.

$$S_{\lambda=0} = \{(x, x, x) : x \in \mathbb{R}\} = \text{ger} \{(1, 1, 1)\},$$

$$S_{\lambda=1} = \{(x, 0, -x) : x \in \mathbb{R}\} = \text{ger} \{(1, 0, -1)\},$$

$$S_{\lambda=3} = \{(x, -2x, x) : x \in \mathbb{R}\} = \text{ger} \{(1, -2, 1)\},$$

$$P = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/3 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{6}/6 \\ \sqrt{3}/3 & 0 & -2\sqrt{6}/6 \\ \sqrt{3}/3 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{6}/6 \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

- $B: \lambda = 1 \vee \lambda = 3$ com $m_a(1) = 2$,

$$S_{\lambda=1} = \{(x, y, -x) : x, y \in \mathbb{R}\} = \text{ger} \{(1, 0, -1), (0, 1, 0)\},$$

$$S_{\lambda=3} = \{(x, 0, x) : x \in \mathbb{R}\} = \text{ger} \{(1, 0, 1)\},$$

Como $m_g(1) = 2 = m_a(1)$ então B é diagonalizável.

$$P = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$(c) A^5 = PD^5P^T = \begin{bmatrix} 41 & -81 & 40 \\ -81 & 162 & -81 \\ 40 & -81 & 41 \end{bmatrix} \text{ e } B^4 = PD^4P^T = \begin{bmatrix} 41 & 0 & 40 \\ 0 & 1 & 0 \\ 40 & 0 & 41 \end{bmatrix}$$

8

Auto-Avaliação

Neste capítulo são propostos testes de avaliação para cada um dos temas desenvolvidos ao longo do livro. Cada teste incide sobre os conteúdos do respetivo capítulo e inclui questões de interpretação de resultados, aplicação de técnicas e análise crítica. A sua resolução deve ser feita sem consulta e num tempo máximo de uma hora, de forma a simular uma avaliação formal.

Orientação para a resolução: Recomenda-se que os testes sejam realizados de forma autónoma. Após a resolução, o leitor deve comparar as respostas com a solução proposta, identificar dificuldades e rever, se necessário, os conteúdos do capítulo.

8.1 Avaliação sobre Cálculo Vetorial

Teste 1

1. Considere em $\mathbb{R}^3$ os vetores $\vec{u} = (1, -2, -1)$, $\vec{v} = (0, 1, -1)$, $\vec{w} = (1, -2, -k^2)$ e $\vec{r} = (r_x, r_y, r_z)$.

As seguintes afirmações são verdadeiras. Justifique.

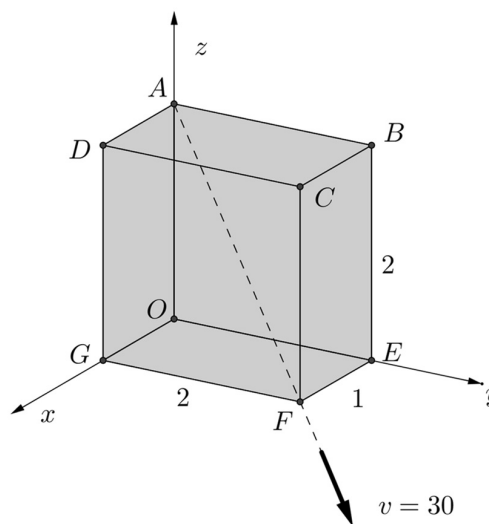
- A área do paralelogramo definido por $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é igual a $\sqrt{11}$.
 - Existem dois vetores unitários e perpendiculares a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$.
 - Existem dois valores de k de modo que o volume do paralelepípedo definido por $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ é igual a 3.
 - Se $\vec{v} \bullet (\vec{u} \times \vec{r}) = 2$ então $(\vec{r} + 2\vec{v}) \times \vec{r} \bullet \vec{u} = -4$.
2. Sejam $\hat{e}_x$, $\hat{e}_y$ e $\hat{e}_z$ os vetores do referencial ortonormado de $\mathbb{R}^3$ e considere os pontos O , B , C , D , F e G , e o vetor $\vec{v}$ representados na figura. As seguintes afirmações são falsas. Justifique.

(a) $\vec{v} = 30\hat{e}_x + 60\hat{e}_y - 60\hat{e}_z$.

(b) $\overrightarrow{DC} \bullet \overrightarrow{FG} = 4$.

(c) $\|\overrightarrow{GO} \times \overrightarrow{GF}\| = 4$.

(d) $\overrightarrow{DG} \times \overrightarrow{GF} \bullet \overrightarrow{OB} = 2$.



3. Considere em $\mathbb{R}^3$ um vetor unitário $\vec{u}$ e um vetor não nulo $\vec{v}$.

Mostre que $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 = \vec{v} \bullet \vec{v} - (\vec{u} \bullet \vec{v})^2$.

Teste 2

- Considere num referencial ortonormado de $\mathbb{R}^3$ os vetores $\vec{u} = (1, -1, 0)$, $\vec{v} = (-1, 2, -2)$ e $\vec{w} = (k^2, 1, k)$.
 - Determine o cosseno diretor do vetor $\vec{v}$ com o semieixo positivo z .
 - Determine os vetores $\vec{a}$ que são ortogonais aos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e têm comprimento 5.
 - Verifique se os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são coplanares para algum valor de k .
 - Determine $(\text{proj}_{\vec{v}} \vec{u}) \bullet \vec{u}$.
- Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores de $\mathbb{R}^3$ tais que $\|\vec{u}\| = 2\|\vec{v}\| = 2$ e $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = 60^\circ$.
As seguintes afirmações são verdadeiras. Justifique.
 - $(\vec{u} - 2\vec{v}) \bullet (\vec{u} + 2\vec{v}) = 0$.
 - $\|\vec{u} \times (\vec{u} - 2\vec{v})\| = 2\sqrt{3}$.
 - $\vec{v} \times \vec{u} \bullet (2\vec{w} - \vec{v}) = -2\vec{u} \bullet \vec{v} \times \vec{w}$.

Teste 3

- Considere em $\mathbb{R}^3$ os vetores $\vec{u} = (2, -1, 2)$, $\vec{v} = (\alpha, 1, -2)$ e $\vec{w} = (-2, \beta, 4)$.
 - Determine o vetor com norma 12 e sentido contrário ao de $\vec{u}$.
 - Determine o valor de α de modo que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sejam perpendiculares.
 - Determine o valor de α e de β de modo que $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sejam colineares.
 - Considere $\alpha = 2$ e determine:
 - a área do triângulo definido por $\vec{u}$ e $\vec{v}$.
 - os valores de β de modo que o volume do paralelepípedo definido por $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ seja igual a 32.
 - a projeção ortogonal de $\vec{u} + \vec{v}$ sobre $\vec{w}$, considerando $\beta = 2$.
- Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores de $\mathbb{R}^3$ tais que:

$$4\|\vec{u}\| = 2\|\vec{v}\| = \|\vec{w}\| = 4, \quad \vec{u} \perp \vec{w} \quad \text{e} \quad \angle(\vec{u}, \vec{v}) = 120^\circ.$$

Mostre que $\vec{u} \bullet (2\vec{u} - 2\vec{v} + \vec{w}) = 4$.

Teste 4

- Sejam $\vec{u} = (0, 1, -1)$, $\vec{v} = (2, 2, 0)$ e $\vec{w} = (\alpha, \beta, 2)$ vetores de $\mathbb{R}^3$. Determine:
 - o(s) vetor(es) de norma 4 que são paralelos a $\vec{u}$.
 - a área do paralelogramo formado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.
 - o ângulo que $\vec{u}$ faz com o semieixo positivo z .
 - para $\alpha = -2$, o(s) valor(es) do parâmetro β de modo que o volume do paralelepípedo definido por $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ seja igual a 4.
 - o(s) valor(es) dos parâmetros α e β de modo que $\vec{u}$ e $\vec{w}$ sejam perpendiculares e $\text{proj}_{\vec{v}} \vec{w} = 2\vec{v}$.

- Considere num referencial ortonormado de $\mathbb{R}^3$, os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ tais que:

$$\|\vec{a}\| = 8, \quad \|\text{proj}_{\vec{a}} \vec{b}\| = 1 \text{ e } \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ.$$

Determine, se possível, e justifique no caso de não ser possível efetuar o cálculo:

- $\|\vec{b}\|$.
- $\|\vec{a} \bullet \vec{b} - \vec{a}\|$.
- $\|\vec{b} \times (3\vec{b} + \vec{a})\|$.

Teste 5

- Considere os vetores $\vec{u} = (2, 0, 2)$, $\vec{v} = (0, 2, -2)$ e $\vec{w} = (\beta, 0, 1)$ de $\mathbb{R}^3$.
 - Determine:
 - o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$.
 - os vetores perpendiculares a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$ e com comprimento igual a $2\sqrt{3}$.
 - a projeção vetorial de $2\vec{v}$ sobre $\vec{u}$.
 - Determine o(s) valor(es) de β de forma que:
 - $\vec{u}$ seja paralelo a $\vec{w}$.
 - o volume do paralelepípedo definido por $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ seja 4.

- Considere os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ de $\mathbb{R}^3$ que verificam as seguintes condições:

$$\vec{u} \text{ e } \vec{w} \text{ são perpendiculares, } \|\vec{v}\| = \|\vec{u}\| = 2 \text{ e } \vec{u} \bullet \vec{v} = -2.$$

Determine, se possível, o resultado das seguintes expressões:

- $\vec{u} \bullet (\vec{u} + 2\vec{v} - \vec{w}) + \|\vec{u} \times \vec{v}\|$.
- $\vec{u} \times (2\vec{v} + \vec{w}) + \vec{u} \bullet 2\vec{v}$.

► Soluções dos Testes

Teste 1

1. (a) $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|(3, 1, 1)\| = \sqrt{11}.$

(b) $\left(\frac{3\sqrt{11}}{11}, \frac{\sqrt{11}}{11}, \frac{\sqrt{11}}{11}\right)$ e $\left(-\frac{3\sqrt{11}}{11}, -\frac{\sqrt{11}}{11}, -\frac{\sqrt{11}}{11}\right).$

(c) $k = 2 \vee k = -2.$

(d) $(\vec{r} + 2\vec{v}) \times \vec{r} \bullet \vec{u} = \vec{r} \times \vec{r} \bullet \vec{u} + 2\vec{v} \times \vec{r} \bullet \vec{u} = 0 + 2(-\vec{v} \bullet \vec{u} \times \vec{r}) = -4.$

2. (a) $\|\vec{v}\| = \sqrt{30^2 + 60^2 + (-60)^2} \neq 30.$

(b) $\overrightarrow{DC} \bullet \overrightarrow{FG} = -4.$

(c) $\|\overrightarrow{GO} \times \overrightarrow{GF}\| = 2.$

(d) $\overrightarrow{DG} \times \overrightarrow{GF} \bullet \overrightarrow{OB} = 0$ pois os 3 vetores são coplanares.

3. —

Teste 2

1. (a) $-\frac{2}{3}.$

(b) $\vec{a} = \left(\frac{10}{3}, \frac{10}{3}, \frac{5}{3}\right) \vee \vec{a} = \left(-\frac{10}{3}, -\frac{10}{3}, -\frac{5}{3}\right).$

(c) $k \in \{ \}.$

(d) 1.

2. —

Teste 3

1. (a) $-12 \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = (-8, 4, -8).$

(b) $\alpha = \frac{5}{2}.$

(c) $\alpha = 1 \wedge \beta = -2.$

(d) (i) $2\sqrt{5}.$

(ii) $\beta = -6 \vee \beta = 2.$

(iii) $\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right).$

2. —

Teste 4

1. (a) $(0, 2\sqrt{2}, -2\sqrt{2}) \vee (0, -2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$. (b) $2\sqrt{3}$.
(c) $\theta_z = 135^\circ$. (d) $\beta = -6 \vee \beta = -2$. (e) $\alpha = 6 \wedge \beta = 2$.
2. (a) 2. (b) Não é possível. (c) $8\sqrt{3}$.

Teste 5

1. (a) (i) 120° . (ii) $(-2, 2, 2) \vee (2, -2, -2)$ (iii) $(-2, 0, -2)$
(b) (i) $\beta = 1$. (ii) $\beta = 0 \vee \beta = 2$.
2. (a) $2\sqrt{3}$. (b) A expressão não está definida.

8.2 Avaliação sobre Cálculo Matricial

Teste 1

1. Considere as matrizes A , B e C definidas por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

- (a) Determine, se possível, $BA + (BA)^T$ e CAB^T .
(b) Determine a característica de A .
(c) Calcule a matriz X que satisfaz a equação $C^{-1}X = A$.
2. Sejam A e B matrizes de ordem n tais que A é ortogonal, B é antissimétrica e invertível.

Determine a matriz X que satisfaz a equação $(X^{-1} + B)^T A = BA$.

Teste 2

1. Considere o parâmetro real α e as matrizes reais A , B e C definidas por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2\alpha \\ -1 & 2\alpha + 1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- (a) Indique, justificando, se as expressões $AC^T B$ e $BA + C^T C$ estão definidas e, em caso afirmativo, indique o tipo de matriz resultante.
(b) Discuta a característica de A em função de α .
(c) Determine α de modo que $AB = 4I_3$.
(d) Usando a alínea anterior, determine a inversa de B .
(e) Determine a solução X da equação $BX = C^T$.
2. Sejam A e B matrizes de ordem n , simétricas e invertíveis.
- Determine a matriz X que satisfaz a equação $A(X^{-1}A^{-1})^T = B$.

Teste 3

1. Sejam $A \in M_{3 \times 4}(\mathbb{R})$, $B \in M_{4 \times 3}(\mathbb{R})$, $C \in M_{3 \times 1}(\mathbb{R})$ e $D \in M_{1 \times 4}(\mathbb{R})$.

Indique, justificando, se as expressões estão definidas e, em caso afirmativo, indique o tipo de matriz resultante:

- (a) $ABCD$. (b) $C^T AB$. (c) $DA^T CC^T B$.

2. Considere o parâmetro real α e as matrizes reais A , B e C definidas por:

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -4 & 0 \\ 4 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2\alpha \\ 0 & \alpha + 1 & 2\alpha \\ -2 & -2 & 2\alpha \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

- (a) Discuta a característica de B em função de α .
 (b) Determine o valor de α de modo que $BA = -4I_3$.
 (c) Determine a solução X da equação $AX^T = (CA^T)^T$.
3. Sejam A e B matrizes de ordem n tais que A é simétrica e invertível e B é ortogonal. Determine a matriz X que satisfaz a equação $(X^{-1}A)^T B = A$.

Teste 4

1. Considere o parâmetro real k e as matrizes reais A , B e C definidas por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & k & 0 \\ -1 & -1 & 2k \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

- (a) Indique, justificando, se as expressões $A^T C + 2B$ e $(BC)^T - C^T$ estão definidas e, em caso afirmativo, indique o tipo de matriz resultante.
 (b) Analise a característica de A para todos os valores k .
 (c) Determine para que valor de k , a inversa de A é a matriz B .
 (d) Determine a matriz X que satisfaz a equação $-2B^{-1}X = C$.
2. Sejam A , B , X matrizes de ordem n tais que A é antissimétrica e B é ortogonal. Determine a matriz X que é solução da equação $(B^{-1}X - BA)^T = AB^T + 2B$.

Teste 5

1. Considere o parâmetro real k e as matrizes reais A e B definidas por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & k & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -k \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- (a) Sabendo que $M = BX^T + XAY$ representa uma matriz indique, justificando, o tipo das matrizes M , X e Y .
- (b) Determine k tal que $(2BA^T)_{23} = 10$.
- (c) Analise a característica de A para todos os valores de k .
- (d) Considere $k = 0$. Determine a matriz X tal que $AX^T = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$.
2. Seja A uma matriz de ordem n , invertível e antissimétrica. Determine a matriz X que satisfaz a equação $(X^T A)^{-1} = 2A^{-1}A^T$.

► Soluções dos Testes

Teste 1

1. (a) Nenhuma das expressões está definida. (b) $\text{car}(A) = 3$.

(c) $X = CA = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

2. $X = -\frac{1}{2}B^{-1}$.

Teste 2

1. (a) $AC^T B$ não está definida e $BA + C^T C$ é uma matriz de ordem 3.
- (b) Para $\alpha \neq 1 \wedge \alpha \neq -1$ tem-se $\text{car}(A) = 3$ e para $\alpha = \pm 1$ tem-se $\text{car}(A) = 2$.
- (c) $\alpha = 0$.

$$(d) B^{-1} = \frac{1}{4}A = \begin{bmatrix} 1/4 & -1/4 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ -1/4 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix}. \quad (e) X = B^{-1}C^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}^T.$$

2. $X = B^{-1}$.

Teste 3

1. (a) Definida e $ABCD \in M_{3 \times 4}(\mathbb{R})$. (b) Definida e $C^T AB \in M_{1 \times 3}(\mathbb{R})$.

(c) Não definida.

2. (a) $\text{car}(B) = 3$ para $\alpha \neq 0 \wedge \alpha \neq 1$ e $\text{car}(B) = 2$ para $\alpha = 0 \vee \alpha = 1$.

(b) $\alpha = -1$.

(c) $X = C$.

3. $X = B^{-1}$.

Teste 4

1. (a) $A^T C + 2B$ não está definida e $(BC)^T - C^T$ é uma matriz do tipo 2×3 .

(b) Para $k \neq 0 \wedge k \neq 2$ tem-se $\text{car}(A) = 3$ e para $k = 0 \vee k = 2$ tem-se $\text{car}(A) = 2$.

(c) $k = 1$.

$$(d) X = -\frac{1}{2}BC = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1 & -3/2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

2. $X = 2I_n$.

Teste 5

1. (a) M é de ordem 3, X é do tipo 3×4 e Y é do tipo 4×3 .

(b) Como $(2BA^T)_{23} = 8 - 2k$ então $k = -1$.

(c) Para $k \neq -2 \wedge k \neq 4$ tem-se $\text{car}(A) = 4$ e para $k = -2 \vee k = 4$ tem-se $\text{car}(A) = 3$.

$$(d) X^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

2. $X = \frac{1}{2}A^{-1}$.

8.3 Avaliação sobre Sistemas de Equações Lineares

Teste 1

1. Considere o sistema de equações lineares reais S , de incógnitas x, y, z e w , e de parâmetros a e b :

$$\begin{cases} x - y + z + w = 1 \\ y - 2z - 2w = 1 \\ az - w = -1 \\ bw = a \end{cases}.$$

- (a) Discuta S em função de a e de b .
- (b) Considerando $a = 0$ e $b = 0$, determine o conjunto solução de S .
2. Seja X_1 uma solução do sistema homogêneo $AX = O_{n \times 1}$, onde A é uma matriz de ordem n . Mostre que se B é uma matriz comutável com A então $X_2 = BX_1$ é também solução do sistema.

Teste 2

1. Considere o sistema de equações lineares reais S , de incógnitas x, y, z e w , e de parâmetros a e b :

$$\begin{cases} x - y + z + w = 1 \\ ay + bz + aw = b \\ bz + aw = b \\ abw = a \end{cases}.$$

- (a) Discuta S em função de a e de b .
- (b) Considerando $a = 0$ e $b = 2$, determine o conjunto solução de S .
2. Sejam X_1 e X_2 duas soluções do sistema de equações lineares S definido por $AX = B$. Mostre que $aX_1 + (1 - a)X_2$ é solução de S , para todo $a \in \mathbb{R}$.

Teste 3

1. Considere o sistema de equações lineares reais S , de incógnitas x, y, z e w , e de parâmetros a e b :

$$\begin{cases} x + ay + az + w = 1 \\ ay + az + w = 1 \\ (b - 1)z + aw = 1 \\ aw = b \end{cases}.$$

- (a) Discuta S em função de a e de b .
- (b) Considerando $a = -1$ e $b = 1$, determine o conjunto solução de S .
2. Considere o sistema de equações lineares S definido por $AX = B$, onde A e B são matrizes do tipo 50×100 e 50×1 , respetivamente. Indique, justificando, se são verdadeiras ou falsas as afirmações:
- (a) S nunca é impossível.
- (b) S nunca é possível e determinado.

Teste 4

1. Considere o sistema de equações lineares reais S , de incógnitas x, y, z e w , e de parâmetros a e b :

$$\begin{cases} x + ay + z + aw = b \\ (a - 1)y + z + aw = 0 \\ (a - 1)z + aw = 0 \\ (a - 2)w = b \end{cases}.$$

- (a) Discuta S em função de a e de b .
- (b) Considerando $a = 1$ e $b = 0$, determine o conjunto solução de S .
- (c) Indique, justificando, os valores de a e de b de modo que o sistema tenha apenas a solução nula.
2. Sejam X_1 uma solução do sistema de equações lineares S_1 definido por $AX = B$ e X_2 uma solução do sistema equações lineares homogéneo S_2 definido por $AX = O_{m \times 1}$. Mostre que $X_1 + \alpha X_2$ é solução de S_1 , para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Teste 5

1. Considere o sistema de equações lineares reais S , de incógnitas x, y, z e w , e de parâmetros a e b :

$$\begin{cases} x + ay + z + aw = 2b \\ ay + z + aw = 0 \\ az + 2aw = b + 1 \\ (a + 1)w = b - 2 \end{cases}.$$

- (a) Discuta S em função de a e de b .
- (b) Considerando $a = 0$ e $b = -1$, determine o conjunto solução de S .
- (c) Determine os valores de a e b de modo que o sistema admita a solução $(4, 0, -1, -1)$.
2. Considere o sistema de equações lineares S definido por $AX = B$, onde A e B são matrizes do tipo 4×5 e 4×1 , respetivamente. Indique, justificando, se são verdadeiras ou falsas as afirmações:
- (a) Se $\text{car}(A) = \text{car}[A|B] = 3$ então S é possível e indeterminado com grau de indeterminação 2.
- (b) Se $\text{car}(A) = 4$ então S pode ser um sistema impossível.

► Soluções dos Testes

Teste 1

$$1. (a) [A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & a & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & b & a \end{array} \right],$$

$$S \text{ é } \begin{cases} \text{SPD} & \text{se } a \neq 0 \wedge b \neq 0 \\ \text{SPI}, g = 1 & \text{se } a = 0 \wedge b = 0 \\ \text{SI} & \text{se } (a \neq 0 \wedge b = 0) \vee (a = 0 \wedge b \neq 0) \end{cases}.$$

(b) $CS = \{(z + 3, 2z + 3, z, 1) : z \in \mathbb{R}\}.$

2. —

Teste 2

$$1. (a) [A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & b & a & b \\ 0 & 0 & b & a & b \\ 0 & 0 & 0 & ab & a \end{array} \right],$$

$$S \text{ é } \begin{cases} \text{SPD} & \text{se } a \neq 0 \wedge b \neq 0 \\ \text{SPI}, g = 3 & \text{se } a = 0 \wedge b = 0 \\ \text{SPI}, g = 2 & \text{se } a = 0 \wedge b \neq 0 \\ \text{SI} & \text{se } a \neq 0 \wedge b = 0 \end{cases}.$$

$$(b) CS = \{(y - w, y, 1, w) : y, w \in \mathbb{R}\}.$$

2. —

Teste 3

$$1. (a) [A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & a & a & 1 & 1 \\ 0 & a & a & 1 & 1 \\ 0 & 0 & b - 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a & b \end{array} \right],$$

$$S \text{ é } \begin{cases} \text{SPD} & \text{se } a \neq 0 \wedge b \neq 1 \\ \text{SPI}, g = 1 & \text{se } (a \neq 0 \wedge b = 1) \vee (a = 0 \wedge b = 0) \\ \text{SI} & \text{se } a = 0 \wedge b \neq 0 \end{cases}.$$

$$(b) CS = \{(0, -z - 2, z, -1) : z \in \mathbb{R}\}.$$

2. (a) Falsa pois basta que se verifique $\text{car}(A) \neq \text{car}[A|B]$.

(b) Verdadeira pois $\text{car}[A|B] \leq 50 < 100 = n.^{\circ}$ de incógnitas.

Teste 4

$$1. (a) [A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & a & 1 & a & b \\ 0 & a-1 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-2 & b \end{array} \right],$$

$$S \text{ é } \begin{cases} \text{SPD} & \text{se } a \neq 1 \wedge a \neq 2 \wedge b \in \mathbb{R} \\ \text{SPI}, g = 1 & \text{se } (a = 1 \vee a = 2) \wedge b = 0 \\ \text{SI} & \text{se } (a = 1 \vee a = 2) \wedge b \neq 0 \end{cases}.$$

$$(b) CS = \{(x, -x, 0, 0) : x \in \mathbb{R}\}.$$

$$(c) a \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\} \wedge b = 0.$$

2. —

Teste 5

$$1. (a) [A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & a & 1 & a & 2b \\ 0 & a & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a & 2a & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & a+1 & b-2 \end{array} \right],$$

$$S \text{ é } \begin{cases} \text{SPD} & \text{se } a \neq -1 \wedge a \neq 0 \wedge b \in \mathbb{R} \\ \text{SPI}, g = 1 & \text{se } (a = -1 \wedge b = 2) \vee (a = 0 \wedge b = -1) \\ \text{SI} & \text{se } (a = -1 \wedge b \neq 2) \vee (a = 0 \wedge b \neq -1) \end{cases}.$$

$$(b) CS = \{(-2, y, 0, -3) : y \in \mathbb{R}\}.$$

$$(c) a = -1 \wedge b = 2.$$

2. (a) Como $\text{car}(A) = \text{car}[A|B] = 3 < 5 = n.$ de incógnitas então S é um SPI com $g = n - \text{car}(A) = 2$. Portanto, a afirmação é verdadeira.

(b) Como $[A|B]$ tem 4 linhas e 6 colunas então $\text{car}[A|B] \leq 4$, o que implica que $\text{car}[A|B] = \text{car}(A) = 4$. Portanto, S é um SPI com $g = n - \text{car}(A) = 1$, pelo que a afirmação é falsa.

8.4 Avaliação sobre Determinantes

Teste 1

1. Considere o parâmetro real a e as matrizes reais

$$A = \begin{bmatrix} a & 2a & 0 & 0 \\ 4 & -1 & a+3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & a+3 & 1-a \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

- (a) Aplicando o teorema de Laplace mostre que $|A| = 2a(a+3)(a-1)$.
 - (b) Indique, justificando, para que valores de a :
 - (i) a matriz A é invertível.
 - (ii) o sistema homogêneo $AX = O_{4 \times 1}$ é possível e indeterminado.
 - (iii) a matriz I_4 é uma das possíveis matrizes na forma escalonada por linhas obtidas a partir de A .
 - (c) Determine a inversa da matriz B .
 - (d) Considere $a = -2$. Use a regra de Cramer para determinar a solução do sistema $A \begin{bmatrix} x & y & z & w \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}^T$.
 - (e) Considere $a = -2$ e duas matrizes reais C e D de ordem 4 tais que $|C| = 3$ e D é a matriz que se obtém de C trocando a terceira e a quarta colunas. Calcule o determinante da matriz $C^{-1}A$ e da matriz DC^T .
2. Seja A uma matriz de ordem n . Indique, justificando, se as afirmações são verdadeiras ou falsas.
- (a) Se A é uma matriz tal que $AA^T = I_n$ então $|A| = 1$.
 - (b) Se A é uma matriz antissimétrica de ordem ímpar então $|A| = 0$.

Teste 2

1. Considere o parâmetro real a e a matriz real $A = \begin{bmatrix} a+1 & a & 0 & 0 \\ a+1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a & a-1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \end{bmatrix}$.

- (a) Mostre que $|A| = -a^2(a-1)(a+1)$, identificando o(s) método(s) que utilizou.
 (b) Indique para que valores de a a matriz A é invertível.
 (c) Considerando $a = 2$, use a:

- (i) matriz adjunta para determinar a 1.^a linha da matriz inversa de A .
 (ii) regra de Cramer para determinar o valor da 2.^a componente da solução do sistema $A \begin{bmatrix} x & y & z & w \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$.

2. Sejam A , B e C matrizes de ordem 4 invertíveis tais que $|A| = -5$.

(a) Determine $\left| \left(-\frac{1}{5}(-A)^6(A^{-1})^3 \right)^T \right|$.

(b) Sabendo que $(A^T)^{-1} = BCB^{-1}$, determine $|C|$.

3. Sejam A e B duas matrizes de ordem n . Indique, justificando, se as afirmações são verdadeiras ou falsas.

- (a) Se A é uma matriz ortogonal então $|A| = \pm 1$.
 (b) $|A - B| = |A| - |B|$.

Teste 3

1. Considere o parâmetro real k e as matrizes reais

$$A = \begin{bmatrix} k & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -k & -1 & 1 & k \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ 2k \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} 2k & 0 & 0 & -k \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & k \end{bmatrix}.$$

- (a) Mostre que $|A| = k^2 + k$.
 (b) Indique, justificando, para que valores de k a matriz A é invertível.
 (c) Determine o elemento $(A^{-1})_{43}$ da matriz inversa de A .

- (d) Usando propriedades dos determinantes:
- (i) verifique que $|C| = -2|A|$.
 - (ii) calcule $|-2A^{-1}C^T A^2|$
- (e) Usando a regra de Cramer, determine o valor da 4.^a componente da solução do sistema de equações lineares $AX = B$.
2. Sejam A e B duas matrizes de ordem n . Indique, justificando, se as afirmações são verdadeiras ou falsas.
- (a) Se A é invertível então $|A^{-1}B^T A| = |B|$.
 - (b) Se $|A| = |B|$ então $A = B$.

Teste 4

1. Considere o parâmetro real k e as matrizes reais

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -k & 1 \\ 0 & k-2 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & k & -1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

- (a) Mostre que $|A| = 2(k-1)(k-2)$.
 - (b) Use determinantes para verificar que, para $k \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$, $(A^{-1})_{32} = 0$ e $(A^{-1})_{24} = \frac{2}{2-k}$.
 - (c) Usando a regra de Cramer, determine o valor da 2.^a componente da solução do sistema de equações lineares $AX = B$.
 - (d) Considere $k = 3$. Usando propriedades dos determinantes, calcule o determinante da matriz C que se obtém da matriz A por aplicações sucessivas das operações $L_1 \leftrightarrow L_4$, $L_4 \rightarrow L_4 - 3L_1$ e $L_3 \rightarrow 2L_3$.
2. Sejam A e B duas matrizes de ordem n . Indique, justificando, se as afirmações são verdadeiras ou falsas.
- (a) $|-A| = -|A|$.
 - (b) $|AB| \neq 0 \Leftrightarrow A$ e B são matrizes invertíveis.

Teste 5

1. Considere $A \in M_{8 \times 8}(\mathbb{R})$ com apenas os seguintes elementos não nulos $a_{11} = 2$, $a_{22} = 1$, $a_{33} = k$, $a_{44} = 1$, $a_{55} = -1$, $a_{66} = k^2 - 1$, $a_{77} = k$, $a_{78} = 2$, $a_{87} = 2$ e $a_{88} = k$.

Determine:

- (a) $|A|$. (b) o(s) valor(es) de k para os quais A é invertível.

2. Considere o parâmetro real k e as matrizes reais A , B , C e X definidas por:

$$A = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 & k \\ 0 & k & 1 & 0 \\ 0 & 1 & k & 1 \\ k & 0 & 0 & -k \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}.$$

- (a) Mostre que $|A| = 2k^2 - 2k^4$.
- (b) Determine os valores de k para os quais o sistema de equações lineares $AX = B$ é possível e determinado.
- (c) Usando a regra de Cramer, determine o valor da 4.^a componente da solução da equação $AX = C$ e indique para que valores de k a solução é possível.
- (d) Considerando $k = 2$, calcule o determinante da matriz $-\frac{1}{24}A^T A^{-1} \text{Adj}(A)$.

3. Seja A uma matriz de ordem n .

Mostre que $|AA^T| > 0$ se e só se A é invertível.

► Soluções dos Testes

Teste 1

1. (a) —

- (b) (i) $a \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 0, 1\}$. (ii) $a \in \{-3, 0, 1\}$. (iii) $a \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 0, 1\}$.

(c) $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/4 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$

(d) Como a 2.^a coluna de A é simétrica de $\begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}^T$ então a solução é $(x, y, z, w) = (0, -1, 0, 0)$.

(e) $|C^{-1}A| = 4$ e $|DC^T| = -9$.

2. (a) Afirmação falsa pois considerando $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ tem-se $AA^T = I_2$ e $|A| = -1 \neq 1$.

Em alternativa pode provar-se que $|A| = \pm 1$.

(b) Afirmação verdadeira.

Teste 2

1. (a) — (b) $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$.

(c) (i) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & -1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$. (ii) $y = -1$.

2. (a) $-\frac{1}{5}$. (b) $-\frac{1}{5}$.

3. (a) Afirmação verdadeira.

(b) Afirmação falsa pois considerando $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ tem-se

$$|A| = 0 = |B| \text{ e } |A - B| = -1 \neq 0 = |A| - |B|.$$

Teste 3

1. (a) — (b) $k \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$.

(c) Para $k \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$ tem-se

$$(A^{-1})_{43} = \frac{a_{34}^c}{|A|} = \frac{(-1)^{3+4} \begin{vmatrix} k & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -k & -1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = 0, \text{ pois } L_3 = -L_1.$$

(d) (i) — (ii) $|-2A^{-1}C^TA^2| = -32(k^2+k)^2$, com $k \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$.

(e) Para $k \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$ tem-se

$$w = \frac{|A_w|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} k & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ -k & -1 & 1 & 2k \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{2|A|}{|A|} = 2 \text{ pois a 4.ª coluna de } A_w \text{ é o}$$

dobro da 4.ª coluna de A .

2. (a) Afirmação verdadeira.

(b) Afirmação falsa pois considerando $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ tem-se
 $|A| = |B| = 0$ mas $A \neq B$.

Teste 4

1. (a) — (b) — (c) $y = 0$.

(d) Uma vez que

$$|A| \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_4} -|A_1| \xrightarrow{L_4 \rightarrow L_4 - 3L_1} -|A_2| \xrightarrow{L_3 \rightarrow 2L_3} -\frac{1}{2}|C|$$

então $|C| = -2|A| = -8$.

2. (a) Afirmação falsa. Só é verdadeira se n é ímpar.

(b) Afirmação verdadeira.

Teste 5

1. (a) $|A| = -2k(k^2 - 1)(k^2 - 4)$. (b) $k \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

2. (a) —

(b) O sistema é possível e determinado quando $|A| \neq 0$ ou seja, para $k \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$.

(c) Para $k \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ tem-se

$$w = \frac{|A_w|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} k & 0 & 0 & 2 \\ 0 & k & 1 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 \\ k & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{2k - 2k^3}{2k^2 - 2k^4} = \frac{2k(1 - k^2)}{2k^2(1 - k^2)} = \frac{1}{k}.$$

(d) Como $\text{Adj}(A) = |A| A^{-1}$ então $|\text{Adj}(A)| = ||A| A^{-1}| = |A|^4 \frac{1}{|A|} = |A|^3$.

Uma vez que $|A| = -24$ tem-se

$$\left| -\frac{1}{2} A^T A^{-1} \text{Adj}(A) \right| = \left(-\frac{1}{24} \right)^4 |A^T| |A^{-1}| |\text{Adj}(A)| = \frac{1}{24^4} |A| \frac{1}{|A|} |A|^3 = -\frac{1}{24}.$$

3. —

8.5 Avaliação sobre Espaços Vetoriais Reais

Teste 1

1. Considere em $\mathbb{R}^5$, os vetores $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ e $\mathbf{u}_3$ e o subespaço vetorial S :

$$\mathbf{u}_1 = (2, 0, 2, -2, 0), \mathbf{u}_2 = (-1, 1, 0, 1, 0), \mathbf{u}_3 = (0, 2, 2, 0, 1) \text{ e}$$

$$S = \{(x, y, z, w, t) \in \mathbb{R}^5 : x + y - z = 0 \wedge x + w = 0\}.$$

- (a) Mostre que $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ e $\mathbf{u}_3$ são linearmente independentes.
- (b) O vetor $\mathbf{u}_3$ é combinação linear de $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$? Justifique.
- (c) Determine uma base para S e justifique que $\dim S = 3$.
- (d) Verifique que $\mathbf{v} = (0, -2, -2, 0, -2)$ é combinação linear de $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ e $\mathbf{u}_3$.
- (e) Indique, justificando, o subespaço gerado por $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ e $\mathbf{u}_3$.
- (f) Indique, justificando, se $B_1 = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3\}$ e $B_2 = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ são bases de S .
- (g) Calcule $V = \text{ger}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ indicando o seu vetor genérico.

2. As afirmações são falsas. Justifique.

(a) $S = \left\{ \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$ é um subespaço vetorial de $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.

(b) O subespaço vetorial $S = \text{ger}\{(1, 1, 0), (1, -1, 1), (2, 0, 1)\}$ tem dimensão 3.

Teste 2

1. Considere em $\mathbb{R}^4$ os vetores $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ e $\mathbf{d}$, e o subespaço vetorial S :

$$\mathbf{a} = (-1, 2, 0, 0), \mathbf{b} = (1, -1, 2, 4), \mathbf{c} = (0, 3, 1, 1), \mathbf{d} = (-1, 4, 4, 8) \text{ e}$$

$$S = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : 4x + 2y - z = 0 \wedge 2z - w = 0\}.$$

- (a) Mostre que o conjunto $A = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ é linearmente independente.
- (b) Indique, justificando, a dimensão de $F = \text{ger}\{\mathbf{a}, \mathbf{c}\}$.
- (c) Determine uma base para S .

- (d) Verifique que d é combinação linear de a e de b .
- (e) Mostre que o subespaço gerado pelos vetores a , b e d é S .
2. As afirmações são falsas. Justifique.
- (a) $B = \{(1, 1, 0, 0, 1), (2, 2, 0, 3, 0)\}$ é uma base de
 $S = \text{ger} \{(1, 1, 0, 2, -1), (-1, -1, 0, -1, 0), (0, 0, 0, 1, -1), (1, 1, 0, 1, 0)\}$.
- (b) $S = \left\{ \begin{bmatrix} b-1 & b & c \end{bmatrix} : b, c \in \mathbb{R} \right\}$ é um subespaço vetorial de $M_{1 \times 3}(\mathbb{R})$.

Teste 3

1. Considere em $\mathbb{R}^4$ os vetores u_1, u_2, u_3 e u_4 , e o subespaço vetorial S :
- $$u_1 = (1, 0, 1, 0), u_2 = (2, -1, 2, 1), u_3 = (0, 1, 0, -1), u_4 = (k, 0, 2, k-2)$$
- e $S = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y - z + w = 0 \wedge z - x = 0\}$.
- (a) Determine k de modo que $u_4 \in S$.
- (b) Verifique se u_3 é combinação linear de u_1 e de u_2 .
- (c) Analise a dependência linear de u_1, u_2 e u_3 .
- (d) Determine uma base B de S e verifique que $\dim S = 2$.
- (e) Considerando $k = 2$, verifique que $S = \text{ger}\{u_1, u_2, u_4\}$.
2. As afirmações são falsas. Justifique.

- (a) Uma base de $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ pode ser formada pelas matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

- (b) $B = \{(1, -1, 0), (2, -1, 1), (-1, 0, -1)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.

Teste 4

1. Considere em $\mathbb{R}^3$, os vetores $u_1 = (1, 2, 0)$, $u_2 = (-1, 2, -4)$, $u_3 = (1, 1, 1)$ e o subespaço vetorial $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -2x + y + z = 0\}$.
- (a) Verifique se u_3 é combinação linear de u_1 e de u_2 .
- (b) Os vetores u_1, u_2 e u_3 são linearmente independentes? Justifique.

- (c) Determine uma base B para S .
- (d) Justifique que $A = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ é também uma base de S .
- (e) Indique as componentes de $\mathbf{u}_3$ na base A da alínea anterior.
2. As afirmações são falsas. Justifique.
- (a) Qualquer base de $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ tem dois vetores.
- (b) O subespaço vetorial

$$S = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y - z = 0 \wedge x + y - w = 0 \wedge z - w = 0\}$$

pode ser gerado pelo vetor $(0, 1, 1, 1)$.

Teste 5

1. Considere o subespaço vetorial S de $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$:

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : x - y = w - z \wedge x + z = 2w \right\}.$$

- (a) Justifique que $\dim S = 2$.
- (b) Mostre que $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ formam uma base de S .
- (c) Considere $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Indique, justificando, uma base de $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, caso exista, que:
- contenha apenas os vetores de uma base de S e o vetor $\mathbf{v}$.
 - contenha os vetores de uma base de S e o vetor $\mathbf{v}$.
2. As afirmações são falsas. Justifique.
- (a) Se $S = \{(x, x + y, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ então $S = \text{ger} \{(1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$.
- (b) O vetor $\mathbf{u} = (m, 1, 4), \forall m \in \mathbb{R}$ não é combinação linear dos vetores $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (-1, 1, 2)$ e $\mathbf{v}_3 = (-3, 1, 3)$.

► Soluções dos Testes

Teste 1

1. (a) —

(b) $\mathbf{u}_3$ não é combinação linear de $\mathbf{u}_1$ e de $\mathbf{u}_2$ porque os 3 vetores são LI.

(c) $S = \{(x, -x + z, z, -x, t) : x, z, t \in \mathbb{R}\}$,
 $B = \{(1, -1, 0, -1, 0), (0, 1, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 0, 1)\}$ é base de S ,
 $\dim S = \#B = 3$.

(d) $\mathbf{v}$ é combinação linear de $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ e de $\mathbf{u}_3$ pois $\mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2 - 2\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}$.

(e) $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \in S$ pois verificam as condições $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + w = 0 \end{cases}$.

Uma vez que $\dim S = 3$ e $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ e $\mathbf{u}_3$ são LI então $A = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ é base de S , pelo que $\text{ger}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\} = S$.

(f) B_1 não é base de S e B_2 é base de S .

$$(g) \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & x \\ 0 & 1 & y \\ 2 & 0 & z \\ -2 & 1 & w \\ 0 & 0 & t \end{array} \right] \rightarrow \cdots \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & z - x - y \\ 0 & 0 & w + x \\ 0 & 0 & t \end{array} \right],$$

$$V = \text{ger}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\} = \{(x, y, x + y, -x, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

2. (a) Como $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \notin S$ então S não é um subespaço vetorial de $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.

Assim, a afirmação é falsa.

(b) Como $(2, 0, 1) = (1, 1, 0) + (1, -1, 1)$ então $S = \text{ger}\{(1, 1, 0), (1, -1, 1)\}$. Uma vez que S é gerado por 2 vetores LI então a sua dimensão é 2. Portanto, a afirmação é falsa.

Teste 2

1. (a) —

(b) $\dim(F) = 2$.

- (c) $S = \{(x, y, 4x + 2y, 8x + 4y) : x, y \in \mathbb{R}\}$.
 $B = \{(1, 0, 4, 8), (0, 1, 2, 4)\}$ é base de S .
- (d) d é combinação linear de a e de b pois $3a + 2b = d$.
- (e) —
2. (a) Por inspeção, $S = \text{ger} \{(1, 1, 0, 2, -1), (1, 1, 0, 1, 0)\}$. O vetor $(2, 2, 0, 3, 0)$ não é combinação linear dos vetores de S , logo não pertence a S . Assim, B não é base de S . Portanto, a afirmação é falsa.
- (b) S não é um subespaço vetorial de $M_{1 \times 3}(\mathbb{R})$, pois $\mathbf{0}_{M_{1 \times 3}(\mathbb{R})} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \notin S$ uma vez que não verifica a condição $a = b - 1$. Portanto, a afirmação é falsa.

Teste 3

1. (a) $k = 2$.
- (b) Como $\mathbf{u}_3 = 2\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$ então $\mathbf{u}_3$ é combinação linear de $\mathbf{u}_1$ e de $\mathbf{u}_2$.
- (c) Como $\mathbf{u}_3$ é combinação linear de $\mathbf{u}_1$ e de $\mathbf{u}_2$ então $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ e $\mathbf{u}_3$ são LD.
- (d) $S = \{(x, y, x, -y) : x, y \in \mathbb{R}\}$, $B = \{(1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, -1)\}$ é base de S e $\dim S = \#B = 2$.
- (e) —

$$2. (a) \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \theta \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] = [A'|B']$$

Como o sistema associado a $[A'|B']$ é possível e indeterminado então os vetores são LD, pelo que as matrizes não formam uma base de $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$. Logo, a afirmação é falsa.

- (b) Como $(1, -1, 0) - (2, -1, 1) = (-1, 0, -1)$ então B é LD, donde B não é base de $\mathbb{R}^3$. Portanto, a afirmação é falsa.

Teste 4

1. (a) $\mathbf{u}_3 = \frac{3}{4}\mathbf{u}_1 - \frac{1}{4}\mathbf{u}_2$.
 (b) Como $\mathbf{u}_3$ é combinação linear de $\mathbf{u}_1$ e de $\mathbf{u}_2$ então os vetores são LD.
 (c) $S = \{(x, y, 2x - y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ e $B = \{(1, 0, 2), (0, 1, -1)\}$ é base de S .
 (d) —
 (e) Como $\mathbf{u}_3 = \frac{3}{4}\mathbf{u}_1 - \frac{1}{4}\mathbf{u}_2$ então as componentes são $\frac{3}{4}$ e $-\frac{1}{4}$, ou seja,

$$\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}_A$$
2. (a) Como $\dim M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) = 4$ então qualquer base de $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ tem que conter quatro vetores LI. Portanto, a afirmação é falsa.

(b) Como

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + y - w = 0 \\ z - w = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = x + y \\ w = x + y \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = x + y \\ w = x + y \end{cases}$$

então $S = \{(x, y, x + y, x + y) : x, y \in \mathbb{R}\}$, o qual depende de duas variáveis. Assim, são necessários pelo menos dois vetores para gerar S , pelo que a afirmação é falsa.

Teste 5

1. Como

$$\begin{cases} x - y = w - z \\ x + z = 2w \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -z + 2w - y = w - z \\ x = -z + 2w \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = w \\ x = -z + 2w \end{cases}$$

$$\text{tem-se } S = \left\{ \begin{bmatrix} -z + 2w & w \\ z & w \end{bmatrix} : z, w \in \mathbb{R} \right\}.$$

(a) Como S depende de 2 variáveis então $\dim S = 2$.

Alternativa: determina-se uma base para S . Por exemplo

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

(b) Tem-se

► $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in S$ pois verificam as condições $\begin{cases} y = w \\ x = -z + 2w \end{cases}$.

► $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ são LI pois não são múltiplos um do outro.

Como $\dim S = 2$ então quaisquer 2 vetores LI de S formam uma base de S , ou seja, $A_1 = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ é base de S .

(c) (i) Como $\dim M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) = 4$ então não existe uma base nas condições pretendidas pois qualquer base de $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ é formada por 4 vetores LI de $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ e apenas temos 3 vetores (2 vetores da base de S e o vetor $\mathbf{v}$).

(ii) Basta escolher um vetor que não pertence a S e que seja LI com $\mathbf{v}$, por

exemplo, $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Deste modo

$$A_2 = \left\{ \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

é base de $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.

2. (a) S é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$ de dimensão igual a 2. Logo, S tem, no mínimo, 2 geradores. O vetor $(1, 1, 1) \notin S$ e assim S não pode ser gerado pelos vetores propostos, pelo que a afirmação é falsa.

(b) $\alpha(1, 1, 1) + \beta(-1, 1, 2) + \gamma(-3, 1, 3) = (m, 1, 4)$ é equivalente a um sistema de equações lineares que só é possível para $m = -5$. Portanto, a afirmação é falsa.

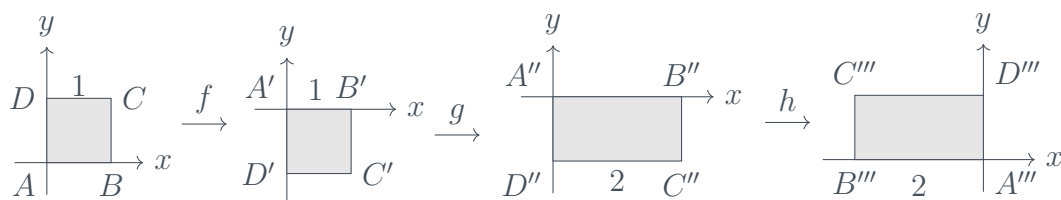
8.6 Avaliação sobre Transformações Lineares

Teste 1

1. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por:

$$T(x, y, z, w) = (x + z, x + y, z - y).$$

- Verifique se $\mathbf{u} = (2, -2, -2, 1) \in \text{Nuc}(T)$.
 - Determine uma base e a dimensão de $\text{Nuc}(T)$.
 - Verifique se $\mathbf{u}' = (2, -1, 2) \in \text{Im}(T)$.
 - Determine $\text{Im}(T)$.
 - Indique, justificando, se T é injetiva e se é sobrejetiva.
2. A figura representa a transformação provocada num quadrado unitário por aplicações sucessivas de três transformações lineares f, g e h .



- Classifique e defina matricialmente f, g e h .
 - Defina matricialmente a transformação linear T que permite passar diretamente do 1.º objeto para o 4.º objeto.
 - Defina matricialmente, se possível, a transformação inversa de T .
3. Indique, justificando convenientemente, se as afirmações são verdadeiras ou falsas.

(a) Se $T : M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^4$ é uma transformação tal que:

$$T \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = (0, 0, 0, 0)$$

então T é linear.

- (b) A transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y, z) = (0, 0, z)$ não é sobrejetiva.

Teste 2

1. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ definida por:

$$T(x, y, z, w) = (x + y + z - w, y - 2zw, z - w, -z + w).$$

- (a) Determine uma base e a dimensão de $\text{Nuc}(T)$.
 - (b) T é injetiva? Justifique.
 - (c) Determine a dimensão de $\text{Im}(T)$.
 - (d) T é sobrejetiva? Justifique.
2. Considere a transformação linear plana definida por $T(x, y) = \left(-\frac{y}{2}, 2x\right)$.
- (a) Determine a matriz canônica de T .
 - (b) Represente geometricamente a imagem, por T , do retângulo definido pela origem O e pelos pontos $A = (1, 0)$, $B = (1, 4)$ e $C = (0, 4)$.
 - (c) Classifique a transformação T .
3. Indique, justificando convenientemente, se as afirmações são verdadeiras ou falsas.
- (a) Seja $T : M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$ uma transformação tal que $T(A) = AB$ onde B é uma matriz 2×3 dada. Então T é linear.
 - (b) Seja $T : E \rightarrow E'$ uma transformação linear representada por uma matriz canônica do tipo 3×2 . Então $\dim E = 3$ e $\dim E' = 2$.

Teste 3

1. Considere a transformação linear $T : M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por:

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a, d + b, 2a).$$

- (a) Verifique se $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \in \text{Nuc}(T)$.

- $$M = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}.$$

Teste 4

- $$T_1(x, y) = (x + y, 0, 0, x + y) \text{ e } T_2(a, b, c, d) = (a + d, -a - d).$$

2. Indique, justificando convenientemente, se as afirmações são verdadeiras ou falsas.

(a) A transformação $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ definida por $T(x, y, z, w) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & |w| \end{bmatrix}$ é linear.

(b) A transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por:

$$T(x, y) = (\sqrt{3}x - y, x + \sqrt{3}y)$$

define uma rotação plana de 30° em torno da origem O .

(c) Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por:

$$T(x, y, z) = (3x + z, x + y, -3y + z).$$

Então T é invertível.

Teste 5

1. Considere o subespaço vetorial $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -2x + y + z = 0\}$ de $\mathbb{R}^3$ e a transformação linear $T : M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por:

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a + b, 2a + d, 2b - d).$$

(a) Verifique se $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \in \text{Nuc}(T)$.

(b) Determine $\text{Nuc}(T)$.

(c) Determine uma base B para $\text{Nuc}(T)$.

(d) T é injetiva? Justifique.

(e) $(1, 1, 1) \in \text{Im}(T)$? Justifique.

(f) Mostre que $\text{Im}(T) = S$.

(g) Determine uma base A para $\text{Im}(T)$.

(h) Justifique se T é sobrejetiva.

2. Indique, justificando convenientemente, se as afirmações são verdadeiras ou falsas.

(a) A transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por:

$$T(x, y, z) = (2x, x + y, y + z)$$

é invertível.

- (b) Sejam T_1 a transformação linear que define uma rotação de 180° em torno da origem O e T_2 a transformação linear que define a reflexão em relação à reta $y = x$. Então as matrizes canônicas de T_1 e de T_2 são comutáveis.

► Soluções dos Testes

Teste 1

1. (a) $\mathbf{u} \in \text{Nuc}(T)$ pois $T(\mathbf{u}) = (0, 0, 0)$.
- (b) $\text{Nuc}(T) = \{(x, -x, -x, w) : x, w \in \mathbb{R}\}$, uma base de $\text{Nuc}(T)$ pode ser $A = \{(1, -1, -1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ e $\dim \text{Nuc}(T) = \#A = 2$.
- (c) $\mathbf{u}' \notin \text{Im}(T)$.
- (d) $\text{Im}(T) = \{(a, b, a - b) : a, b \in \mathbb{R}\}$.
- (e) T não é injetiva nem é sobrejetiva.

2. (a) f é uma reflexão em relação ao eixo Ox , g é uma ampliação de fator 2 em relação ao eixo Ox e h é uma reflexão em relação à origem O . Assim, $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ com $M_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ com $M_g = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ com $M_h = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.
- (b) Considerando $T = h \circ g \circ f$ tem-se $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $M_T = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ uma vez que $M_T = M_h M_g M_f$, ou seja

$$M_T = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- (c) Como $M_{T^{-1}} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ então $T^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e

$$M_{T^{-1}} = \begin{bmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. (a) É uma afirmação falsa pois considerando a transformação

$$T : M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^4 \text{ definida por } T\left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}\right) = (x^2, 0, 0, 0)$$

não é linear. De facto, considerando por exemplo $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $\lambda = -2$ tem-se $T(-2\mathbf{u}) = (4, 0, 0, 0) \neq (-2, 0, 0, 0) = -2T(\mathbf{u})$.

- (b) Por exemplo, tem-se $(1, 0, 0) \notin \text{Im}(T)$ pelo que T não é sobrejetiva. Logo, a afirmação é verdadeira.

Teste 2

1. (a) Como $\text{Nuc}(T) = \{(-3w, 3w, w, w) : w \in \mathbb{R}\}$ então uma base de $\text{Nuc}(T)$ pode ser $\{(-3, 3, 1, 1)\}$ pelo que $\dim \text{Nuc}(T) = 1$.

- (b) T não é injetiva porque $\dim \text{Nuc}(T) = 1 \neq 0$.

- (c) Pelo teorema das dimensões tem-se

$$\dim \text{Im}(T) = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \text{Nuc}(T) = 4 - 1 = 3.$$

- (d) T não é sobrejetiva porque $\dim \text{Im}(T) = 3 \neq 4 = \dim \mathbb{R}^4$.

2. (a) $M_T = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$.

- (b) A imagem é o retângulo definido pelos pontos O, A', B' e C' , onde
 $T(\overrightarrow{OA}) = T(1, 0) = (0, 2) = \overrightarrow{OA'}$, $T(\overrightarrow{OB}) = T(1, 4) = (-2, 2) = \overrightarrow{OB'}$,
 $T(\overrightarrow{OC}) = T(0, 4) = (-2, 0) = \overrightarrow{OC'}$.

- (c) Rotação de ângulo 90° em torno da origem O , seguida de uma contração de fator $\frac{1}{2}$ em relação ao eixo Ox e de uma ampliação de fator 2 em relação ao eixo Oy .

3. (a) Tem-se

► sejam $A_1, A_2 \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ e assim

$$T(A_1 + A_2) = (A_1 + A_2)B = A_1B + A_2B = T(A_1) + T(A_2).$$

► sejam $A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ e assim

$$T(\alpha A) = (\alpha A)B = \alpha(AB) = \alpha T(A).$$

Logo T é uma transformação linear, pelo que a afirmação é verdadeira.

- (b) $M_T = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix}$ sendo as colunas desta matriz as imagens, por T , dos vetores

de base de E . Como o número de colunas é igual a 2, a base de E tem 2 vetores, logo $\dim E = 2$. A imagem de cada vetor de base tem 3 componentes, logo $\dim E' = 3$. A afirmação é falsa.

Teste 3

1. (a) $\mathbf{u} \in \text{Nuc}(T)$ pois $T(\mathbf{u}) = (0, 0, 0)$.
- (b) Como $\text{Nuc}(T) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & b \\ c & -b \end{bmatrix} : b, c \in \mathbb{R} \right\}$ então $A = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ é uma base de $\text{Nuc}(T)$ e $\dim \text{Nuc}(T) = \#A = 2$.
- (c) T não é injetiva pois $\dim \text{Nuc}(T) = 2 \neq 0$.
- (d) $\mathbf{w} \notin \text{Im}(T)$.
- (e) Como $\text{Im}(T) = \{(x, y, 2x) : x, y \in \mathbb{R}\}$ então $B = \{(1, 0, 2), (0, 1, 0)\}$ é uma base de $\text{Im}(T)$ e $\dim \text{Im}(T) = \#B = 2$.
- (f) T não é sobrejetiva uma vez que $\dim \text{Im}(T) = 2 \neq 3 = \dim \mathbb{R}^3$ ou porque $\text{Im}(T) \neq \mathbb{R}^3$.
- (g) Como T não é bijetiva então T não é invertível.
2. (a) $T(\overrightarrow{OA}) = T(2, 0) = (\sqrt{3}, -1) = \overrightarrow{OA'}$,
 $T(\overrightarrow{OB}) = T(2, 1) = \left(\sqrt{3} + \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right) = \overrightarrow{OB'}$.
 $T(\overrightarrow{OC}) = T(0, 1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \overrightarrow{OC'}$ e
A imagem é o retângulo definido pelos pontos O, A', B' e C' .
- (b) Rotação de ângulo -30° em torno da origem O .
3. (a) Tem-se
 - sejam $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ e
 $T(A + B) = (A + B)^T = A^T + B^T = T(A) + T(B)$.
 - sejam $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ e assim
 $T(\alpha A) = (\alpha A)^T = \alpha A^T = \alpha T(A)$.
Logo T é uma transformação linear, pelo que a afirmação é verdadeira.
- (b) Uma vez que $M_{T_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $M_{T_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ então

$$M_{T_1}M_{T_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = M_{T_2}M_{T_1}$$

pelo que a afirmação é verdadeira.

Teste 4

1. (a) (i) $\text{Nuc}(T_1) = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}$.
 (ii) Como $\text{Im}(T_1) = \{(a, 0, 0, a) : a \in \mathbb{R}\}$ então $B = \{(1, 0, 0, 1)\}$ é uma base de $\text{Im}(T_1)$.
 (b) T_1 não é injetiva nem sobrejetiva.
 (c) As matrizes canônicas de T_1 e de T_2 são, respetivamente,

$$M_{T_1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } M_{T_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

e assim

$$M_{T_1 \circ T_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = O_{4 \times 4}$$

e portanto, $T_1 \circ T_2 : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ com $M_{T_1 \circ T_2} = O_{4 \times 4}$.

Uma vez que

$$M_{T_2 \circ T_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$$

então $T_2 \circ T_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ com $M_{T_2 \circ T_1} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$.

2. (a) Considerando $\alpha = -1$ e $\mathbf{u} = (0, 0, 0, 1)$ tem-se

$$T(\alpha \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \alpha T(\mathbf{u})$$

pelo que T não é linear. Portanto, a afirmação é falsa.

(b) Uma rotação plana de 30° em torno da origem O é definida por

$$\begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 x - 1/2 y \\ 1/2 x + \sqrt{3}/2 y \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} \sqrt{3}x - y \\ x + \sqrt{3}y \end{bmatrix}$$

e portanto, a afirmação é falsa.

(c) $|M_T| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0$, pelo que T não é invertível e a afirmação é falsa.

Teste 5

1. (a) $\mathbf{u} \notin \text{Nuc}(T)$ pois $T(\mathbf{u}) = (0, -4, 4) \neq (0, 0, 0)$.

(b) $\text{Nuc}(T) = \left\{ \begin{bmatrix} a & -a \\ c & -2a \end{bmatrix} : a, c \in \mathbb{R} \right\}$.

(c) $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$.

(d) T não é injetiva pois $\text{Nuc}(T) \neq \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$.

(e) $(1, 1, 1) \in \text{Im}(T)$ pois $T\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = (1, 1, 1)$.

(f) —

(g) Como $S = \{(x, 2x - z, z) : x, z \in \mathbb{R}\}$ então $A = \{(1, 2, 0), (0, -1, 1)\}$.

(h) T não é sobrejetiva pois $\text{Im}(T) \neq \mathbb{R}^3$.

2. (a) $|M_T| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ logo T é invertível. A afirmação é verdadeira.

(b) As matrizes canónicas de T_1 e de T_2 são, respetivamente,

$$M_{T_1} = \begin{bmatrix} \cos(\pi) & -\sin(\pi) \\ \sin(\pi) & \cos(\pi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ e } M_{T_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

pelo que $M_{T_1}M_{T_2} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = M_{T_2}M_{T_1}$, ou seja,

M_{T_1} e M_{T_2} são comutáveis, donde a afirmação é verdadeira.

8.7 Avaliação sobre Valores e Vetores Próprios

Teste 1

1. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

- (a) Mostre que o vetor $\mathbf{v} = (0, 0, 0, 1)$ é vetor próprio de A .
 - (b) Mostre que $S = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^4 : (A - 2I_4)\mathbf{v} = \mathbf{0}_{4 \times 1}\}$ tem dimensão igual a 2.
 - (c) Determine as multiplicidades algébricas dos valores próprios de A .
 - (d) A é invertível? Justifique, atendendo aos valores próprios de A .
2. Mostre que a reflexão em relação à reta $y = x$ tem valores próprios 1 e -1 .

Teste 2

1. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$.

- (a) Mostre que os valores próprios de A são -1 e 2 e indique as respetivas multiplicidades algébricas.
 - (b) Verifique que o sistema $(A - 2I_3)X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ admite como conjunto solução $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y - 2z = 0\}$.
 - (c) Indique, justificando, o subespaço próprio associado ao maior valor próprio de A .
 - (d) Mostre que A é diagonalizável e determine as matrizes P e D tais que $P^{-1}AP = D$.
2. Seja A uma matriz de ordem 2, com valores próprios reais, tal que $\text{tr}(A) = 8$ e $|A| = 12$. Determine os valores próprios de A .

Teste 3

1. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

- Determine os valores próprios de A .
 - Determine a dimensão do subespaço próprio de A associado ao valor próprio $\lambda = 2$.
 - Mostre que A é diagonalizável e determine as matrizes P e D tais que $P^T A P = D$.
2. Seja A uma matriz de ordem 6, com valores próprios reais, que satisfaz as condições:
- tem 2 valores próprios distintos.
 - não é invertível.
 - os seus valores próprios têm multiplicidades algébricas iguais.
 - $S = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^6 : (A + 2I_6)\mathbf{v} = \mathbf{0}_{6 \times 1}\}$ tem dimensão 3.

Mostre que o traço de A é igual a -6 .

Teste 4

1. Considere a transformação plana T cuja matriz canónica é $M = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ e o triângulo cujos vértices são $A = (1, -1)$, $B = (3, 1)$ e $C = (0, 2)$.
- Determine as imagens por T dos vetores $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OC}$, sendo O a origem do referencial.
 - Represente geometricamente o triângulo e a sua imagem por T .
 - Atendendo às alíneas anteriores, indique, justificando, quais dos vetores $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OC}$ são vetores próprios de T .
 - Mostre que A é diagonalizável e determine as matrizes P e D tais que $P^{-1} A P = D$.

2. Seja A uma matriz de ordem 4 com valores próprios $\lambda = 0$ (com multiplicidade geométrica 2) e $\lambda = 1$ (com multiplicidade algébrica 2).

Indique os possíveis valores para a multiplicidade algébrica de $\lambda = 0$ e para a multiplicidade geométrica de $\lambda = 1$.

Teste 5

1. Considere a matriz real $A = \begin{bmatrix} k & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & k & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & k & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & k \end{bmatrix}$.

Sabendo que os números reais $k + 1$, $k - 1$ e k são valores próprios de A :

- (a) determine a dimensão do subespaço próprio associado ao valor próprio k .
- (b) mostre que o polinómio característico de A é $p(\lambda) = (k - \lambda)^4 [(k - \lambda)^2 - 1]$.
- (c) determine a multiplicidade algébrica de cada valor próprio de A .
- (d) verifique se a matriz A é diagonalizável.

2. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Indique, justificando, os valores próprios de A e as respectivas multiplicidades algébricas.

► Soluções dos Testes

Teste 1

1. (a) Como

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

então v é vetor próprio associado ao valor próprio $\lambda = 1$.

(b) Como

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2x \\ w = 0 \end{cases}$$

então $S_{\lambda=2} = \{(x, y, 2x, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}$ e $\dim S_{\lambda=2} = 2$.

(c) A matriz A é de ordem 4, logo tem 4 valores próprios. Pela alínea (a), 1 é valor próprio e pela alínea (b), 2 é valor próprio com multiplicidade algébrica igual ou superior a 2. Como o traço de A é igual à soma dos seus valores próprios tem-se

$$\text{tr}(A) = 2 + 2 + 1 + \lambda \Leftrightarrow 0 + 2 + 3 + 1 = 5 + \lambda$$

ou seja, o valor próprio em falta é 1.

Conclui-se que $m_a(1) = 2$ e $m_a(2) = 2$.

(d) Sim, visto que $|A| = 4 \neq 0$.

2. Uma vez que a matriz canónica da reflexão é $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ então o polinómio característico é $p(\lambda) = \lambda^2 - 1$ e assim os valores próprios são 1 e -1 pois são as raízes de p .

Teste 2

1. (a) Como $p(\lambda) = -(\lambda + 1)(\lambda - 2)^2$ então -1 e 2 são os valores próprios de A com $m_a(-1) = 1$ e $m_a(2) = 2$.

(b) —

(c) Como o 2 é o maior valor próprio de A então o subespaço próprio associado é o subespaço vetorial S da alínea anterior.

(d) Como $m_g(2) = 2 = m_a(2)$ então A é diagonalizável. Uma vez que

$$S_{\lambda=2} = \{(x, 2z, z) : x, z \in \mathbb{R}\} = \text{ger} \{(1, 0, 0), (0, 2, 1)\}$$

$$S_{\lambda=-1} = \{(x, x, -x) : x \in \mathbb{R}\} = \text{ger} \{(1, 1, -1)\}$$

então

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

2. $\lambda = 2$ e $\lambda = 6$.

Teste 3

1. (a) Como $p(\lambda) = \lambda(\lambda - 2)^3$ então 0 e 2 são os valores próprios de A com $m_a(0) = 1$ e $m_a(2) = 3$.

(b) $m_g(2) = 3$ pois $S_{\lambda=2} = \{(x, y, x, w) : x, y, w \in \mathbb{R}\}$.

(c) Como $m_g(2) = 3 = m_a(2)$ então A é diagonalizável.

$$P = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

2. Como -2 e 0 são os valores próprios de A com $m_a(-2) = m_g(-2) = 3$ então $\text{tr}(A) = -2 - 2 - 2 + 0 + 0 + 0 = -6$.

Teste 4

1. (a) Tem-se

$$\blacktriangleright T(\overrightarrow{OA}) = T(1, -1) = (-2, 2) = \overrightarrow{OA'}.$$

$$\blacktriangleright T(\overrightarrow{OB}) = T(3, 1) = (6, 2) = \overrightarrow{OB'}.$$

$$\blacktriangleright T(\overrightarrow{OC}) = T(0, 2) = (6, -2) = \overrightarrow{OC'}.$$

(b) A imagem é o triângulo definido pelos pontos A' , B' e C' .

(c) Tem-se

$$\blacktriangleright T(\overrightarrow{OA}) = T(1, -1) = (-2, 2) = -2\overrightarrow{OA} \rightarrow \overrightarrow{OA} \text{ é vetor próprio de } T \text{ associado ao valor próprio } \lambda = -2.$$

$$\blacktriangleright T(\overrightarrow{OB}) = T(3, 1) = (6, 2) = 2\overrightarrow{OB} \rightarrow \overrightarrow{OB} \text{ é vetor próprio de } T \text{ associado ao valor próprio } \lambda = 2.$$

$$\blacktriangleright T(\overrightarrow{OC}) = T(0, 2) = (6, -2) \neq \lambda(0, 2), \forall \lambda \in \mathbb{R}, \text{ ou seja, } \overrightarrow{OC} \text{ não é vetor próprio de } T.$$

(d) Como A tem dois valores próprios distintos então é diagonalizável.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

2. Dado que $2 = m_g(0) \leq m_a(0)$, $m_a(1) = 2$ e $m_a(0) + m_a(1) = 4$ então $m_a(0) = 2$.

Tendo em conta que $1 \leq m_g(1) \leq m_a(1) = 2$ então $m_g(1) = 1 \vee m_g(1) = 2$.

Teste 5

1. (a) $m_g(k) = 1$.
 (b) —
 (c) $m_a(k) = 4$, $m_a(k+1) = 1$ e $m_a(k-1) = 1$.
 (d) Como $m_g(k) \neq m_a(k)$ então a matriz A não é diagonalizável.
2. Como A tem linhas iguais então $|A| = 0$, pelo que 0 é um valor próprio. Atendendo a que $S_{\lambda=0} = \{(-2y - 3z, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\}$ então $m_g(0) = \dim S_{\lambda=0} = 2$, o que implica que $m_a(0) \geq 2$. Uma vez que a matriz A é de ordem 3 então tem 3 valores próprios. Como o traço de A é a soma dos seus valores próprios então o outro valor próprio é 6. Portanto, $m_a(0) = 2$ e $m_a(6) = 1$.

Bibliografia Recomendada

Anton, H., Rorres, C., & Kaul, A. (2019). *Elementary linear algebra: Applications version* (12th ed.). Wiley.

Axler, S. (2023). *Linear algebra done right* (4th ed.). Springer.

Azevedo, A. (2021). *Álgebra linear I* (2.^a ed.). Universidade do Minho.

Boldrini, J. L., Costa, S. I. R., Figueiredo, V. L., & Wetzler, H. G. (1986). *Álgebra linear*. Harper & Row.

Boulos, P., & Camargo, I. (2005). *Geometria analítica: Um tratamento vetorial*. Pearson.

Boyd, S., & Vandenberghe, L. (2018). *Introduction to applied linear algebra: Vectors, matrices, and least squares*. Cambridge University Press.

Cabral, I., Perdigão, C., & Saiago, C. (2024). *Álgebra linear: Teoria, exercícios resolvidos e propostos* (7.^a ed.). Dinternal.

Cohen, M. X. (2021). *Linear algebra: Theory, intuition, code*. Sincxpress.

Deisenroth, M. P., Faisal, A. A., & Ong, C. S. (2020). *Mathematics for machine learning*. Cambridge University Press.

Dym, H. (2023). *Linear algebra in action* (3rd ed.). American Mathematical Society.

Friedberg, S. H., Insel, A. J., & Spence, L. E. (2019). *Linear algebra* (5th ed.). Pearson.

Gonçalves, R. J. C., & Abreu, T. (2023). *Álgebra linear e geometria analítica: Teoria e prática*. Edições Sílabo.

Hefferon, J. (2023). *Linear algebra* (4th ed.). <https://hefferon.net/linearalgebra/>

Kaabar, M. K. A. (2018). *A first course in linear algebra: Study guide for the undergraduate linear algebra course*. arXiv. <https://arxiv.org/abs/1807.09352>

Lay, D. C., Lay, S. R., & McDonald, J. J. (2021). *Linear algebra and its applications* (6th ed.). Pearson.

Lima, E. L. (2009). *Álgebra linear*. IMPA.

Macedo, M. (2023). *Álgebra linear: Matrizes, determinantes e sistemas*. UCE Editora.

Margalit, D., & Rabinoff, J. (2019). *Interactive linear algebra*. Georgia Institute of Technology. <https://textbooks.math.gatech.edu/ila/>

Poole, D. (2025). *Linear algebra: A modern introduction* (5th ed.). Cengage Learning.

Silva e Castro, A. C. M., Viamonte, A. J., & Teixeira de Sousa, A. A. V. (2017). *Álgebra matricial: Conceitos, exercícios e aplicações* (2.^a ed.). Engebook.

Strang, G. (2019). *Linear algebra and learning from data*. Wellesley-Cambridge Press.

Strang, G. (2020). *Linear algebra for everyone*. Wellesley-Cambridge Press.

Strang, G. (2023). *Introduction to linear algebra* (6th ed.). Wellesley-Cambridge Press.

Vieira, L. A., & Gonçalves, R. J. (2023). *Álgebra linear: Aplicações lineares, determinantes e espaços euclidianos* (2.^a ed.). Universidade do Porto.

Sobre os Autores



Leonel da Silva Vicente é professor adjunto do Departamento de Matemática da Escola Superior de Tecnologia e Gestão (ESTG) do Instituto Politécnico de Leiria. Licenciado em Matemática, é mestre em Otimização e Teoria do Controlo pela Universidade de Aveiro e doutorado em Probabilidades e Estatística pela Universidade de Lisboa. Desde 1992, leciona unidades curriculares de Álgebra Linear, Matemática, Estatística e Investigação Operacional em cursos de Engenharia, Gestão, Contabilidade e Turismo.

A paixão pela Álgebra Linear acompanha o seu percurso desde os primeiros anos de docência na Universidade de Aveiro, refletindo-se na leção desta área em todos os cursos de Engenharia da ESTG.



Carlos Alberto da Silva Sanches de Campos é professor adjunto do Departamento de Matemática da Escola Superior de Tecnologia e Gestão do Instituto Politécnico de Leiria. É licenciado em Matemática pela Universidade de Coimbra e pela Universidade de Valência, mestre em Matemática Computacional pela Universidade do Minho e doutorado em Computação Paralela e Distribuída pela Universidade Politécnica de Valência. Desde 1995, leciona unidades curriculares de Álgebra Linear, Análise Matemática, Matemática Aplicada e Processamento de Imagem nos cursos de Engenharia e Biomecânica.

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg)$$

$$AX = B$$

$$A^{-1}A = I_n$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$A^T = [a_{ij}]^T = [a_{ji}]$$

$$\det(A) \neq 0$$

$$(AB)^T = B^T A^T$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$(A^T)^T = A$$

$$\det(AB) = \det(A) \det(B)$$

$$\det(A^T) = \det(A)$$

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

$$\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A \text{ é invertível}$$

$$AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$$

$$AV = \lambda V$$

$$\det(A - \lambda I_n) = 0$$

$$\text{proj}_{\vec{u}} \vec{V} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{V}}{\|\vec{u}\|^2} \quad \vec{u}, \vec{u} \neq \vec{0}$$

$$\text{proj}_{\vec{u}} \vec{V} \parallel \vec{u}$$

$$\vec{u} \times \vec{v}$$