DESAFIOS 2012: A NOÇÃO DE NÚMERO RACIONAL EM ALUNOS DO 4.º ANO DE ESCOLARIDADE

Dissertação de Mestrado

Andreia Reis Henriques Silva Simões

Trabalho realizado sob a orientação de

Professora Doutora Hélia Gonçalves Pinto, ESECS/IPL

Leiria, março 2016

Mestrado em Educação Matemática no Pré-Escolar e 1.º Ciclo do Ensino Básico

ESCOLA SUPERIOR DE EDUCAÇÃO E CIÊNCIAS SOCIAIS

INSTITUTO POLITÉCNICO DE LEIRIA

AGRADECIMENTOS

Este espaço é dedicado a todos os que me ajudaram e tornaram possível a realização desta tese.

Começo por agradecer à minha orientadora, Professora Doutora Hélia Gonçalves Pinto, como professora, como investigadora, como amiga sempre presente, com as suas críticas construtivas e apoio, com que me foi auxiliando ao longo deste processo.

À Escola Superior de Educação e Ciências Socais de Leiria que me disponibilizou as provas " Desafios 2012", documentos base deste estudo.

À Patrícia e ao Renato que quando precisei estiveram sempre disponíveis, obrigada.

Ao meu marido e filhas que sempre me apoiaram e suportaram as minhas ausências, muito obrigada.

À minha família, pai e irmãos, e amigos, que sempre me incentivaram e apoiaram.

À minha Mãe…com saudade…

RESUMO

Com este estudo pretendi perceber as estratégias e dificuldades que persistem em alunos que supostamente terão sido alvo de um trabalho com números racionais nos primeiros anos de escolaridade, mais concretamente perceber a noção de partilha equitativa, bem como de comparação de frações dos referidos alunos. Decorre do referido objetivo as seguintes questões de investigação: (1) Que estratégias e dificuldades apresentam os alunos na resolução de situações de partilha equitativa? (2) Que estratégias e dificuldades apresentam os alunos na comparação de números racionais? Para atingir o objetivo pretendido recorri a uma investigação de cariz interpretativo, abordagem essencialmente qualitativa e pesquisa documental, pelo que analisei as provas de Matemática realizadas por 1330 alunos de 21 agrupamentos do Distrito de Leiria, no âmbito do concurso "DESAFIOS 2012", mais concretamente as respostas dadas a uma tarefa relativa aos números racionais. De salientar que os alunos que participaram no concurso "DESAFIOS 2012", frequentaram o 1.º ciclo do ensino básico, já no âmbito da entrada em vigor do Programa de Matemática do Ensino Básico - PMEB (ME, 2007). Os resultados levam a concluir que uma das estratégias mais usada é o recurso à modelação da tarefa para a partilha equitativa das sandes, bem como formas intuitivas de pensamento para a comparação de frações. As dificuldades prendem-se essencialmente com a modelação da tarefa e identificação das quantidades envolvidas, bem como o recurso ao pensamento diferencial para a comparação das frações.

Palavras-chave

Aprendizagem, dificuldades, ensino, estratégias, números racionais.

ABSTRACT

With this study I aimed to understand the strategies and difficulties that persist in students who have allegedly been exposed to the study of rational numbers in the early years of schooling, more precisely, to understand the concept of equitable sharing and comparison among the referred students' fractions. With regards to the mentioned objective, the following research questions are put: (1) what strategies and difficulties do students have in solving situations of equitable sharing? (2) What strategies and difficulties do students have in comparing rational numbers? To achieve the desired goal I recurred to a research, with nature was merely interpretative, to an essentially qualitative approach and finally, to a documentary research. Therefore, I analyzed the evidence of mathematics held by 1330 students from 21 groups of the District of Leiria, in the contest "DESAFIOS 2012", essentially the answers given to a task on the rational numbers. It follows that students who participated in the contest "DESAFIOS 2012", attended the 1st cycle of basic education, already under the new program of the Basic School Math Program - PMEB (ME, 2007). The results lead to the conclusion that one of the most used strategies is the resource to the task of modeling for the equitable sharing of sandwiches and intuitive ways of thinking for comparing fractions. As for the difficulties, these concern mainly the modeling task and identification of the quantities involved and the use of differential thinking to the comparison of fractions.

Key words

Learning, difficulties, teaching, strategies, rational numbers.

Índice Geral

INTRODUÇÃO

Neste capítulo apresento a minha motivação para este estudo, bem como os objetivos e questões de investigação. Segue-se a contextualização e pertinência do estudo e por último, a sua organização.

MOTIVAÇÃO, OBJETIVO E QUESTÕES DE INVESTIGAÇÃO

Durante a minha experiência como professora do 2.º ciclo tenho-me deparado com as dificuldades dos alunos na aprendizagem dos números racionais e com as minhas no seu ensino. Por isso, quando surgiu a oportunidade de ser a professora responsável pela implementação de uma experiência de ensino dos números racionais, em colaboração com uma investigadora no âmbito do seu Mestrado em Educação Matemática, aceitei de imediato, pois era uma oportunidade de adquirir conhecimento relativamente ao ensino e aprendizagem deste conjunto de números e assim, melhorar a minha prática letiva.

Mais tarde, fui convidada a participar no Projeto de Investigação " Desenvolvendo o sentido de número: perspectivas e exigências curriculares", entre 2003/2007, que estudou o sentido de número nos alunos dos 5 aos 12 anos. Esta investigação englobava os números racionais não negativos, particularmente os representados por frações, para ao alunos do 2.º ciclo. Pretendia-se com este projeto: (i) perceber como as crianças desenvolvem o sentido de número racional, tendo como primeira abordagem contextos de partilha equitativa e partir de estratégias informais dos alunos na resolução de problemas; (ii) avaliar, do ponto de vista do professor as vantagens desta abordagem relativamente às suas práticas anteriores; e (iii) elaborar materiais de apoio para professores do ensino básico no âmbito do desenvolvimento do sentido de número racional, através do aperfeiçoamento das tarefas propostas e implementadas (Monteiro& Pinto, 2005). Neste projeto fui responsável pela implementação das tarefas produzidas para o estudo dos números racionais, mais uma experiência que me enriqueceu profissionalmente no âmbito do ensino e aprendizagem deste conjunto de números.

Depois de ter participado no referido projeto voltei a ser convidada para mais uma implementação de uma unidade de ensino para os números racionais no âmbito de uma tese de doutoramento em Educação Matemática. Novo desafio, novas aprendizagens e a sensação de que quanto mais estudo, o ensino e a aprendizagem dos números racionais, mais tenho para aprender.

Cada vez mais consciente de que os números racionais são um tópico difícil de ensinar e de aprender, considerei a introdução do estudo deste conjunto de números no 1.º Ciclo do Ensino Básico (ME, 2007), um avanço para a sua compreensão. Porém os alunos continuam a chegar ao 2.º Ciclo com muitas dificuldades. Logo, este continua a ser um assunto a precisar de investigação, acrescendo o facto de que a mesma nesta área, continua a ser escassa em Portugal. Assim, importa perceber as estratégias e dificuldades que persistem em alunos que supostamente terão sido alvo de um trabalho com números racionais nos primeiros anos de escolaridade. Para o efeito surgiu a oportunidade de analisar as provas de Matemática realizadas por 1330 alunos de 21 agrupamentos do Distrito de Leiria, no âmbito do concurso "DESAFIOS 2012", mais concretamente as respostas dadas a uma tarefa relativa aos números racionais. Neste contexto tentei perceber a noção de partilha equitativa, bem como de comparação de frações dos referidos alunos. Decorre do referido objetivo as seguintes questões de investigação:

1. Que estratégias e dificuldades apresentam os alunos na resolução de situações de partilha equitativa?
2. Que estratégias e dificuldades apresentam os alunos na comparação de números racionais?

De salientar que os alunos que participaram no concurso "DESAFIOS 2012", frequentaram o 1.º ciclo do ensino básico, já no âmbito da entrada em vigor do Programa de Matemática do Ensino Básico - PMEB (ME, 2007).

CONTEXTO E PERTINÊNCIA DO ESTUDO

O PMEB (ME, 2007) encontra-se organizado em quatro grandes temas: Números e Operações, Álgebra, Geometria e Organização e Tratamento de Dados. Relativamente ao tema Números e Operações, salienta que o seu estudo nos primeiros nos assenta em três ideias fundamentais: promover a compreensão dos números e operações, desenvolver o sentido de número e desenvolver a fluência de cálculo. Uma das alterações relativamente ao programa anterior é o facto de surgirem agora em paralelo o estudo das representações fracionárias e decimal dos números racionais. Sugere-se que, em cada situação o aluno seja capaz de usar a representação que ache mais adequada, não descurando a capacidade de passar de uma representação para a outra. No PMEB (ME, 2007) refere-se ainda, que os números racionais deverão começar a ser trabalhados nos dois primeiros anos devendo-se para isso fazer uma abordagem intuitiva a partir de situações de partilha equitativa e de divisão da unidade em partes iguais, recorrendo para isso a modelos e a representações em forma de fração nos casos mais simples. Durante o 3.º e 4.º ano, este estudo deverá ser mais aprofundado, utilizando, para isso, problemas que permitam trabalhar os diferentes significados de frações, e introduzindo números representados na forma decimal, a partir de situações de partilha equitativa ou de medida, não esquecendo a referência à unidade de medida. Salienta-se ainda, a importância de durante o estudo dos números racionais se fazer a exploração de situações de ampliação de estratégias de cálculo mental e escrito e a realização de algoritmos. Os alunos devem também ser confrontados com situações que lhes permitam relacionar as diferentes representações, a fracionária e a decimal. Neste ciclo, o trabalho com números racionais, deverá ser explorado com situações que contribuam para o desenvolvimento da compreensão dos conceitos de razão e proporção, fazendo-o, no entanto, de forma intuitiva. Neste sentido, na articulação do 1.º ciclo com o 2.º ciclo no âmbito do tema Números e Operações, o PMEB (ME, 2007), refere que os alunos durante o 1.ºciclo desenvolvem o sentido de número e adquirem uma compreensão dos números naturais e da sua representação no sistema de numeração decimal. Iniciam um trabalho com frações de forma intuitiva, desenvolvendo também destreza de cálculo com números naturais e racionais não negativos na representação decimal.

De acordo com a literatura de investigação (e.g. Lamon (2007), Behr, Lesh, Post e Silver (1983)), os números racionais são um dos tópicos mais importantes do ensino básico e dos mais difíceis de ensinar e aprender. Lamon (2007) considera os números racionais como um dos tópicos matemáticos mais complexo e cognitivamente desafiador do currículo escolar, que necessita de mais tempo para o seu desenvolvimento e essencial para o sucesso em Matemática. Refere-o como um dos tópicos mais difíceis de ensinar e a necessitar de investigação, já que na sua opinião pouco se tem progredido na descoberta do seu ensino-aprendizagem. Salienta ainda, que o domínio dos números racionais tem sido entendido como uma situação de investigação difícil. Também Behr, Lesh, Post e Silver (1983), consideram os números racionais como o tópico mais importante do currículo do ensino básico, já que promove o desenvolvimento de estruturas cognitivas essenciais para a aprendizagem matemática futura. Behr *et al.*, (1983) referem esta importância segundo três vertentes: (i) prática, na medida em que a capacidade de lidar com estes conceitos melhora a capacidade de compreender e resolver problemas do dia-a-dia; (ii) psicológica, uma vez que os números racionais proporcionam o desenvolvimento das estruturas mentais necessárias ao crescimento intelectual; e (iii) matemática, dado que a compreensão destes conceitos proporciona uma base para futuros conhecimentos algébricos elementares. Estes autores consideram que as dificuldades com que os alunos se deparam na aprendizagem de números racionais podem resultar: (i) da multiplicidade de significados das frações; (ii) da conceptualização da unidade em diversos problemas que envolvam frações; e (iii) da utilização precoce de regras e algoritmos no estudo de números racionais. Também Vanhille e Baroody (2002) salientam como causas das dificuldades com frações e operações com frações: (i) a falta de existência de experiências concretas pelos alunos, necessária à compreensão conceptual de frações, ou a falta de conexão entre estas experiências e os conceitos abstratos; e (ii) um fraco desenvolvimento do raciocínio multiplicativo, fundamental para a compreensão das frações, que segundo os autores, se deve a um inadequado desenvolvimento das estruturas multiplicativas. Com efeito, a compreensão de muitos dos conceitos relativos aos números racionais está baseada em relações entre números inteiros de natureza multiplicativa, nomeadamente a multiplicação e divisão de números inteiros e suas relações (Vergnaud, 1988, citado em Pinto (2011)).

ORGANIZAÇÃO DO ESTUDO

Deste estudo faz parte um primeiro capítulo onde apresento a introdução ao mesmo, nomeadamente a minha motivação para o estudo, os objetivos e questões de investigação. Segue-se a contextualização e pertinência do estudo e por último, a sua organização.

No segundo capítulo apresento a fundamentação teórica do estudo, que começa com uma explanação dos aspetos principais que emanam da literatura de investigação sobre o ensino e a aprendizagem dos números racionais. Seguem-se orientações curriculares para o seu ensino nos primeiros anos, nomeadamente no preconizado para o 1.º ciclo do ensino básico pelo PMEB (ME, 2007), por ser o programa que se encontrava em vigor à data da recolha de dados para este estudo.

No terceiro capítulo apresento a metodologia usada neste estudo, desde as opções metodológicas fundamentadas aos procedimentos metodológicos.

No quarto capítulo apresento e discuto os resultados da investigação, que resultam de uma análise das respostas dadas, por 1330 alunos de 21 agrupamentos do Distrito de Leiria, à tarefa "Visita de estudo", da prova eliminatória do concurso "Desafios 2012". Deste modo, tentei responder às questões de investigação do estudo e assim atingir o objetivo proposto, ou seja, perceber a noção de partilha equitativa, bem como de comparação de frações de alunos do 4.º ano de escolaridade que frequentavam o 1.º ciclo do ensino básico aquando da entrada em vigor do PMEB (ME, 2007).

Por último, surge o quinto capítulo, onde apresento um breve resumo do estudo, as principais conclusões, limitações e recomendações do estudo e por fim, uma reflexão.

Números racionais nos primeiros anos de escolaridade

Neste capítulo apresento a fundamentação teórica do estudo, que começa com uma explanação dos aspetos principais que emanam da literatura de investigação sobre o ensino e a aprendizagem dos números racionais. Seguem-se orientações curriculares para o seu ensino nos primeiros anos, nomeadamente no preconizado para o 1.º ciclo do ensino básico pelo PMEB (ME, 2007), por ser o programa que se encontrava em vigor à data da recolha de dados para este estudo.

Dificuldades no ensino e na aprendizagem dos números racionais

O conceito de número racional é tido pela investigação como um conceito difícil de ensinar e de aprender. Por conseguinte, Post (1981) salienta que inúmeros estudos desenvolvidos pelo *Rational Number Project* (RNP) demonstram as dificuldades que os alunos apresentam na aprendizagem do número racional, que para este autor se prendem essencialmente com o facto de muitos alunos não terem um conceito funcional interno de número racional. Refere que lhes parece faltar a noção quantitativa de número racional, incluindo a perceção de que os números racionais representam números, e a compreensão de que os números racionais podem ser representados de várias formas – numerais decimais, razões, divisões, pontos de uma reta numérica, medidas, e partes de um todo.

Também Hiebert e Behr (1991) verificaram que as crianças não entendem um número racional ou fração, como um simples número. A ideia de que a fração é um par de números naturais persiste em muitas crianças, por um período de tempo considerável, mesmo depois de terem iniciado o estudo dos racionais. Estando os alunos habituados a trabalhar com números inteiros a tendência é transferir para os racionais na forma fracionária as regras de cálculo utilizadas com os inteiros, operando com as frações como se fossem inteiros. Daqui resulta, por exemplo, a soma e subtração de numeradores e dos denominadores.

Segundo Berhr e Post (1992) o facto de o conjunto de números racionais não ser baseado em algoritmos de contagem de qualquer tipo, tal como o conjunto de números naturais, que até aqui permitia aos alunos contarem de uma forma ou de outra e conseguirem encontrar a solução para os problemas, leva-os a hesitarem na contagem de números racionais devido essencialmente, à densidade deste conjunto. Também Monteiro e Pinto (2005) salientam a densidade dos números racionais como uma das causas das dificuldades dos alunos com estes números, já que no conjunto dos inteiros, os números sucedem-se uns aos outros, enquanto no dos racionais existe sempre um número entre eles, o que dificulta bastante a sua compreensão.

Monteiro e Pinto (2005, 2007) elencam outras dificuldades reconhecidas na literatura e inerentes às próprias frações em contexto escolar, como por exemplo o facto de a sua representação implicar dois números, que por si só, já é uma dificuldade para os alunos. Assim, consideram que muitos dos erros de cálculo resultam do facto de os alunos pensarem que estão perante dois números, nomeadamente quando somam dois números representados por frações, adicionam os numeradores e os denominadores. As autoras apresentam ainda outra dificuldade relativa a este conjunto de números e que advém também, do conhecimento adquirido com os números inteiros. Assim, enquanto com os números inteiros na multiplicação o produto é sempre maior e na divisão o quociente é sempre menor que o dividendo, o mesmo não acontece com os números racionais não inteiros, não sendo fácil para uma criança entender este facto. Monteiro e Pinto (2005, 2007) salientam ainda, a representação de números fracionários na forma de fração como uma fonte de dificuldades, já que por exemplo, comparando 1/3 e 1/4, os alunos consideram 1/4 maior que 1/3 porque 4 é maior que 3. Segundo as autoras, este erro muito vulgar é indicador de que os alunos não compreenderam ainda a representação fracionária. Outros alunos referem que, por exemplo, 1/2 = 1,2, não relacionando as representações com os números em causa, o que de acordo com as autoras revela que o sistema de numeração decimal não está completamente entendido. Monteiro e Pinto (2005, 2007) salientam também, a representação de números fracionários na forma de numeral decimal, como um conceito difícil para as crianças que consideram, por exemplo, que 1,5 é menor que 1,428, pelo facto do segundo ter mais números que o primeiro ou então porque 428 é maior que 5. Segundo as autoras, os professores devem reconhecer que a passagem dos números inteiros para os racionais representa para os alunos uma grande mudança conceptual, que passa também pelas representações simbólicas, quer na forma de fração quer na forma de numeral decimal.

Também Martins (2007), constatou que as principais dificuldades dos alunos na apropriação de números racionais, se deviam a uma discordância entre as regras interiorizadas para raciocinar com números inteiros e as novas regras para raciocinar com números racionais, mas também, a um parco desenvolvimento do raciocínio multiplicativo. De acordo com Vergnaud (1988, citado em Pinto (2011)), os números racionais, multiplicação e divisão são alguns dos tópicos que integram o campo conceptual multiplicativo, um complexo sistema de inter-relação de conceitos, ideias dos alunos (tanto competências como conceções erradas), procedimentos, problemas, representações, objetos, propriedades e relações.

Post, Cramer, Behr, Lesh e Harel (1993) mencionam que os resultados de estudos desenvolvidos pelo RNP sugerem que a compreensão de número racional está relacionada com três atributos do pensamento dos alunos: (i) a flexibilidade na conversão entre as diferentes representações de número racional; (ii) flexibilidade das alterações dentro de cada representação; e (iii) a independência cada vez maior das representações concretas. Com base nestes dados, consideram a pouca experiência dos alunos na utilização e na conversão entre as diferentes representações de número racional, como responsável pelas suas grandes dificuldades na abstração de informações das representações concretas, na realização de conversões e nas operações com símbolos matemáticos.

Monteiro e Pinto (2005) também salientam que algumas das dificuldades dos alunos com números racionais e reconhecidas na literatura, também são devidas a um ensino frequentemente mecanicista e abstrato. Assim, apontam alguns aspetos formais do estudo das frações e decimais, particularmente a dos algoritmos das operações e das regras, onde geralmente, o destaque é mais acentuado nos procedimentos do que nos conceitos e só excecionalmente se estabelecem conexões entre uns e outros. Segundo as autoras, o facto de que os alunos saberem operar com símbolos, não implica que tenham compreendido os conceitos que lhes estão implícitos. Alertam ainda, que um treino das operações permite que obtenham respostas corretas em situações de cálculo rotineiro, mas que não é sinonimo de uma compreensão do que fazem. Por isso, consideram importante que os professores recorram a problemas de contextos para uma primeira abordagem das frações, podendo os alunos utilizar desenhos ou esquemas para os resolverem, tornando-se assim mais fácil para a criança perceber os conceitos, deixando para mais tarde a utilização de símbolos e algoritmos.

Uma análise de vários estudos que se referiam às dificuldades sentidas pelos alunos na aprendizagem das frações, utilizando os habituais métodos de ensino, realizada por Moss e Case (1999), evidenciou quatro prováveis justificações para estas dificuldades: (i) ênfase na sintaxe em detrimento da semântica, isto é, dedica-se muito mais tempo ao treino de procedimentos do que ao desenvolvimento de conceitos; (ii) não é dada prioridade às tentativas informais de resolução de problemas por parte dos alunos; (iii) não se destaca a diferenciação entre os números inteiros e os não inteiros, nas diferentes representações dos números racionais; e (iv) os programas tratam os números racionais como algo que se pode dar por definição.

Também Sharp, Garofalo e Adams (2002) e Huinker (2002), citados em Pinto (2011), referem que as abordagens tradicionais de ensino dos algoritmos de frações passam, essencialmente, pela memorização e pela prática rotineira de exercícios, e que introduzir algoritmos antes da compreensão conceptual, ou sem relacionar o algoritmo com o conhecimento conceptual, promove a falta de conexão entre conceitos e procedimentos e entre frações e a realidade dos alunos. No entanto, consideram que se os alunos desenvolverem uma base de conhecimento conceptual para o sentido de fração e para o sentido de operação, desenvolvem estratégias flexíveis de cálculo e de resolução de problemas que os levam a uma aprendizagem significativa dos algoritmos com frações.

Porém, Post et *al*. (1993) salientam que provavelmente nenhum aspeto do ensino da matemática tem tantas implicações no ensino e na aprendizagem como a do pensamento do professor e referem que num estudo efetuado pelo RNP uma parte significativa dos professores tem dificuldades na matemática que estão a ensinar. Também Harel, Behr,Post, e Lesh (1994), Ma (1999) e Post, Harel, Behr e Lesh (1988) consideram que muitos adultos, incluindo professores e os que se encontram na formação inicial de professores parecem lutar com as mesmas dificuldades dos alunos, mantendo as mesmas ideias primitivas e conceitos errados. Segundo Lamon (2007), as dificuldades evidenciadas pelos adultos podem advir da falta de tratamento adequado do campo conceptual multiplicativo no currículo de Matemática, e da vivência das mesmas experiências escolares que os atuais alunos.

O ENSINO E A APRENDIZAGEM DOS NÚMEROS RACIONAIS

Dados da investigação (e.g. Behr, Lesh, Post e Silver (1983), Kieren (1976), Lamon (2007) e Streefland (1986)), sugerem que o desenvolvimento de uma compreensão do conceito de número racional requer que se proporcione aos alunos, a exploração de um conjunto diversificado de tarefas que contemplem a maioria dos significados das frações. De acordo com Kieren (1976), para desenvolver uma compreensão do referido conceito, não basta compreender um dos significados de fração, é necessário compreender os vários significados e as suas inter-relações, já que existem diversas estruturas cognitivas ligadas aos vários significados, que condicionam o processo de aprendizagem. Também Lamon (2007) refere que para se perceber o conjunto dos números racionais é necessário apreender os diferentes significados de fração. A autora alerta para o facto de que o estudo da fração restringido ao significado parte-todo leva os alunos a um entendimento da fração como sinónimo de parte-todo, ou seja, uma noção empobrecida de número racional, já que as frações podem adotar outros significados, como razão, quociente, medida e operador. Por conseguinte, tradicionalmente, o ensino das frações e da linguagem fracionária em alguns países é feito através da utilização de situações parte todo (Behr, Harel, Post & Lesh, 1992; Monteiro & Pinto, 2005). Embora este significado seja importante, Lamon (1999) refere alguns estudos que demonstram que um ensino essencialmente através da exploração do significado parte-todo não é suficiente para um desenvolvimento apropriado do conceito de número racional. Kerslake (1986) reforça esta ideia, referindo que quando se tem como recurso quase exclusivo o modelo parte todo, o conceito de fração é afetado negativamente, sendo por vezes uma barreira à compreensão da fração como um número.

Também Behr *et al*. (1983) criticam a forma como a escola apresenta as frações onde é essencialmente valorizado um significado de fração, deixando para segundo plano os outros significados, resultando daí uma perceção incompleta do conceito de fração. Os autores sugerem ainda, que os professores devem adquirir conhecimentos de modo a saberem selecionar tarefas que apresentem os vários significados de fração, tendo por base situações informais do quotidiano dos alunos.

Monteiro e Pinto (2005, 2007) explicitam cada um dos diferentes significados que as frações podem apresentar em contexto. Assim, a fração como parte-todo surge em situações de comparação entre a parte e um todo, considerado este, a unidade. O todo pode ser contínuo (4/7 de uma parede está pintada) ou discreto (3/4 dos rebuçados do João são de morango). O denominador indica o número de partes iguais em que a unidade está dividida e o numerador o número de partes consideradas. A fração como quociente surge em situações de partilha equitativa (foram distribuídos 4 chocolates por 5 crianças). O numerador representa o número de coisas que são partilhadas e o denominador os recetores dessa partilha. Apesar de se estar na presença de uma relação entre duas quantidades – o que é partilhado e o número de recetores dessa partilha –, portanto uma razão, a fração 4/5 também representa a quantidade de coisas com que cada recetor ficou. A fração como razão também pode surgir, por exemplo, em situações de relação entre duas partes de um todo (a razão entre o número de meninos e de meninas numa turma é de 2/3 – lê-se "é de 2 para 3"). Outro significado da fração é a medida que surge em situações onde se faz a comparação entre uma grandeza e outra tomada como unidade de medida. A unidade de medida terá de ser fracionada em partes iguais para que possam estar contidas um determinado número de vezes na quantidade a medir. A fração como operador aparece em situações onde a fração é aplicada ao cardinal de um conjunto discreto, já que o denominador indica uma divisão e o numerador, uma multiplicação (4/5 de 25 livros são 20 livros) ou, poderá transformar uma figura, reduzindo-a ou ampliando-a.

Segundo Monteiro e Pinto (2005), a fração como relação entre a parte e o todo aparece também nas situações de medida e nas situações de partilha equitativa, uma vez que em ambos os casos se faz uma comparação, depois do apuramento da unidade de medida e da situação de partilhar uma parte fracionada com um todo. As autoras alertam também, para o inconveniente de se fazer uma abordagem às frações essencialmente através da relação parte-todo, especialmente pelo facto dos alunos confundirem a relação parte-todo com a relação parte-parte e ainda, por dificultar a compreensão de frações que representam um número maior que a unidade. Assim, sugerem que se faça uma primeira abordagem às frações partindo de situações ligadas à realidade dos alunos, em contextos de partilha equitativa, num processo construtivo de matematização. Consideram os contextos de partilha equitativa como ricos e importantes para a compreensão da representação faccionária e equivalência de frações, levando os alunos a realizarem esquematizações tais como, diagramas em árvore, linhas numéricas, tabelas de razão, entre outros, como apoio na resolução de problemas.

Também Carvalho (2005) salienta que na resolução de problemas de partilha equitativa e de razão, os alunos recorrem a estratégias pessoais e à mobilização de raciocínio multiplicativo, demonstrando competência para estabelecer relações de equivalência e para trabalhar com unidades compostas. A autora refere ainda, que os problemas de medida são impulsionadores de ideias sobre frações e decimais, porque permitem permutações que ajudam a desenvolver o sentido de número e operação. Menciona também, a importância das várias formas de representação de números e de situações na resolução de problemas uma vez que permitem ultrapassar alguns mal-entendidos, como por exemplo, o de que um meio não se representa por 1,2.

Mamede (2007) tentou perceber qual dos significados – parte-todo quociente e operador – facilitava a compreensão dos alunos sobre a noção de equivalência e ordenação de quantidades representadas por frações. Este estudo permitiu à autora argumentar que as crianças que trabalham as frações essencialmente como quociente, parecem conseguir construir mais facilmente o conceito de fração, pelo que parece ser o significado que faz mais sentido a partir do seu conceito informal, já que unicamente nesta interpretação as crianças conseguiram realmente aprender algo sobre os invariantes lógicos das frações (ordenação e equivalência).

De salientar, que conforme referem Post, Behr e Lesh (1986), há uma influência inicial inevitável, dos conhecimentos que os alunos têm sobre números naturais, no modo como começam a pensar a ordenação dos números racionais, que afeta negativamente a sua capacidade de compreenderem a relação de ordem dos números racionais. Efetivamente, ao contrário do que acontece com os números naturais, onde os alunos podem valorizar o aspeto cardinal do número ou o aspeto ordinal, nos racionais não existe uma relação de ordem simples e óbvia, já que são necessárias diferentes estratégias para comparar, por exemplo, duas frações. A observação de casos particulares, por exemplo, 1/2 e 1/3, sugere uma possível relação de ordem atendendo aos denominadores. Porém, no caso geral, não é possível comparar frações atendendo apenas aos numeradores ou aos denominadores. Deste modo, referem também a importância da compreensão de que a relação entre numerador e denominador define o significado de uma fração, e não as respetivas grandezas absolutas vistas de forma independente, já que por exemplo, 1/2 é maior que 3/8, apesar dos dígitos que surgem na primeira fração serem maiores que os seus correspondentes na segunda. Os autores alertam para a necessidade de se colmatar a lacuna concetual entre o raciocínio aditivo e multiplicativo, já que alguns dos reflexos das suas conceções sobre os números naturais baseados nas estruturas aditivas podem perturbar o desenvolvimento das estruturas multiplicativas.

Porém, os autores apresentam estratégias informais a que os alunos recorrem em tarefas de comparação de frações. Assim, referem o *pensamento residual,* como uma estratégia que diz respeito à quantidade que é necessária para construir o todo, ou seja, na comparação de 5/6 com 7/8, os alunos percebem que na primeira fração falta 1/6 para completar a unidade (valor residual) e que na segunda falta apenas 1/8, pelo que 5/6 < 7/8. Outra estratégia usada é a *utilização de pontos de referência,* ou seja, comparar duas frações usando outra como referência, como 1/2 ou 1. Recorrendo a esta estratégia, um aluno diz que 5/8 é maior do que 3/7, porque a primeira fração é maior que metade e a segunda, é menor que metade. Os autores apresentam ainda como estratégia, o *pensamento diferencial,* quando alguns alunos referem que 5/6 e 7/8, são equivalentes porque a ambas falta apenas uma parte para completar o todo. Neste caso os alunos centram-se na diferença entre 5 e 6 e entre 7 e 8, não tendo em conta o valor real da fração. Esta forma de pensamento é caraterístico dos números naturais, que geralmente leva a resultados incorretos.

Post *et al*. (1986) alertam ainda para o facto de que a noção quantitativa de número racional deve incluir a compreensão de que este tem um sentido absoluto e um sentido relativo, pelo que a grandeza relativa de um par de números racionais só pode ser avaliada quando estes estão relacionados com a unidade.

Também Behr *et al.* (1992), Behr e Post (1992) e Lamon (2006, 2007) referem que a conceção da unidade de referência é outro dos fatores responsáveis pela complexidade do ensino-aprendizagem das frações. Por conseguinte, Behr *et al*. (1992), Behr *et al*. (1983), Fosnot e Dolk (2002), Lamon (2006,2007), Monteiro e Pinto (2005, 2007), salientam a importância do papel desempenhado pela unidade de referência no percurso do desenvolvimento do conhecimento matemático, nomeadamente na compreensão das frações, dado que uma fração em contexto tem sempre subjacente uma unidade. Referem que desde as primeiras experiências de contagem (unidades simples) até às unidades como índices comparativos (por cada litro de água misturo 2 copos de concentrado de sumo de laranja), passando pelas unidades compostas (uma dúzia de ovos), são muitas as situações onde aparecem unidades de vários tipos.

Monteiro e Pinto (2005, 2007) salientam que no caso de as frações representarem quantidades, porque também podem representar razões, só representarão a mesma quantidade se forem referidas à mesma unidade. Exemplificam que perante questões como: "A Maria poupou 1/5 da sua mesada enquanto a Marta poupou 1/6 da sua mesada, quem poupou mais?", as crianças que estão habituadas a um ensino essencialmente virado para procedimentos, vão comparar as frações 1/5 e 1/6, sem se questionarem se as unidades de referência são as mesmas ou diferentes. Deste modo, segundo as autoras é fundamental que se discuta com os alunos a questão da unidade, chamando a atenção para o todo a que a fração faz referência e se explorem situações diversificadas relativamente à unidade. Salientam também, a importância da exploração de situações que envolvam unidades contínuas e discretas, dado que determinar a quarta parte de um chocolate (unidade continua) ou a quarta parte de 8 laranjas (unidade discreta), implica que no segundo caso o resultado se represente por um número inteiro e no primeiro caso isso não seja possível. Lamon (2006, 2007) e Monteiro e Pinto (2005, 2007) salientam ainda, a importância de se proporcionarem aos alunos experiências de reconstrução da unidade, quer com quantidades discretas (se dois cromos representam um quarto de uma coleção de cromos, quantos cromos tem a coleção?), quer com quantidades contínuas (se duas quadriculas do teu caderno forem um quarto de uma figura, desenha a figura completa). De acordo com Lamon (2007) o sentido de número e dos símbolos que o representam desenvolve-se com a exploração de uma multiplicidade de unidades.

ORIENTAÇÕES CURRICULARES

No PMEB (ME, 2007), o tema Números e Operações aparece em todos os ciclos tendo como suporte três objetivos fundamentais: i) promover a compreensão dos números e operações, ii) desenvolver o sentido de número e desenvolver a fluência de cálculo. No que diz respeito, aos números racionais, surge uma novidade relativamente ao PMEB (ME, 1991), as representações fracionárias e decimal em simultâneo. Salienta-se que os alunos devem ser capazes em qualquer situação, de recorrer à representação que achem mais adequada, não devendo, por isso, sentir qualquer dificuldade na passagem de uma representação para a outra. Aparece também valorizada a representação dos números na reta numérica. Outro aspeto realçado pelo PMEB (ME, 2007) é a capacidade de resolução de problemas por parte dos alunos, considerando-se que estes devem adquirir agilidade para lidar com problemas referentes a contextos do seu quotidiano, uma vez que servem de modelos de apoio ao pensamento, e a contextos matemáticos. Enfatiza-se o facto da resolução de problemas não ser só importante como objetivo de aprendizagem, mas como uma atividade primordial para a aprendizagem de conceitos, representações e procedimentos matemáticos. No que concerne, aos números racionais, o programa refere que a utilização de problemas de contexto facilita a exploração dos vários significados de fração que devem ser explorados no 1.º ciclo, e permite ainda, explorar de forma intuitiva a compreensão dos conceitos de razão e proporcionalidade.

De acordo com o PMEB (ME, 2007), as frações devem começar a ser trabalhadas nos dois primeiros anos do 1.º ciclo, seguindo uma abordagem intuitiva a partir de situações de partilha equitativa e de divisão da unidade em partes iguais recorrendo, para isso, a modelos e a representações na forma de fração nos casos mais intuitivos e simples. Sugere-se a introdução de alguns operadores, de forma intuitiva, como por exemplo: o dobro, o triplo e que se relacionem respetivamente com a metade e a terça parte, de modo a que os alunos os possam compreender e aplicar. Surge, também com alguma relevância a representação dos números na reta numérica.

Já para o 3.º e 4.º ano, no referido programa, refere-se que este estudo deve ser mais aprofundado, recorrendo a problemas que possibilitem trabalhar outros significados das frações, tais como, quociente, parte-todo e operador, fazendo a introdução de números representados na forma de decimal, a partir de situações de partilha equitativa ou de medida, salientando a unidade de medida. Considera-se que a exploração dos números racionais pode ser feita a partir de contextos de dinheiro, explorando assim a representação do número decimal dos números racionais, dada a relação entre o euro e o cêntimo. Salienta-se ainda, que a reconstrução da unidade a partir das suas partes deve ser feita logo nos primeiros anos, ajudando os alunos a uma maior compreensão dos racionais. De acordo com o PMEB (ME, 2007) a ampliação do conhecimento das estratégias de cálculo mental e escrito pode ser feita tendo em conta os números racionais, em particular na representação decimal. Sugere-se que se realize esta exploração envolvendo situações onde se apliquem unidades discretas e contínuas. Salienta-se ainda, a importância da representação dos números racionais na reta numérica, relacionando a representação fracionária com a representação decimal.

Também no NCTM (2007), se salienta que a compreensão dos números se desenvolve entre o pré- escolar e o 2.º ano de escolaridade e que para além da compreensão dos números inteiros, os alunos deverão ser estimulados a compreender e a representar, algumas frações utilizadas habitualmente, como 1/2 de uma bolacha ou 1/8 de uma pizza, bem como a ver as frações como partes de uma unidade inteira ou coleção, sendo sempre importante a utilização de um contexto. Salienta-se ainda, a importância, dos professores desenvolverem nos alunos o entendimento de que as frações estão associadas à divisão.

De acordo com o NCTM (2007), entre o 3.º e 5.º ano de escolaridade, a ampliação da compreensão dos números racionais constitui um objetivo fulcral, que deverá permitir que os alunos criem os seus métodos informais para o cálculo com frações. Assim, espera-se que os alunos nesta fase consigam fazer cálculos simples utilizando o cálculo mental, recorrendo a estratégias de decomposição dos números. Refere-se que é também nesta fase que se deve trabalhar os diversos significados de fração, bem como a comparação, nomeadamente com a unidade, levando os alunos a criar agilidade, utilizando pontos de referência como 1/2 e 1. No referido documento salienta-se ainda, que os alunos deverão conseguir trabalhar as frações como partes de uma unidade e como divisão, sendo para tal essencial a exploração de uma diversidade de modelos de frações, mas numa fase inicial com frações que lhes sejam mais familiares. Também a utilização de um modelo de área, na qual uma parte está sombreada, será importante para que os alunos possam fazer a comparação das partes fracionadas com o todo, bem como relacionar as frações com a unidade e encontrar também frações equivalentes.

METODOLOGIA

Neste capítulo apresento a metodologia usada neste estudo, desde as opções metodológicas fundamentadas aos procedimentos metodológicos.

OPÇÕES METODOLÓGICAS

Dado que com este estudo pretendia perceber a noção de partilha equitativa, bem como a de comparação de frações de alunos do 4.º ano de escolaridade, através da análise das suas produções aquando da resolução de situações de partilha equitativa e comparação de frações, ou seja, descrever, compreender e interpretar de uma forma absoluta o fenómeno em estudo, optei por uma investigação de cariz interpretativo e abordagem essencialmente qualitativa, conforme sugere Fortin (1999).

Com este estudo pretendo perceber a noção de partilha equitativa, bem como a de comparação de frações de alunos do 4.º ano de escolaridade, através da análise das suas estratégias e dificuldades apresentadas por estes alunos aquando da resolução de situações de partilha equitativa e comparação de frações no referido contexto. Assim, importa penetrar no mundo destes alunos e tentar perceber como interpretam a situação e que significado tem para eles, o que de acordo com Coutinho (2011), é possível com uma abordagem interpretativa, por isso, paradigma adotado nesta investigação. De acordo com a autora, o objeto de estudo desta investigação não é de nível comportamental mas sim da intencionalidade das situações, isto é, trata-se de investigar ideias, de tentar descobrir significados nas ações individuais, sempre a partir dos atores intervenientes no processo.

Neste sentido, este estudo terá uma abordagem essencialmente qualitativa, que de acordo com Gody (1995), pode ser orientada através de diferentes percursos, um dos quais a pesquisa documental. Apesar da ideia de se incluir o estudo de documentos na investigação qualitativa parecer estranha, tendo em conta que este tipo de investigação não se reveste de todos os aspetos básicos que identificam os trabalhos dessa natureza, a autora considera que a investigação qualitativa, enquanto prática de investigação, não aparece como uma proposta rigidamente organizada, permitindo que o investigador utilize a imaginação e a criatividade para propor trabalhos que explorem novas abordagens. Os documentos são normalmente considerados importantes fontes de dados, merecendo uma atenção especial. Gody (1995) específica que normalmente se julga que o trabalho de investigação envolve o contato direto do investigador com o grupo de pessoas que será estudado, esquecendo-nos que os documentos constituem uma rica fonte de dados. A autora enfatiza o facto de a palavra "documentos" dever ser entendida de uma forma vasta, incluindo os materiais escritos (como por exemplo jornais, revistas, diários, obras literárias, cientificas e técnicas, provas entre outras). Refere ainda, que na pesquisa documental, deverá ter-se em conta três aspetos essenciais: a escolha dos documentos, o acesso a eles e a sua análise.

Segundo Cellard (2008) a pesquisa documental auxilia a observação do processo de evolução de indivíduos, grupos, conceitos, conhecimentos, práticas, entre outros. Considera que o uso de documentos em investigação deve ser estimado e privilegiado, dado que a riqueza de informações que deles podemos retirar e recuperar justifica o seu uso nas diversas áreas da Ciências Sociais e Humanas. Salienta ainda, que a pesquisa documental favorece também a observação do processo de maturação ou de evolução de conceitos, conhecimentos, mentalidades entre outros.

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Para responder às questões deste estudo e atingir o objetivo proposto, foram analisadas as respostas dadas, por 1330 alunos de 21 agrupamentos do Distrito de Leiria, à tarefa "A visita de estudo", uma das tarefas que integrou a prova eliminatória do concurso "Desafios 2012".

CONTEXTO DO ESTUDO, PARTICIPANTES E RECOLHA DE DADOS

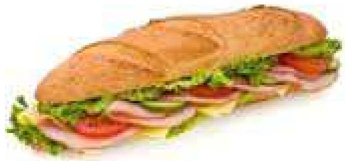
"Desafios" é um concurso promovido todos os anos, desde 2010, pela secção de Matemática da Escola Superior de Educação e Ciências Sociais do Instituto Politécnico de Leiria em parceria com o Núcleo Regional de Leiria da Associação de Professores de Matemática. O concurso destina-se a alunos que frequentam o 4.º ano de escolaridade no Distrito de Leiria e é composto por duas fases. Na primeira fase os alunos inscritos realizam uma prova eliminatória nas suas escolas do 1.º Ciclo. Numa segunda fase os cinquenta alunos que obtiverem as melhores classificações na prova eliminatório realizam a prova final na Escola Superior de Educação e Ciências Sociais.

De salientar que estas provas são elaboradas pelos professores da Secção de Matemática da Escola Superior de Educação e Ciências Sociais do Instituto Politécnico de Leiria, bem como corrigidas pelos mesmos. Da prova fazem parte, por norma, quatro tarefas, com o intuito de se comtemplar os quatro tópicos matemáticos estudados no Ensino Básico, nomeadamente: Números e Operações, Álgebra, Geometria e Medida e Organização e Tratamento de Dados.

Dado que com este estudo se pretendia perceber as estratégias e dificuldades que persistem em alunos que supostamente terão sido alvo de um trabalho com números racionais nos primeiros anos de escolaridade, mais concretamente, perceber a noção de partilha equitativa, bem como de comparação de frações dos referidos alunos, optou-se por analisar as respostas dadas, por 1330 alunos do 4.º ano de escolaridade de 21 agrupamentos do Distrito de Leiria, a uma tarefa relativa aos números racionais no âmbito das provas eliminatórias dos DESAFIOS 2012.

TAREFA: A VISITA DE ESTUDO

A turma do João foi fazer uma visita de estudo a Lisboa. Para o lanche a professora preparou sandes todas iguais e guardou-as em sacos de papel, de dois tamanhos diferentes, para distribuir por grupos de três ou de quatro alunos:



Saco do tipo A: 2 sandes para grupos de três alunos

Saco do tipo B: 3 sandes para grupos de quatro alunos

Quando chegaram do passeio, o João afirmou:

"Os grupos de 3 alunos comeram mais do que os grupos de 4 alunos".

Concordas com o João? Explica como pensaste.

De salientar que os alunos que participaram no concurso "DESAFIOS 2012" frequentaram o 1.º ciclo do ensino básico, já no âmbito da entrada em vigor do Programa de Matemática do Ensino Básico - PMEB (ME, 2007), pelo que supostamente terão trabalhado os números racionais conforme sugerido pelo referido programa.

ANÁLISE E TRATAMENTO DE DADOS

O processo de análise e tratamento da informação recolhida constituiu uma das fases mais importantes do estudo, uma vez que levou à construção de interpretações do fenómeno em estudo e deste modo, à obtenção de respostas às questões de investigação.

Para tal, recorri a uma análise de conteúdo, que de acordo com Coutinho (2011) "consiste em avaliar de forma sistemática um corpo de texto (ou material audiovisual), por forma a desvendar e quantificar a ocorrência de palavras/frases/temas considerados "chave" que possibilitem uma comparação posterior" (p.193).

Segundo Godoy (1995) a análise de conteúdo antecipa três etapas essenciais: pré-análise, exploração do material e tratamento de resultados. Assim, a pré-análise poderá ser considerada como a fase de organização, institui-se um esquema de trabalho, que deve ser claro com procedimentos bem explanados mas, no entanto, flexíveis. Nesta fase faz-se um primeiro contacto com os documentos escolhidos, formulam-se hipóteses e/ou objetivos, e procede-se à elaboração dos indicadores que servirão de orientação para a interpretação e preparação formal dos documentos. Com as hipóteses e referenciais teóricos, e depois de definidos os procedimentos a serem seguidos, pode-se então passar à segunda fase, exploração do material, que será a execução das resoluções tomadas anteriormente, então num movimento contínuo da teoria para os dados e inversamente, os indicadores vão-se tornando cada vez mais claros e adequados ao propósito do estudo. Aparece agora a terceira fase do processo de análise do conteúdo, que se chama tratamento de resultados e interpretação. Tendo em conta os resultados brutos o investigador tentará torná-los significativos e válidos, utilizando para isso técnicas quantitativas e/ou qualitativas, reunirá tais resultados à procura de padrões, tendências ou relações subentendidas. Esta análise deverá ir além do conteúdo evidente nos documentos, pois interessa ao investigador o conteúdo oculto e envolverá a explicação do que ocorre assim como a elucidação do motivo pelo qual o fenómeno ocorre.

DESAFIOS 2012: A TAREFA "VISITA DE ESTUDO"

Neste capítulo serão apresentados e discutidos os resultados desta investigação, que resultam de uma análise das respostas dadas, por 1330 alunos de 21 agrupamentos do Distrito de Leiria, à tarefa "Visita de estudo", da prova eliminatória do concurso "Desafios 2012". Deste modo, pretende-se responder às questões de investigação do estudo e assim atingir o objetivo proposto, ou seja, perceber a noção de partilha equitativa, bem como de comparação de frações de alunos do 4.º ano de escolaridade que frequentavam o 1.º ciclo do ensino básico aquando da entrada em vigor do PMEB (ME, 2007).

ANÁLISE QUANTITATIVA PRELIMINAR

Para uma análise quantitativa preliminar dos dados codifiquei-os em categorias de análise e elaborei a seguinte tabela de frequências (Tabela 1).

Tabela 1: Tabela de frequências

Categorias de análise	Frequência absoluta	Frequência relativa
Responde "não" e apresenta uma explicação clara	56	4,2
Responde "não" e apresenta uma explicação pouco clara	75	5,6
Responde "não" sem explicação	12	0,9
Responde "não" com explicação incorreta	787	59,2

Responde “sim” mas evidência corretamente a parte que cada aluno comeu	44	3,3
Responde “sim” sem explicação ou explicação totalmente incorreta	298	22,4
Não responde.	58	4,4
Total	1330	100%

Posteriormente analisei as várias respostas, quer corretas, quer incorretas e os possíveis motivos matemáticos em que, principalmente estas últimas se poderão ter sustentado, de modo a poder obter uma maior compreensão e um entendimento mais alargado dos fatores que poderão estar na base dessas dificuldades. Porém, a análise centrada nas referidas respostas não teve como propósito evidenciar simplesmente o que os alunos não conhecem, mas porque é a partir dessas situações que poderei obter uma maior compreensão e entendimento dos fatores que poderão estar na base dessas dificuldades. Com este propósito apresento e discuto os resultados recorrendo a exemplos das respostas dos alunos à referida tarefa.

Estratégias e dificuldades na resolução da tarefa “Visita de estudo”

A resolução da tarefa em análise implica, numa primeira fase, um entendimento por parte dos alunos do significado de fração como *partilha equitativa*, já que têm de começar por identificar a quantidade de sandes que comeu cada aluno, de cada grupo (*2 sandes para cada grupo de 3 alunos; 3 sandes para cada grupo de 4 alunos*), em situações de partilha equitativa. Implica ainda, numa segunda fase, um entendimento da *comparação de números racionais*, uma vez que têm de comparar a quantidade de sandes que comeu cada aluno dos grupos de três, com a quantidade de sandes que comeu cada aluno dos grupos de quatro.

Por conseguinte, ***dos 1330 alunos*** que resolveram a tarefa deste estudo, perante a questão *"Os grupos de 3 alunos comeram mais do que os grupos de 4 alunos". Concordas com o João? Explica como pensaste*! 4,2 % responde corretamente, ou seja, ***responde "não" e apresenta uma explicação clara***, tendo apresentado diferentes estratégias para a partilha equitativa das sandes.

No entanto, a maioria destes alunos recorreu à modelação da tarefa. Apenas quatro, não parecem ter tido necessidade de modelarem a situação, apresentando apenas a resolução formal. Destes, um recorreu ao algoritmo da divisão, para identificar as quantidades que cada aluno comeu em cada um dos grupos, e consequente comparação das dízimas que representam as quantidades envolvidas. Este aluno parece preferir a representação decimal à representação em frações e/ou não parece muito familiarizado com este tipo de situações que envolvem as frações como partilha equitativa (Figura 1).

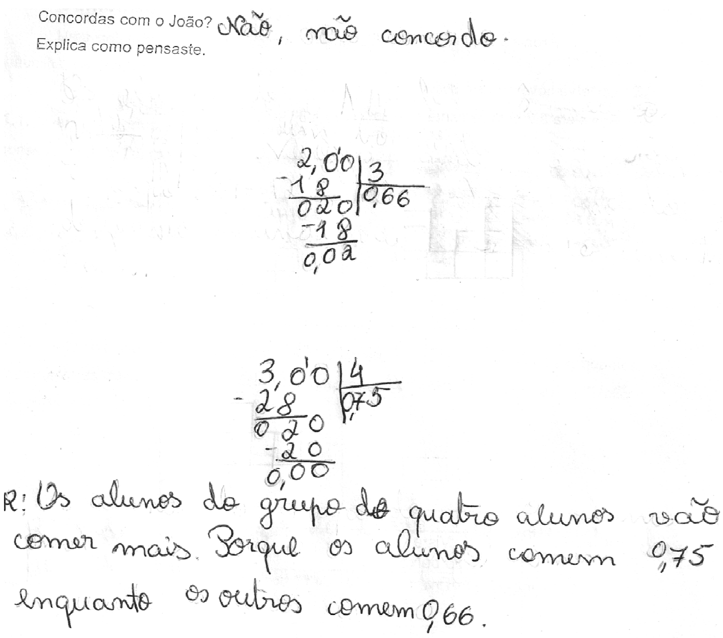


Figura 1: Algoritmo da divisão e representação decimal

Os outros três alunos, que apresentaram apenas a resolução formal, sem recurso aparente à modelação da tarefa, parecem ter recorrido, numa primeira fase, a um procedimento de partilha equitativa de uma sandes pelo número de alunos do respetivo grupo e às frações para representarem as referidas quantidades (Figura 2).

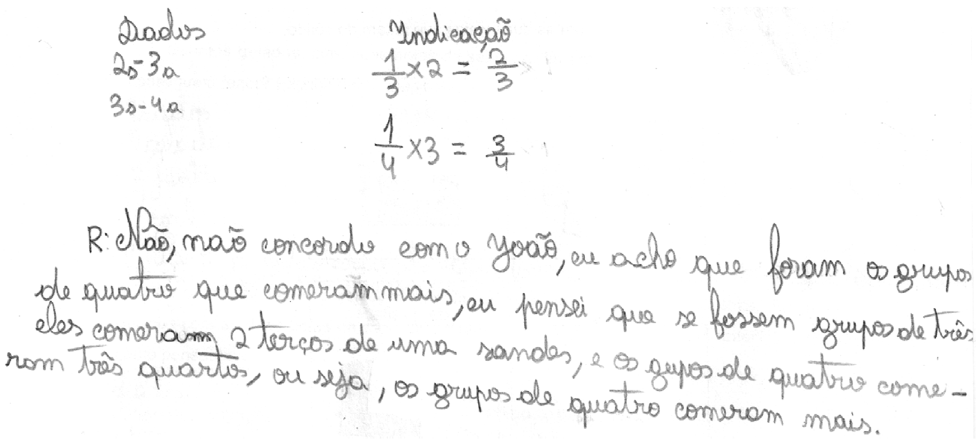


Figura 2: Fração como partilha e operador

Posteriormente identificaram a fração de cada uma das sandes que cada aluno iria comer, nos respetivos grupos, multiplicaram-na pelo número de sandes que pertencia ao grupo e deste modo, chegaram à quantidade que cada aluno de cada um dos grupos comeu. Concluíram que os alunos que comeram 2/3 de sandes comeram menos do que os alunos que comeram 3/4 de sandes. Porém, dado que não apresentam o recurso à regra formal de comparação de frações, podem ter percebido que na primeira fração falta 1/3 para chegar à unidade e que na segunda falta 1/4 para chegar à unidade. Dado que 1/3 > 1/4, então 2/3 < 3/4, recorrendo à estratégia intuitiva de pensamento residual referida por Post *et al*. (1986). Assim, estes alunos parecem ter, para além de um entendimento da fração como partilha, um entendimento da fração como operador e ainda, um conhecimento, pelo menos, informal da comparação de frações.

Os alunos que responderam corretamente com recurso à modelação da tarefa, ou seja, 92,8 % dos alunos que ***responde "não" e apresenta uma explicação clara***, usara diferentes estratégias para a partilha equitativa das sandes. No entanto, a mais frequente, foi a partilha equitativa de cada uma das sandes pelo número de alunos do grupo, com recurso às frações para representarem as respetivas quantidades, e posterior adição de cada uma destas frações, tantas vezes quantas o número de sandes do grupo. Assim, dos alunos que modelaram a situação, 71 % recorreram à referida estratégia, ou seja, no caso em que havia duas sandes para três alunos, dividiram cada uma das sandes em três partes iguais e deram um terço de cada sandes a cada um dos alunos, e chegaram à conclusão que cada aluno comeu 2/3 de sandes (e.g. Figura 3 e 4). No caso em que havia três sandes para quatro alunos, dividiram cada uma das sandes em quatro partes iguais e deram um quarto de cada sandes a cada um dos alunos, e chegaram à conclusão que cada aluno comeu 3/4 de sandes (e.g. Figura 3 e 4).

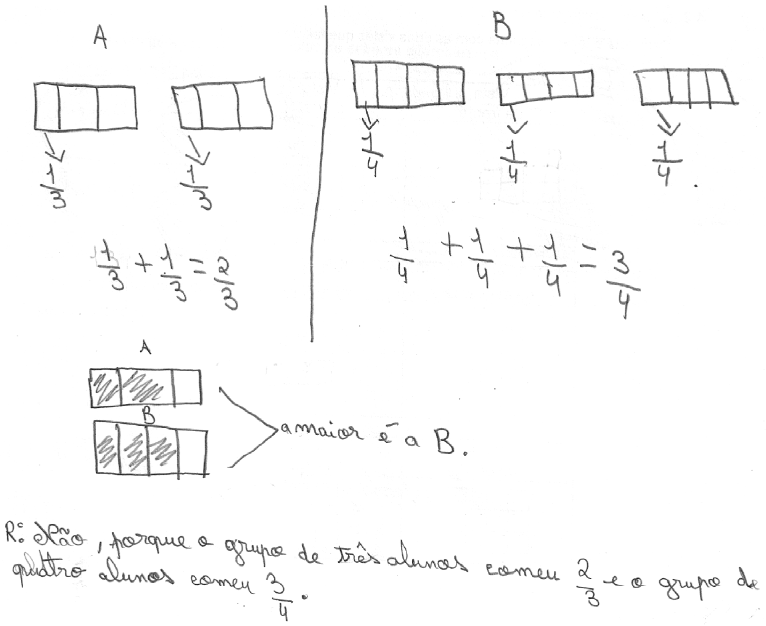


Figura 3: Modelação para a estratégia 1/3 +1/3 e 1/4 + 1/4 + 1/4

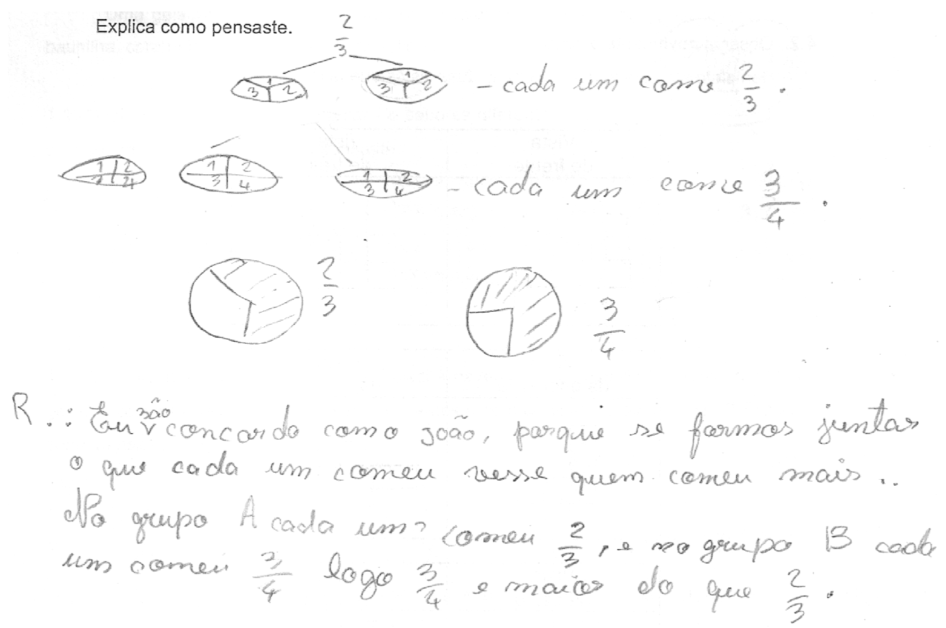


Figura 4: Modelação para a estratégia 1/3 +1/3 e 1/4 + 1/4 + 1/4

Deste modo, a modelação da tarefa parece ter suportado o procedimento de partilha equitativa, bem como o raciocínio aditivo que levou à fração de sandes que cada aluno comeu em cada um dos respetivos grupos. Posteriormente, estes alunos concluíram que 2/3 é menor que 3/4, parecendo ter suportado o seu raciocínio de comparação das frações na modelação da tarefa, conforme evidenciam nas suas produções ao recorrerem ao modelo retangular (e.g. Figura 3) e ao modelo circular (e.g. Figura 4). Estes modelos parecem ter promovido a visualização das diferentes quantidades de sandes que cada aluno comeu e facilitado a comparação de 2/3 com 3/4.

Ainda no âmbito dos alunos que recorreram à modelação da tarefa, 13,5 % apresentou outra estratégia, que passou pela divisão de cada uma das sandes em duas partes iguais e posterior divisão de uma metade em três partes iguais, no caso em que havia duas sandes para três alunos, e divisão de uma sandes em quatro partes iguais, no caso em que havia três sandes para quatro alunos (e.g. Figura 5). Ao identificarem que 1/3 de metade corresponde a 1/6 da sandes, estes alunos parecem ter o entendimento de que nesta situação existem dois todos a considerar, o primeiro todo que se refere a metade da sandes e, o segundo todo que se refere à sandes. Deste modo, aparentam ter uma noção da multiplicação de frações que envolve relações de relações. Porém, a modelação da tarefa poderá ter suportado o raciocínio efetuado, já que ao dividirem metade de uma sandes em três partes iguais, fizeram o mesmo para a outra metade.

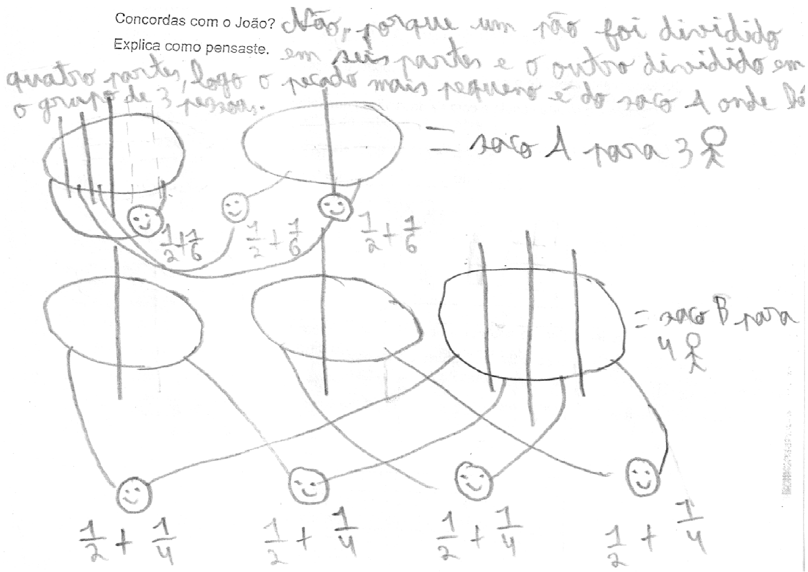


Figura 5: Modelação para a estratégia 1/2 + 1/6 e 1/2 + 1/4

Assim, apesar da divisão da outra metade em três partes iguais ter sido registada apenas a tracejado, deixa evidente que 1/3 de metade da sandes corresponde a 1/6 da sandes. Nestes casos a comparação de frações também parece ter sido facilitada pela modelação da tarefa, já que os esquemas permitem a visualização das quantidades envolvidas, 1/2 + 1/6 e 1/2 + 1/4, e/ou o facto de com a estratégia usada terem apenas de comparar 1/6 com 1/4. Deste modo, o recurso às frações unitárias e/ou pontos de referência pode também ter facilitado a comparação das quantidades envolvidas, estratégia intuitiva de comparação referida por Post *et al*. (1986)

No entanto, 5,8 % dos alunos que recorreu à modelação da tarefa, usaram a estratégia anterior, mas não conseguiram concluir que 1/3 de 1/2 da sandes é igual a 1/6 da sandes, pelo que se limitaram a referir que cada aluno do grupo de três alunos comeu 1/2 e mais 1/3 de 1/2 de sandes, enquanto cada aluno do grupo de quatro alunos comeu 1/2 e mais 1/4 de sandes (e.g. Figura 6).

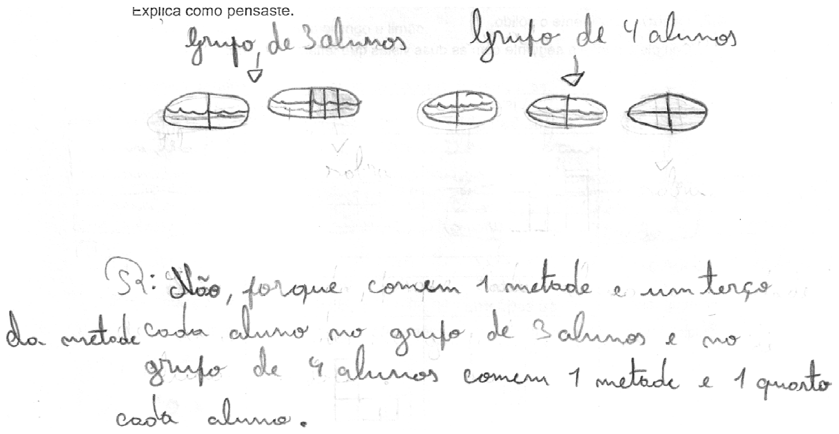


Figura 6: Modelação para a estratégia 1/2 + 1/3 de 1/2 e 1/2 + 1/4

Apesar de não terem identificado a fração correspondente a 1/3 de 1/2, ou seja, 1/6, o segundo todo a considerar nesta situação, estes alunos parecem ter um entendimento da sua existência, uma vez que o compararam com 1/4 da sandes e concluíram que 1/3 de 1/2 da sandes é menor que 1/4 da sandes. Também nestes casos a modelação da tarefa poderá ter suportado a comparação das quantidades envolvidas, pois permite a visualização das mesmas, facilitando a sua comparação.

Ainda no âmbito dos alunos que recorreram à modelação da tarefa, 7,7 % limitou-se a dividir em metades as sandes do saco do tipo B, ou seja, duas sandes em metades e a terceira em quatro partes iguais, tendo dividido em três partes iguais, cada uma das sandes do saco do tipo A. Assim evitaram o conflito dos dois todos a considerar, ou seja, a identificação da quantidade correspondente a 1/3 de 1/2 da sandes (e.g. Figura 7). A comparação das quantidades envolvidas também parece ter sido suportada pela modelação da tarefa, e/ou o recurso a pontos de referência, estratégia intuitiva de comparação referida por Post *et al*. (1986), que lhes permitiu concluir que 2/3 é inferior a 1/2 + 1/4.

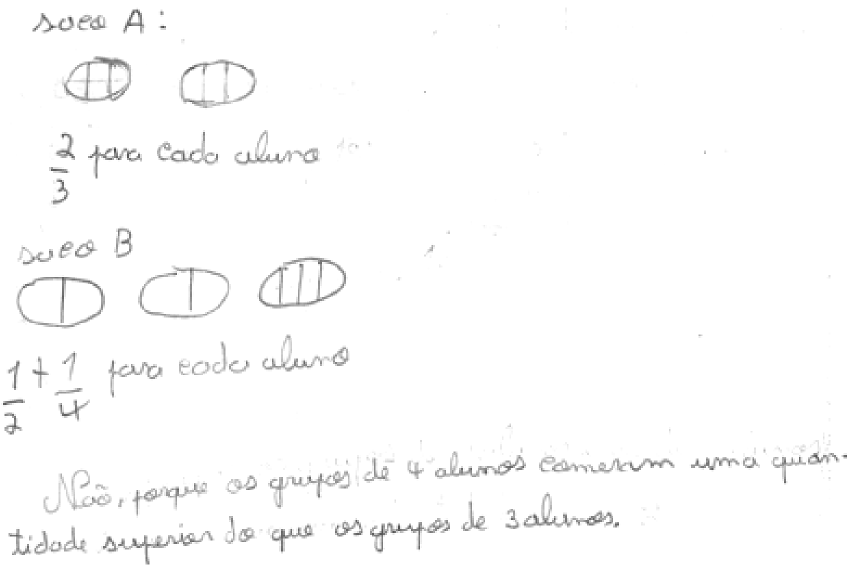


Figura 7: Modelação para a estratégia 2/3 e 1/2 + 1/4

No âmbito ainda dos alunos que recorreram à modelação da tarefa, nesta categoria, houve um aluno que apesar de ter modelado a situação, recorreu ao algoritmo da divisão para identificar a parte que cada aluno comeu em cada um dos diferentes grupos (Figura 8).

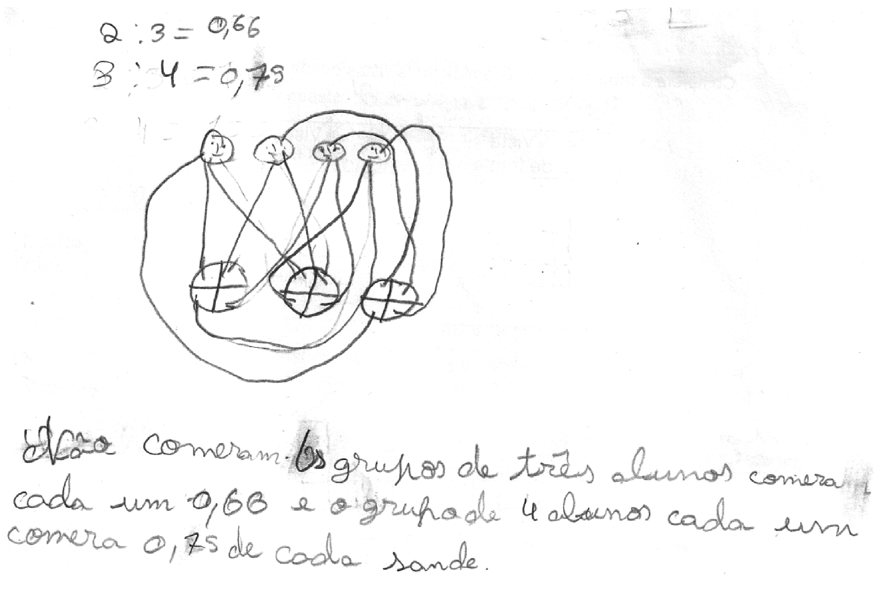


Figura 8: Modelação e algoritmo da divisão

Neste caso, a modelação da tarefa não parece ter suportado o raciocínio que levou o aluno a identificar as quantidades envolvidas, mas poderá ter desencadeado a necessidade de proceder à divisão das sandes pelo respetivo grupo e por conseguinte, a recorrer ao algoritmo da divisão. Assim, identificou as quantidades envolvidas na forma de numerais decimais, pelo que parece mais familiarizado com esta representação do que com a representação fracionária e/ou este tipo de situações que envolvem as frações no significado de partilha equitativa. Porém, de acordo com o PMEB (ME, 2007), as frações devem começar a ser trabalhadas nos dois primeiros anos do 1.º ciclo, seguindo uma abordagem intuitiva a partir de situações de partilha equitativa e de divisão da unidade em partes iguais recorrendo, para isso, a modelos e a representações na forma de fração nos casos mais intuitivos e simples.

No entanto, os alunos cujas produções se inserem nesta categoria de análise, parecem estar familiarizados com a modelação de situações e a representação fracionária e por conseguinte, a comparação de frações mesmo que de forma intuitiva, confirmando o sugerido pela investigação quando referem a importância de os professores recorrerem a problemas de contextos para uma primeira abordagem das frações, podendo os alunos utilizar desenhos ou esquemas para os resolverem, tornando-se assim mais fácil para a criança perceber os conceitos (Monteiro & Pinto, 2005, 2007). Estes resultados vão ainda ao encontro do defendido por Carvalho (2005), quando refere que nos problemas de partilha equitativa, os alunos recorrem a estratégias pessoais e à mobilização de raciocínio multiplicativo, demonstrando competência para estabelecer relações de equivalência, bem como o defendido por Mamede (2007), quando considera que quando as crianças trabalham as frações essencialmente como quociente, parecem conseguir construir mais facilmente o conceito de fração, pelo que parece ser o significado que faz mais sentido a partir do seu conceito informal, já que na sua opinião, unicamente nesta interpretação as crianças conseguem realmente aprender algo sobre os invariantes lógicos das frações (ordenação e equivalência).

Dos 1330 alunos que resolveram a tarefa deste estudo, 5,6 % ***responde "não" e apresenta uma explicação pouco clara***. Destes, 96 % recorreu à modelação da tarefa e 4 % limitou-se a referir que não concordam com o João e a apresentar, na forma de fração, as quantidades envolvidas de forma pouco clara (e.g. Figura 9).

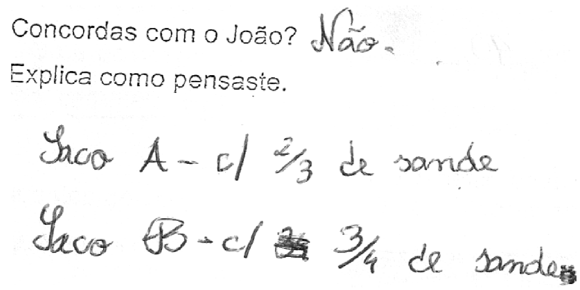


Figura 9: Frações sem justificação

Nestes casos, não se consegue perceber se a resposta dada se prende com conhecimento da comparação de frações, mesmo que de forma intuitiva por recurso ao pensamento residual referida por Post *et al*. (1986). Assim, estes alunos não parecem estar muito familiarizados e/ou terem dificuldades em explicarem os seus raciocínios.

Dos 96% dos alunos que recorreu à modelação da tarefa, 19 % apresentou esquemas que evidenciam a partilha equitativa de cada uma das sandes pelos alunos de cada grupo e frações para representarem as quantidades que cada aluno comeu, em cada um dos grupos (e.g. Figura 10).

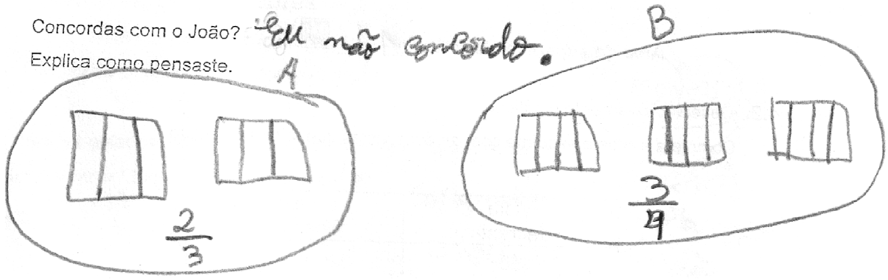


Figura 10: Modelação para a partilha equitativa e frações

No entanto, também não deixaram claro se as frações registadas representam as referidas quantidades, nem “porque” ou “como” concluíram que o João não tinha razão, embora a modelação da tarefa possa ter contribuído para esta conclusão e/ou o recurso ao pensamento residual, estratégia informal de comparação referida por Post *et al*. (1986). Estes alunos também não parecem estar muito familiarizados e/ou terem dificuldades em explicarem os seus raciocínios.

Também dos alunos que recorreram à modelação da tarefa, 28% não representou as quantidades envolvidas, nem na forma fracionária, nem na forma de numeral decimal, ou seja, não usaram linguagem matemática para representarem as referidas quantidades. Referiram-se a estas, usando termos como “partes”, “fatias”, “pedaços” (e.g. Figura 11) ou “bocados”, ou seja, recorrendo a linguagem informal, apesar de deixarem evidente nos seus esquemas a parte de sandes que cada aluno dos diferentes grupos comeu. Deste modo, estes alunos não parecem familiarizados com as diferentes representações dos números racionais e/ou com a resolução deste tipo de tarefas, o que contraria o preconizado pelo PMEB (ME, 2007).

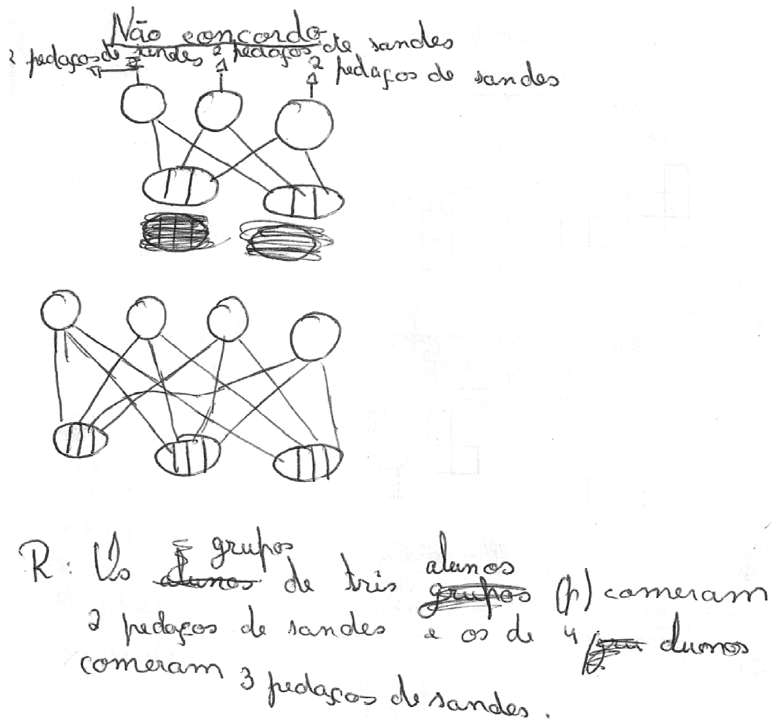


Figura 11: Modelação para a partilha equitativa e linguagem informal

Ainda dos alunos que recorreram à modelação da tarefa, 53 % limitou-se a apresentar esquemas que evidenciam a partilha equitativa das sandes, bem como a parte de sandes que cada aluno dos diferentes grupos comeu. Porém, não recorreram sequer à linguagem informal, tal como o grupo anterior, para representarem as quantidades envolvidas e por conseguinte, a parte de sandes que cada aluno de cada um dos diferentes grupos comeu. Cerca de metade destes alunos acrescenta apenas aos referidos esquemas, que os grupos que comeram mais foram os das sandes do tipo B. Assim, também estes alunos não parecem estar familiarizados com as diferentes representações dos números racionais e/ou com a resolução deste tipo de tarefas, o que mais uma vez contraria o preconizado pelo PMEB (ME, 2007).

Deste modo, os alunos que recorreram à modelação da tarefa, independentemente da forma escolhida para representarem as quantidades envolvidas, linguagem matemática, informal ou nenhuma das duas, a resposta "N*ão*", parece ter sido suportada pela visualização das referidas quantidades nos esquemas apresentados e/ou estratégias informais de comparação de frações referidas por Post *et al*. (1986), principalmente nos casos em que quantidades envolvidas foram identificadas por recurso à representação fracionária. Porém, esta carece de uma justificação clara, uma vez que o "*Não*" também pode advir de algum mal-entendido, semelhante aos que surgiram na categoria de análise ***responde "não" com explicação incorreta***, já que em alguns destes casos também houve o recurso à modelação correta da situação, ou seja, a partilha equitativa das sandes, mas resposta errada.

Dos 1330 alunos que resolveram a tarefa deste estudo, 0,9 % ***responde "não" sem explicação***. Assim, não se pode concluir que esta resposta tenha resultado do acaso, mas a falta de qualquer justificação, seja com recurso a esquemas, palavras ou símbolos, também não permite concluir que a resposta foi dada com conhecimento dos conceitos envolvidos.

Dos 1330 alunos que resolveram a tarefa deste estudo, 59,2 % ***responde "não" com explicação incorreta***. Destes, 57,5 % não recorreu à modelação da tarefa, sendo que apenas 1,3 % recorreu às frações para representar, supostamente, as quantidades envolvidas, uma vez que também não clarificaram se efetivamente disso se trata. Assim, nas suas produções surge o recurso às frações 2/3 e 3/4, sendo que fica evidente a dificuldade destes alunos na comparação de frações ao considerarem 2/3 = 3/4 (e.g. Figura 12).

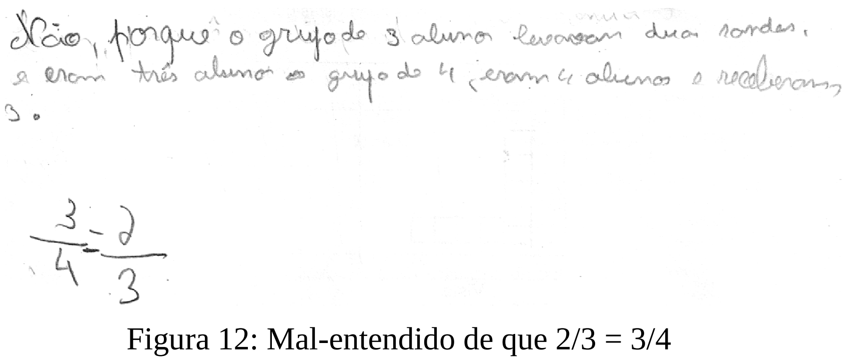


Figura 12: Mal-entendido de que 2/3 = 3/4

Esta dificuldade pode advir do facto dos alunos se terem focado apenas na diferença entre 2 e 3 e 3 e 4, não considerando o valor real da fração, sendo esta, de acordo com Post *et al*. (1986), uma forma de pensar caraterística dos números naturais que conduz geralmente a resultados incorretos e que os autores denominam de pensamento diferencial. Assim, estes alunos concluíram erradamente, que cada aluno come o mesmo em qualquer um dos grupos, evidenciando parco conhecimento do conceito de fração, quer ao nível do seu significado de partilha equitativa, quer da sua comparação, o que não é suposto atendendo ao PMEB (ME, 2007).

Ainda nesta categoria e no âmbito dos 57,5 % de alunos que não recorreu à modelação da tarefa, 98,7 % não usou as frações para representarem as quantidades envolvidas, não parecendo familiarizados com este tipo de representação dos números racionais. Porém, também não surgiu a representação em numeral decimal, mesmo nos 5,1 % destes alunos que recorreu ao algoritmo da divisão. Destes, a maioria distribuiu o número de alunos pelo número de sandes (e.g. Figura 13), evidenciando o mal-entendido de que o dividendo tem de ser sempre maior do que o divisor. Mais um mal-entendido que decorre do trabalho com os números inteiros, conforme alertam vários investigadores (e.g. Berhr e Post (1992), Hiebert e Behr (1991) e Monteiro e Pinto (2005, 2007)).

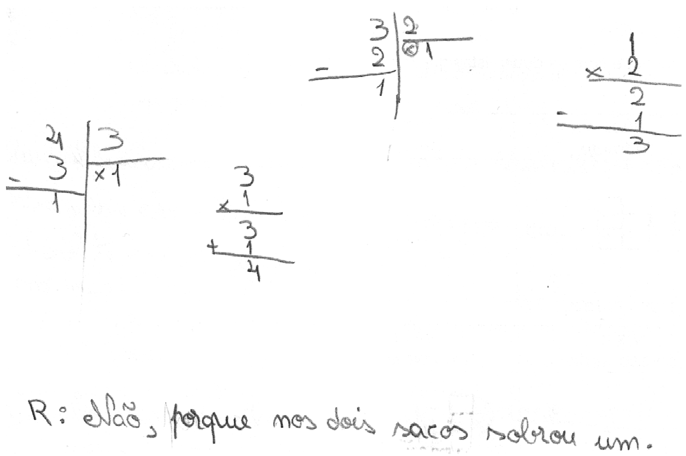


Figura 13: Mal-entendido de que o dividendo tem de ser maior do que o divisor

Apenas quatro dos alunos que recorreram ao algoritmo da divisão não trocaram o dividendo pelo divisor. Porém, nenhum conseguiu encontrar as quantidades envolvidas, ou seja, o quociente das respetivas divisões, tendo obtido valores inteiros para os referidos quocientes (e.g. Figura 14), facto que não lhes parece ter criado qualquer conflito cognitivo.

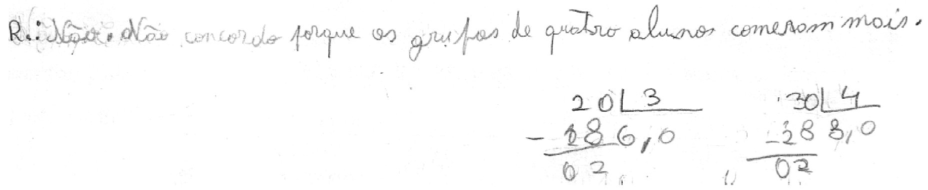

R: Não concordo porque os grupos de quatro alunos comeram mais.

Figura 14: Dificuldades na resolução do algoritmo da divisão

Assim, estes alunos, para além de não parecem estar habituados a avaliar a razoabilidade dos resultados na resolução de problemas, o que implica verificarem dados e resultados e relacionarem o contexto com os cálculos efetuados, conforme sugere o PMEB (2007), parecem ainda ter um parco desenvolvimento do raciocínio multiplicativo conforme também identificado por Martins (2007) na sua investigação.

Ainda dos 98,7 % de alunos que não recorreu às frações para representarem as quantidades envolvidas, 88,6 % limitou-se a apresentar uma justificação por extenso e/ou algoritmos errados, evidenciando vários mal-entendidos.

Assim, 18,6 % refere que não concorda com a afirmação do João, evidenciando o mal-entendido de que 2 sandes para 3 alunos é o mesmo que 3 sandes para 4 alunos, já que havia menos uma sandes do que o número de alunos em qualquer um dos grupos (e.g. Figura 15).

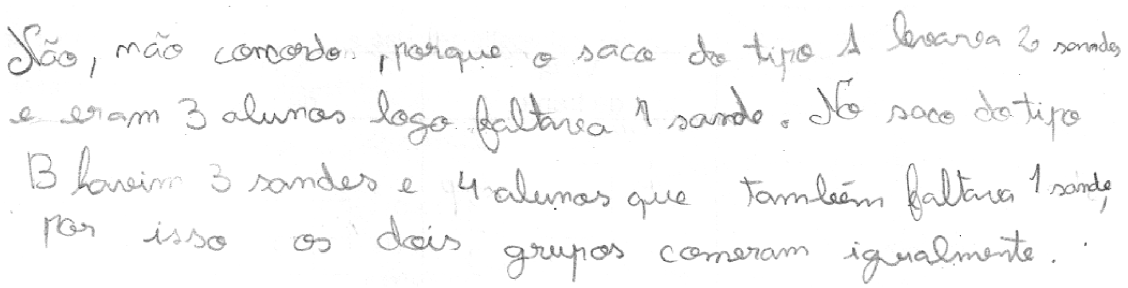

Não, não concordo, porque o saco do tipo A levava 2 sandes e eram 3 alunos logo faltava 1 sande. No saco do tipo B haviam 3 sandes e 4 alunos que também faltava 1 sande, por isso os dois grupos comeram igualmente.

Figura 15: Mal-entendido de que 2 sandes para 3 alunos é o mesmo do que 3 sandes para 4 alunos

Esta dificuldade pode advir do facto dos alunos se terem focado apenas na diferença entre 2 e 3 e 3 e 4, não considerando o valor real das quantidades fracionadas, sendo esta, de acordo com Post *et al*. (1986), uma forma de pensar caraterística dos números naturais que conduz geralmente a resultados incorretos e que os autores denominam de pensamento diferencial.

Outros 37,9 % referem que não concordam com a afirmação do João, porque 2 sandes são menos do que 3 sandes (e.g. Figura 16). Estes alunos parecem ter tido em conta apenas a quantidade de sandes a distribuir e não o número de alunos por quem foram distribuídas.

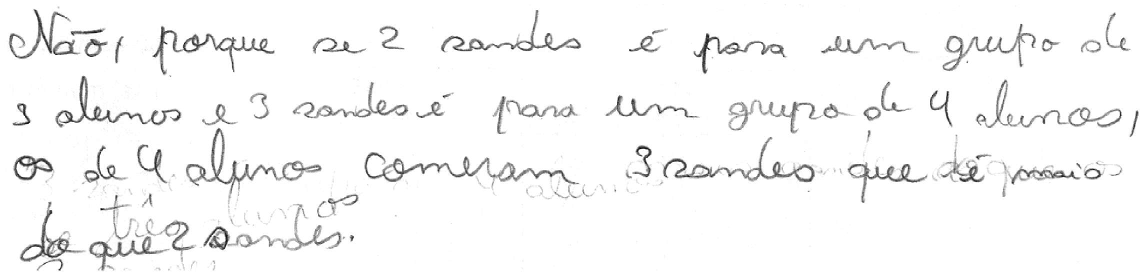

Não, porque se 2 sandes é para um grupo de 3 alunos e 3 sandes é para um grupo de 4 alunos, os de 4 alunos comeram 3 sandes que é mais do que 2 sandes.

Figura 16: Dificuldades com a comparação de partes fracionadas

Deste modo, para a comparação das quantidades envolvidas parecem ter tido em conta apenas os numeradores das quantidades fracionadas, erro identificado nas investigações realizadas por *Post et al.* (1986).

Também 6,3 % refere que não concordam com a afirmação do João, desta vez porque 4 alunos são mais do que 3 alunos, logo comeram mais nestes grupos (e.g. Figura 17).

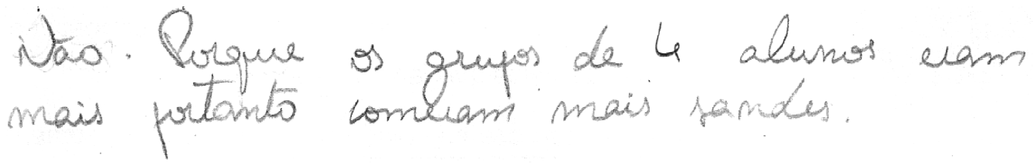

Não. Porque os grupos de 4 alunos eram mais portanto comeram mais sandes.

Figura 17: Dificuldades com propriedades da divisão

Estes alunos parecem ter tido em conta apenas a quantidade de alunos por grupo e não o número de sandes a distribuir. Deste modo, para a comparação das quantidades envolvidas, estes alunos parecem ter tido em conta apenas os denominadores das quantidades fracionadas, erro identificado nas investigações realizadas por *Post et al.* (1986).

Ainda 6,5 % refere que não concordam com a afirmação do João, porque 2 sandes para 3 alunos, tal como 3 sandes para 4 alunos, em qualquer dos grupos fica um aluno sem comer. Estes alunos recorreram ao algoritmo da subtração (Figura 18), que parece ter suportado o raciocínio que levou à referida resposta. Assim, não parecem ter atribuido significado ao termo distribuir que surge no enunciado da tarefa.

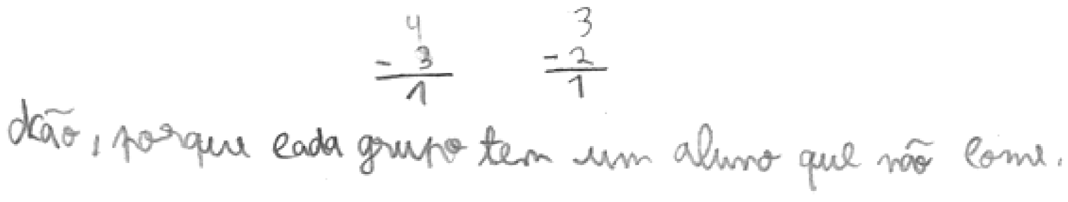


Figura 18: Subtração

Também estes alunos parecem apresentar um parco desenvolvimento do raciocínio multiplicativo, conforme também identificado por Martins (2007) na sua investigação.

Por último, 25,6% refere que não concordam com a afirmação do João, porque o grupo de 3 alunos comeu 6 sandes e o grupo de 4 alunos comeu 12 sandes. Estes alunos recorreram ao algoritmo da multiplicação (e.g. Figura 19), que parece ter suportado o racicínio que levou à referida resposta. Também este grupo de alunos parece não ter atribuido significado ao termo distribuir que surge no enunciado da tarefa.

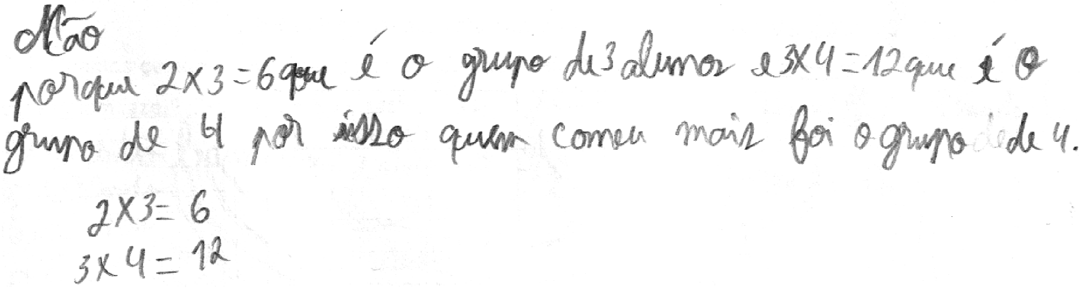


Figura 19: Multiplicação

Assim, estes alunos que apresentaram uma justificação por extenso e/ou algoritmos errados, para além de não parecerem nada familiarizados com qualquer representação das quantidades envolvidas, fracionária ou decimal, também parecem ter um fraco desenvolvimento do raciocínio multiplicativo, o que mais uma vez, não é suposto atendendo ao preconizado pelo PMEB (ME, 2009).

Ainda no âmbito desta categoria de resposta, ou seja, dos 59,2 % de alunos que ***responde "Não" com explicação incorreta***, 42,5% recorre à modelação da tarefa, sendo que destes, apenas 14,9% usou frações, pelo que 85,1% não usou frações. Porém, as justificações erradas para a resposta "Não" continuam a apresentar a maioria dos mal-entendidos descritos nesta categoria de análise, relativas às produções de alunos que não recorreram à modelação da tarefa.

Assim, 24 % dos alunos que apresenta frações na sua produção, responde que em qualquer um dos grupos se comeu a mesma quantidade, considerando 2/3 = 3/4 (e.g. Figura 20), ou 2/3 = 1/2 e 1/4 (e.g. Figura 21), ou ainda, metade mais 1/3 = metade mais 1/4 (e.g. Figura 22).

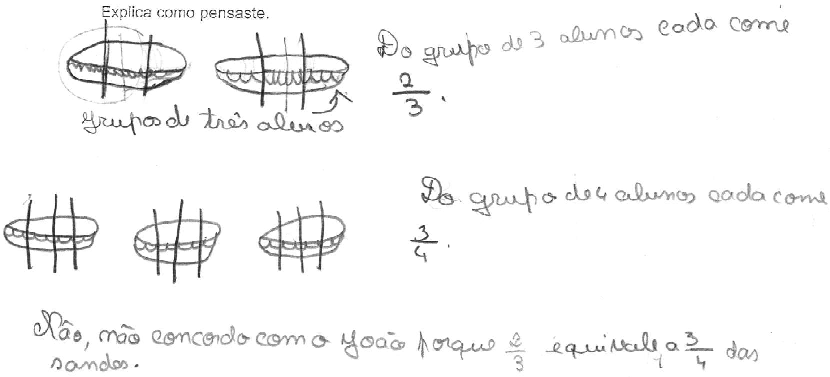


Figura 20: Modelação para a partilha e frações corretas e dificuldades na comparação de frações

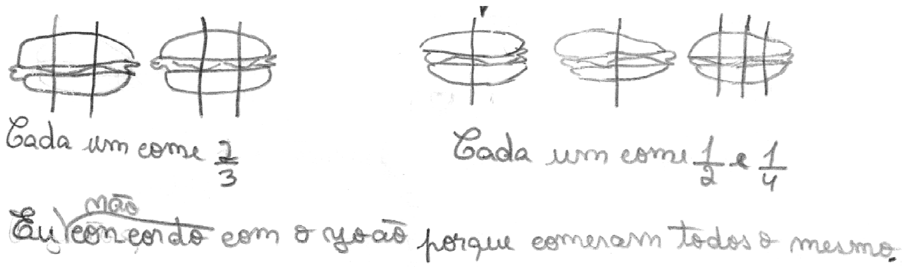


Figura 21: Modelação para a partilha e frações corretas e dificuldades na comparação de frações

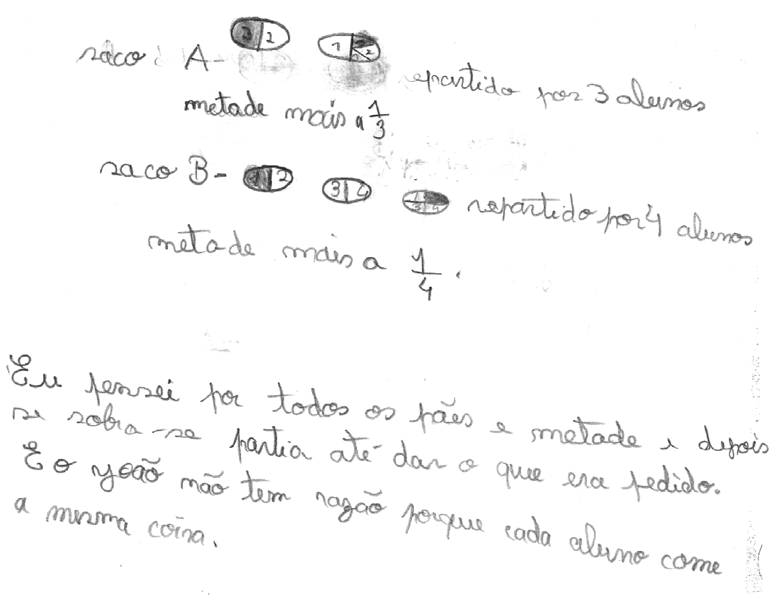


Figura 22: Modelação para a partilha e frações corretas e dificuldades na comparação de frações

Assim, apesar de terem identificado corretamente as quantidades envolvidas recorrendo às frações, evidenciam dificuldades na comparação das mesmas, pelo que a modelação da situação parece ter suportado o raciocínio para a identificação das referidas quantidades, mas não para a sua comparação. Em relação a esta, parecem evidenciar o recurso à estratégia de pensamento diferencial referida por Post *et al*. (1986), forma de pensamento caraterística dos números naturais que conduz geralmente a resultados incorretos.

Outros 38% dos alunos que apresentaram frações nas suas produções modelaram corretamente a situação, tendo recorrido à partilha equitativa das sandes por cada grupo de alunos. Porém, ao recorrerem às frações para identificarem as quantidades envolvidas, evidenciaram o mal-entendido relativo ao todo a considerar (e.g. Figura 23), que na situação corresponde a uma sandes e não ao total de sandes de cada um dos grupos, conforme consideraram. Esta dificuldade vai ao encontro do preconizado por vários investigadores (e.g. Behr *et al*. (1983), Behr *et al.* (1992), Fosnot e Dolk (2002), Lamon (2006,2007) e Monteiro e Pinto (2005, 2007)), que consideram a conceção da unidade de referência como um outro dos fatores responsáveis pela complexidade do ensino-aprendizagem das frações.

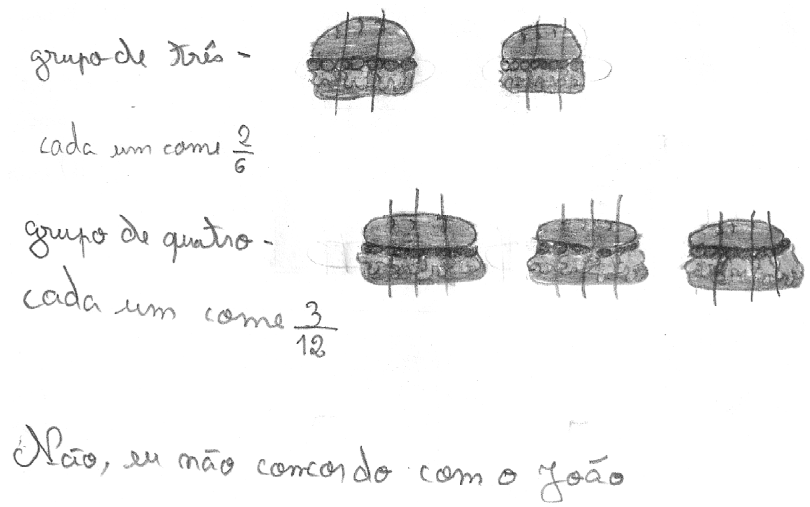


Figura 23: Modelação para a partilha equitativa e frações incorretas

Estas produções evidenciam ainda dificuldades na comparação de frações, dado que atendendo às frações apresentadas, que supostamente correspondem às quantidades que cada aluno de cada um dos grupos comeu, 2/6 (grupos de 3 alunos)> 3/12 (grupos de 4 alunos), cada aluno dos grupos de 3 alunos teria comido mais do que cada aluno dos grupos de 4, pelo que assim o João teria razão. Deste modo, para além de revelarem dificuldades com a unidade de referência a considerar, estes alunos revelaram também dificuldades na comparação de frações. Mais uma vez, também estes alunos poderão ter recorrido à estratégia de pensamento diferencial referida por Post *et al*. (1986), forma de pensamento caraterística dos números naturais e que conduz geralmente a resultados incorretos.

Outros 10% dos alunos que apresentaram frações nas suas produções responderam com base na comparação do número de sandes existente por grupo, ou seja, 2 sandes são menos do que 3 sandes (e.g. Figura 24). Estes alunos também parecem ter tido em conta apenas a quantidade de sandes a distribuir e não o número de alunos por quem distribuir.

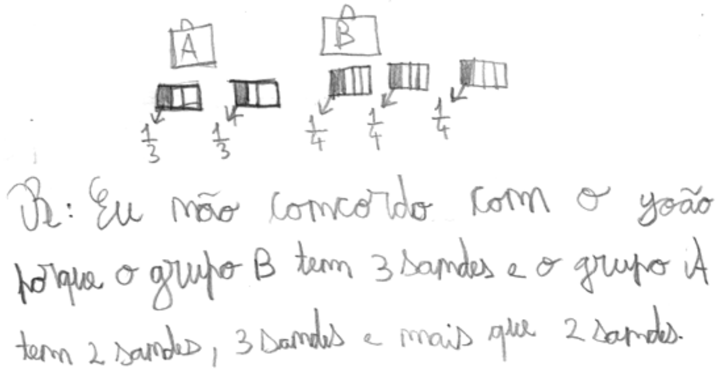


Figura 24: Modelação para a partilha, frações corretas e comparação tendo em conta apenas os numeradores das frações

Assim, embora a modelação da tarefa deixe evidente a partilha equitativa das sandes pelos alunos de cada grupo, que poderá ter sido promovida pelo contexto real/significativo da situação, a resposta apresentada não parece ter sido suportada pela mesma, pelo que estes alunos não parecem ter conseguido conectar o esquema com a resposta a dar à tarefa. Deste modo, para a comparação das frações parecem ter tido em conta apenas os numeradores das frações que representam as quantidades envolvidas, erro identificado nas investigações realizadas por *Post et al.* (1986).

Também 6% dos alunos que apresentou frações nas suas produções respondeu com base na comparação do número de alunos por grupo, ou seja, 4 alunos são mais alunos do que 3, por isso comeram mais (e.g. Figura 25). Estes alunos também parecem ter tido em conta apenas a quantidade de alunos por grupo e não o número de sandes a distribuir.

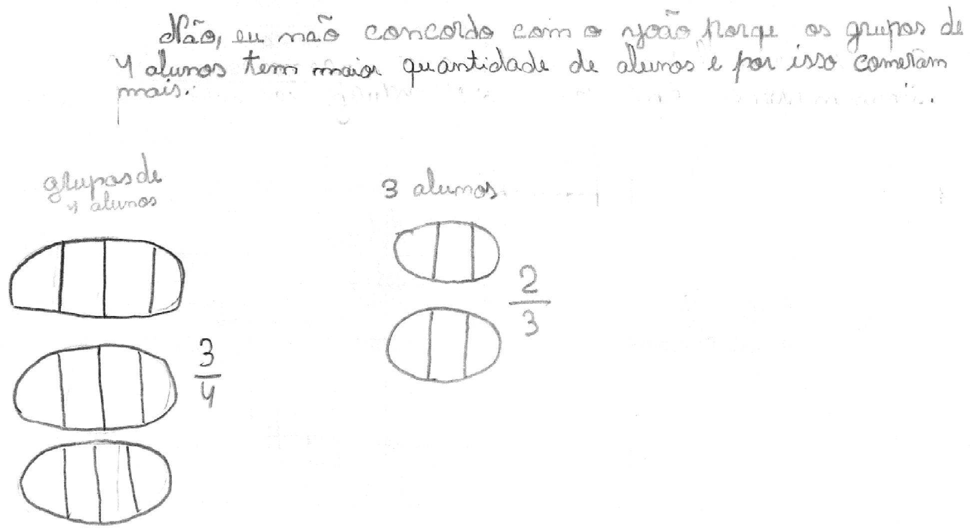


Figura 25: Modelação para a partilha, frações corretas e comparação tendo em conta apenas os denominadores das frações

Assim, estes alunos também apresentam a modelação da tarefa que evidencia a partilha equitativa das sandes pelos alunos de cada grupo, bem como a identificação das quantidades envolvidas, que parece ter sido suportada pela referida modelação, porém, aquando da comparação de frações parecem ter tido apenas em conta os seus denominadores, erro igualmente identificado nas investigações realizadas por *Post et al.* (1986).

Para concluir, ainda dentro dos alunos que recorreram à modelação da tarefa, 22 % dos que recorreram às frações, revelaram dificuldades logo na modelação da tarefa, ao apresentarem esquemas que não refletem a situação enunciada (e.g. Figura 26), ou seja, a partilha equitativa. Assim, a identificação das quantidades envolvidas ficou logo comprometida, atendendo a que esta parece ter sido suportada na modelação apresentada.

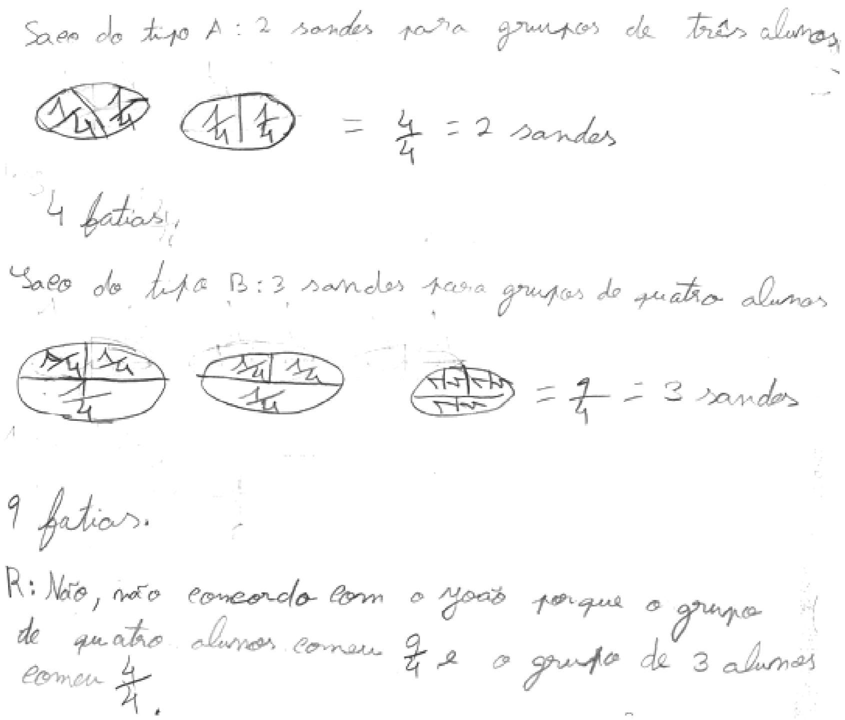


Figura 26: Modelação e frações incorretas

Deste modo, este grupo de alunos não parece familiarizado com a modelação de tarefas e/ou com este tipo de tarefas, evidenciando ainda, problemas ao nível do desenvolvimento do raciocínio multiplicativo, contrariando o que é preconizado pelo PMEB (ME, 2007).

Dos 1330 alunos que resolveram a tarefa deste estudo, 3,3 % ***responde "sim" mas evidencia corretamente a parte que cada um comeu***. Deste grupo de alunos todos recorreram à modelação da tarefa para a partilha equitativa das sandes em cada um dos grupos, sendo que 13,6 % não usou frações para representar as quantidades envolvidas. Porém, a modelação que apresentaram aleada à linguagem informal a que recorreram, deixa evidente a parte de sandes que coube a cada aluno de cada grupo (e.g. Figura 27).

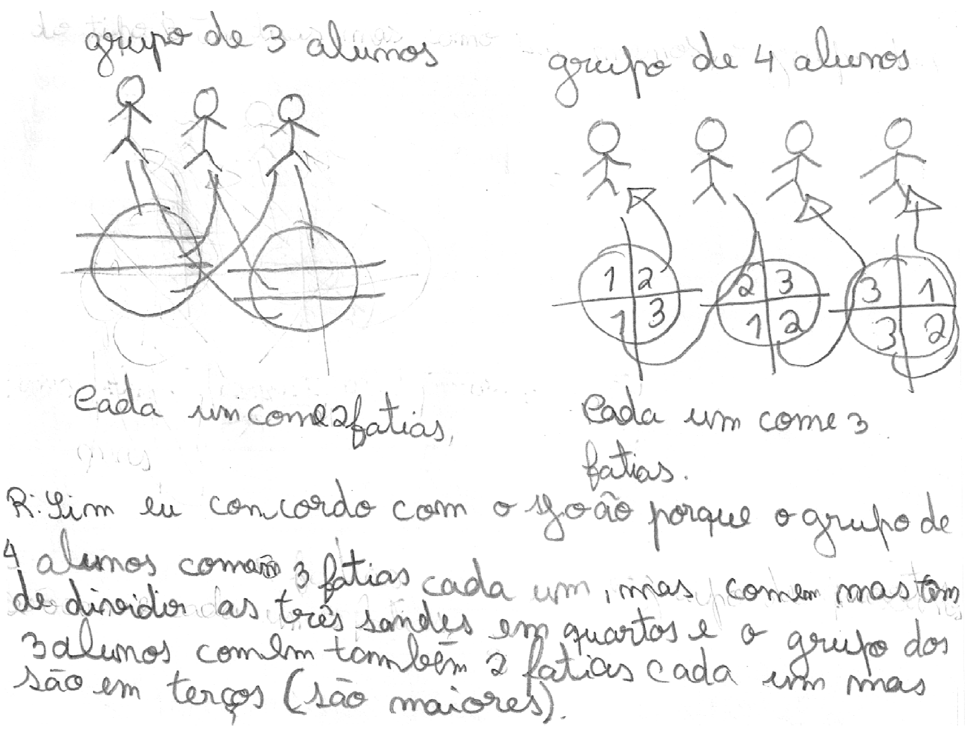


Figura 27: Modelação para a partilha e linguagem informal

Apesar de não terem recorrido à representação faccionária evidenciaram conhecimento de que cada fatia no grupo de três alunos corresponde a um terço de sandes e que no grupo de quatro corresponde a um quarto. A resposta errada ficou a dever-se ao facto de terem comparado estas quantidades, embora de forma correta, em vez das quantidades que correspondiam à quantidade de sandes que cada aluno comeu em cada um dos grupos. Assim, estes alunos não parecem familiarizados com a representação faccionária, nem com este tipo de tarefas, ao contrário do que é preconizado pelo PMEB (ME, 2007), apesar de evidenciarem um entendimento da terça parte e quarta parte como divisões.

Ainda no âmbito dos alunos que ***responde "sim" mas evidencia corretamente a parte que cada um comeu***, 86,4% usa frações para representar as quantidades envolvidas, sendo que 71,1 % destes alunos recorre a uma representação fracionária correta das quantidades envolvidas, enquanto 28,9% comete erros nestas representações.

Assim, os alunos que apresentaram uma representação faccionária correta das quantidades envolvidas parecem ter suportado a mesma, na modelação que fizeram da tarefa (e.g. Figura 28).

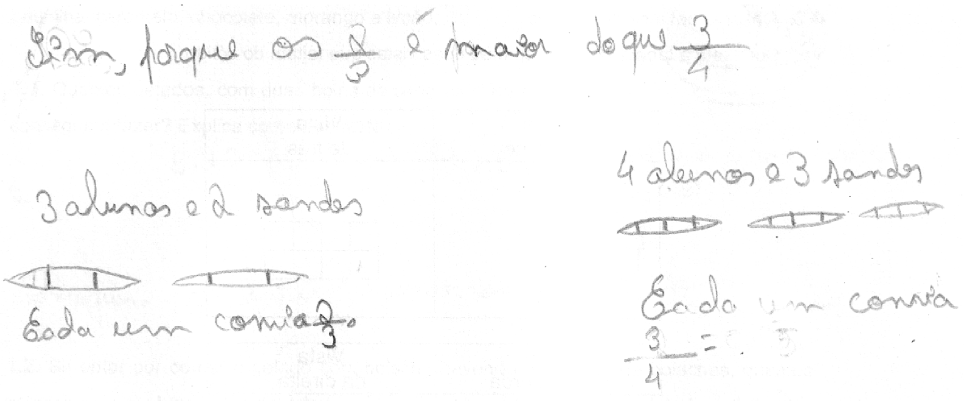


Figura 28: Modelação para a partilha e frações corretas

Porém, a resposta errada à tarefa fica a dever-se a dificuldades na comparação de frações, pois consideraram 2/3 > 3/4. Este erro também poderá ter sido promovido pela parca modelação da tarefa, que não facilita a comparação das diferentes partes e/ou pelo recurso ao pensamento diferencial referido por Post *et al*. (1986), uma forma de pensar caraterística dos números naturais que conduz geralmente a resultados incorretos.

Os alunos que apresentaram uma representação faccionária incorreta das quantidades envolvidas, apesar de terem modelado a partilha equitativa das sandes, evidenciando a parte que cada aluno de cada grupo comeu, não consideraram uma sandes como sendo a unidade em cada um dos grupos, mas todas as sandes em cada um dos grupos. Deste modo, consideraram 2/6 em vez de 2/3 e 3/12 em vez de 3/4 (e.g. Figura 29).

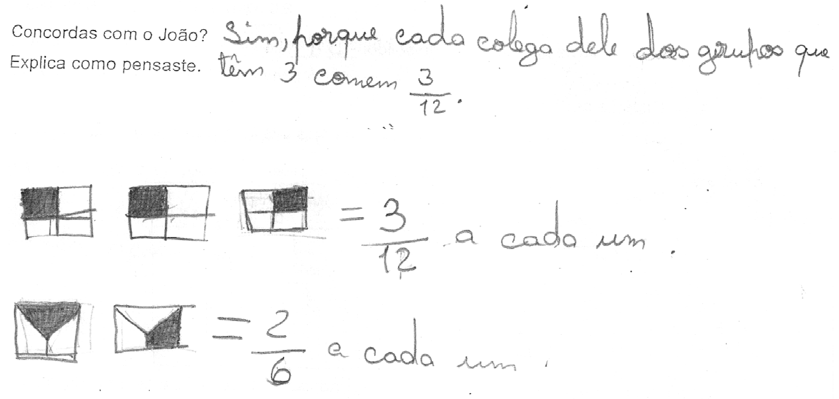


Figura 29: Modelação para a partilha e frações incorretas

Assim, estes alunos parecem ter dificuldades com o todo a considerar, ou seja, com a unidade de referência. Esta dificuldade vai ao encontro do preconizado por vários investigadores (e.g. Behr *et al*. (1983), Behr *et al.* (1992), Fosnot e Dolk (2002), Lamon (2006,2007) e Monteiro e Pinto (2005, 2007)), que consideram a conceção da unidade de referência como um outro dos fatores responsáveis pela complexidade do ensino-aprendizagem das frações.

Dos 1330 alunos que resolveram a tarefa deste estudo, 22,4% ***responde "sim" sem explicação ou explicação totalmente incorreta***. Destes, 2,7% responde sim e não apresenta qualquer explicação. Assim, 97,3% destes alunos apresenta uma explicação totalmente incorreta. Destes, 48,3% recorre à modelação da tarefa, sendo que esta não evidencia a partilha equitativa das sandes pelos alunos de cada um dos grupos, e 51,7% não recorre à modelação. Dos que recorreram à modelação, apenas 4,3% apresenta frações, por norma as unitárias (e.g. Figura 30).

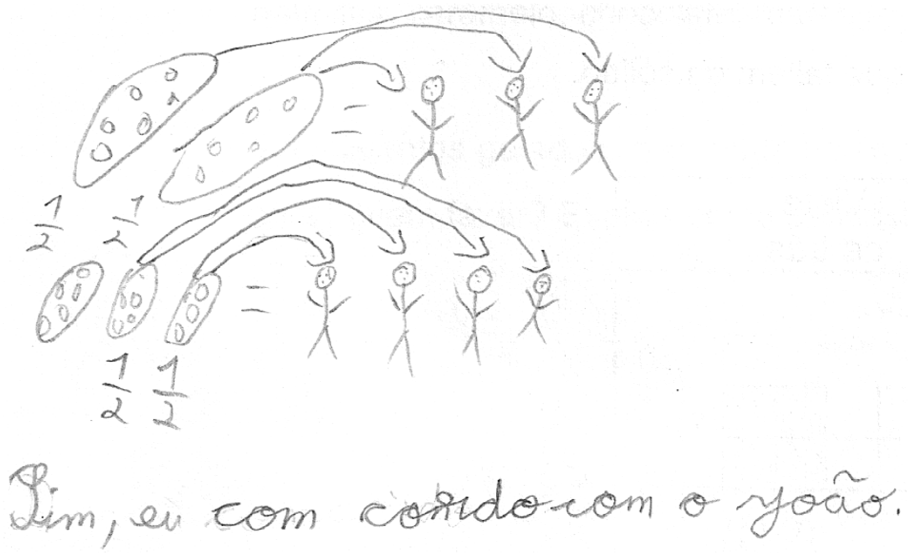


Figura 30: Modelação e frações incorretas

Porém, os esquemas que apresentaram não evidenciam sequer a partilha equitativa das sandes pelos alunos de cada um dos grupos e nem as frações representam as quantidades envolvidas. Assim, estes alunos não parecem familiarizados com este tipo de tarefas, bem como com raciocínios multiplicativos, mais uma vez contrariando o preconizado pelo PMEB (ME, 2007).

Ainda dos alunos que recorreram à modelação da tarefa, 95,7% não apresenta frações para representar as quantidades envolvidas. Estes alunos, tal como os do grupo anterior, também apresentaram esquemas que não evidenciam a partilha equitativa das sandes pelos alunos de cada um dos grupos (e.g. Figura 31). Também estes alunos não parecem familiarizados com este tipo de tarefas, bem como com raciocínios multiplicativos, mais uma vez contrariando o preconizado pelo PMEB (ME, 2007).

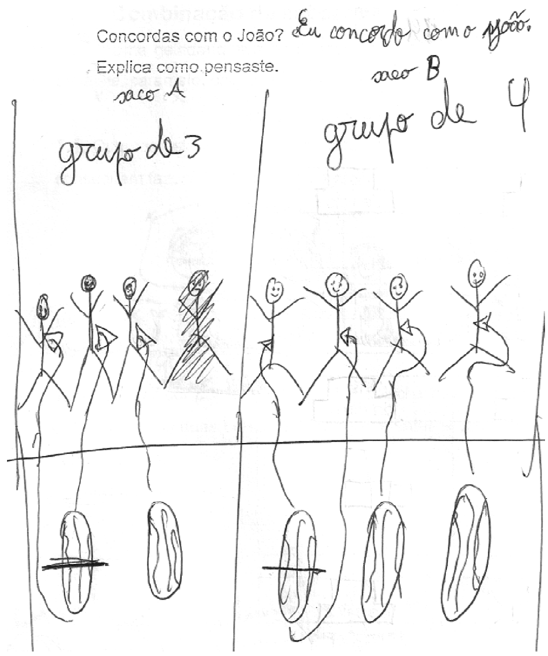


Figura 31: Modelação incorreta

Dos 51,7% dos alunos que não recorreu à modelação da tarefa, cerca de 26,7% recorreu a um algoritmo, sendo que a maioria recorreu ao algoritmo da multiplicação (e.g. Figura 32).

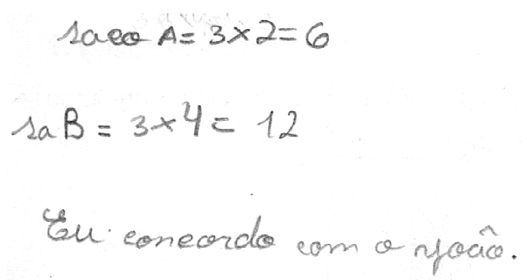


Figura 32: Algoritmo da multiplicação

Os poucos alunos que recorreram ao algoritmo da divisão trocaram o dividendo pelo divisor (e.g. Figura 33), evidenciando o já referido mal-entendido também identificado pela literatura da investigação (e.g. Monteiro e Pinto (2005, 2007)).

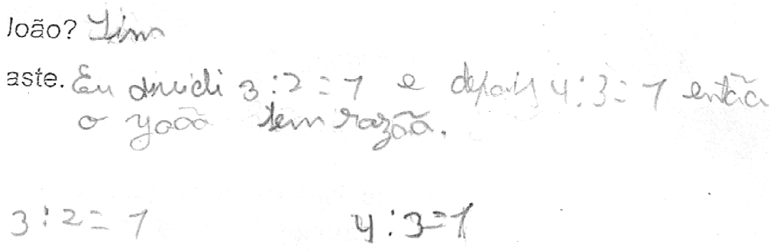


Figura 33: Algoritmo da divisão incorreto

Ainda dos 51,7% dos alunos que não recorreu à modelação da tarefa, 73,3% limitou-se a apresentar uma explicação incorreta, através de um pequeno texto, ou seja, com recurso a linguagem corrente. Nestas justificações encontram-se a maioria dos mal-entendidos já anteriormente referidos, nomeadamente a comparação apenas das sandes em cada grupo, a comparação apenas dos alunos em cada grupo, o considerarem que comem o mesmo porque a diferença entre o número de sandes e o número de meninos é a mesma nos dois grupos e, a que recolhe mais adeptos, ou seja, a ideia de que por quatro se divide mais, logo por 3 calha mais a cada um, esquecendo que a quantidade a distribuir é diferente (e.g. Figura 34)

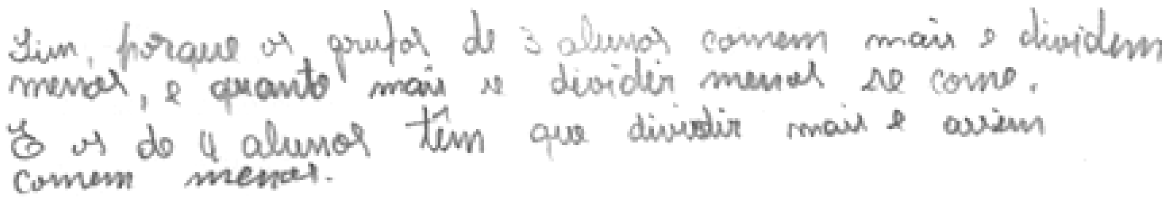


Figura 34: Explicação incorreta com recurso a texto

Também este grupo de alunos não parece estar familiarizados com as diferentes formas de representação dos números racionais e/ou com a resolução deste tipo de tarefas, o que mais uma vez contraria o preconizado pelo PMEB (ME, 2007).

Por último, ***dos 1330 alunos*** que resolveram a tarefa deste estudo, 4,4% ***não responde***.

As principais estratégias e dificuldades evidenciadas pelos alunos na resolução de situações de partilha equitativa encontram-se sintetizadas no quadro 1.

	Situações de partilha equitativa			
Estratégias	Algoritmo da divisão e representação decimal	Partilha equitativa com recurso à modelação e representação fracionária	Fração como operador	Algoritmo da divisão com recurso à modelação e representação decimal
Dificuldades	Na modelação da tarefa .	Nos algoritmos selecionados: - Troca do dividendo pelo divisor, recurso à subtração e multiplicação	Na identificação das quantidades envolvidas quer com recurso à representação faccionária, quer à representação decimal.	No todo de referência para a identificação das quantidades envolvidas com recurso à representação fracionária, apesar da modelação da tarefa

Quadro 1: Estratégias e dificuldades na resolução de situações de partilha equitativa

Assim, no âmbito da partilha equitativa, as estratégias vão ao encontro das identificadas pela literatura de investigação na área dos racionais (e.g. Monteiro e Pinto, 2007). As dificuldades apresentadas sugerem mal-entendidos com o todo a considerar, igualmente identificadas pela literatura de investigação na área (e.g. Behr *et al*. (1983), Behr *et al.*

(1992), Fosnot e Dolk (2002), Lamon (2006,2007) e Monteiro e Pinto (2005, 2007)). Porém, a maioria das dificuldades apresentadas decorrem de dificuldades logo com o significado de partilha, ou seja, logo no âmbito da divisão de números inteiros, já que a maioria dos alunos nem sequer recorre à representação faccionária, pelo que não parecem nada familiarizados com esta representação. Porém, frequentaram o 1.º ciclo do ensino básico no âmbito da entrada em vigor do PMEM (ME, 2007) e portanto, supostamente trabalharam os números racionais nas suas diferentes representações ao longo do referido ciclo, conforme preconizado por aquele programa.

ESTRATÉGIAS E DIFICULDADES APRESENTADAS PELOS ALUNOS NA COMPARAÇÃO DE NÚMEROS RACIONAIS

As principais estratégias e dificuldades evidenciadas pelos alunos na comparação de números racionais encontram-se sintetizadas no quadro 2.

	Comparação de números racionais			
Estratégias	Pensamento residual	Pontos de referência	Recurso a modelos (retangular e circular)	Recurso aos numerais decimais
Dificuldades	Pensamento diferencial	Comparação apenas do numerador	Comparação apenas do denominador	……

Quadro 2: Estratégias e dificuldades na resolução de situações de comparação de frações

Assim, no âmbito da comparação de frações, as estratégias apresentadas parecem passar por estratégias informais, nomeadamente pensamento residual e pontos de referência, também identificadas por Post *et al*. (1986) nas suas investigações. Quanto a dificuldades resumem-se ao pensamento diferencial, que de acordo com Post *et al.*

(1986) é uma forma de pensamento caraterística dos números naturais que conduz geralmente a resultados incorretos e ainda, à comparação apenas do numerador ou à comparação apenas do denominador. Porém, a maioria dos alunos não recorre sequer à representação faccionária, pelo que não parecem nada familiarizados com esta representação. No entanto, frequentaram o 1.º ciclo do ensino básico no âmbito da entrada em vigor do PMEM (ME, 2007) e portanto, supostamente trabalharam os números racionais nas suas diferentes representações ao longo do referido ciclo, conforme preconizado por aquele programa.

Importa salientar, que Vanhille e Baroody (2002) atribuem as causas das dificuldades com frações e operações com frações: (i) à falta de existência de experiências concretas pelos alunos, necessária à compreensão conceptual de frações, ou à falta de conexão entre estas experiências e os conceitos abstratos; e (ii) a um fraco desenvolvimento do raciocínio multiplicativo, fundamental para a compreensão das frações, que segundo os autores, se deve a um inadequado desenvolvimento das estruturas multiplicativas.

CONCLUSÃO

Neste capítulo apresento um breve resumo do estudo, as principais conclusões, limitações e recomendações do estudo e por último, uma reflexão.

RESUMO

Reconhecido pela investigação como um tópico de difícil ensino e aprendizagem e que requer tempo para que seja compreendido, as orientações curriculares (PMEB, 2007) propõem um período mais prolongado de convivência com as frações na escola, sugerindo a sua exploração logo no 1.º ano de escolaridade, de forma intuitiva. Deste modo, os alunos terão um maior contato com estes números permitindo-lhes assim, uma maior compreensão do conceito de fração e desenvolvimento do sentido de número racional. Porém os alunos continuam a chegar ao 2.º Ciclo com muitas dificuldades. Assim, importa perceber as estratégias e dificuldades que persistem em alunos que supostamente terão sido alvo de um trabalho com números racionais nos primeiros anos de escolaridade. Para o efeito surgiu a oportunidade de analisar as provas de Matemática realizadas por 1330 alunos de 21 agrupamentos do Distrito de Leiria, no âmbito do concurso "DESAFIOS 2012", mais concretamente as respostas dadas a uma tarefa relativa aos números racionais. Neste contexto tentei perceber a noção de partilha equitativa, bem como de comparação de frações dos referidos alunos. Decorre do referido objetivo as seguintes questões de investigação:

1. Que estratégias e dificuldades apresentam os alunos na resolução de situações de partilha equitativa?
2. Que estratégias e dificuldades apresentam os alunos na comparação de números racionais?

De salientar que os alunos que participaram no concurso "DESAFIOS 2012", frequentaram o 1.º ciclo do ensino básico, já no âmbito da entrada em vigor do Programa de Matemática do Ensino Básico - PMEB (ME, 2007).

PRINCIPAIS CONCLUSÕES

A estratégia mais comum para a partilha equitativa passa pela modelação da situação e consequente partilha equitativa de cada uma das sandes pelo número de alunos do grupo, ou seja, por dividirem as duas sandes em três partes iguais e as três sandes em quatro partes iguais e posteriormente, darem cada uma das partes a cada um dos alunos e assim, chegaram à quantidade de sandes que cada aluno comeu, recorrendo à representação faccionária para a sua representação. Porém, embora não tão comum, também surgiu o recurso à modelação da situação e consequente partilha equitativa, mas desta vez, a partilha de cada uma das sandes em metades, sendo que no caso das duas sandes para três alunos, depois de darem uma metade a cada aluno, dividiram a quarta metade em três partes iguais e conseguiram identificar que 1/3 de 1/2 corresponde a 1/6, ou seja, recorreram também à representação faccionária para representarem as quantidades envolvidas. Também houve o recurso ao algoritmo da divisão e à representação em numeral decimal, embora de forma pouco expressiva. De salientar que estas estratégias vão ao encontro das identificadas em outras investigações (e.g. Monteiro e Pinto (2007)), que consideram os contextos de partilha equitativa como ricos e importantes para a compreensão da representação faccionária e equivalência de frações, levando os alunos a realizarem esquematizações como apoio na resolução de problemas.

Relativamente às dificuldades com a partilha equitativa, estas passaram essencialmente por dificuldades: (i) na modelação da situação, porque não representavam a partilha equitativa; (ii) com os algoritmos selecionados para a resolução da tarefa, nomeadamente o recurso à subtração, à multiplicação e quando à divisão, trocaram o dividendo pelo divisor; (iii) na identificação das quantidades envolvidas, quer com recurso à representação fracionária, quer com recurso à representação decimal; e (iv) no todo a considerar aquando da identificação das quantidades envolvidas por recurso à representação fracionária, apesar da modelação correta da situação. Assim, estes alunos não parecem familiarizados com tarefas de contexto na abordagem às frações, ou seja, tarefas onde podem recorrer a desenhos ou esquemas para os resolverem, tornando-se assim mais fácil perceberem os conceitos, deixando para mais tarde a utilização de símbolos e algoritmos, conforme sugerem Monteiro e Pinto (2007). Também Moss e Case (1999) salientam a importância de um ensino onde se dedique mais tempo ao desenvolvimento de conceitos, onde seja dada prioridade às tentativas informais de resolução de problemas por parte dos alunos e onde se destaque a diferenciação entre os números inteiros e os não inteiros, nas diferentes representações dos números racionais, de modo a que estas dificuldades possam ser superadas.

Quanto à comparação de frações as estratégias evidenciadas foram essencialmente estratégias informais, conforme também identificadas por Post *et al*. (1986) nas suas investigações, nomeadamente o pensamento residual e o recurso a pontos de referência. Porém, também surgiram situações cuja modelação da tarefa parece ter promovido a comparação das quantidades envolvidas representadas na forma fracionária. Ainda o recurso à representação decimal foi outra das estratégias usadas para comparar as quantidades envolvidas.

Relativamente às dificuldades estas prendem-se essencialmente com o recurso ao pensamento diferencial, uma forma de pensar, que de acordo com Post *et al*. (1986), é caraterística dos números naturais e conduz geralmente a resultados incorretos. No entanto surgiram ainda dificuldades que se predem com o facto de os alunos compararem ou apenas os numeradores, ou apenas os denominadores, erros igualmente identificados nas investigações realizadas por *Post et al.* (1986). Daí, estes investigadores salientarem a importância da compreensão de que a relação entre numerador e denominador define o significado de uma fração, e não as respetivas grandezas absolutas vistas de forma independente, pelo que alertam para a necessidade de se colmatar a lacuna concetual entre o raciocínio aditivo e multiplicativo, já que alguns dos reflexos das conceções dos alunos sobre os números naturais baseados nas estruturas aditivas podem perturbar o desenvolvimento das estruturas multiplicativas.

Limitações do estudo e recomendações

Embora os documentos sejam fontes ricas e estáveis de dados, apresentando certa durabilidade, aspetos que favorecem a sua utilização, importa salientar algumas limitações. Uma delas prende-se com a sua representatividade, ou seja, a quantidade de documentos necessários para que se possa fazer inferências a partir das informações contidas nos documentos analisados. Outra prende-se com a subjetividade dos documentos, já que sendo construção humana e social não se sabe muito bem até que ponto é possível assegurar a fidedignidade dos dados (Silva, Damaceno, Martins, Sobral & Farias, 2009). No entanto, Gil (1991) adverte para o facto de que investigação elaborada a partir de documentos é importante não porque responde definitivamente a um problema, mas porque proporciona uma melhor visão desse problema ou, hipóteses que conduzem à sua verificação por outros meios.

Por conseguinte, sugere-se mais investigação em torno da temática deste estudo de modo a que se consiga perceber as estratégias e dificuldades que persistem em alunos que supostamente terão sido alvo de um trabalho com números racionais nos primeiros anos de escolaridade, mesmo a nível nacional. Só assim, se poderia pensar em estratégias para colmatar este problema, que persiste mesmo após a entrada em vigor de um programa (ME; 2007), que sugere que as frações devem começar a ser trabalhadas nos dois primeiros anos do 1.º ciclo, seguindo uma abordagem intuitiva a partir de situações de partilha equitativa e de divisão da unidade em partes iguais recorrendo, para isso, a modelos e a representações na forma de fração nos casos mais intuitivos e simples.

REFLEXÃO FINAL

A terminar este estudo, são várias a reflexões que me suscita, nomeadamente a de que não basta mudar os programas para que os nossos alunos passem a ter conhecimento e neste caso específico no âmbito dos números racionais. No entanto, dados de várias investigações (e.g. Harel *et al*. (1994), Ma (1999) e Post *et al.* (1988)), salientam que muitos adultos, incluindo professores e os que se encontram na formação inicial de professores parecem lutar com as mesmas dificuldades dos alunos, mantendo as mesmas ideias primitivas e conceitos errados. Segundo Lamon (2007), as dificuldades evidenciadas pelos adultos podem advir da falta de tratamento adequado do campo conceptual multiplicativo no currículo de Matemática, e da vivência das mesmas experiências escolares que os atuais alunos. Assim, não será de repensar a nossa formação e/ou a nossa formação contínua?

BIBLIOGRAFIA

Bardin, L. (2009). *Análise de Conteúdo*. Tradução de Luís A. Reto e Augusto Pinheiro. 5ed. Lisboa: Edições 70.

Behr, M., & Post, T. (1981). The effect of visual perceptual distractors on children's logical-mathematical thinking in rational number situations. In T. Post & M. Roberts (Org.), *Proceedings of the Third Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 8-16). Minneapolis: University of Minnesota.

Behr, M., Lesh, R., Post, T., & Silver, E. (1983). Rational number concepts. In R. Lesh & M. Landau (Org.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 92-126).New York, NY: Academic Press.

Behr, M. & Post, T. (1992). Teaching rational number and decimal concepts. In T. Post.(Org.), *Teaching mathematics in grades K-8: Research-based methods* (2^{nd} ed., pp 201-248). Boston: Allyn $ Bacon.

Behr, M.J., Harel, G., Post, T and Lesh, R.: (1992), '*Rational number, ratio, and proportion*.' In D. Grouws (ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning (pp 296-333). New York: Macmillan

Behr, M.J., Harel, G., Post, T and Lesh, R.: (1993), '*Rational Numbers: Towards a Semantic Analysis - Emphasis on the Operator Construct*.' In T.P.Carpenter, E.Fennema and T.A.Romberg (eds.), Rational Numbers: An Integration of the Research (pp 13-47). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Bogdan, R., & Biklen, S. K. (1994). *Investigação Qualitativa em Portugal*. Porto: Porto Editora.

Carmo, H. & Ferreira, M. (1998). *Metodologia da Investigação. Guia para auto-aprendizagem*. Lisboa: Universidade Aberta.

Carvalho, A. (2005). *O desenvolvimento do conceito de número racional em alunos do 4º ano de escolaridade*. Tese de Mestrado – Didáctica da Matemática. Lisboa: Universidade de Lisboa, Portugal.

Cellard, A. (2008) *A análise documental*. In Poupart, J. el all. A pesquisa qualitativa: enfoques epistemológicos e metodológicos. Petrópolis, Vozes.

Coutinho, C. (2011) *Metodologia de Investigação em Ciências Sociais e Humanas: teoria e prática*. Coimbra: Almedina.

Fernandes, D. (1991) *Notas sobre os paradigmas de investigação em educação.* Noesis (18), 64-66

Fernandes, M. (2013). *Ensinar números racionais no 1º ciclo CEB – Uma experiência com alunos do 4º ano em período de transição de documentos curriculares*. Tese de Mestrado em Estudos da Criança. Instituto de Educação – Universidade do Minho.

Feteira, S. (2012). *Os números racionais, na sua representação por frações, nos primeiros anos de escolaridade*. Tese de Mestrado em Educação e Tecnologia em Matemática. Leiria: IPL.

Fortin, M. F. (1999). *O processo de investigação: da concepção à realização*. 1ª Edição. Loures. Lusociência, pp. 34 – 376.

Fosnot, C. T., & Dolk, M. (2002). *Young mathematicians at work: Constructing fractions, decimals, and percents*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Godoy, A. S. (1995). *Introdução à pesquisa qualitativa e suas possibilidades*. RAE – Revista de Administração de Empresas, São Paulo, v. 35, n.º 2, pp. 57-63.

Godoy, A. S. (1995). *Pesquisa Qualitativa Tipos fundamentais*. RAE – Revista de Administração de Empresas, São Paulo, v. 35, nº 3, pp. 20-29.

Harel, G., Behr, M., Lesh, R., & Post, T. (1994). *Invariance of ratio: The case of children's anticipatory scheme for constancy of taste*. Journal for Research in Mathematics Education, 25(4), 324-345.

Hiebert, J. & Behr, M. (1991). Introduction: capturing the major themes. In: Hiebert, J. & Behr,M. (Eds.). *Number concepts and operations in the middle grades.* 3 ed. Reston: NCTM, p.1-18.

Huinker, De Ann. (2002). Examining Dimensions of Fraction Operation Sense. In B. Litwiller & G. Bright (Eds.), *Making Sense of Fractions, Ratios, and Proportions*. 2002 Yearbook.

Kerslake, D.: (1986), *Fractions: Children's Strategies and Errors*. Windsor, NFER-Nelson

Kieren, T. (1976). On the mathematical, cognitive and instructional foundations of rational numbers. In R. Lesh & D. Bradbard (Org.), *Number and measurement*: *papers from a research workshop* (pp. 101-144). Columbus, OH: ERIC/SMEAC.

Kieren, T.E.: 1993, '*Rational and Fractional Numbers: From Quotient Fields* to *Recursive Understanding*.' In T.P.Carpenter, E.Fennema and T.A.Romberg (eds.), Rational Numbers: An Integration of the Research (pp 49-84). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates

Lamon, S. (1999). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Lamon, S. (2006). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers*. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Lamon, S. (2007). *Rational numbers and proportional reasoning*. In F. Lester (Ed), Secondhandbook ok mathematics teaching and learning (pp 629-667). Greenwich, CT:Information Age Publishing

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementar mathematics: Teachers´ understanding of fundamental mathematics in China and the United Stats*. Mahwah, N J: Erlbaum.

Mamede, E. (2007). *The Effects of situations on Children's Understanding of Fractions*. PhD Thesis (unpublished thesis), Oxford Brookes University. Oxford: OBU.

Mamede, E. (2008). "*Às voltas com as Fracções*". In Ema Mamede (Cood.), Matemática ao encontro das práticas – 1.º Ciclo, (pp. 83-92). Braga: Universidade do Minho – Instituto de Estudos da Criança.

Martins, F. (2007). *As fracções no desenvolvimento do sentido de número racional no 1º ciclo*. Tese de Mestrado em Educação – Didáctica da matemática. Lisboa: Universidade de Lisboa, Portugal.

Mendes, Fátima, Monteiro & Cecília. (2009). *Números; Ensino e aprendizagem*. In Actas do XIX Encontro de Investigação em Educação Matemática, Vila Real.

ME-DGIDC (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico.* Lisboa: ME-DGIDC.

Ministério da Educação (2001). *Currículo nacional do ensino básico : Competências essenciais.* Lisboa: Ministério da Educação, Departamento de Educação Básica.

Ministério da Educação (1991). *Programa de Matemática do Ensino Básico;* Lisboa: Ministério da Educação, Departamento de Educação Básica.

Monteiro, C. (2007). "*Dos números Inteiros aos decimais: um percurso complexo, mas possível, no desenvolvimento do sentido de número*". In Maria de Lurdes Serrazina (Cood.), Ensinar e Aprender matemática no 1.º ciclo, (pp. 19 - 33). Lisboa: Texto Editores.

Monteiro, C., Pinto, H. (2005). *A aprendizagem dos números racionais*. *Quadrante*, 14 (1), 89-107.

Monteiro, C., & Pinto, H. (2007). *Desenvolvendo o sentido do número racional*. Lisboa: APM.

Moss, J. & Case, R.(1999). *Developing children´s understanding of the rational numbers: A new model and na experimental curriculum*. Journal for Research in Mathematics Education, 30, 122-147.

Monteiro, C., Pinto, H., Figueiredo, N. (2005). *As fracções e o desenvolvimento do sentido do número racional*. *Educação Matemática, 85, pp 47 -51*

NCTM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM

Oliveira, M. M. (2007) *Como fazer pesquisa qualitativa*. Petrópolis, Vozes.

Pinto, H. (2011). *Desenvolvimento do sentido da multiplicação e da divisão de números racionais*. Tese de doutoramento. Universidade de Lisboa, Instituto de Educação.

Ponte, J. P. (2006). Números e álgebra no currículo escolar. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca,L. Santos, & P. Canavarro (Eds.), *Números e álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores* (pp. 5-27). Lisboa: SEM-SPCE.

Ponte, J,, Serrazina, L,, Guimarães, H., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Meneses, L., Martins, M. & Oliveira, P.(2007) . *Programa de Matemática do Ensino Básico.* Lisboa: Ministério da Educação.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Post, T. (1981). *Fractions: results and implications from National Assessment*. The Arithmetic Teacher, 28(9), 26-31

Post. T. (1988). Some notes on the nature of mathematics learning. In T. Post (Org.), *Teaching mathematics in grades K-8: Research based methods* (pp. 1-19). Boston: Allyn & Bacon.

Post, T., Cramer,K., Behr,M., Lesh, R. & Harel, G. (1993). Curriculum implications of research on the learning, teaching, and assessing of rational number concepts. In T. Carpenter & E. Fennema (Eds.), *Research on the Learning, Teaching, and assessing of Rational Number Concepts. Lawrence Erlbaum and Associates.*

Post, T., M. & Lesh, R. (1986). Research-Based observations about children´s learning of rational number concepts. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 8(1), 39-48.

Sá-Silva, J. R., Almeida, C. D., Guidani, J. F. (2009). *Pesquisa documental: pistas teóricas e metodológicas.* Revista Brasileira de História & Ciências Sociais, ano I – número I – julho.

Sharp, J., Garofalo, J. & Adams, B. (2002). Children´n development of meaningful fraction algorithms: a Kid´s cookies and a puppy`s pills. In B. Litwiller, & G.Bright (Org.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions:* 2002 YearbooK (pp. 18-28). Reston: NCTM.

Silva, L. R. C., Damaceno, A. D., Martins, M. C. R., Sobral, K. M. & Farias, I. M. S.(2009). Pesquisa *Documental: Alternativa investigativa na formação docente.* IX Congresso Nacional de Educação – EDUCERE. PUCPA

Streefland, L. (1986). *Rational analysis of realistic mathematics education as a theoretical source for psychology: Fractions as a paradigm*. European Journal of Psychology of Education, 1(2), 67-82.

Vanhille, L. S. & Baroody, A. J. (2002). *Fraction instruction that fosters multiplicative reasoning.* In B. Litwiller (Ed.), Making sense of fractions, ratios and proportions: NCTM 2002 Yearbook (pp. 224-236). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.