

O *GeoGebra* na aprendizagem do tema “Circunferência” – um estudo com alunos do 9.ºano de escolaridade

Relatório de Projeto

Ana Luísa Paulo Domingues

Trabalho realizado sob a orientação de

Professor Doutor Hugo Alexandre Lopes Menino

Leiria, Setembro 2014

Mestrado em Ciências da Educação – Especialização em Utilização Pedagógica das TIC

ESCOLA SUPERIOR DE EDUCAÇÃO E CIÊNCIAS SOCIAIS

INSTITUTO POLITÉCNICO DE LEIRIA

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Doutor Hugo Menino, meu orientador, pelo seu constante apoio, sugestões, críticas, incentivo e disponibilidade, que me permitiram levar a cabo este estudo.

Aos professores do curso de Mestrado pela sua experiência e que me ajudaram a crescer academicamente.

À Direção da Escola Secundária Dr. Joaquim de Carvalho, Figueira da Foz, pelo apoio nos vários aspetos relacionados com a organização do estudo.

Aos meus alunos da turma D do 9.º ano de escolaridade, ano letivo 2013/2014, pela atenção, participação, esforço e disponibilidade que demonstraram.

À minha família, por todo o apoio e compreensão.

RESUMO

Este relatório, produzido no contexto do Mestrado em Ciências da Educação – Especialização em Utilização Pedagógica das TIC, apresenta um estudo desenvolvido numa turma do 9.º ano, no âmbito da lecionação do tópico “Circunferência”. Construir, implementar e avaliar uma sequência de tarefas para lecionação desse tópico, com recurso ao *GeoGebra*, constituiu o seu objetivo primordial. Para tal, foram formuladas as seguintes questões: Quais as implicações, em diferentes dimensões da prática letiva, da utilização do *GeoGebra* no tópico curricular “Circunferência”? O *GeoGebra* potencia a descoberta das propriedades de ângulos, cordas e arcos definidos numa circunferência? Que visão têm os alunos da utilização de tarefas com recurso ao *GeoGebra* em Geometria?

O estudo consubstancia uma investigação sobre a própria prática, seguindo uma abordagem qualitativa e interpretativa. A professora foi o principal instrumento de recolha de dados, desempenhando simultaneamente os papéis de professora da turma e de investigadora. Para a recolha de dados foram privilegiados os diários de bordo, o inquérito e as produções dos alunos.

Da análise dos resultados, conclui-se que a utilização do *GeoGebra* na lecionação do tópico “Circunferência” diversificou e potenciou as formas de interação na sala de aula, que a capacidade de autonomia dos alunos se desenvolveu progressivamente ao longo da implementação das tarefas, não apenas no que concerne à utilização do software, como também ao estabelecimento de conjeturas e à resolução das diferentes tarefas matemáticas. A generalidade dos alunos mostrou ser capaz de explorar e formular conjeturas com alguma facilidade e manifestou uma opinião favorável à realização de atividades com recurso ao *GeoGebra*, na aprendizagem da Geometria.

Palavras-chave

Circunferência, Conjetura, *GeoGebra*, Geometria

ABSTRACT

This report is part of the master's degree in Educational Sciences – Pedagogical Use of ICT. It was conducted among a selected class of 9th graders, on the teaching of the topic Circumference. Its main objective was to build, implement and assess a sequence of tasks in teaching that particular topic by using *GeoGebra*. To this end, the following questions have been set out: What are the implications of the use of *GeoGebra* when addressing “Circumference”, in the different dimensions of the teaching process? Does *GeoGebra* optimize the discovery of properties of angles, arcs and chords defined in a circumference? How do the students see the use of *GeoGebra* in task fulfilment, in Geometry?

This study represents a research on practice, following the qualitative and interpretative approach. The teacher was the main data collection instrument, playing both the role of the teacher of the class and of the researcher. The preferred methods for collecting the relevant data were logbooks, a survey and students' works.

By reviewing the results it has been concluded that the use of *GeoGebra* in teaching Circumference has diversified and optimised interaction in class; student's autonomy has gradually broadened in the course of implementation of the tasks, particularly regarding the use of software but not exclusively concerning the establishment of conjectures and solving different mathematical operations. The majority of students proved to be able to easily explore and making conjectures, and gave a favourable opinion regarding task fulfilment through the use of *GeoGebra* in Geometry.

Keywords

Circumference, Conjectures, *GeoGebra*, Geometry

ÍNDICE GERAL

Agradecimentos	ii
Resumo	iii
Abstract.....	v
Índice Geral	vii
Índice de Quadros	ix
Índice de Figuras	x
Índice de Gráficos.....	xii
Índice de Anexos	xiii
Capítulo I – Introdução.....	1
1. Pertinência do estudo	1
2. Objetivos e questões de investigação.....	2
3. Organização do relatório.....	3
Capítulo II – Enquadramento teórico	4
1. Orientações curriculares para o ensino e aprendizagem da Matemática	4
2. Aprendizagem em ambientes de geometria dinâmica	10
2.1. <i>GeoGebra</i> , um programa de geometria dinâmica	13
2.2. Aprendizagem da Geometria com recurso ao <i>GeoGebra</i>	16
Capítulo III – Metodologia	19
1. Opções metodológicas	19
2. Participantes do estudo	20
3. Técnicas de recolha de dados	21
3.1. Observação participante com registo em diário de bordo	21

3.2. Produções dos alunos	22
3.3. Inquérito por questionário	22
4. Análise de dados	23
5. Procedimentos	23
Capítulo IV – Apresentação, análise e discussão de resultados	30
1. Interações na sala de aula	30
2. Gestão do tempo	40
3. Autonomia	45
4. Formulação de conjecturas	50
5. Comunicação matemática.....	59
6. Raciocínio	64
7. Perspetivas dos alunos sobre a utilização de tarefas com recurso ao <i>GeoGebra</i> ...	70
Capítulo V – Conclusões	77
1. Conclusões do estudo	77
2. Limitações do estudo	83
3. Recomendações	83
Bibliografia.....	84
Anexos.....	1

ÍNDICE DE QUADROS

Quadro 1 – Caracterização das tarefas	24
Quadro 2 – Síntese das atividades desenvolvidas ao longo do estudo	29
Quadro 3 – Excertos exemplificativos do diário de bordo da intencionalidade da interação professor-aluno	32
Quadro 4 – Excertos exemplificativos do diário de bordo da intencionalidade da interação professor-turma	35
Quadro 5 – Excertos exemplificativos do diário de bordo da intencionalidade da interação aluno-aluno	38
Quadro 6 – Excertos exemplificativos do diário de bordo dos fatores que levaram a um reajustamento do tempo	41

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1 – Vista do ambiente de trabalho do <i>GeoGebra</i>	15
Figura 2 – Exemplo de uma resposta ao ponto 6 da tarefa 8 (anexo 10).....	49
Figura 3 – Exemplo de uma resposta ao ponto 6 da tarefa 8 (anexo 10).....	49
Figura 4 – Resposta dada pela Elisabete ao exercício de aplicação 1. da tarefa 7 (anexo 21).....	50
Figura 5 – Resposta dada pela Carolina ao exercício de aplicação 1. da tarefa 7 (anexo 21).....	50
Figura 6 – Exemplo de uma resposta ao ponto 14 da tarefa 2 (anexo 4).....	52
Figura 7 – Exemplo de outra resposta ao ponto 14 da tarefa 2 (anexo 4)	52
Figura 8 – Exemplo de uma construção da tarefa 9 (anexo 11)	52
Figura 9 – Exemplo de uma resposta ao ponto 8 da tarefa 9 (anexo 11).....	53
Figura 10 – Exemplo de uma construção da tarefa 6 (anexo 8)	53
Figura 11 – Exemplo de uma resposta ao ponto 7 da tarefa 6 (anexo 8).....	53
Figura 12 – Exemplo de uma construção da tarefa 7 (anexo 9)	55
Figura 13 – Exemplo de uma resposta ao ponto 10 da tarefa 7 (anexo 9).....	55
Figura 14 – Exemplo de uma resposta ao ponto 11 da tarefa 4 (anexo 6).....	55
Figura 15 – Exemplo de uma resposta ao ponto 11 da tarefa 4 (anexo 6).....	55
Figura 16 – Exemplo de uma resposta ao ponto 6 da tarefa 5 (anexo 7).....	56
Figura 17 – Exemplo de uma resposta ao ponto 13 da tarefa 5 (anexo 7).....	56
Figura 18 – Exemplo de uma resposta ao ponto 20 da tarefa 5 (anexo 7).....	56
Figura 19 – Exemplo de uma resposta ao ponto 5 da tarefa 10 (anexo 12).....	57
Figura 20 – Exemplo de uma resposta ao ponto 5 da tarefa 10 (anexo 12).....	57
Figura 21 – Exemplo de uma resposta ao ponto 10 da tarefa 10 (anexo 12).....	58

Figura 22 – Exemplo de uma resposta ao ponto 15 da tarefa 10 (anexo 12).....	58
Figura 23 – Exemplo de uma resposta ao ponto 19 da tarefa 10 (anexo 12).....	58
Figura 24 – Exemplo de uma resposta ao exercício de aplicação 2.1. da tarefa 6 (anexo 8).....	63
Figura 25 – Imagem do exercício de aplicação 1.4. da tarefa 8 (anexo 10).....	65
Figura 26 – Exemplo de uma resposta ao exercício de aplicação 1.4. da tarefa 8 (anexo 10).....	65
Figura 27 – Exemplo de uma resposta ao exercício de aplicação 1.4. da tarefa 8 (anexo 10).....	66
Figura 28 – Imagem do exercício de aplicação 2. da tarefa 8 (anexo 10).....	66
Figura 29 – Exemplo de uma resposta ao exercício de aplicação 2. da tarefa 8 (anexo 10).....	67
Figura 30 – Exemplo de uma resposta ao exercício de aplicação 2. da tarefa 8 (anexo 10).....	67
Figura 31 – Exemplo de uma resposta ao exercício de aplicação 2. da tarefa 8 (anexo 10).....	68
Figura 32 – Exemplo de uma resposta ao ponto 5. da tarefa 10 (anexo 12).....	69
Figura 33 – Exemplo de uma resposta ao ponto 5. da tarefa 10 (anexo 12).....	69
Figura 34 – Exemplo de uma resposta ao exercício de aplicação 3. da tarefa 5 (anexo 7)	69
Figura 35 – Exemplo de uma resposta ao exercício de aplicação 3. da tarefa 5 (anexo 7)	70

ÍNDICE DE GRÁFICOS

Gráfico 1 – Resposta dos alunos no item “Foi fácil adaptar-me ao ambiente de trabalho do <i>GeoGebra</i> ”	71
Gráfico 2 – Resposta dos alunos no item “Foi fácil efetuar as construções com o <i>GeoGebra</i> ”	72
Gráfico 3 – Resposta dos alunos no item “O estudo do tópico Circunferência através do <i>GeoGebra</i> foi mais motivador”	72
Gráfico 4 – Resposta dos alunos no item “O estudo do tópico Circunferência através da utilização de tarefas foi abordado de forma mais inovadora”	73
Gráfico 5 – Resposta dos alunos no item “As indicações contidas nas tarefas foram suficientes para o desenvolvimento do trabalho proposto”	73
Gráfico 6 – Resposta dos alunos no item “Foi necessário o apoio da professora em sala de aula para conseguir realizar as tarefas”	74
Gráfico 7 – Resposta dos alunos no item “O <i>GeoGebra</i> permitiu-me compreender mais facilmente as propriedades de ângulos, cordas e arcos definidos numa circunferência”	75
Gráfico 8 – Resposta dos alunos no item “A manipulação de objetos no <i>GeoGebra</i> facilitou o estabelecimento de conjecturas”	75
Gráfico 9 – Resposta dos alunos no item “A sequência de tarefas, com recurso ao <i>GeoGebra</i> , facilitou a minha aprendizagem da Geometria”	76

ÍNDICE DE ANEXOS

Anexo 1 – Pedido de autorização ao Conselho Pedagógico para realização do estudo ...	2
Anexo 2 – Pedido de autorização aos Encarregados de Educação para utilizar as produções dos alunos no relatório	3
Anexo 3 – Tarefa 1: Elementos da circunferência	4
Anexo 4 – Tarefa 2: Cordas e arcos entre retas paralelas.....	12
Anexo 5 – Tarefa 3: Congruência de cordas, arcos e ângulos ao centro correspondentes	16
Anexo 6 – Tarefa 4: Reta tangente a uma circunferência.....	20
Anexo 7 – Tarefa 5: Reta perpendicular a uma corda no seu ponto médio.....	23
Anexo 8 – Tarefa 6: Amplitude de um ângulo ao centro	28
Anexo 9 – Tarefa 7: ângulo inscrito e ângulo ao centro com o mesmo arco de circunferência	31
Anexo 10 – Tarefa 8: Amplitude de um ângulo inscrito	34
Anexo 11 – Tarefa 9: Ângulos inscritos no mesmo arco. Ângulo inscrito numa semicircunferência.....	36
Anexo 12 – Tarefa 10: Ângulos excêntricos	41
Anexo 13 – Ficheiros da tarefa 10 fornecido aos alunos.....	49
Anexo 14 – Inquérito no Google Drive aplicado aos alunos.....	53
Anexo 15 – DB1	55
Anexo 16 – DB2	59
Anexo 17 – DB3	64
Anexo 18 – DB4	68
Anexo 19 – DB5	73
Anexo 20 – DB6	75

Anexo 21 – DB7	76
Anexo 22 – DB8	79
Anexo 23 – DB9	82
Anexo 24 – DB10	83
Anexo 25 – DB11	85
Anexo 26 – DB12	88
Anexo 27 – DB13	91

CAPÍTULO I – INTRODUÇÃO

1. PERTINÊNCIA DO ESTUDO

O lugar das novas tecnologias na Educação, bem como na sociedade em geral, tem sido uma das matérias mais discutidas e analisadas nos últimos tempos. É certo que os professores têm de estar informados sobre as novas tecnologias e, sobretudo, sobre as potencialidades que elas nos oferecem enquanto instrumento de trabalho, quer científico, quer pedagógico (Lisbôa, Teixeira, Jesus, Varela, & Coutinho, 2009).

O computador coloca o aluno no centro do processo de ensino e de aprendizagem, permitindo-lhe a exploração de problemas que, de outra forma (com papel e lápis, por exemplo), seriam muito difíceis de resolver. Deste modo, torna-se imprescindível a integração da tecnologia na escola, nos currículos e, mais especificamente, na disciplina de Matemática, pela sua capacidade de dar resposta aos desafios da atualidade e do futuro (Silva, 2003).

No caso concreto da Matemática, existem documentos com orientações curriculares que reconhecem as vantagens do uso de ferramentas computacionais no seu ensino (ME-DEB, 2001; ME-DGIDC, 2007; NCTM, 2007; Ponte, 1995; Ponte & Canavarro, 1997).

Dentro da Matemática, a Geometria permite ao aluno desenvolver as suas potencialidades, face a situações problemáticas. Porém, é neste conteúdo que muitos alunos revelam maiores dificuldades, considerando-o muito difícil. Assim, vários autores (Abrantes, Serrazina, & Oliveira, 1999; Cardoso, Nogueira, Sampaio, & Santos, 2013; ME-DGIDC, 2007; NCTM, 2007; Ribeiro, 2005) recomendam que a sua aprendizagem seja feita através do uso de ambientes de geometria dinâmica (AGD).

Ora, os ambientes de geometria dinâmica proporcionam uma abordagem inovadora no ensino e aprendizagem da Geometria e provocam mudanças profundas ao nível das funções e papéis dos professores e dos alunos (Veloso, 1998, citado por Silva & Cabrita, 2005). Além disso, desenvolvem, nos alunos, a capacidade de raciocínio, a resolução de problemas, a capacidade de pensar matematicamente, a capacidade de comunicação e a aprendizagem cooperativa (Ribeiro, 2005).

Um ambiente de geometria dinâmica que constitui um excelente recurso para o estudo da Geometria é o *GeoGebra*, pois é um software que possibilita ao aluno construir, visualizar, explorar e manipular figuras geométricas de forma fácil, intuitiva e dinâmica. Para além disso, facilita a formulação de conjecturas, a descoberta de propriedades, torna a aprendizagem mais estimulante e permite ao aluno ser mais ativo (Silva & Cabrita, 2005).

O estudo levado a cabo debruçou-se sobre o ensino e a aprendizagem da Geometria, incidindo concretamente sobre o tópico “Circunferência” do programa da disciplina de Matemática do 9.º ano de escolaridade, visando a implementação de uma sequência de tarefas com recurso ao *GeoGebra*.

Enquanto professora de Matemática, a escolha deste tema deveu-se, essencialmente ao meu gosto pessoal pela Geometria e ao facto de os alunos revelarem, com frequência, muitas dificuldades na compreensão dos conceitos geométricos. Outro factor prende-se com a própria natureza da Geometria, que reúne características propícias à realização de tarefas de natureza exploratória e investigativa, de construção, de visualização e de manipulação.

Por se tratar de um software de geometria dinâmica livre e gratuito e que apela especialmente à participação ativa dos alunos, favorecendo a sua predisposição para a aprendizagem dos conceitos matemáticos envolvidos, a minha escolha recaiu sobre o *GeoGebra*, em detrimento de outros softwares possíveis.

2. OBJETIVOS E QUESTÕES DE INVESTIGAÇÃO

Considerando o que foi referido anteriormente, o estudo visa o seguinte objetivo: Construir, implementar e avaliar uma sequência de tarefas para leção do tópico “Circunferência”, com recurso ao *GeoGebra*.

Em articulação com este objetivo foram definidas as seguintes questões de investigação:

1. Quais as implicações, em diferentes dimensões da prática letiva, da utilização do *GeoGebra* no tópico curricular “Circunferência”?
2. O *GeoGebra* potencia a descoberta das propriedades de ângulos, cordas e arcos definidos numa circunferência?

3. Que visão têm os alunos da utilização de tarefas com recurso ao *GeoGebra* em Geometria?

3. ORGANIZAÇÃO DO RELATÓRIO

Este estudo encontra-se estruturado em cinco capítulos. No primeiro, “Introdução”, são descritas as motivações que conduziram à realização deste estudo, apresenta-se o objetivo primordial em torno do qual ele se desenvolve, bem como as respetivas questões de investigação às quais se procura dar resposta. Procede-se ainda a uma breve apresentação do modo como se encontra organizado.

No segundo capítulo, “Enquadramento Teórico”, com base na revisão da literatura, são apresentados alguns argumentos relativos às orientações curriculares atuais para o ensino e aprendizagem da Matemática, com particular destaque para os conteúdos de Geometria. Posteriormente, faz-se uma abordagem da importância da tecnologia no ensino e apresentam-se algumas perspetivas de vários autores acerca do papel dos ambientes de geometria dinâmica. Por último, são postas em evidência as principais características do *GeoGebra*, bem como alguns estudos já realizados, no âmbito da aprendizagem da Geometria com recurso a este software.

No terceiro capítulo, “Metodologia”, são descritas, fundamentadamente, as opções metodológicas que sustentam a investigação apresentada neste relatório. Caracterizam-se os participantes, apresentam-se as técnicas e os principais instrumentos de recolha de dados, procedendo-se a uma caracterização sucinta dos mesmos. Os procedimentos do estudo são ainda, neste ponto, referenciados.

Na “Apresentação, análise e discussão de resultados”, de que se ocupa o quarto capítulo, são analisados os dados recolhidos, em estreita articulação com o objetivo e as questões de investigação delineados para este estudo. No quinto capítulo, “Conclusões”, são apresentadas as principais conclusões obtidas com este projeto, algumas reflexões que apontam para certas limitações da investigação levada a cabo e breves recomendações para futuros estudos. O relatório é complementado por uma lista bibliográfica e por um conjunto de anexos, onde constam os documentos que apoiaram o desenvolvimento da presente investigação, permitindo fundamentá-la.

CAPÍTULO II – ENQUADRAMENTO TEÓRICO

1. ORIENTAÇÕES CURRICULARES PARA O ENSINO E APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA

Apesar de a Matemática ser uma das mais antigas ciências, o seu ensino tem sofrido mudanças ao longo dos anos, principalmente, no que diz respeito aos métodos, aos processos e às técnicas. Essas alterações refletem a crescente importância atribuída à matemática, porquanto se revela imprescindível no dia a dia e, sobretudo, porque está na base do desenvolvimento de muitos ramos da ciência e da tecnologia (Silva, Veloso, Porfírio & Abrantes, 1999, citado por Nogueira, 2013).

Em 1989, o National Council of Teachers of Mathematics publicou um livro intitulado, na versão portuguesa, *Normas para o Currículo e Avaliação da Matemática Escolar* (NCTM, 2007), no qual propõe um conjunto de orientações para o currículo de matemática desde a pré-primária até ao 12.º ano. Este documento postula que a aprendizagem da Matemática deve fomentar a curiosidade e desenvolver a aptidão do aluno para formular e resolver problemas, de modo a que este possa interpretar, fruir e intervir cabalmente na realidade circundante. A auto-confiança intelectual sairá, assim, reforçada se a Matemática lhe conferir a experiência e a satisfação de se confrontar com situações desafiadoras e de as superar.

Segundo Matos e Serrazina (1996), no NCTM:

(...) são definidos cinco objectivos gerais para todos os alunos: (1) que aprendam a dar valor à Matemática, (2) que adquiram confiança na sua capacidade de fazer Matemática, (3) que se tornem aptos a resolver problemas matemáticos, (4) que aprendam a comunicar matematicamente, e (5) que aprendam a raciocinar matematicamente. Ainda segundo as Normas estes objectivos implicam que os alunos devem: participar em numerosas e variadas experiências relacionadas entre si que os encoragem a dar apreço ao desenvolvimento da Matemática, a desenvolver hábitos de pensamento matemático e a compreender e apreciar o papel da Matemática na vida da humanidade; ser encorajados a explorar, a fazer tentativas, e mesmo a fazer erros e a corrigi-los, de tal modo que ganhem confiança na sua capacidade de resolver problemas complexos; ler, escrever e discutir Matemática, e ainda conjecturar, testar e construir argumentos sobre a validade de uma conjectura (p. 19-20).

Já no ano de 2001, surge o documento *Currículo Nacional do Ensino Básico - Competências Essenciais* (ME-DEB, 2001), contemplando uma secção específica para a

disciplina de Matemática e definindo um conjunto de competências essenciais para o ensino básico. Essas competências são apresentadas em dois domínios: competências de carácter geral e competências específicas respeitantes a cada disciplina, no conjunto dos três ciclos e em cada um dos ciclos. Para cada uma das disciplinas foram salientados os saberes que permitem o desenvolvimento de uma aprendizagem com compreensão (Dias, 2013).

Ainda neste documento, foram definidas duas finalidades para o ensino da Matemática no ensino básico, que poderão ser atingidas se o aluno experimentar aprendizagens adequadas e significativas:

proporcionar aos alunos um contacto com as ideias e métodos fundamentais da matemática que lhes permita apreciar o seu valor e a sua natureza e desenvolver a capacidade e confiança pessoal no uso da matemática para analisar e resolver situações problemáticas, para raciocinar e comunicar (ME-DEB, 2001, p. 58).

Por outro lado, o *Programa de Matemática do Ensino Básico* (ME-DGIDC, 2007), da responsabilidade do Ministério da Educação e da Direção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular, pretende ser um reajustamento do *Programa de Matemática* (ME, 1991), em vigor desde o início dos anos noventa (1990 para o 1.º ciclo e 1991 para o 2.º e 3.º ciclos, respetivamente), introduzindo alterações relevantes. Primeiramente, em relação às finalidades e aos objetivos gerais para o ensino da Matemática, enquanto elementos estruturantes de qualquer programa. Com efeito, apresentam-se formulações novas, procurando melhorar a clareza e o conteúdo daquilo que é proposto como principais metas do ensino e aprendizagem da Matemática no ensino básico, assim como a sua articulação interna com aquilo que está estipulado no *Currículo Nacional do Ensino Básico* (ME-DEB, 2001). Estas mudanças decorrem, essencialmente, dos resultados da investigação em Educação Matemática desenvolvida ao longo dos últimos quinze anos e da necessidade de melhorar a articulação entre os programas dos três ciclos.

O programa propõe que o ensino-aprendizagem se desenvolva em torno de quatro eixos fundamentais: “o trabalho com os números e operações, o pensamento algébrico, o pensamento geométrico e o trabalho com dados” (ME-DGIDC, 2007, p. 1). Como novidade maior em relação aos documentos que o precederam, o programa destaca, com recurso à explicitação de objetivos gerais e específicos, três grandes capacidades transversais a toda a aprendizagem da Matemática, a que o ensino deve consagrar uma atenção constante: “a Resolução de problemas, o Raciocínio matemático e a Comunicação matemática” (p. 1).

As orientações do referido documento defendem ainda que a escola deve potenciar uma formação sólida em Matemática a todos os alunos, devendo prepará-los para as diferentes disciplinas, para as quais ela é necessária, bem como para a sua vida ativa. Dessa forma, de acordo com os autores do Programa, o ensino da Matemática, ao longo dos três ciclos da escolaridade básica, deve ser orientado por duas finalidades fundamentais:

- a) promover a aquisição de informação, conhecimento e experiências em Matemática e o desenvolvimento da capacidade da sua integração e mobilização em contextos diversificados;
- b) desenvolver atitudes positivas face à Matemática e a capacidade de apreciar esta ciência (ME-DGIDC, 2007, p. 3).

Acerca destas duas finalidades fundamentais, refere Dias (2013) que:

A primeira finalidade pretende fomentar a compreensão dos conceitos matemáticos e das relações entre eles, bem como a capacidade para os mobilizar e utilizar na análise, na interpretação e na resolução de problemas em contextos diversos. (...) No que concerne à segunda finalidade, esta está orientada para o fomento do gosto pela matemática e para a autonomia do aluno, bem como para a compreensão da matemática como uma atividade humana. (p. 18).

Mas o programa expõe também um conjunto de objetivos gerais, traduzindo os resultados que os alunos deverão atingir, e que visam clarificar, com certo detalhe, o que se pretende com as finalidades enunciadas. A tónica é colocada nas dimensões dessa aprendizagem “relacionadas com a representação, a comunicação e o raciocínio matemático, a resolução de problemas e as conexões matemáticas, a compreensão e disposição para usar e apreciar a Matemática em contextos diversos” (Dias, 2013, p. 19). Por oposição aos programas de 1991, tais objetivos, visando o desenvolvimento integrado de conhecimentos, capacidades e atitudes não são apresentados em categorias isoladas.

Atravessando os três ciclos da escolaridade básica, estes objetivos gerais estão intimamente conexos reforçando-se:

a aprendizagem da matemática deve ser feita com compreensão, isto é, assente no saber porquê e não apenas no saber e saber - fazer. Por exemplo, se o conhecimento de fatos matemáticos básicos é uma condição para a aquisição de conhecimentos matemáticos, é através da compreensão que os alunos conseguem estabelecer conexões entre eles. O fomento da capacidade de comunicação favorece o conhecimento de fatos básicos e a sua compreensão, assim como favorece o desenvolvimento do raciocínio e da capacidade de resolução de problemas, mas também o desenvolvimento destas capacidades, por parte do aluno, favorece o desenvolvimento da capacidade de comunicação (Dias, 2013, p.19).

A mesma autora refere, ainda, que aquando da introdução de cada tema matemático, e em cada ciclo, é apresentada a articulação com o programa do ciclo anterior. Relativamente às orientações metodológicas gerais é assumido, neste documento, que a aprendizagem da Matemática se centra no trabalho realizado pelo aluno mediante as tarefas propostas pelo professor (ME-DGIDC, 2007).

Como observa Ponte (2009), o *Programa de Matemática do Ensino Básico* favorece a introdução ou aprofundamento de elementos de inovação necessários e urgentes nas práticas de ensino e aprendizagem da Matemática. Na realidade, este programa constitui uma importante oportunidade para:

- Valorizar aspectos da Matemática que se encontravam esquecidos ou subvalorizados (Álgebra, Estatística, cálculo mental, demonstração, transformações geométricas...);
- Valorizar processos matemáticos fundamentais como a resolução de problemas, o raciocínio e a comunicação;
- Dar destaque às actividades de exploração e investigação matemática;
- Dar élan ao uso da tecnologia, computadores e calculadoras;
- Transformar as práticas de ensino do modelo do ensino expositivo directo para um ensino-aprendizagem exploratório;
- Transformar as práticas profissionais nas escolas no sentido da colegialidade, da colaboração e da cultura de projecto (Ponte, 2009, p. 112).

Certo é que estas alterações curriculares necessitam de tempo para a sua plena implementação. Neste processo, cumpre ao Ministério da Educação facultar recursos e condições de trabalho adequadas aos docentes. Mas é, sem dúvida, aos principais agentes deste processo – os professores de Matemática – que cabe a intervenção-chave, alicerçada na sua motivação e criatividade, e com reflexos ao nível da planificação das aulas e unidades de ensino, do diagnóstico das dificuldades dos alunos e da definição de estratégias que as possam minorar, do enriquecimento do seu currículo, da troca de experiências com os seus pares.

Como sintetizam Borralho e Neutel (2013):

A publicação de novas orientações curriculares para o ensino da Matemática em Portugal em 2001 (Currículo Nacional do Ensino Básico) e em 2007 (Programa de Matemática do Ensino Básico) foram um marco importante na educação matemática em Portugal, tentando promover o desenvolvimento de competências, as experiências de aprendizagem e a diversificação de recursos e as finalidades do ensino da Matemática, redefinidas de acordo com a sociedade actual e as suas exigências. O Currículo Nacional do Ensino Básico (CNEB) preconiza o envolvimento dos alunos em diversos tipos de aprendizagem, designadamente a resolução de problemas, as actividades de investigação, a realização de projectos e os jogos. Valoriza também a história e a utilização da matemática, bem como aspectos transversais da aprendizagem da Matemática – comunicação matemática,

a prática compreensiva de procedimentos, a exploração de conexões, o raciocínio matemático e a resolução de problemas (p. 233).

No âmbito da Matemática, a Geometria é um tema que vem, progressivamente, ganhando lugar de destaque, nos programas dos diferentes anos de escolaridade, seja a nível nacional ou internacional. Como refere Matos (2011), diversos autores reconhecem a importância da Geometria como área da Matemática fundamental para o dia a dia dos cidadãos. A ela se recorre frequentemente para descrever, analisar e compreender melhor o mundo que nos rodeia.

A publicação das Normas para o Currículo do NCTM (2007), segundo Veloso (1998 citado por Matos, 2011), constituiu uma etapa muito significativa na consideração da Geometria como tema proeminente da matemática escolar. Este documento define orientações para a educação matemática, do pré-escolar ao 12.º ano, no âmbito da Geometria. Os alunos devem ser capazes de:

- Analisar as características e propriedades de formas geométricas bi e tridimensionais e desenvolver argumentos matemáticos acerca de relações geométricas;
- Especificar posições e descrever relações espaciais;
- Aplicar transformações geométricas e usar a simetria para analisar situações matemáticas;
- Usar a visualização, o raciocínio espacial e a modelação geométrica para resolver problemas. (p. 44)

Já no documento *Currículo Nacional do Ensino Básico: Competência Essenciais* (ME-DEB, 2001) no que respeita à Geometria, e em relação aos três ciclos de ensino, é feita referência ao desenvolvimento de competências como:

- A aptidão para realizar construções geométricas e para reconhecer e analisar propriedades de figuras geométricas, nomeadamente recorrendo a materiais manipuláveis e a software geométrico;
- A aptidão para utilizar a visualização e o raciocínio espacial na análise de situações e na resolução de problemas em Geometria e em outras áreas da matemática;
- A compreensão dos conceitos de comprimento e perímetro, área, volume e amplitude, assim como a aptidão para utilizar conhecimentos sobre estes conceitos na resolução e formulação de problemas;
- A aptidão para efectuar medições e estimativas em situações diversas, bem como a compreensão do sistema internacional de unidades;
- A predisposição para procurar e explorar padrões geométricos e o gosto por investigar propriedades e relações geométricas;
- A aptidão para formular argumentos válidos recorrendo à visualização e ao raciocínio espacial, explicitando-os em linguagem corrente;
- A sensibilidade para apreciar a Geometria no mundo real e o reconhecimento e a utilização de ideias geométricas em diversas situações, nomeadamente na comunicação (p. 62).

Em Portugal, vigora atualmente o *Programa de Matemática do Ensino Básico* (ME-DGIDC, 2007). No que concerne ao estudo da Geometria, destaca-se como ideia central o desenvolvimento do sentido espacial dos alunos, com especial ênfase na visualização e na compreensão de propriedades de figuras geométricas bi e tridimensionais. De notar que as transformações geométricas são, desde logo, introduzidas no primeiro ciclo, mas numa dimensão essencialmente intuitiva, caminhando-se, de forma gradual, para um conhecimento explícito das mesmas. As indicações metodológicas facultadas para os três níveis de ensino são de uma valia inquestionável para o docente, na orientação da aprendizagem dos seus alunos. Exemplo concreto, destacado por Santos (2012):

no 1.º ciclo, é referido que deve ser privilegiada a exploração, a manipulação e a experimentação no ensino e na aprendizagem da geometria, devendo ser utilizados objetos do mundo real, assim como materiais específicos, de forma a desenvolver o sentido espacial dos alunos (ME-DGIDC, 2007). Estas orientações mantêm-se para os ciclos seguintes, com as devidas adaptações, no sentido de se conseguir um aprofundamento desta capacidade (p. 7).

Para o terceiro ciclo, os objetivos gerais de aprendizagem dos conteúdos de Geometria, indicados no Programa reajustado (ME-DGIDC, 2007) são os seguintes:

- Desenvolver a visualização e o raciocínio geométrico e ser capazes de os usar;
- Compreender e ser capazes de utilizar propriedades e relações relativas a figuras geométricas no plano e no espaço;
- Compreender e ser capazes de usar as relações de congruência e semelhança de triângulos;
- Desenvolver a compreensão das isometrias e semelhanças;
- Compreender a noção de demonstração e ser capazes de fazer raciocínios dedutivos;
- Ser capazes de resolver problemas, comunicar e raciocinar matematicamente em contextos geométricos e trigonométricos (p.51).

As tarefas de investigação matemática, na medida em que podem proporcionar o desenvolvimento das capacidades transversais, como a comunicação matemática, o raciocínio e a resolução de problemas, são também muito valorizadas (ME-DGIDC, 2007). Neste contexto, cumpre ao professor criar ocasiões que favoreçam a formulação de hipóteses, por parte dos alunos, acerca de propriedades e relações geométricas. Daí que, como sublinha Guita (2013):

(...) seja essencial proporcionar aos alunos a possibilidade de explorarem tarefas que apelem a desenhos, materiais manipuláveis e programas de geometria dinâmica, no sentido de desenvolverem e testarem as suas ideias, conduzindo-os a articular argumentos matemáticos claros sobre as razões pelas quais as relações geométricas são verdadeiras (p. 25).

Pode-se afirmar que o ensino da Geometria é uma área privilegiada no que concerne à possibilidade de aplicação de uma vasta gama de recursos educativos que, ainda para mais, suscitam a adesão imediata dos alunos: programas de computadores de geometria dinâmica, materiais manipuláveis, materiais de desenho, os *applets* que apoiam a compreensão dos conceitos e relações geométricas.

Os alunos deverão ter uma postura ativa na resolução das tarefas apresentadas, discutindo com os colegas e com o professor as suas conjecturas, explicando e escrevendo com regularidade as suas ideias, de modo a ser mais claro e sólido o seu pensamento matemático, como refere Almiro (2005, citado por Guita, 2013).

O recurso às novas tecnologias assume-se, assim, como um aspecto transversal a todos os programas e orientações curriculares, sendo considerado como fundamental no processo de ensino e aprendizagem da Geometria.

2. APRENDIZAGEM EM AMBIENTES DE GEOMETRIA DINÂMICA

Numa sociedade em constante mudança, timbrada pelo desenvolvimento tecnológico, a educação tem de corresponder às necessidades que daí advêm e enfrentar os novos desafios que se lhe colocam. Torna-se necessário pensar, concretamente, qual a função que as tecnologias desempenham no ensino da Matemática.

Atualmente, as orientações para o ensino da Matemática apontam para a utilização de meios tecnológicos. De acordo com os princípios e normas do *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2007):

A tecnologia é essencial no ensino e na aprendizagem da matemática; influencia a matemática que é ensinada e melhora a aprendizagem dos alunos (p.26).

As vantagens são múltiplas, no que toca à utilização das tecnologias na sala de aula. No domínio das atitudes e valores, Ponte e Canavarro (1997) destacam a promoção da confiança, a autonomia, o espírito crítico e o desenvolvimento de atitudes e valores positivos face à Matemática. Relativamente à aprendizagem da disciplina, os mesmos autores referem como benefícios o desenvolvimento de capacidades relacionadas com o raciocínio matemático.

Na medida em que constituem “poderosas ferramentas intelectuais que permitem automatizar os processos de rotina e concentrar a nossa atenção no pensamento” (Ponte,

1995, p. 2), as novas tecnologias têm a capacidade de projetar o pensamento matemático para um outro nível, bem como de potenciar as aplicações desta ciência. Os desafios assim colocados à educação são, pois, inúmeros.

De facto, o *Currículo Nacional do Ensino Básico: Competências Essenciais* (ME-DEB, 2001) refere que:

Quanto ao computador, os alunos devem ter oportunidade de trabalhar com a folha de cálculo e com diversos programas educativos, nomeadamente de gráficos de funções e de geometria dinâmica, assim como de utilizar as capacidades educativas da rede Internet (p. 71).

No que concerne à utilização do computador na sala de aula, levanta-se de imediato a questão do papel do professor neste contexto. De acordo com o *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2007), a tecnologia não substitui o professor de Matemática. Ao utilizar ferramentas tecnológicas, os alunos passam o seu tempo a trabalhar de forma aparentemente independente do professor. No entanto, essa impressão é ilusória. Num ambiente de ensino tecnológico, o professor desempenha vários papéis fundamentais, tomando decisões que afetam a aprendizagem dos alunos de forma bastante significativa.

Existem documentos com orientações curriculares e autores que reconhecem as vantagens do uso de ferramentas computacionais no ensino da Matemática e em especial na Geometria (Ponte & Canavarro, 1997; Candeias, 2005; Ponte et al., 2007; NCTM, 2007).

No domínio da Geometria, a competência matemática que os alunos devem desenvolver, ao longo de todos os ciclos, inclui a

aptidão para realizar construções geométricas e para reconhecer e analisar propriedades de figuras geométricas, nomeadamente recorrendo a materiais manipuláveis e a software geométrico (ME-DEB, 2001, p. 62).

No currículo de Matemática, a Geometria é um dos tópicos que tem sofrido grandes transformações com a utilização das tecnologias, particularmente, com a utilização dos ambientes de geometria dinâmica (AGD), que facilitam a sua compreensão (Cardoso, Nogueira, Sampaio, & Santos, 2013).

O *Programa de Matemática do Ensino Básico* refere também que os programas computacionais de geometria dinâmica e os applets devem ser usados, uma vez que

favorecem igualmente a compreensão dos conceitos e relações geométricas (MEDGIDC, 2007).

Ao trabalhar a Geometria com softwares de geometria dinâmica, uma das abordagens que se pode explorar é a questão experimental, o que auxilia os alunos no desenvolvimento de sua capacidade de conjecturar e de estabelecer hipóteses (Rosa, 2008).

Segundo Jones (2005) existe uma variedade de investigações que mostram que a interacção dos alunos com os ambientes de geometria dinâmica (AGD) podem ajudá-los a explorar, conjecturar, construir e explicar relações geométricas (citado por Vieira, 2011, p.12).

Os ambientes de geometria dinâmica são geradores de uma abordagem inovadora no ensino e aprendizagem da Geometria. Estes permitem construir, manipular e descobrir novas propriedades de objetos geométricos, através da investigação das relações ou medidas que se mantêm invariantes (Abrantes, Serrazina, & Oliveira, 1999).

No *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2007), acerca das normas para a Matemática escolar, do pré-escolar ao 12.º ano, e que dizem respeito à Geometria pode ler-se:

Através da utilização de modelos concretos, desenhos e programas de geometria dinâmica, os alunos poderão envolver-se ativamente com conceitos geométricos. Com atividades bem concebidas, com ferramentas adequadas e com o apoio do professor, poderão formular e explorar conjecturas e poderão aprender a raciocinar cuidadosamente sobre as noções geométricas (p. 44).

Segundo Ribeiro (2005), os ambientes de geometria dinâmica desenvolvem, nos alunos, a capacidade de raciocínio, a resolução de problemas e a capacidade de pensar matematicamente. Por um lado, porque estes ambientes ajudam os alunos a construir modelos mentais mais sofisticados para pensar acerca dos objetos geométricos; por outro, porque permitem realizar tarefas cada vez mais complexas. A isto acresce, ainda, a capacidade de comunicação, a aprendizagem cooperativa e a auto-confiança.

O recurso a ambientes geométricos também permite criar contextos de aprendizagem cooperativa. O facto de as atividades serem realizadas em grupo desenvolve nos alunos o domínio de competências não só de Geometria mas, mais globalmente, de resolução de problemas, designadamente na formulação e validação de conjecturas (Matos, 2011).

Os alunos devem recorrer a software de geometria dinâmica, sobretudo na realização de tarefas exploratórias e de investigação, uma vez que tendem a favorecer a descoberta de propriedades e de relações geométricas, o que concorre para a aquisição de conhecimentos e a produção de provas (Fernandes & Viseu, 2011). Nas tarefas exploratórias e de investigação é importante que os alunos tenham um tempo ajustado para realizar experiências, elaborar estratégias, formular conjecturas, descrever processos e justificá-los com rigor progressivo (ME-DGIDC, 2007). Ao elaborarem justificações, familiarizam-se com o processo de demonstração e iniciam o raciocínio geométrico dedutivo.

Tal como refere Laborde (1993, citado por Pereira, 2012), aprender Geometria com papel, lápis, régua e compasso é diferente de aprender Geometria com recurso a materiais manipuláveis, o que, por sua vez, é diferente de aprender Geometria recorrendo a ambientes de geometria dinâmica. Estes libertam os alunos de tarefas mecânicas e rotineiras, de construções, de medições e de cálculos, deixando tempo para um trabalho mais dinâmico e ativo em Geometria. Destaca, ainda, que o movimento e a modificação dos desenhos permitem uma mais fácil visualização das propriedades e das relações geométricas, uma vez que é possível fazer construções e manipulá-las, conservando invariantes as propriedades e relações estabelecidas:

o utilizador cria pontos, retas, circunferências, entre outras e através da régua e compasso eletrónico desenha as figuras desejadas. O seu conjunto de ações possibilita, a quem o usa, interagir e visualizar as figuras em movimento e consegue com isto, ter uma melhor compreensão das noções trabalhadas. Neste poder mexer a figura, encontra-se o dinamismo que o software oferece e que tem a grande vantagem de preservar as relações existentes entre os elementos da figura (Salvador, 2013, p.16).

Vieira (2011) conclui, igualmente, pela existência de benefícios na utilização de ambientes de geometria dinâmica no ensino da Geometria, como o desenvolvimento, nos alunos, de um conjunto diversificado de capacidades e competências em domínios mais alargados como o da demonstração matemática.

2.1. GEOGEBRA, UM PROGRAMA DE GEOMETRIA DINÂMICA

Existem vários softwares de geometria dinâmica, entre os quais se destacam, por exemplo: *Cinderella*, *The Geometer's Sketchpad*, *Cabri-Géomètre II*, *Régua e Compasso*, *Geometric Supposer*, *Euklid*, *Tabulae*, *GeoGebra*.

Para o desenvolvimento desta investigação foi escolhido o *GeoGebra*, que é um *software* de geometria dinâmica criado, em 2001, por Markus Hohenwarter, da Universidade de Salzburg. O *GeoGebra* é um *software* de matemática dinâmico destinado ao meio escolar e no qual se acham congregados a Geometria, a Álgebra e o Cálculo (Hohenwart & Jones, 2007). Está disponível *online* (www.geogebra.org), possibilitando que os alunos tenham, quer na escola quer em casa, livre acesso ao programa. Pode ser usado por alunos desde o 1.º ciclo até ao ensino secundário, iniciando com construções simples até às mais complexas funções. Este *software* está escrito em Java e, assim, disponível em múltiplas plataformas, sendo de fácil manuseamento para os alunos e pode ser instalado em computadores com *Windows*, *LINUX* e *Macintosh*.

Atualmente, o *GeoGebra* encontra-se traduzido em 58 idiomas, é utilizado em 190 países e descarregado por aproximadamente 300 000 utilizadores em cada mês. Esta utilização crescente obrigou à criação do *Internacional GeoGebra Institute* (IGI), que serve como uma organização virtual para apoiar os utilizadores do *GeoGebra* (http://www.geogebra.org/cms/pt_PT/organization).

Por ser um sistema dinâmico de Geometria, o *GeoGebra* permite fazer construções de pontos, vetores, segmentos, retas, circunferências, transpor distâncias, traçar paralelas e perpendiculares, construir gráficos de funções e curvas parametrizadas, os quais podem, depois, ser modificados dinamicamente. Permite, ainda, a introdução de equações e coordenadas, que se digitam diretamente na sua caixa de entrada.

No ambiente de trabalho do *GeoGebra* podem ser visíveis três janelas: a zona algébrica, a zona gráfica e uma folha de cálculo, que permitem mostrar os objetos matemáticos em três diferentes representações. Assim, todas as representações do mesmo objeto estão ligadas dinamicamente e adaptam-se automaticamente às mudanças realizadas em qualquer uma delas, independentemente da forma como esses objetos foram inicialmente criados (Hohenwarter & Hohenwarter, 2009).



Fonte: Hohenwarter & Hohenwarter, 2009

Figura 1 - Vista do ambiente de trabalho do *GeoGebra*

Na zona gráfica, que apresenta cor branca, podemos realizar construções geométricas (como pontos, segmentos, vetores, polígonos, funções, curvas, secções cónicas), modificar propriedades nos objetos matemáticos (cor, estilo de linha, visibilidade), medir ângulos, distâncias ou calcular áreas. Essas construções são feitas com o auxílio do rato, usando as ferramentas disponíveis na *Barra de Ferramentas*. Cada ícone da barra de ferramentas apresenta uma caixa de ferramentas que contém um conjunto de ferramentas similares. Para abrir uma caixa de ferramentas do ambiente de trabalho, deve clicar-se na seta do canto inferior direito, surgindo de imediato a indicação da sua função ao mesmo tempo que se tornam visíveis as ferramentas que lhe estão associadas. Cada objeto criado na zona gráfica aparece na zona algébrica.

Na zona algébrica, é mostrada a representação algébrica dos objetos matemáticos (como valores, coordenadas ou equações). Também é possível criar e modificar objetos usando a *Entrada de Comandos* que se encontra na base do ecrã do *GeoGebra*. A expressão algébrica que aparece digitada na zona algébrica, aparece igualmente representada graficamente na zona correspondente.

Na folha de cálculo, nas células, podem inserir-se números ou outro tipo de objetos suportados pelo *GeoGebra* (coordenadas de pontos, funções, comandos). Se possível, o *GeoGebra* mostra de imediato na zona gráfica a representação do objeto inserido na célula.

O *GeoGebra* também permite personalizar a interface do utilizador, modificar propriedades dos objetos e usar o menu de contexto (Hohenwarter & Hohenwarter, 2009). A interface pode ser personalizada usando o menu "Exibir" que permite visualizar ou esconder, por exemplo, os eixos coordenados, a zona algébrica, a folha de cálculo, a barra de comandos e o protocolo de construção. A opção "Protocolo de construção"

permite visualizar, imprimir e editar as informações de todos os objetos representados na área de trabalho, assim como a sua exportação para a Web. O menu de contexto permite alterar rapidamente o comportamento ou as propriedades de um objeto. Para aceder, basta clicar no objeto com o botão do lado direito do rato (Santos, 2012).

No manual do *GeoGebra*, que pode ser consultado em www.geogebra.org/help/docuPT.PT.pdf, encontra-se a explicação de todas as suas funcionalidades.

O site *GeoGebraWiki* em www.geogebra.org/en/wiki/index.php/Main_Page é uma fonte de materiais educacionais livres para a aplicação do *GeoGebra*. Uma pré-visualização de alguns trabalhos criados com este software pode ser encontrada na secção em português do próprio *GeoGebraWiki*.

A nível nacional, existe o *Instituto GeoGebra Portugal* em <http://geogebra.eise.ipp.pt/>, onde se encontram disponíveis tarefas para o ensino básico e secundário, tarefas relacionadas com a formação de professores e ainda um fórum de utilizadores.

Hohenwarter e Fuchs (2004) afirmam que o *GeoGebra* pode ser utilizado no ensino como uma ferramenta de construção, como demonstração e visualização, para a descoberta matemática e ainda para a preparação de materiais de ensino.

O *GeoGebra* constitui, defendem Silveira e Cabrita (2013), um excelente recurso para o estudo da Geometria, pois possibilita ao aluno visualizar, explorar, conjecturar, validar, compreender e comunicar os conceitos geométricos de uma forma interativa e atrativa.

Segundo Gafanhoto e Canavarro (2011), o *GeoGebra* tem inúmeras potencialidades no estabelecimento de conexões entre a Geometria e a Álgebra e permite trabalhar com distintas representações das Funções, nomeadamente as representações numérica, tabular, algébrica e gráfica.

2.2. APRENDIZAGEM DA GEOMETRIA COM RECURSO AO GEOGEBRA

No nosso país, realizaram-se já alguns estudos baseados na utilização do *GeoGebra* no ensino da Geometria.

No estudo *O GeoGebra no estudo de triângulos e quadriláteros: uma experiência no 7º ano de escolaridade*, Santos (2012) teve como grande objetivo adaptar e

experimentar uma sequência de tarefas para a leção do tópico “Triângulos e Quadriláteros”, com recurso ao *GeoGebra*. A autora concluiu que a adaptação dos alunos ao ambiente de trabalho do *GeoGebra* foi fácil e que a sua utilização auxiliou a aprendizagem da Geometria, na medida em que facilitou o estabelecimento de conjecturas, bem como a compreensão das propriedades e conceitos geométricos:

Em suma, a implementação desta sequência de tarefas, com recurso ao *GeoGebra*, proporcionou aos alunos aprendizagens significativas, no que respeita às propriedades dos triângulos e dos quadriláteros. Em geral, os alunos estabeleceram conjecturas e fizeram a aprendizagem do conceito (Santos, 2012, p. 75).

Oliveira (2012) levou a cabo um estudo onde construiu uma sequência de tarefas, com recurso ao *GeoGebra*, para o desenvolvimento do tópico: “Reflexão, rotação e translação” no 2.º ciclo do ensino básico e que tinha como principal objetivo analisar a eficiência, eficácia e satisfação da utilização do *GeoGebra* durante a aplicação dessa sequência de tarefas. Também esta investigadora concluiu que o recurso ao *GeoGebra*, no desenvolvimento deste tópico curricular, foi bastante eficaz e eficiente e que todos os utilizadores demonstraram um nível de satisfação elevado na utilização de ambientes de geometria dinâmica dentro da sala de aula.

Salvador (2013) empreendeu uma investigação em que analisou o papel do ambiente de geometria dinâmica criado pelo *GeoGebra* na aprendizagem da Geometria. A investigadora concluiu que, no início da realização das tarefas, os alunos apresentaram algumas dificuldades no manuseamento deste software. No entanto, com o decorrer das aulas, verificou-se um desempenho melhor, o que levou os alunos a terem mais confiança na resolução das tarefas e, consequentemente, a necessitarem de menos tempo para a sua execução. Nas últimas aulas, os alunos apresentaram fluidez de raciocínio e confiança no trabalho realizado, mostrando que tinham aprendido os conceitos de ângulo, ângulo ao centro e ângulo inscrito numa circunferência, as propriedades que relacionam os ângulos ao centro, ângulos inscritos e arcos de uma mesma circunferência e as propriedades relativas à soma dos ângulos internos de polígonos convexos:

O *GeoGebra* criou, nos alunos, agilidade na execução das tarefas e facilidade de as concretizar, já para não mencionar a economia de tempo. Os grupos de trabalho conseguiram terminar as tarefas e chegar às conjecturas pretendidas, se as tarefas fossem realizadas em papel seriam de execução mais lenta. O tempo dispensado para a realização de uma tarefa foi bastante minimizado pelo facto do software permitir mover pontos e continuar a garantir as propriedades impressas à figura inicial (Salvador, 2013, p. 90 e 91).

Por seu turno, Cadavez (2013) debruçou-se sobre o tema *A utilização de software educativo na aprendizagem da Geometria por alunos do 3.º ciclo do Ensino Básico*. A

principal finalidade desta investigação foi apreciar a influência da utilização do software de geometria dinâmica *GeoGebra* no processo de ensino-aprendizagem dos conteúdos “Isometrias”, no 8.º ano de escolaridade, nomeadamente ao nível do desempenho, na aprendizagem das propriedades das isometrias. Como resultados, e de uma forma geral, os alunos sentiram-se motivados para aprender com a utilização do software de geometria dinâmica *GeoGebra* e a maioria considerou que a utilização deste recurso lhes facilitou a realização das tarefas propostas.

CAPÍTULO III – METODOLOGIA

Neste capítulo, organizado em cinco secções, descrevem-se os procedimentos adotados para alcançar o objetivo proposto, bem como as questões de investigação suscitadas por este estudo. Em primeiro lugar, faz-se referência às opções metodológicas consideradas na investigação. Seguidamente, é efetuada uma apresentação e descrição dos participantes do estudo. Prossegue-se com a indicação dos instrumentos de recolha de dados e o modo como estes foram recolhidos. Finalmente, descreve-se a forma como os dados foram analisados e os procedimentos seguidos.

1. OPÇÕES METODOLÓGICAS

Atendendo ao objetivo do estudo e à natureza das questões formuladas, segue-se uma abordagem de natureza qualitativa, de índole interpretativa.

Segundo Bogdan e Biklen (1994), a pesquisa qualitativa envolve a obtenção de dados descritivos, no contacto direto do investigador com a situação onde os fenómenos ocorrem naturalmente, sendo influenciados pelo seu contexto.

Para estes autores, as cinco características essenciais da investigação qualitativa são: (1) a fonte direta dos dados é o ambiente natural e o investigador é o principal agente na recolha desses mesmos dados; (2) os dados que o investigador recolhe são essencialmente de carácter descritivo; (3) os investigadores que utilizam metodologias qualitativas interessam-se mais pelo processo em si do que propriamente pelos resultados ou produtos; (4) os dados são analisados de forma indutiva, não são recolhidos para confirmar hipóteses prévias; (5) o investigador interessa-se, acima de tudo, por tentar compreender o significado que os participantes atribuem às suas experiências. Neste estudo estão presentes estas cinco características principais da investigação qualitativa.

Além disso, o estudo segue o paradigma interpretativo, uma vez que resulta da pretensão de se analisar a ação física observável e os significados conferidos, quer pelos participantes, quer por aqueles que interagem com eles, às ações nas quais se empenham (Erickson, 1986, citado por Fernandes, 2011).

Esta investigação recai sobre a prática letiva já que uma das questões que mais me preocupa assenta nos problemas que afetam o processo de ensino e aprendizagem. Com este projeto, e enquanto professora e investigadora, pretendi justamente introduzir o uso sistemático das TIC na sala de aula. Nesse sentido, e tal como sustenta Ponte (2002), esta investigação “visa resolver problemas profissionais e aumentar o conhecimento relativo a estes problemas” (p. 8).

A respeito da investigação sobre a prática, Ponte (2002) identifica dois principais tipos de objetivos:

Por um lado pode visar principalmente alterar algum aspecto da prática, uma vez estabelecida a necessidade dessa mudança e, por outro lado, pode procurar compreender a natureza dos problemas que afectam essa mesma prática com vista à definição, num momento posterior, de uma estratégia de acção (p. 3).

Dessa forma, neste tipo de investigação, o professor “não pode descurar a reflexão sobre si mesmo e o seu sentido autocrítico” (Ponte, 2004, p. 25).

2. PARTICIPANTES DO ESTUDO

A investigação desenvolvida decorreu no ano letivo 2013/14, numa escola com contrato de autonomia desde 10 de setembro de 2007, situada na zona norte da cidade da Figueira da Foz, a Escola Secundária Dr. Joaquim de Carvalho, pertencente à freguesia de Tavarede. A escola acolhe um total de 1082 alunos, sendo 331 alunos do 3.º ciclo distribuídos por 13 turmas e 751 do secundário divididos por 29 turmas.

Esta investigação incidiu sobre uma turma do 9.º ano que tem na sua constituição 24 alunos, sendo treze do sexo feminino e onze do sexo masculino, com idades compreendidas entre os 13 e os 15 anos. Existia na turma uma aluna com necessidades educativas especiais, abrangida por um programa educativo individual ao abrigo do Decreto-Lei n.º 3/2008 de 7 de janeiro. Não lhe foram conferidas adaptações curriculares, apenas adaptações de avaliação, tendo, apesar disso, participado neste estudo.

Na globalidade das disciplinas, a turma apresentava comportamento adequado e aproveitamento de satisfaz bem. Relativamente à disciplina de Matemática, no final do 3.º ciclo, dos 24 alunos, 3 alunos obtiveram nível dois, 9 alunos alcançaram nível três, 5 alunos atingiram o nível quatro e 7 alunos obtiveram nível cinco. No exame nacional, 2

alunos obtiveram nível dois, 11 alcançaram o nível três, 5 obtiveram o nível quatro e 6 conseguiram o nível 5. Todos os alunos da turma concluíram o 9.º ano com êxito.

Enquanto investigadora deste estudo, fui, simultaneamente, Diretora de Turma e professora da turma, às disciplinas de Matemática e Educação para a Cidadania.

3. TÉCNICAS DE RECOLHA DE DADOS

Para Lessard-Hérbert, Goyette e Boutin (2008), existem três formas de recolha de dados: (i) o inquérito, que pode tomar duas formas distintas, a saber, a entrevista, se considerarmos a forma oral, e o questionário, se considerarmos a forma escrita; (ii) a observação das aulas; e (iii) a análise documental dos produtos dos alunos. Dada a natureza da metodologia adotada, as técnicas utilizadas na recolha de dados foram a observação, com elaboração de registos na forma de diário de bordo (anexos 15 a 27), as produções dos alunos e o inquérito por questionário (anexo 14). A observação foi do tipo participante, uma vez que, segundo Coutinho, (2014), “o investigador assume um papel ativo e atua como mais um membro do grupo que observa” (p. 138). Para Ludke e André (1986), a observação participante “é um tipo de estratégia que pressupõe um grande envolvimento do pesquisador na situação estudada” (p. 45).

A recolha dos dados decorreu durante as aulas de Matemática, aquando da abordagem do tópico “Circunferência”, e foi realizada no ambiente natural da sala de aula.

3.1. OBSERVAÇÃO PARTICIPANTE COM REGISTO EM DIÁRIO DE BORDO

O diário de bordo constituiu um dos principais instrumentos de recolha de informação já que é nele que “o investigador regista os acontecimentos relevantes que vão surgindo no decurso do trabalho, bem como as ideias e preocupações que lhe vão surgindo” (Ponte, 2002, p.14). As informações recolhidas nas aulas como notas de campo foram por mim traduzidas em narrativa e registadas detalhadamente (Coutinho, 2014) no diário de bordo, sempre que possível, após a realização da tarefa. No diário de bordo procurei registar as situações vivenciadas pelos alunos, as dificuldades sentidas, os diálogos estabelecidos, bem como algumas decisões tomadas no decorrer da implementação das tarefas. Como, justamente, referem Bogdan e Biklen (1994), o diário de bordo é “o

relato escrito daquilo que o investigador ouve, vê, experiencia e pensa no decurso da recolha e refletindo sobre os dados de um estudo qualitativo” (p. 150).

3.2. PRODUÇÕES DOS ALUNOS

Numa investigação qualitativa, Bogdan e Biklen (1994) referem que a informação que resulta da análise dos documentos produzidos pelos alunos, provenientes da observação participante ou da entrevista, são um meio para obter dados mais significativos.

Em todas as tarefas, os alunos responderam às questões formuladas, construíram figuras geométricas, construíram e completaram tabelas, resolveram exercícios e efetuaram cálculos, com ou sem o auxílio do computador. Estes dados, ora em suporte de papel, ora em suporte informático, foram bastante importantes para esta investigação. Os documentos produzidos pelos alunos por meio de papel e lápis foram recolhidos antes da correção/discussão em grande grupo para posteriormente serem fotocopiados. Os documentos em suporte informático, nomeadamente as construções realizadas pelos alunos no *GeoGebra*, foram guardados numa pasta no ambiente de trabalho e recolhidos no final de cada aula.

3.3. INQUÉRITO POR QUESTIONÁRIO

Numa investigação de natureza qualitativa, o inquérito é um dos processos de recolha de dados. Para este projeto, construí um questionário (anexo 14) no *Google Drive*, com o objetivo principal de analisar a perspetiva dos alunos acerca da realização de tarefas com recurso ao *GeoGebra*. Designadamente, pretendia-se obter a opinião dos alunos sobre questões fundamentais como: se a adaptação ao ambiente de trabalho do *GeoGebra* tinha sido fácil; se tinha sido fácil efetuar construções com o *GeoGebra*; se o estudo do tópico “Circunferência” através do *GeoGebra* tinha sido motivador; se o mesmo estudo, através da realização de tarefas, tinha sido abordado de forma mais inovadora; se as indicações contidas nas tarefas tinham sido suficientes para o desenvolvimento do trabalho proposto; se, para conseguirem realizar as tarefas, tinha sido necessário o apoio da professora em sala de aula; se o *GeoGebra* permitiu compreender mais facilmente as propriedades e os conceitos geométricos; se a manipulação de objectos no *GeoGebra* tinha facilitado o estabelecimento de conjeturas; e se a sequência de tarefas, com recurso ao *GeoGebra*, tinha facilitado a aprendizagem da Geometria.

Após a conclusão da implementação da sequência de tarefas, os alunos responderam ao inquérito no Google Drive, de forma anónima, através de um *link* fornecido nos computadores portáteis

(<https://docs.google.com/forms/d/1STEr4rAbCXxdA5LUMXvwSI-ibZeb3DF6sZbzIavydXc/viewform>).

4. ANÁLISE DE DADOS

Segundo os autores Ludke e André (1986), analisar os dados qualitativos significa trabalhar e dar sentido ao material obtido pela pesquisa. Os autores Miles e Huberman (1994, citado por Fernandes, 2011) sustentam a formação de categorias que procurem ordenar, organizar e sistematizar a informação. Assim, procedeu-se a uma análise qualitativa baseada na interpretação dos dados recolhidos com recurso aos seguintes instrumentos: diário de bordo, produções dos alunos e inquérito por questionário dirigido aos alunos. Para a consecução deste tipo de análise, definiram-se as seguintes categorias: interações na sala de aula, gestão do tempo, autonomia, formulação de conjecturas e descoberta de propriedades, comunicação matemática, raciocínio e perspetivas dos alunos sobre a utilização de tarefas com recurso ao *GeoGebra*. As categorias foram definidas com base no trabalho desenvolvido por Santos (2012) em articulação com as questões de investigação deste trabalho.

5. PROCEDIMENTOS

Neste trabalho procurou-se construir, implementar e avaliar uma sequência de tarefas, para leção do tópico “Circunferência”, com recurso ao *GeoGebra*.

Esta investigação desenvolveu-se em fases distintas. Numa primeira etapa, solicitei autorização ao Diretor da Escola Secundária Dr. Joaquim de Carvalho, da Figueira da Foz, para a concretização do estudo. Posteriormente, formalizei o pedido ao Conselho Pedagógico (anexo 1). Informei, então, a turma do 9.º ano de que, no âmbito da realização de um Mestrado, o conteúdo programático “Circunferência” seria abordado através da aplicação de uma sequência de tarefas, centrada no uso do *GeoGebra*. Por fim, formalizei um pedido de autorização aos Encarregados de Educação (anexo 2), a fim de poder utilizar algumas partes dos trabalhos realizados pelos seus educandos, garantindo o anonimato dos mesmos.

Numa outra fase, e atendendo ao objetivo do estudo, elaborei dez tarefas (anexos 3 a 12), resultantes de uma pesquisa exaustiva sobre o tema em diversos manuais escolares e outros documentos e seguindo sempre, com rigor, as orientações curriculares fornecidas pelo Programa de Matemática do Ensino Básico (ME-DGIDC, 2007) e pela planificação anual da disciplina de Matemática relativa ao ano de escolaridade em causa. No Quadro 1 apresentam-se algumas das características das tarefas, nomeadamente, a sua designação, os objetivos associados e a duração prevista:

Quadro 1 - Caracterização das tarefas

Tarefas	Objetivos	Duração
Tarefa 1 – Elementos da circunferência	<ul style="list-style-type: none"> - Identificar elementos da circunferência; - Conhecer e utilizar os elementos base do <i>GeoGebra</i>; - Construir figuras geométricas no <i>GeoGebra</i>; - Resolver problemas envolvendo a circunferência. 	90 min
Tarefa 2 – Cordas e arcos entre retas paralelas	<ul style="list-style-type: none"> - Relacionar os comprimentos das cordas e dos arcos entre retas paralelas; - Estabelecer conjecturas a partir da relação que existe entre as cordas compreendidas entre retas paralelas secantes e uma circunferência; - Desenvolver a visualização e o raciocínio geométrico e ser capaz de o usar; - Compreender e ser capaz de utilizar propriedades e relações relativas a figuras geométricas no plano; - Ser capaz de resolver problemas, comunicar e raciocinar matematicamente em contextos geométricos; - Conhecer e utilizar os elementos base do <i>GeoGebra</i>; - Construir figuras geométricas no <i>GeoGebra</i>. 	90 min
Tarefa 3 – Congruência de cordas, arcos e ângulos ao centro correspondentes	<ul style="list-style-type: none"> - Relacionar cordas, arcos e ângulos ao centro correspondentes; - Estabelecer conjecturas a partir da relação que existe entre cordas, arcos e ângulos ao centro; - Desenvolver a visualização e o raciocínio geométrico e ser capaz de o usar; - Conhecer e utilizar os elementos base do <i>GeoGebra</i>; - Construir figuras geométricas no <i>GeoGebra</i>. 	45 min
Tarefa 4 – Reta tangente a	<ul style="list-style-type: none"> - Relacionar uma reta tangente a uma circunferência e o raio que contém o ponto de tangência; - Estabelecer conjecturas a partir da relação que existe entre 	90 min

uma circunferência	<p>uma reta tangente a uma circunferência e o raio que contém o ponto de tangencia;</p> <ul style="list-style-type: none"> - Desenvolver a visualização e o raciocínio geométrico e ser capaz de o usar; - Compreender e ser capaz de utilizar propriedades e relações relativas a figuras geométricas no plano; - Ser capaz de resolver problemas, comunicar e raciocinar matematicamente em contextos geométricos; - Conhecer e utilizar os elementos base do <i>GeoGebra</i>; - Construir figuras geométricas no <i>GeoGebra</i>. 	
Tarefa 5 – Reta perpendicular a uma corda no seu ponto médio	<ul style="list-style-type: none"> - Estabelecer relações entre uma reta e uma corda perpendiculares no seu ponto médio; - Estabelecer conjecturas a partir da relação que existe entre uma reta e uma corda perpendicular no seu ponto médio; - Desenvolver a visualização e o raciocínio geométrico e ser capaz de o usar; - Compreender e ser capaz de utilizar propriedades e relações relativas a figuras geométricas no plano; - Ser capaz de resolver problemas, comunicar e raciocinar matematicamente em contextos geométricos; - Conhecer e utilizar os elementos base do <i>GeoGebra</i>; - Construir figuras geométricas no <i>GeoGebra</i>. 	90 min
Tarefa 6 – Amplitude de um ângulo ao centro	<ul style="list-style-type: none"> - Relacionar a amplitude de um ângulo ao centro com a do arco correspondente; - Estabelecer conjecturas a partir da relação que existe entre a amplitude de um ângulo ao centro e a amplitude do arco correspondente; - Desenvolver a visualização e o raciocínio geométrico e ser capaz de o usar; - Compreender e ser capaz de utilizar propriedades e relações relativas a figuras geométricas no plano; - Ser capaz de resolver problemas, comunicar e raciocinar matematicamente em contextos geométricos; - Conhecer e utilizar os elementos base do <i>GeoGebra</i>; - Construir figuras geométricas no <i>GeoGebra</i>. 	90 min
Tarefa 7 – Ângulo inscrito e ângulo ao	<ul style="list-style-type: none"> - Relacionar a amplitude de um ângulo inscrito com a amplitude do respetivo ângulo ao centro; - Estabelecer conjecturas a partir da relação que existe entre a amplitude do ângulo inscrito e a amplitude do ângulo ao centro 	90 min

centro com o mesmo arco de circunferência	correspondente; - Desenvolver a visualização e o raciocínio geométrico e ser capaz de o usar; - Compreender e ser capaz de utilizar propriedades e relações relativas a figuras geométricas no plano; - Ser capaz de resolver problemas, comunicar e raciocinar matematicamente em contextos geométricos; - Conhecer e utilizar os elementos base do <i>GeoGebra</i> ; - Construir figuras geométricas no <i>GeoGebra</i> .	
Tarefa 8 – Amplitude de um ângulo inscrito	- Relacionar a amplitude de um ângulo inscrito com a do arco correspondente; - Estabelecer conjecturas a partir da relação que existe entre a amplitude de um ângulo inscrito e a amplitude do arco correspondente; - Desenvolver a visualização e o raciocínio geométrico e ser capaz de o usar; - Compreender e ser capaz de utilizar propriedades e relações relativas a figuras geométricas no plano; - Ser capaz de resolver problemas, comunicar e raciocinar matematicamente em contextos geométricos; - Conhecer e utilizar os elementos base do <i>GeoGebra</i> ; - Construir figuras geométricas no <i>GeoGebra</i> .	90 min
Tarefa 9 – Ângulos inscritos no mesmo arco Ângulo inscrito numa semicircunferência	- Relacionar as amplitudes dos ângulos inscritos com as amplitudes dos arcos correspondentes; - Relacionar a amplitude de um ângulo inscrito com o arco correspondente ao ângulo (semicircunferência); - Estabelecer conjecturas a partir da relação que existe entre os dois ângulos inscritos que têm o mesmo arco de circunferência; - Estabelecer conjecturas a partir da relação que existe entre um ângulo inscrito e o arco correspondente ao ângulo (semicircunferência); - Desenvolver a visualização e o raciocínio geométrico e ser capaz de o usar; - Compreender e ser capaz de utilizar propriedades e relações relativas a figuras geométricas no plano; - Ser capaz de resolver problemas, comunicar e raciocinar matematicamente em contextos geométricos; - Conhecer e utilizar os elementos base do <i>GeoGebra</i> ; - Construir figuras geométricas no <i>GeoGebra</i> .	90 min

<p>Tarefa 10 – Ângulos excêntricos</p>	<ul style="list-style-type: none"> - Relacionar a amplitude de um ângulo com o vértice no interior da circunferência e as amplitudes dos arcos compreendidos entre os seus lados e os seus prolongamentos; - Relacionar a amplitude de um ângulo com o vértice no exterior da circunferência e as amplitudes dos arcos compreendidos entre os lados e os seus prolongamentos; - Relacionar a amplitude de um ângulo de um segmento e a amplitude do arco compreendido entre os lados; - Relacionar um ângulo ex-inscrito e o ângulo inscrito adjacente; - Estabelecer conjecturas a partir da relação que existe entre a amplitude do ângulo com o vértice no interior da circunferência e as amplitudes dos arcos compreendidos entre os seus lados e os seus prolongamentos; - Estabelecer conjecturas a partir da relação que existe entre a amplitude do ângulo com o vértice no exterior da circunferência e as amplitudes dos arcos compreendidos entre os seus lados e os seus prolongamentos; - Estabelecer conjecturas a partir da relação que existe entre a amplitude do ângulo de um segmento e a amplitude do arco compreendido entre os seus lados; - Estabelecer conjecturas a partir da relação que existe entre a amplitude do ângulo ex-inscrito e a amplitude do ângulo inscrito adjacente; - Desenvolver a visualização e o raciocínio geométrico e ser capaz de o usar; - Compreender e ser capaz de utilizar propriedades e relações relativas a figuras geométricas no plano; - Ser capaz de resolver problemas, comunicar e raciocinar matematicamente em contextos geométricos; - Conhecer e utilizar os elementos base do <i>GeoGebra</i>. 	<p>90 min</p>
--	--	---------------

Estas tarefas foram delineadas de forma a proporcionar aos alunos a resolução de problemas, a procura de generalizações e o estabelecimento de conjecturas. Para além disso, as tarefas continham ainda um conjunto de exercícios de aplicação para que os alunos pudessem aplicar as conjecturas estabelecidas e os conceitos apreendidos anteriormente.

Entretanto, requisitei os computadores portáteis da biblioteca, a fim de serem utilizados pelos alunos na sala de aula e neles foi instalado o software *GeoGebra*, por um professor da área das Tecnologias da Informação e da Comunicação.

Seguidamente, a sequência de tarefas foi aplicada aos alunos de uma turma de 9.º ano, nas aulas de Matemática, entre 21 de janeiro e 26 de fevereiro de 2014.

Nessas sessões, optei pelo trabalho de pares não só pelas condicionantes ao nível do espaço e dos recursos informáticos, mas para ir ao encontro das Normas do NCTM (1991), que defendem que devem ser proporcionadas aos alunos mais oportunidades de trabalho em pequenos ou grandes grupos visto que essa forma de organização permite a sua interação, confrontando opiniões, refletindo e partilhando pontos de vista entre si, desenvolvendo a capacidade de trabalho em equipa, indispensável na sociedade hodierna. Citando Ponte *et al.* (1997, p.93), “trabalhar em pequenos grupos permite aos alunos expor as suas ideias, ouvir os seus colegas, colocar questões, discutir estratégias e soluções, argumentar e criticar outros argumentos. Em pequeno grupo, torna-se mais fácil arriscar os seus pontos de vista, avançar com as suas descobertas e exprimir o seu pensamento”.

A aplicação das tarefas ocorreu em duas fases: a exploração da tarefa em grupos de dois alunos e a posterior apresentação das conclusões obtidas, com espaço para a discussão em grupo-turma.

A resolução destas tarefas proporcionou, aos alunos, momentos onde puderam: explorar os objetos geométricos construídos, procurar regularidades, formular conjecturas, resolver exercícios de aplicação e, subsequentemente, apresentar, discutir e debater alargadamente os resultados obtidos.

A fase de recolha de dados decorreu no mesmo período em que foi aplicada a sequência de tarefas. Durante esse lapso temporal, redigi os diários de bordo, de acordo com as notas que tirei no decurso de cada aula.

Numa outra fase, foi disponibilizado um inquérito no Google Drive (anexo 14), com o objetivo de analisar a perspetiva dos alunos sobre a realização de tarefas com recurso ao *GeoGebra*.

Assim, quando concluída a fase da implementação das tarefas, os alunos responderam ao inquérito, de forma anónima, através do *link*, instalado nos vários computadores.

No quadro 2, encontram-se descritas as atividades desenvolvidas ao longo de todo o estudo.

Quadro 2 - Síntese das atividades desenvolvidas ao longo do estudo

Período	Atividades	
setembro a outubro	Revisão da literatura	<ul style="list-style-type: none"> • Leituras; • Definição dos objetivos do estudo e das questões de investigação.
outubro a dezembro		<ul style="list-style-type: none"> • Redação do enquadramento teórico do projeto; • Elaboração dos instrumentos de recolha de dados; • Pedido de autorização aos Órgãos de Gestão da Escola; • Pedido de autorização aos Encarregados de Educação; • Requisição dos computadores portáteis e instalação do software por um professor da área das TIC.
janeiro a fevereiro		<ul style="list-style-type: none"> • Implementação do projeto e recolha de dados; • Redação dos diários de bordo.
março a setembro		<ul style="list-style-type: none"> • Análise dos dados; • Redação do relatório do estudo.

CAPÍTULO IV – APRESENTAÇÃO, ANÁLISE E DISCUSSÃO DE RESULTADOS

Neste capítulo serão apresentados e analisados os dados recolhidos, usando as técnicas de tratamento de dados descritas no capítulo anterior. Assim, apresenta-se a análise de dados com base nas categorias definidas e com base nas evidências dos três instrumentos de recolha de dados, também referenciados no capítulo precedente.

1. INTERAÇÕES NA SALA DE AULA

As Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar (NCTM, 1991) valorizam as interações entre os alunos e entre estes e o professor, sublinhando a sua relevância na construção de uma aprendizagem significativa da Matemática.

O Programa de Matemática do Ensino Básico (ME-DGIDC, 2007) refere que os alunos devem expor e confrontar as suas ideias com os seus colegas e com o professor, através da comunicação. Assim, visando o desenvolvimento da comunicação, o professor deve fomentar diversos tipos de interação na sala de aula: professor-aluno, aluno-aluno, aluno-turma e professor-turma.

Ao longo da implementação desta sequência de tarefas para leção do tópico “Circunferência”, com recurso ao *GeoGebra*, foram visíveis os diferentes tipos de interação na sala de aula.

A interação professor-aluno foi uma constante na maioria das sessões. Estas interações tanto ocorreram por minha iniciativa, como por solicitação dos alunos.

Quando a interação professor-aluno surgiu por minha iniciativa, foi no sentido de clarificar construções de figuras geométricas incompletas/erradas usando o software e de questionar os alunos sobre os procedimentos efetuados. Os excertos dos diários de bordo que, de seguida, se apresentam são reveladores deste tipo de interação no ensino e aprendizagem, a propósito do tópico em estudo “Circunferência”:

Exercício 2.6.:

Quando circulava pela sala observei que, nesta questão, um grupo de alunos apresentava um ângulo sem as semirretas desenhadas. Perante esta situação, decidi intervir do seguinte modo:

Professora: Sara e Inês, o que é um ângulo?

Sara: Para que eu tenha um ângulo tenho que ter um vértice e duas semirretas.

Professora: Mas o vosso ângulo não tem semirretas. Onde estão?

Inês: Ah! Pois é! Não as desenhámos.

Alertei-as para a necessidade de uma leitura cuidada do enunciado, bem como dos conceitos anteriormente apreendidos para os poderem aplicar corretamente.

DB2, Anexo 16

Ponto 6:

Andando pela sala, notei que o par Daniela e Ricardo tinha traçado uma reta tangente à circunferência em vez de uma reta secante. Assim, comecei por questionar:

Professora: No ponto 6, o que se pede para traçar?

Ricardo: Pede para traçar uma reta secante à circunferência.

Professora: O que é uma reta tangente à circunferência e uma reta secante à circunferência?

Daniela: Uma reta tangente é uma reta que intersesta a circunferência num ponto e uma reta secante intersesta a circunferência em dois pontos.

Professora: Certo! Olhem para a vossa construção. A reta que traçaram intersesta a circunferência em quantos pontos?

Ricardo: Num ponto.

De repente, diz a Daniela: Então está errado! Nós traçámos uma reta tangente.

Ricardo, desfaz o que fizemos para traçarmos a reta secante.

DB2, Anexo 16

As interações professor-aluno desencadeadas por solicitação dos alunos ocorreram com maior frequência e orientaram-se, sobretudo, no sentido de esclarecer dúvidas na interpretação dos enunciados, na resolução de exercícios, na construção de figuras geométricas, na descoberta de ferramentas do *GeoGebra*, na formulação de conjecturas, na linguagem matemática a usar e nos conceitos já apreendidos. Os excertos dos diários de bordo apresentados no quadro 3 são exemplos reveladores de cada uma destas situações:

Quadro 3 – Excertos exemplificativos do diário de bordo da intencionalidade da interação professor-aluno

Intencionalidade da interação professor-aluno		Excerto exemplificativo
Esclarecer dúvidas	Interpretação do enunciado	<p>Ponto 3: De repente, um aluno chamou-me: Rodrigo: Stora, como é que fazemos esta construção? Professora: O que se pede para ser desenhado no primeiro ponto da questão 3? Carolina: Pede-se um segmento de reta que contenha C e um ponto da circunferência? Professora: Não é isso! Lê novamente a questão. Após alguns instantes, o Rodrigo diz: Já sei! Pede para desenhar um segmento de reta AB, sendo A e B pontos da circunferência, mas que passa no centro da circunferência. Professora: Muito bem! Continuem a trabalhar.</p> <p>DB1, Anexo 15</p>
	Resolução de exercícios	<p>Daniela: Stora, está correto (referindo-se ao exercício 3)? Professora: Em termos de raciocínio, está certo, no entanto, não justificaram este ângulo ($\widehat{OEI} = 90^\circ$). Por que é que ele tem de amplitude 90°? Daniela: É preciso justificar? Nós já sabemos pela conjectura registada no ponto 13 que a reta EO é perpendicular à corda AI. Professora: Então devem justificar o ângulo escrevendo essa conjectura.</p> <p>DB6, Anexo 20</p>
	Construção de figuras geométricas	<p>Exercício 2.1.: Alexandra: Stora, pede para traçar a corda PA. Onde está o ponto A? Professora: O que é uma corda? Alexandra: É um segmento de reta que une dois pontos da circunferência. Professora: Então, para traçares a corda PA, o que é que tens de ter marcado na circunferência? Alexandra: Os dois pontos, P e A. Professora: Onde estão os pontos? Alexandra: Só está o ponto P, o ponto A não está lá! Professora: Logo, o que deves fazer? Alexandra: Já percebi! Tenho que marcar o ponto A e de seguida traçar a corda PA. Andando pela sala, entre as questões 2.2. e 2.5., constatei que os alunos desenharam o que era pedido sem dificuldades. Apenas alguns pares solicitaram o meu apoio, para que lhes validasse a sua construção.</p>

Esclarecer dúvidas		DB2, Anexo 16
	Formulação de conjecturas	<p>Ponto 11: O par Beatriz e João chamou-me: João: Stora, como é que vamos escrever a conjectura do que observámos? Professora: Olhando para a vossa construção, qual é a posição da reta AB em relação à circunferência? Beatriz: A reta é tangente à circunferência. Professora: Qual a posição relativa entre o raio AO e a reta tangente? Beatriz: Elas são perpendiculares. Professora: De acordo com o que disseram, tentem estabelecer a conjectura. João: Uma reta tangente à circunferência é perpendicular ao raio AO. Professora: Em que ponto? João: No ponto A. Professora: Como se chama esse ponto? João: Não sei! Professora: Qual a posição relativa de uma reta relativamente a uma circunferência? João: A reta pode ser exterior à circunferência, secante à circunferência e tangente à circunferência. Professora: Muito bem! Então, quando a reta é tangente à circunferência, ela passa por quantos pontos da circunferência? Beatriz: Por um ponto. Professora: Como se chama esse ponto? Daniela, uma colega de outro grupo que estava a ouvir o diálogo, afirmou: Ponto de tangência. João: Ah! Então, uma reta tangente à circunferência é perpendicular ao raio AO no ponto de tangência. De imediato, o grupo da Beatriz e do João debruçou-se sobre a tarefa e escreveu a conjectura.</p> <p>DB4, Anexo 18</p>
	Linguagem matemática a usar	<p>Ponto 8: Circulei pela sala e observei a Rute e o Paulo a responderem à questão sem problemas. De repente, um aluno chamou-me: Bruno: Já determinámos o comprimento das cordas AB e DE e verificamos que têm o mesmo comprimento. Como é que respondemos à questão? Professora: Escrevam o que acabaram de dizer. Bruno: Mas respondemos por palavras ou por símbolos matemáticos? Professora: Podem responder por palavras ou por símbolos ou misturando ambas.</p> <p>DB3, Anexo 17</p>

Esclarecer dúvidas	Conceitos apreendidos anteriormente	<p>Exercício 3.: Daniela: Stora, o que é um trapézio isósceles? Professora: Como podemos classificar um trapézio quanto aos lados? Carolina, de outro grupo: Pode ser isósceles, retângulo ou escaleno. Professora: Muito bem! E o que é um trapézio retângulo? Daniela: Esse eu sei! É aquele que tem dois ângulos retos. Professora: E um trapézio escaleno? João: É aquele em que os lados não paralelos não são congruentes.</p> <p>DB3, Anexo 17</p>
	Descoberta de ferramentas do <i>GeoGebra</i>	<p>Ponto 3: Joana: Stora, chegue aqui! Carlos: Onde está a ferramenta <i>Ponto médio ou centro</i>? Professora: O que querem construir? Um ponto, uma reta uma circunferência, ...? Carlos: Um ponto! Professora: Então, têm que procurar em que separador? Joana: No dos pontos (depois de procurarem no separador dos pontos, os alunos encontraram a ferramenta em questão). Ainda outro par: Paula: Stora, como é que marcamos o ponto M? Professora: Já encontraram a ferramenta? Paula: Já, mas a professora não indica na tarefa o procedimento a seguir, isto é, onde é que se clica em primeiro lugar. Professora: A partir do momento em que conhecem a ferramenta a usar ou mesmo quando é indicada, vocês têm de ir à descoberta de como a devem usar. Tentem fazê-lo! Observei o par na sua construção e verifiquei que o fez corretamente.</p> <p>DB2, Anexo 16</p>

De facto, a interação professor-aluno levou a que os alunos partilhassem as suas ideias, esclarecessem as suas dúvidas (Santos, 2012) e relembbrassem alguns conceitos esquecidos. Nestas interações, optei por manter uma postura de questionamento de forma a dar pistas, em vez de dar respostas e corrigir erros, tal como sustentam Bloxham & Campbell (2010), Hodgen (2007), Mason (2000) e Santos (2002) (citado por Dias P., 2013).

Houve, no entanto, uma exceção: a determinação da amplitude de um arco, em que tive de demonstrar, a um pequeno grupo de alunos, todo o processo, utilizando o software, uma vez que os alunos mostraram grande dificuldade ao introduzir, na caixa de *Entrada*, a expressão dada pela sugestão, a título exemplificativo, na tarefa 3 (anexo 5).

A interação professor-turma também surgiu ao longo da implementação desta sequência de tarefas. Estas interações, por vezes resultantes da solicitação de alguns alunos mas que, conseqüentemente, se alargaram a toda a turma, visaram o esclarecimento de dúvidas relativamente a conceitos apreendidos anteriormente e à interpretação de enunciados e também o desenvolvimento da capacidade de argumentação, como se torna claro nos excertos dos diários de bordo, apresentados no quadro 4:

Quadro 4 – Excertos exemplificativos do diário de bordo da intencionalidade da interação professor-turma:

Intencionalidade da interação professor-turma	Excerto exemplificativo
Esclarecer os alunos relativamente a conceitos apreendidos anteriormente	<p>Exercício 2.3.: As dificuldades para justificar este exercício foram muitas. Alguns pares de alunos estiveram algum tempo parados, outros queriam entregar a tarefa deixando o exercício totalmente em branco. A Matilde colocou-me a seguinte pergunta: Ó stora, estes ângulos são iguais, mas não me lembro da propriedade que o possa justificar (referindo-se aos ângulos verticalmente opostos). Depois desta intervenção, dirigi-me ao quadro e elaborei um esquema-resumo sobre a classificação de pares de ângulos. Assim questionei os alunos: Professora: Como se podem classificar dois ângulos? Carolina: Podem ser complementares. Professora: E o que são ângulos complementares? Miguel: São ângulos cuja soma é um ângulo reto, isto é, 90°. Anabela: Também podem ser suplementares. Professora: O que são ângulos suplementares? Anabela: São ângulos cuja soma é 180°. David: Podem ser adjacentes. Professora: O que são ângulos adjacentes? Sara: São ângulos que têm o vértice e um lado comum aos dois ângulos. Carolina: Além disso, os dois ângulos não podem estar sobrepostos. Professora: Mais ângulos? Beatriz: Podem ser verticalmente opostos. Professora: E o que são ângulos verticalmente opostos? Beatriz: Dois ângulos são verticalmente opostos quando têm o mesmo vértice e os lados de um estão no prolongamento dos lados do outro. Pedro: Também podem ser de lados paralelos. Professora: O que são ângulos de lados paralelos? Ricardo: São ângulos em que os lados de um são paralelos aos lados do outro. Bruno: Há também os ângulos alternos internos e alternos externos.</p>

	<p>À medida que os alunos indicavam os ângulos, foi feito no quadro um esboço de cada par de ângulos e os alunos procederam ao seu registo no caderno diário.</p> <p>DB8, Anexo 22</p>
Esclarecer os alunos quanto à interpretação de enunciados	<p>Exercício 1.1.: Neste exercício foram muitos os alunos que sentiram dificuldades: Rute: Stora, como é que se resolve esta questão? Inês: Eu também não consigo fazer! Duarte: Eu também não! Matilde: Não há dados nenhuns! Professora: Leiam com atenção o enunciado do exercício. Dei-lhes um tempo para a leitura do enunciado, mas como não houve reação por parte dos alunos, decidi questionar: Professora: Há alguma informação no enunciado que seja importante para a resolução do exercício? Joana: Apenas indica que os cinco arcos são congruentes. Professora: E o que são arcos congruentes? João: São arcos que têm a mesma amplitude. Fiz uma pausa. De repente, o David afirma: David: Ah! Já sei! Basta dividir 360° por 5. Não é? Professora: De onde vêm os 360°? David: É a amplitude total da circunferência. De seguida todos os alunos se debruçaram sobre a tarefa e continuaram a trabalhar.</p> <p>DB7, Anexo 21</p>
Desenvolver nos alunos a capacidade de argumentação	<p>Ponto 9: Carlos: Stora, aqui na tabela, o que se verifica é que o valor da amplitude do ângulo ao centro é maior que o valor da amplitude do ângulo inscrito. É essa a relação? Professora: Analisem atentamente a tabela, pois podem aferir algo mais sobre os dados. Voltei a circular pela sala, dando tempo a que o par de alunos, Carlos e Miguel, pensasse na questão, mas este continuava sem avançar. Mais uma vez aproximei-me deles e acabei por lhes sugerir o uso da calculadora dizendo: Professora: E se usassem a calculadora? Nesse momento, vários alunos abriram a calculadora do computador e começaram a fazer cálculos. Daniela: Stora, chegámos à conclusão que a amplitude de um ângulo inscrito é metade da amplitude de um ângulo ao centro. Professora: Muito bem! De repente, um aluno refere: Pedro: Oh Stora, mas na nossa tabela isso não acontece para todos os valores. Olhe aqui (o aluno apontou para a sua folha de cálculo) Matilde: A nós também não! Inês: E a nós também não! De repente diz o Fábio: Fábio: Será que é o <i>GeoGebra</i> que está a medir mal as amplitudes? Professora: Não, está tudo correto. Pensem um pouco e tentem analisar por que é que isso acontece.</p>

	<p>A Rute, que é uma aluna muito perspicaz, coloca o dedo no ar: Professora: Diz Rute. Rute: Penso que é o próprio programa que faz os arredondamentos desses valores. Professora: É isso mesmo. Todos os alunos da turma ouviram o comentário da Rute e logo começaram a responder aos pontos 9 e 10 sem mais ajudas.</p> <p style="text-align: center;">DB8, Anexo 22</p>
--	---

A interação professor-turma também foi desencadeada por mim, muito embora com menor frequência. Estas intervenções ocorreram no sentido de esclarecer os alunos relativamente a raciocínios incompletos, formulando questões orientadoras que os levassem a completar esses raciocínios. O próximo trecho do diário de bordo destaca um desses momentos:

Circulando pela sala, apercebi-me de que a maior parte dos pares apresentava apenas o cálculo para determinar a amplitude do ângulo pedido ($\widehat{OAB} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$), sem o justificar. Perante esta situação decidi intervir em voz alta, do seguinte modo:

Professora: Vejo que todos concluíram que $\widehat{OAB} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$; e está correto. Mas questiono, de onde surgiram os 90° ?

Anabela: É fácil, a reta é tangente à circunferência.

Professora: Alguém escreveu isso para justificar?

Os alunos responderam quase em coro: Não!

Elisabete: Mas ó stora, é preciso colocar isso?

Professora: Sim, têm de justificar todas as etapas que fizeram, apresentando todos os argumentos que vos permitem tirar as conclusões.

De imediato, todos se debruçaram sobre os exercícios de aplicação e completaram as suas respostas.

DB4, Anexo 18

A interação entre os alunos também foi uma constante durante a implementação das tarefas. As *Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar* (NCTM, 1991) defendem que a interação entre os alunos “ajuda as crianças a construir o conhecimento, a aprender outras formas de pensar sobre as ideias e a clarificar o seu próprio pensamento” (p. 33). Nos *Princípios e Normas para a Matemática Escolar* (NCTM, 2007), esta perspetiva é bastante reforçada na caracterização da comunicação como “uma forma de partilhar ideias e de clarificar a compreensão matemática” (p. 66).

Os excertos que se seguem, apresentados no quadro 5, centram-se nas interações aluno-aluno, mostrando como estes se entreajudaram na construção das figuras geométricas, na resolução dos exercícios e no esclarecimento de dúvidas e de que forma partilharam ideias:

Quadro 5 – Excertos exemplificativos do diário de bordo da intencionalidade da interação aluno-aluno:

Intencionalidade da interação aluno-aluno	Excerto exemplificativo
Construir figuras geométricas	<p>Ponto 5: A respeito do ponto 5, apercebi-me de que o Pedro, pertencente a um grupo, questionou o Rodrigo que pertencia a outro grupo, mas que se situava ao seu lado: Pedro: O que é um eixo de simetria? Rodrigo: É uma reta que passa pelo centro da circunferência e que a divide em duas semicircunferências. Percebeste? Pedro: Acho que sim! Então, neste caso (apontado para a construção do seu computador) a reta MO é um eixo de simetria!? Rodrigo: Sim.</p> <p style="text-align: center;">DB2, Anexo 16</p>
Resolver exercícios	<p>Ponto 3: Circulei pela sala e observei a Alexandra e o Duarte a resolverem a questão sem problemas. O Miguel explicava, com muito entusiasmo, à sua colega Elisabete como resolver a questão.</p> <p style="text-align: center;">DB1, Anexo 15</p>
Esclarecer dúvidas	<p>Por volta das 10 horas e 55 minutos, distribuí a tarefa 2. Os alunos rapidamente deram início à sua resolução, quando, de súbito, ouvi o Ricardo questionar o seu par: Ricardo para a Daniela: O que é uma reta secante à circunferência? Daniela: Ainda agora estivemos a corrigir a tarefa 1. Não estiveste atento! Agarra na tarefa e consulta-a. O Ricardo pegou na tarefa 1 e depois de a folhear afirmou: Está aqui! É uma reta que intersesta a circunferência em dois pontos da circunferência.</p> <p style="text-align: center;">DB2, Anexo 16</p>
Partilhar ideias	<p>Exercício 1.: De seguida, desenrolou-se o seguinte diálogo: Sara: Stora, os arcos de um hexágono inscrito numa circunferência são congruentes? Antes de responder à aluna, o Miguel, de outro grupo, respondeu: Miguel: Claro que sim! E logo a Sara e o seu par, a Inês, se debruçaram sobre a tarefa resolvendo-a com entusiasmo.</p> <p style="text-align: center;">DB10, Anexo 25</p>

A interação aluno-turma também ocorreu aquando da discussão das tarefas. Os excertos que adiante se transcrevem mostram bem que, quando os alunos se envolvem em discussões, conseguem encontrar a resposta correta e chegar a um consenso, tal como refere Santos (2012):

A aula iniciou-se com a discussão da tarefa 2 – Exercícios de aplicação e da tarefa 3.

A tarefa 2 – Exercícios de aplicação, foi apresentada pelo par Carlos e Joana. A questão 1. não gerou grande discussão, no entanto, a questão 2 já suscitou alguma polémica. Carlos: Como os arcos BC e AE estão compreendidos entre duas retas paralelas secantes, então são congruentes, ou seja, têm ângulos iguais.

Miguel: Falas em retas, mas no exercício não há retas, há apenas cordas. Portanto, acho que na justificação deves referir-te a cordas paralelas e não a retas paralelas.

O Carlos e a Joana olharam para mim com o intuito de que dissesse algo. Esperei um pouco, para que todos os alunos pensassem na observação feita pelo Miguel.

Professora: Os outros alunos concordam com o Miguel?

Na generalidade, os alunos não concordaram com a afirmação do Miguel.

Sara: Apesar de visualizarmos na figura as cordas BC e AD, podemos imaginar duas retas a passar nos mesmos pontos. Portanto, podemos falar em cordas ou retas paralelas. Nesse instante, verifiquei que muitos alunos acenavam com a cabeça, em sinal de concordância com a opinião da Sara.

DB4, Anexo 18

A apresentação do exercício 1. foi feita pela Sara e decorreu sem interrupções por parte dos colegas, o que deixa antever que tenham resolvido o exercício com sucesso. O exercício 2. foi apresentado pela Inês. Após a apresentação do exercício 2.1., a Matilde interveio referindo que tinha resolvido o mesmo exercício de outra forma. A Matilde apresentou a sua resolução e todos os alunos chegaram à conclusão de que ambas as apresentações estavam corretas. O mesmo aconteceu com os exercícios 2.2. e 2.3..

DB12, Anexo 26

A interação entre alunos contribuiu para desenvolver a capacidade de comunicação matemática e a compreensão dos conceitos. Estas interações foram muito interessantes, uma vez que permitiram que ocorresse aprendizagem e partilha de conhecimentos tal como refere Dias P. (2013).

De facto, numa sala de aula, deve existir um processo interativo, onde todos os intervenientes tenham a possibilidade de expor as suas dúvidas (Santos, 2012), levantar hipóteses e chegar às suas conclusões, tal como enfatiza Martins (1997, citado por Cadavez, 2013). O professor deve ter em atenção a importância que as interações assumem no processo de aprendizagem da Matemática, uma vez que elas são os grandes veículos do processo de ensino e aprendizagem (Vaccari, 2007).

No entanto, a interação entre os pares de alunos, por mim selecionados, nem sempre funcionou bem. Durante a aplicação da sequência de tarefas, surgiu um momento em que tive de agir de forma a reajustar os pares de alunos escolhidos inicialmente. Vejamos o seguinte excerto do diário de bordo, onde registei esta situação:

Neste momento, verifiquei que duas alunas, cada uma delas de grupos diferentes, trabalhavam juntas resolvendo os exercícios de aplicação, enquanto que os seus pares resolviam as questões sozinhos. Abeirei-me dos dois grupos e perguntei o que se passava, questionando as alunas sobre qual a razão de não estarem a trabalhar com os respetivos pares.

Joana: Ó stora, o Carlos não faz nada, eu tenho que fazer tudo sozinha. Ele só quer trabalhar no computador. Por isso virei-me para a Elisabete e trabalho com ela.

Carlos: Stora, eu posso trabalhar com o Miguel, ela não me deixa fazer nada!

Perante esta situação e com receio de que os alunos se desinteressassem, coloquei a troca de pares à consideração dos quatro alunos. Todos concordam e, a partir desse momento, os pares iniciais trocaram e a situação resolveu-se.

A partir desse momento os dois grupos passaram a trabalhar com maior entusiasmo e sem qualquer conflito.

DB4, Anexo 18

Na minha opinião, a interação entre estes dois pares de alunos não foi funcional pelo facto de uma das alunas revelar problemas de socialização e mostrar algumas dificuldades de integração na turma.

2. GESTÃO DO TEMPO

O *Programa de Matemática do Ensino Básico* (ME-DGIDC, 2007, p. 51) refere que nas tarefas exploratórias e de investigação, aquando da resolução de problemas geométricos, é essencial que os alunos tenham um tempo adequado para realizar experiências, elaborar estratégias, formular conjecturas, descrever processos e justificá-los com rigor progressivo.

Na implementação de uma sequência de tarefas, em que os alunos são o centro da aprendizagem, deve-lhes ser dado tempo para que explorem as questões de forma autónoma, discutam, partilhem, justifiquem e argumentem as suas ideias com os colegas, tal como enfatiza Branco (2011). Todavia, durante a execução destas dez tarefas, verificou-se que algumas delas não foram desenvolvidas dentro do tempo previsto.

Na tarefa 1 (anexo 3), e como era a primeira tarefa desta natureza, a maior parte dos alunos levou mais tempo a resolvê-la. Assim, reformulei a minha estratégia, permitindo aos alunos que finalizassem a tarefa e deixando que a sua correção/discussão em grande

grupo tivesse lugar na aula seguinte. Esta situação pode ser atribuída a um conjunto de fatores diversos: à circunstância de não ter sido feita qualquer leitura inicial do enunciado pela professora; ao facto de a tarefa ter sido explorada pelos próprios alunos; a algumas dificuldades registadas na interpretação do enunciado e no manuseamento do software aquando da utilização do tablet por um dos grupos de alunos. Os excertos do primeiro diário de bordo (anexo 15), que de seguida se apresentam no quadro 6, são reveladores de que os alunos necessitaram de mais tempo para resolver a tarefa 1 (anexo 3):

Quadro 6 – Excertos exemplificativos do diário de bordo dos fatores que levaram a um reajustamento do tempo (tarefa 1):

Fatores que levaram a um reajustamento do tempo (tarefa 1, anexo 3)	<p>Excerto exemplificativo</p> <p>DB1, Anexo 15</p>
<p>Não realização de uma leitura inicial dos enunciados pela professora</p> <p>Resolução das tarefas pelos próprios alunos</p>	<p>Alertei, ainda, que não seria feita qualquer leitura inicial dos enunciados por mim, que lessem com atenção as informações dadas nas tarefas e que, entre os pares, as discutissem.</p>
<p>Dificuldades na interpretação de enunciados</p>	<p>Ponto 3:</p> <p>Circulei pela sala e observei a Alexandra e o Duarte a resolverem a questão sem problemas. O Miguel explicava, com muito entusiasmo, à sua colega Elisabete como resolver a questão. De repente, um aluno chamou-me:</p> <p>Rodrigo: Stora, como é que fazemos esta construção?</p> <p>Professora: O que se pede para ser desenhado no primeiro ponto da questão 3?</p> <p>Carolina: Pede-se um segmento de reta que contenha C e um ponto da circunferência?</p> <p>Professora: Não é isso! Lê novamente a questão.</p> <p>Após alguns instantes, o Rodrigo diz: Já sei! Pede para desenhar um segmento de reta AB, sendo A e B pontos da circunferência, mas que passa no centro da circunferência.</p> <p>Professora: Muito bem! Continuem a trabalhar.</p>
<p>Dificuldades no</p>	<p>Entretanto, o grupo que trabalhava com o <i>tablet</i> questionou-me:</p>

manuseamento do software usando o <i>tablet</i>	<p>Stora, podemos ir para o computador da sua secretária? Estamos a ter algumas dificuldades em manusear o <i>GeoGebra</i> no <i>tablet</i>.</p> <p>Professora: Podem ir. Esse computador passa a ser o vosso computador de trabalho.</p>
---	---

A falta de domínio de algumas ferramentas do *GeoGebra* também se evidenciou durante a aplicação das tarefas na sala de aula, tal como refere Santos (2012). Os excertos que adiante se transcrevem são exemplificativos de como os alunos revelaram sempre dificuldades na determinação da amplitude de um arco usando o software:

Ponto 9:

Carolina: Stora, nós não conseguimos determinar as amplitudes dos arcos AB e DE.

Professora: Segue as instruções.

Carolina: Já fizemos isso e não aparece nada.

Professora: Repitam todo o procedimento dado na sugestão para que eu possa acompanhar.

Os alunos mostraram grande dificuldade na introdução da expressão dada na sugestão, pelo que tive de mostrar todo o processo para determinar a amplitude do arco pedido (arco AB).

Nesta fase, as dificuldades para determinar as amplitudes dos arcos foram muitas. Quase todos os pares estiveram parados à espera de ajuda, pelo que pedi aos colegas que já tinham determinado as amplitudes dos arcos que ajudassem os que estavam com dificuldades.

A aula foi positiva, na medida em que os alunos trabalharam com bastante empenho e entusiasmo. No entanto, os alunos demoraram muito mais tempo do que o esperado no ponto 9 da tarefa 3, no manuseamento do *GeoGebra*.

DB3, Anexo 17

Ponto 2:

Mais uma vez, a maior parte dos alunos revelou dificuldade na utilização do software para determinar a amplitude do arco AB, pois não se lembravam do procedimento a seguir. Esperei algum tempo, pois não lhes quis revelar, de imediato, todo o procedimento. Alguns pares de alunos continuaram parados, pelo que acabei por lhes sugerir a consulta da tarefa 3, pois esta continha todos os passos para determinar a amplitude de um arco. Rapidamente, quase todos os pares começaram a folhear a tarefa 3 mas, mesmo assim, foi necessário indicar, a alguns pares de alunos, todas as instruções necessárias para determinar a amplitude do arco pedido. O tempo de resolução deste ponto excedeu largamente o previsto.

DB7, Anexo 21

Ponto 3:

Mais uma vez se verificou que a grande maioria dos alunos revelou dificuldades na utilização do software para determinar a amplitude do arco AB. Alguns alunos pediram-me ajuda, tendo sido fornecido todos os passos necessários para a sua construção, mesmo usando a sugestão dada na tarefa 3 para determinar a amplitude de um arco. À medida que os alunos determinavam a amplitude do arco pedido, estes ajudam outros colegas na sua determinação.

O tempo necessário para a resolução deste ponto excedeu bastante o previsto pelo que depreendo que os alunos mostram dificuldades no manuseamento do software quando é pedido para determinar a amplitude de um arco de circunferência.

DB10, Anexo 24

Na minha perspetiva, esta dificuldade sentida pelos alunos deveu-se à elevada complexidade desta operação com recurso ao *GeoGebra* e à falta de domínio no manuseamento das suas ferramentas. Numa futura aplicação desta sequência de tarefas, seria importante a professora demonstrar previamente a toda a turma, através de um exemplo, o modo de calcular a amplitude de um arco, usando o software, antes da aplicação da tarefa propriamente dita; ou então, como alternativa, essa informação, a título de sugestão, deveria estar mais perceptível para os alunos.

As dificuldades que os alunos revelaram na formulação de conjecturas e na elaboração de justificações levaram, conseqüentemente, a dificuldades na conclusão de algumas tarefas dentro do tempo estipulado, tal como é apontado por Santos (2012). O primeiro excerto do diário de bordo que adiante se transcreve evidencia a existência de dificuldades, sentidas pelos alunos, na formulação de conjecturas; por seu turno, o segundo excerto é exemplificativo das dificuldades que os alunos sentiram aquando da elaboração de justificações para relacionar os ângulos:

Ponto 14:

Nesta etapa, surgiram alguns pedidos de auxílio. A Joana chamou-me e expôs a seguinte dúvida:

Joana: Stora, nesta questão diz para formularmos a conjectura observada. O que devemos escrever?

Nessa altura, apercebi-me de que vários alunos olharam, pois também eles se encontravam neste ponto.

Professora: Observando a construção que fizeram, que relação existe entre os arcos compreendidos entre as retas secantes à circunferência?

Joana: Os arcos são congruentes.

Professora: Escrevam exatamente o que acabaram de dizer.

Os alunos que se encontravam neste ponto, debruçaram-se novamente sobre a tarefa. Passado algum tempo, o Miguel perguntou: É isto?

Professora: É isso mesmo! Podem continuar.

Entretanto, fui chamada pelos outros pares para verificar as suas conjecturas e encontrei situações diferentes. Uns responderam corretamente, ao passo que outros responderam apenas “São congruentes” ou “Os arcos são congruentes”. Nestes casos, esclareci os alunos de que, ao formular as conjecturas, não devem particularizar, mas sim generalizar.

Nestes dois últimos pontos, verifiquei que o tempo de resolução foi muito superior ao previsto.

DB2, Anexo 16

Ponto 5:

No ponto 5 surgiram muitas dificuldades. Alguns pares de alunos olhavam-se e encolhiam os ombros e outros questionavam os colegas, mas sem resposta. Nessa altura, a Rute questionou-me:

Rute: Stora, não conseguimos responder ao ponto 5.

Neste momento, vários alunos referiram:

João: Nós também não conseguimos!

Carolina: Nós também não!

Daniela: Nós também!

Professora: Já registaram os valores na tabela?

Praticamente todos em coro: Já!

Professora: Observem os valores e tentem compará-los...

De repente a Beatriz interrompeu-me e referiu:

Beatriz: Stora, nós já tentámos comparar. Tentámos ver se era o dobro ou se era a diferença e não é nenhum destes casos.

Bruno: Stora, e nós tentámos ver se era a soma ou se era a diferença e também não é.

Não querendo dar-lhes a resposta e aproveitando a intervenção do Bruno, fiz a seguinte sugestão:

Professora: E se usassem a calculadora e a sugestão do Bruno?

Nesse momento, os alunos abriram a calculadora do computador e começaram a fazer cálculos. Posteriormente, vários foram os pares que me chamaram apenas para lhes validar as respostas.

Neste ponto, o tempo de resolução foi superior ao previsto.

DB12, Anexo 26

Razões de ordem técnica estiveram ainda na base da não realização de tarefas, dentro do tempo fixado. Esta situação ocorreu aquando da realização da tarefa 7 (anexo 9), no momento em que o computador de um dos pares de alunos deixou de funcionar. Esta circunstância obrigou a uma reorganização, dos alunos, na sala de aula, como ilustra o excerto que se segue:

Decorrido o tempo necessário à preparação do material para a realização da tarefa 6, o grupo constituído pelos alunos Paula e David chamou-me para me informar que o seu computador não arrancava. Voltámos a reiniciar o computador, mas este manteve-se inoperacional. Para além disto, não estava presente o aluno Paulo e, como tal, os alunos Paula e David juntaram-se à colega e trabalharam juntos até ao final das restantes tarefas. Este grupo manteve-se junto até ao final da implementação das restantes tarefas, uma vez que o aluno Paulo esteve ausente durante aproximadamente um mês por motivos de doença e o computador foi para arranjo.

Por fim, por volta das 10 horas e 50 minutos distribuí a tarefa 6 e os alunos começaram de imediato a construir a circunferência pedida.

DB7, Anexo 21

Perante a aproximação do teste intermédio e a dificuldade de conclusão da última tarefa (tarefa 10, anexo 12), optei por fornecer, aos alunos, as construções das quatro circunferências necessárias à sua realização, uma vez que não havia tempo útil para encetar as suas construções. O excerto do diário de bordo que se apresenta de seguida

evidencia o momento em que os alunos foram informados da existência de quatro ficheiros, com as respetivas circunferências construídas, para procederem à realização da última tarefa:

Por volta das 11 horas, os alunos ligaram os computadores, distribuí o enunciado da tarefa 10 e procedi ao seguinte esclarecimento:

Professora: Nos vários computadores foi instalado uma pasta com o nome “*Tarefa_10*” onde existem quatro ficheiros. Estes ficheiros só serão abertos e explorados quando, ao longo da tarefa, vos remeter para os mesmos.

Nota: Na tarefa 10 optei por fornecer aos alunos quatro ficheiros com as construções das várias circunferências para os mesmos explorarem, uma vez não havia tempo útil para os alunos as construírem, já que o teste intermédio seria realizado em breve e ainda havia conteúdos por lecionar que faziam parte da matriz do teste; havia, também, que preparar os alunos para a realização do mesmo.

DB12, Anexo 26

Indubitavelmente, a exploração de tarefas requer tempo. Este facto acaba, frequentemente, por se constituir num obstáculo, pois para que esta metodologia de ensino – a que está subjacente a construção do conhecimento – tenha sucesso, é essencial que alunos e professores tenham tempo para se familiarizar com este tipo de metodologias e atividades, tal como refere Maneca (2010).

3. AUTONOMIA

O *Programa de Matemática do Ensino Básico* refere que um dos objetivos gerais do ensino da Matemática é *fazer* Matemática de forma autónoma. Os alunos devem ser capazes de realizar atividades matemáticas com autonomia, tanto na resolução de problemas como na exploração de regularidades, formulando e testando conjecturas. Assim, poder-se-ão sentir mais envolvidos na elaboração do seu conhecimento matemático e conseguir uma apropriação mais profunda desse conhecimento (ME-DGIDC, 2007, p. 6).

No que toca à utilização das tecnologias na sala de aula, no domínio das atitudes e valores, Ponte e Canavarro (1997), para além de destacarem como vantagens a promoção da confiança, o espírito crítico e o desenvolvimento de atitudes e valores positivos face à Matemática, realçam também o desenvolvimento da autonomia dos alunos.

No que concerne à utilização do software, a capacidade de autonomia foi-se desenvolvendo de uma forma gradual ao longo da implementação das tarefas, tal como

é enfatizado por Santos (2012). Os excertos que se seguem tornam particularmente visível esse facto:

Constatai ainda que, embora nos primeiros minutos os alunos pudessem parecer pouco à vontade com o manuseamento do *GeoGebra*, tudo se desvaneceu num curto espaço de tempo e estes começaram a adotar atitudes mais descontraídas no decorrer da realização da tarefa.

DB1, Anexo 15

Nota: Na resolução desta tarefa, foi assinalável a postura mais autónoma dos alunos face ao manuseamento do *GeoGebra*.

DB5, Anexo 19

No entanto, houve momentos em que essa autonomia não se verificou, aquando da utilização do software. Uma das grandes dificuldades sentidas pelos alunos e que esteve sempre presente ao longo da implementação das tarefas, foi a da determinação da amplitude de um arco, como referido e exemplificado na secção anterior.

Como também já referi, considero que esta dificuldade era expectável pelo grau de dificuldade da sua construção e pela falta de experiência dos alunos no manuseamento do software. Muito embora a turma já tivesse trabalhado no ano letivo anterior com o *GeoGebra*, essa experiência ocorreu de forma pontual, pelo que os alunos estavam pouco à vontade com o programa.

Outra dificuldade na utilização do software resultou da leitura pouco cuidada do enunciado, por parte de alguns alunos, como se pode ver na situação que ora se descreve:

Ponto 6:

Andando pela sala, notei que o par Daniela e Ricardo tinha traçado uma reta tangente à circunferência em vez de uma reta secante. Assim, comecei por questionar:

Professora: No ponto 6, o que se pede para traçar?

Ricardo: Pede para traçar uma reta secante à circunferência.

Professora: O que é uma reta tangente à circunferência e uma reta secante à circunferência?

Daniela: Uma reta tangente é uma reta que intersesta a circunferência num ponto e uma reta secante intersesta a circunferência em dois pontos.

Professora: Certo! Olhem para a vossa construção. A reta que traçaram intersesta a circunferência em quantos pontos?

Ricardo: Num ponto.

De repente, diz a Daniela: Então está errado! Nós traçámos uma reta tangente.

Ricardo, desfaz o que fizemos para traçarmos a reta secante.

DB2, Anexo 16

Foi a propósito da aplicação de conceitos apreendidos anteriormente e necessários à resolução das tarefas, que os alunos revelaram menos autonomia e, conseqüentemente, solicitaram com maior frequência o meu auxílio. O excerto que se segue evidencia um desses momentos:

A Matilde colocou-me a seguinte pergunta: Ó stora, estes ângulos são iguais, mas não me lembro da propriedade que o possa justificar (referindo-se aos ângulos verticalmente opostos).

Depois desta intervenção, dirigi-me ao quadro e procedi a um esquema- resumo sobre a classificação de pares de ângulos. Assim questionei os alunos:

Professora: Como se podem classificar dois ângulos?

Carolina: Podem ser complementares.

Professora: E o que são ângulos complementares?

Miguel: São ângulos cuja soma é um ângulo reto, isto é, 90° .

Anabela: Também podem ser suplementares.

Professora: O que são ângulos suplementares?

Anabela: São ângulos cuja soma é 180° .

David: Podem ser adjacentes.

Professora: O que são ângulos adjacentes?

Sara: São ângulos que têm o vértice e um lado comum aos dois ângulos.

Carolina: Além disso, os dois ângulos não podem estar sobrepostos.

Professora: Mais ângulos?

Beatriz: Podem ser verticalmente opostos.

Professora: E o que são ângulos verticalmente opostos?

Beatriz: Dois ângulos são verticalmente opostos quando têm o mesmo vértice e os lados de um estão no prolongamento dos lados do outro.

Pedro: Também podem ser de lados paralelos.

Professora: O que são ângulos de lados paralelos?

Ricardo: São ângulos em que os lados de um são paralelos aos lados do outro.

Bruno: Há também os ângulos alternos internos e alternos externos.

À medida que os alunos indicavam os ângulos, foi feito no quadro um esboço de cada par de ângulos e os alunos procederam ao seu registo no caderno diário.

DB8, Anexo 22

Na minha opinião, estas dificuldades ficaram a dever-se à falta de pré-requisitos ou ao facto de ser mais fácil e mais rápido, para os alunos, questionarem a docente na tentativa de obterem a resposta.

No domínio do estabelecimento de conjeturas, os alunos evidenciaram capacidade de autonomia, tal como é sublinhado por Santos (2012). No entanto, no início da aplicação das tarefas, os alunos solicitaram o meu auxílio no sentido de esclarecerem o que deveriam registar a respeito da conjetura pedida. Os três excertos dos diários de bordo, que adiante se transcrevem são reveladores desses momentos:

Ponto 14:

Nesta etapa, surgiram alguns pedidos de auxílio. A Joana chamou-me e expôs a seguinte dúvida:

Joana: Stora, nesta questão diz para formularmos a conjectura observada. O que devemos escrever?

Nessa altura, apercebi-me de que vários alunos olharam, pois também eles se encontravam neste ponto.

Professora: Observando a construção que fizeram, que relação existe entre os arcos compreendidos entre as retas secantes à circunferência?

Joana: Os arcos são congruentes.

Professora: Escrevam exatamente o que acabaram de dizer.

Os alunos que se encontravam neste ponto, debruçaram-se novamente sobre a tarefa. Passado algum tempo, o Miguel perguntou: É isto?

Professora: É isso mesmo! Podem continuar.

DB2, Anexo 16

Ponto 12:

Miguel: Stora, como é que escrevemos a conjectura observada?

Professora: O que responderam no ponto 11?

Elisabete: Que os comprimentos das cordas são congruentes e as amplitudes dos arcos também.

Professora: Então já têm tudo. É só formular a conjectura observada.

Miguel: Então respondemos que as cordas e os arcos são congruentes?

Professora: Devem escrever uma frase de forma generalizada e o mais completa possível, atendendo ao que observaram.

Elisabete: O que o Miguel disse está incompleto, devemos escrever que a ângulos ao centro congruentes correspondem cordas e arcos congruentes.

Neste momento, verifiquei que alguns pares ouviam o diálogo e logo se debruçaram sobre a tarefa fazendo o registo.

DB3, Anexo 17

Ponto 11:

O par Beatriz e João chamou-me:

João: Stora, como é que vamos escrever a conjectura do que observámos?

Professora: Olhando para a vossa construção, qual é a posição da reta AB em relação à circunferência?

Beatriz: A reta é tangente à circunferência.

Professora: Qual a posição relativa entre o raio AO e a reta tangente?

Beatriz: Elas são perpendiculares.

Professora: De acordo com o que disseram, tentem estabelecer a conjectura.

João: Uma reta tangente à circunferência é perpendicular ao raio AO.

Professora: Em que ponto?

João: No ponto A.

Professora: Como se chama esse ponto?

João: Não sei!

Professora: Qual a posição relativa de uma reta relativamente a uma circunferência?

João: A reta pode ser exterior à circunferência, secante à circunferência e tangente à circunferência.

Professora: Muito bem! Então, quando a reta é tangente à circunferência, ela passa por quantos pontos da circunferência?

Beatriz: Por um ponto.

Professora: Como se chama esse ponto?

Daniela, uma colega de outro grupo que estava a ouvir o diálogo, afirmou: Ponto de tangência.

João: Ah! Então, uma reta tangente à circunferência é perpendicular ao raio AO no ponto de tangência.
De imediato, o grupo da Beatriz e do João debruçou-se sobre a tarefa e escreveu a conjectura.

DB4, Anexo 18

Mas, ao longo das tarefas, essa dificuldade foi-se desvanecendo e a partir da tarefa 5 (anexo 7) não se registaram pedidos significativos de apoio nesse sentido. As produções dos alunos também tornam claro que essa dificuldade foi ultrapassada (ver figuras 2 e 3):

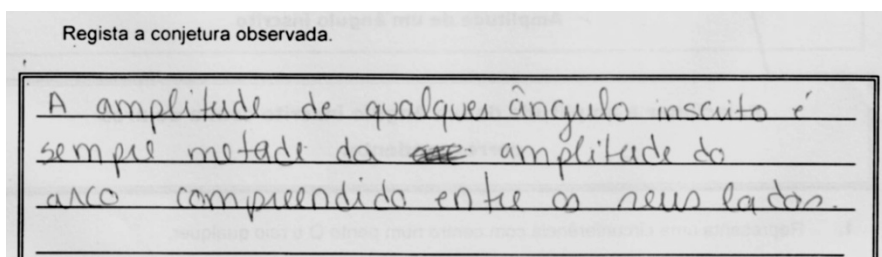


Figura 2 - Exemplo de uma resposta ao ponto 6 da tarefa 8 (anexo 10)

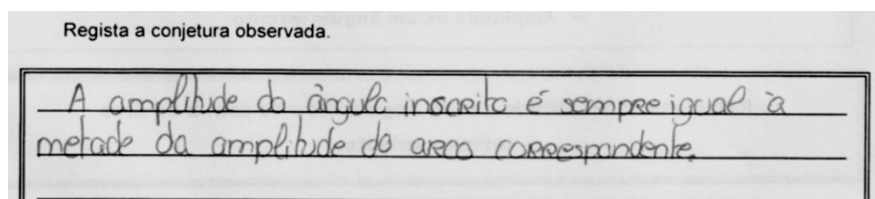


Figura 3 - Exemplo de uma resposta ao ponto 6 da tarefa 8 (anexo 10)

No que respeita à resolução dos exercícios de aplicação, a menor capacidade de autonomia que se fez sentir por parte dos alunos foi, sobretudo, no sentido do esclarecimento de dúvidas acerca de conceitos apreendidos anteriormente e na utilização do software para construção de figuras geométricas. No entanto, no decurso do processo, foi notório o desenvolvimento da autonomia dos alunos na resolução dos exercícios, aquando da comunicação matemática dos raciocínios efetuados. Seguidamente, apresenta-se um excerto do diário de bordo e a resolução de um exercício, pertencentes a duas alunas distintas (ver figuras 4 e 5), que utilizaram diferentes estratégias de raciocínio para resolver o mesmo exercício:

O par que logo se voluntariou para apresentar a sua resolução, foi o da Elisabete e da Joana. A Elisabete deu início à correção do primeiro exercício. Após a sua conclusão, foi interrompida pela Carolina, afirmando que tinha resolvido o exercício de forma diferente. A Carolina fez a sua apresentação, tendo todos os alunos chegado à conclusão de que ambas as apresentações estavam corretas.

DB9, Anexo 23

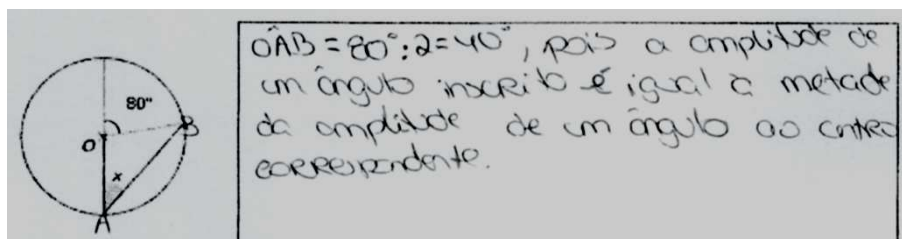


Figura 4 - Resposta dada pela Elisabete ao exercício de aplicação 1. da tarefa 7 (anexo 9)

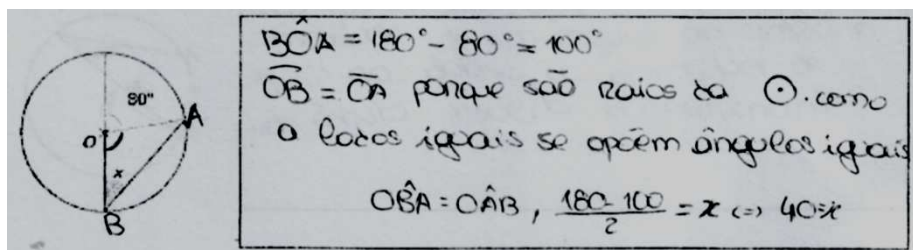


Figura 5 - Resposta dada pela Carolina ao exercício de aplicação 1. da tarefa 7 (anexo 9)

Em síntese, na implementação desta sequência de tarefas, o desenvolvimento da capacidade de autonomia dos alunos foi progressivo, no que toca à utilização do software, ao estabelecimento de conjecturas e à resolução dos exercícios, aquando da comunicação matemática dos raciocínios efetuados, o que vai ao encontro da opinião de Santos (2012). A aplicação de conceitos apreendidos anteriormente e necessários à resolução das tarefas foi a dimensão em que os alunos revelaram menor autonomia.

Com efeito, a aprendizagem efetuada de forma autónoma e com compreensão torna mais fácil a aprendizagem subsequente, indo ao encontro de um dos principais objetivos dos programas de matemática escolar referido pela NCTM (2007): “um dos principais objetivos dos programas de matemática escolar consiste em fomentar a autonomia dos alunos, e a aprendizagem com compreensão suporta este objetivo”(p.22).

4. FORMULAÇÃO DE CONJETURAS

Acerca das normas para a Matemática escolar, do pré-escolar ao 12.º ano, e que dizem respeito à Geometria, o *National Council of Teachers of Mathematics* refere que os programas de geometria dinâmica propiciam um ambiente onde os alunos podem explorar relações e formular e testar conjecturas (NCTM, 2007, p. 44).

O *Programa de Matemática do Ensino Básico* explicita que um dos objetivos gerais do ensino da Matemática é ser capaz de explorar regularidades e de formular e investigar

conjeturas matemáticas (ME-DGIDC, 2007, p. 6). Ainda neste documento se faz referência à importância, tanto na resolução de problemas geométricos, como nas tarefas exploratórias e de investigação, de os alunos terem oportunidade para realizar experiências, elaborar estratégias, formular conjeturas, descrever processos e justificá-los com rigor progressivo (p. 51).

Ao longo da implementação das tarefas, a generalidade dos alunos mostrou ser capaz de explorar e formular conjeturas com alguma facilidade, quando utiliza o *GeoGebra*, realidade que também é apontada por Santos (2012).

As exceções verificaram-se aquando da realização das tarefas iniciais, no momento em que os alunos tiveram de formular as primeiras conjeturas. Na minha opinião, as mesmas terão surgido pelo facto de os alunos nunca terem ouvido falar do conceito “conjetura”. É no ponto 14, da tarefa 2 (anexo 4), que é pedido, pela primeira vez, o estabelecimento de uma conjetura e é neste preciso momento que surgem os pedidos de ajuda. Nessa mesma circunstância, aproveitei para esclarecer os alunos de que, para formular uma conjetura, deveriam proceder a uma generalização, uma vez que alguns alunos formularam a conjetura pedida, particularizando-a. O trecho do diário de bordo que se apresenta é revelador desse momento:

Ponto 14:

Nesta etapa, surgiram alguns pedidos de auxílio. A Joana chamou-me e expôs a seguinte dúvida:

Joana: Stora, nesta questão diz para formularmos a conjetura observada. O que devemos escrever?

Nessa altura, apercebi-me de que vários alunos olharam, pois também eles se encontravam neste ponto.

Professora: Observando a construção que fizeram, que relação existe entre os arcos compreendidos entre as retas secantes à circunferência?

Joana: Os arcos são congruentes.

Professora: Escrevam exatamente o que acabaram de dizer.

Os alunos que se encontravam neste ponto, debruçaram-se novamente sobre a tarefa. Passado algum tempo, o Miguel perguntou: É isto?

Professora: É isso mesmo! Podem continuar.

Entretanto, fui chamada pelos outros pares para verificar as suas conjeturas e encontrei situações diferentes. Uns responderam corretamente, ao passo que outros responderam apenas “São congruentes” ou “Os arcos são congruentes”. Nestes casos, esclareci os alunos de que, ao formular as conjeturas, não devem particularizar, mas sim generalizar.

DB2, Anexo 16

Perante o exposto e atendendo às produções dos alunos, verificou-se que, na primeira conjetura pedida (ponto 14 da tarefa 2 – anexo 4), se registaram apenas dois tipos de

respostas: quatro pares de alunos formularam a conjectura pedida, particularizando-a (ver figura 6) e os restantes pares responderam ao ponto 14, generalizando-a (ver figura 7):

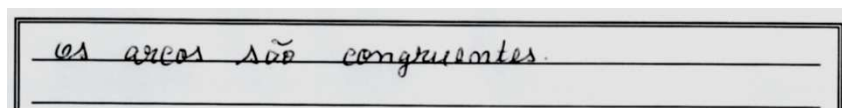


Figura 6 - Exemplo de uma resposta ao ponto 14 da tarefa 2 (anexo 4)

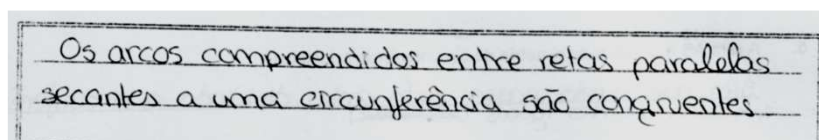


Figura 7 - Exemplo de outra resposta ao ponto 14 da tarefa 2 (anexo 4)

Para explorar e formular conjecturas, os alunos recorreram às potencialidades do *GeoGebra*: construíam a figura que representava a situação proposta, exploravam e formulavam a conjectura pedida. Esses momentos revelaram-se bastante importantes, na medida em que, através do arrastamento dos elementos da figura e do seu movimento, os alunos constataavam as suas conjecturas através da observação. O excerto do diário de bordo que ora se transcreve e as figuras que se apresentam constituem disso exemplo:

Ponto 8:

Neste ponto, um par de alunos solicitou a minha ajuda:

Duarte: Stora, neste ponto conclui-se que os ângulos inscritos têm a mesma amplitude. Certo?

Como não quis logo afirmar que sim, pois senti que a intervenção do Duarte não fora feita com convicção, então questionei-o do seguinte modo:

Professora: Move o ponto C ou D da circunferência. Que conclusão tiras relativamente aos dois ângulos inscritos?

Duarte: Têm a mesma amplitude.

Professora: Move novamente o ponto C ou D. O que concluis?

Duarte: Também têm a mesma amplitude.

Professora: Então responde ao ponto 8!

Duarte: Como?

Professora: Basta escreveres o que disseste.

DB 11, Anexo 25

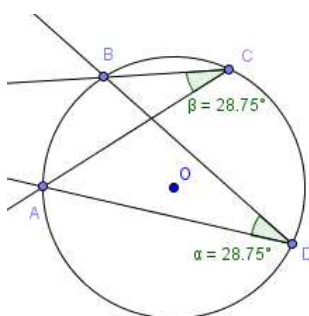


Figura 8 - Exemplo de uma construção da tarefa 9 (anexo 11)

~~Os~~ ângulos inscritos com o mesmo arco de circunferência têm sempre a mesma amplitude.

Figura 9 - Exemplo de uma resposta ao ponto 8 da tarefa 9 (anexo 11)

Considero que o facto de o *GeoGebra* permitir o arrastamento de pontos ou partes da figura, garantindo as propriedades das construções geométricas, leva a que os alunos criem muitos exemplos, facilitando assim a descoberta de propriedades e o estabelecimento de conjecturas. O excerto do diário de bordo que se segue, revela o momento em que um aluno refere a facilidade de estabelecer conjecturas aquando da utilização do *GeoGebra*:

Ricardo: As construções que fazemos no *GeoGebra* e o facto de podermos mover certos pontos e observar o que acontece, permite-nos registar as conjecturas facilmente.

DB 7, Anexo 21

Não menos importantes foram os momentos em que os alunos preencheram tabelas através da recolha de valores, explorando o *GeoGebra*, e formularam as suas conjecturas, como é o caso da comparação entre a amplitude de um ângulo ao centro e a amplitude do arco correspondente:

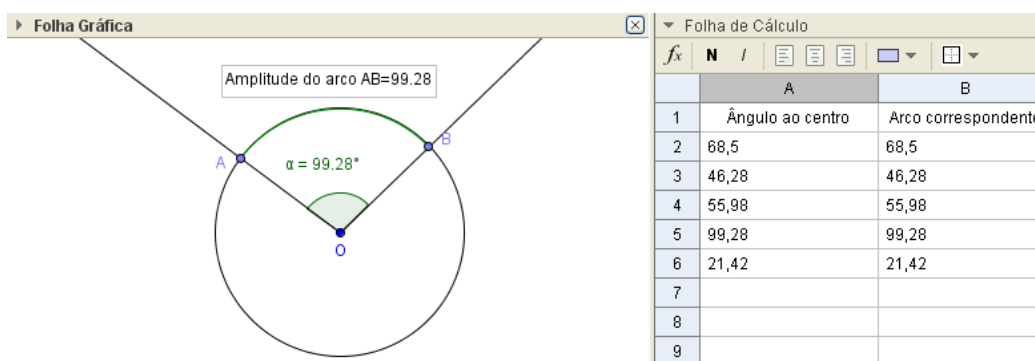


Figura 10 - Exemplo de uma construção da tarefa 6 (anexo 8)

A amplitude do ângulo ao centro é sempre igual à amplitude do arco correspondente.

Figura 11 - Exemplo de uma resposta ao ponto 7 da tarefa 6 (anexo 8)

Na minha perspetiva, a construção e o preenchimento das tabelas mostraram ser importantes na medida em que permitiram aos alunos organizar os dados e, através da

sua análise, estabelecer relações, procurar regularidades e, conseqüentemente, estabelecer conjecturas acerca das relações estudadas. O excerto que se apresenta de seguida mostra a forma como um aluno reconhece que o registo dos valores nas tabelas favorece o estabelecimento de conjecturas:

Circulando pela sala observei que, após fazerem os seus registos na tabela, os alunos facilmente chegaram à conjectura pedida. Um aluno fez o seguinte comentário:

Fábio: Stora, esta conjectura foi fácil de escrever com os valores da tabela.

DB 7, Anexo 21

Na tarefa 7 (anexo 9), aquando da resolução dos pontos 8, 9 e 10, alguns alunos sentiram-se condicionados na formulação da conjectura pedida, sobre a situação em estudo, por obterem valores aproximados das amplitudes do ângulo inscrito e ângulo ao centro correspondente, tal como é referido no excerto do diário de bordo que se apresenta e nas figuras 12 e 13:

Ponto 9:

Carlos: Stora, aqui na tabela, o que se verifica é que o valor da amplitude do ângulo ao centro é maior que o valor da amplitude do ângulo inscrito. É essa a relação?

Professora: Analisem atentamente a tabela, pois podem aferir algo mais sobre os dados.

Voltei a circular pela sala, dando tempo a que o par de alunos, Carlos e Miguel, pensasse na questão, mas este continuava sem avançar. Mais uma vez aproximei-me deles e acabei por lhes sugerir o uso da calculadora dizendo:

Professora: E se usassem a calculadora?

Nesse momento, vários alunos abriram a calculadora do computador e começaram a fazer cálculos.

Daniela: Stora, chegámos à conclusão que a amplitude de um ângulo inscrito é metade da amplitude de um ângulo ao centro.

Professora: Muito bem!

De repente, um aluno refere:

Pedro: Oh Stora, mas na nossa tabela isso não acontece para todos os valores. Olhe aqui (o aluno apontou para a sua folha de cálculo)

Matilde: A nós também não!

Inês: E a nós também não!

De repente diz o Fábio:

Fábio: Será que é o *GeoGebra* que está a medir mal as amplitudes?

Professora: Não, está tudo correto. Pensem um pouco e tentem analisar por que é que isso acontece.

A Rute, que é uma aluna muito perspicaz, coloca o dedo no ar:

Professora: Diz Rute.

Rute: Penso que é o próprio programa que faz os arredondamentos desses valores.

Professora: É isso mesmo.

Todos os alunos da turma ouviram o comentário da Rute e logo começaram a responder aos pontos 9 e 10 sem mais ajudas.

DB 8, Anexo 22

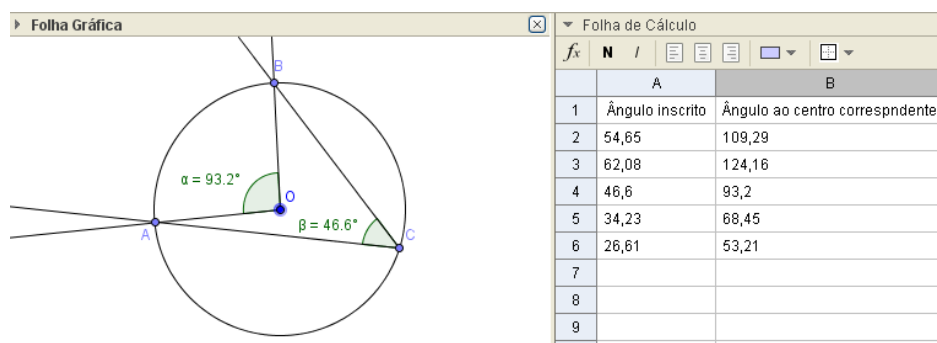


Figura 12 - Exemplo de uma construção da tarefa 7 (anexo 9)

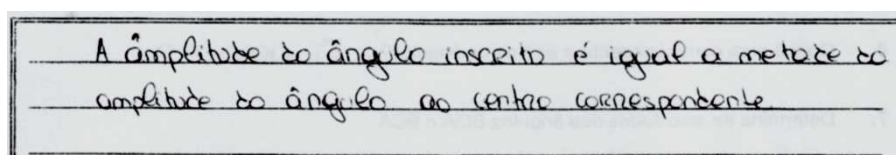


Figura 13 - Exemplo de uma resposta ao ponto 10 da tarefa 7 (anexo 9)

Na análise efetuada às produções dos alunos, constatei que, na grande maioria, as conjecturas foram estabelecidas com rigor e clareza. As exceções dizem respeito às tarefas 4 (anexo 6), 5 (anexo 7) e 10 (anexo 12).

Relativamente à tarefa 4, no ponto 11 (anexo 6), dos onze pares de alunos, um par não estabeleceu a conjectura pedida e três pares estabeleceram a conjectura com falta de rigor e clareza na linguagem matemática (ver figura 14). Os restantes alunos estabeleceram corretamente a conjectura (ver figura 15).

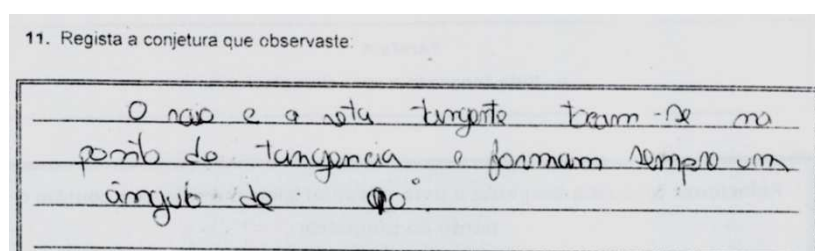


Figura 14 - Exemplo de uma resposta ao ponto 11 da tarefa 4 (anexo 6)

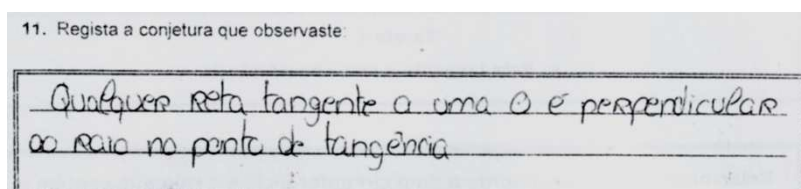


Figura 15 - Exemplo de uma resposta ao ponto 11 da tarefa 4 (anexo 6)

Na tarefa 5 (anexo 7), era pedido aos alunos que estabelecessem três conjecturas. Na primeira conjectura pedida, o ponto 6, apenas dois alunos a estabeleceram

incorretamente, tendo os restantes conseguido formulá-la com correção e rigor (ver figura 16).

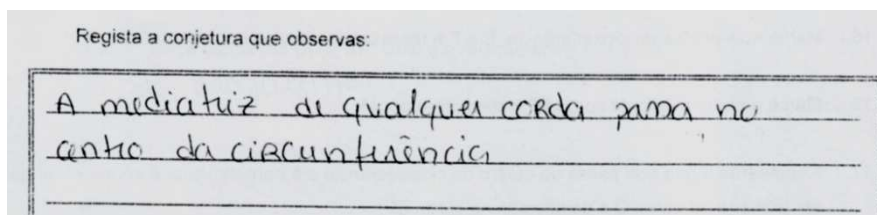


Figura 16 - Exemplo de uma resposta ao ponto 6 da tarefa 5 (anexo 7)

No ponto 13 da tarefa, três dos pares estabeleceram incorretamente a conjectura, um par estabeleceu a conjectura com pouco rigor e os restantes oito formularam-na de forma correta (ver figura 17).

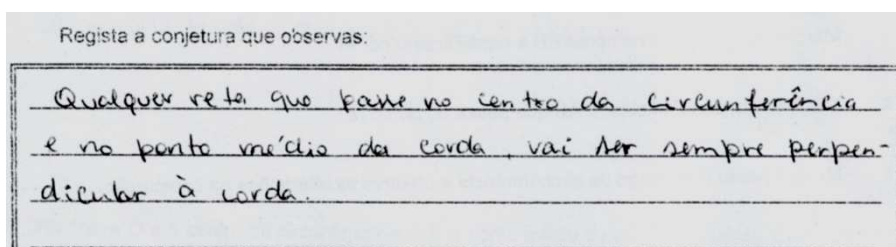


Figura 17 - Exemplo de uma resposta ao ponto 13 da tarefa 5 (anexo 7)

Já no ponto 20 da mesma tarefa, dois pares de alunos estabeleceram incorretamente a conjectura pedida, outros dois pares estabeleceram a conjectura com pouca clareza e rigor e os oito pares restantes responderam corretamente ao pedido do estabelecimento da conjectura (ver figura 18).

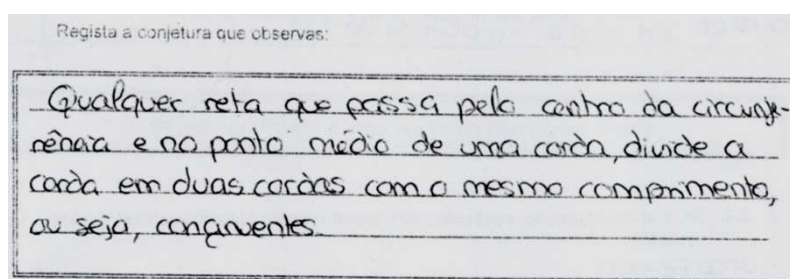


Figura 18 - Exemplo de uma resposta ao ponto 20 da tarefa 5 (anexo 7)

Quanto à tarefa 10 (anexo 12), esta continha o pedido de formulação de quatro conjecturas. Na primeira conjectura, ponto 5, todos os alunos conseguiram estabelecer a conjectura pedida, no entanto, dos onze pares, apenas três a conseguiram estabelecer com bastante rigor (ver figura 19). Os restantes não foram rigorosos na linguagem utilizada,

demonstrando dificuldades na comunicação matemática através da escrita (ver figura 20).

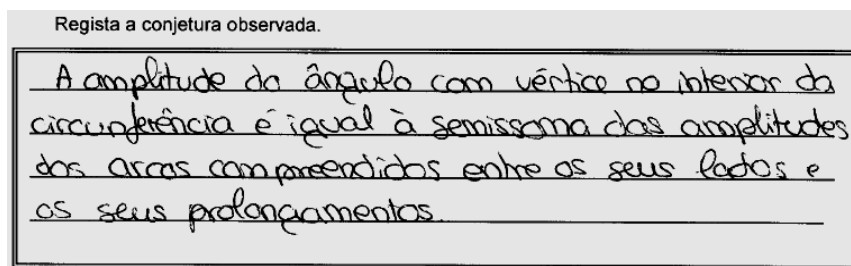


Figura 19 - Exemplo de uma resposta ao ponto 5 da tarefa 10 (anexo 12)

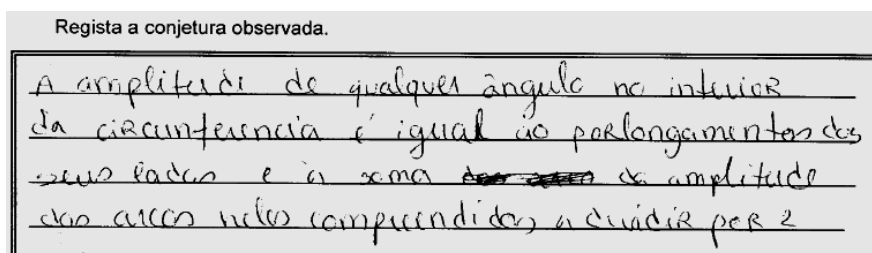


Figura 20 - Exemplo de uma resposta ao ponto 5 da tarefa 10 (anexo 12)

O excerto do diário de bordo que adiante se transcreve torna particularmente claras as dificuldades sentidas pelos alunos aquando do estabelecimento desta conjectura:

Ponto 5:

No ponto 5 surgiram muitas dificuldades. Alguns pares de alunos olhavam-se e encolhiam os ombros e outros questionavam os colegas, mas sem resposta. Nessa altura, a Rute questionou-me:

Rute: Stora, não conseguimos responder ao ponto 5.

Neste momento, vários alunos referiram:

João: Nós também não conseguimos!

Carolina: Nós também não!

Daniela: Nós também!

Professora: Já registaram os valores na tabela?

Praticamente todos em coro: Já!

Professora: Observem os valores e tentem compará-los...

De repente a Beatriz interrompeu-me e referiu:

Beatriz: Stora, nós já tentámos comparar. Tentámos ver se era o dobro ou se era a diferença e não é nenhum destes casos.

Bruno: Stora, e nós tentámos ver se era a soma ou se era a diferença e também não é.

Não querendo dar-lhes a resposta e aproveitando a intervenção do Bruno, fiz a seguinte sugestão:

Professora: E se usassem a calculadora e a sugestão do Bruno?

Nesse momento, os alunos abriram a calculadora do computador e começaram a fazer cálculos. Posteriormente, vários foram os pares que me chamaram apenas para lhes validar as respostas.

No ponto 10 da referida tarefa, um dos pares estabeleceu incorretamente a conjectura, seis pares estabeleceram-na com pouco rigor e os restantes quatro formularam-na de forma correta (ver figura 21).

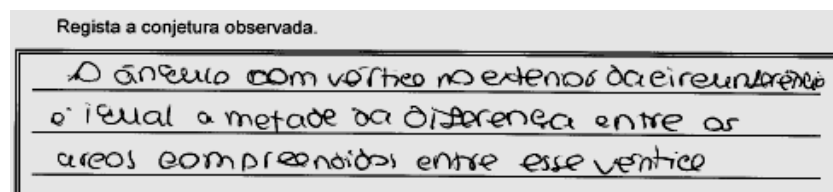


Figura 21 - Exemplo de uma resposta ao ponto 10 da tarefa 10 (anexo 12)

Quanto ao ponto 15 da mesma tarefa, dos onze alunos, cinco formularam corretamente a conjectura (ver figura 22) e os restantes estabeleceram-na com pouco rigor no que respeita à linguagem matemática.

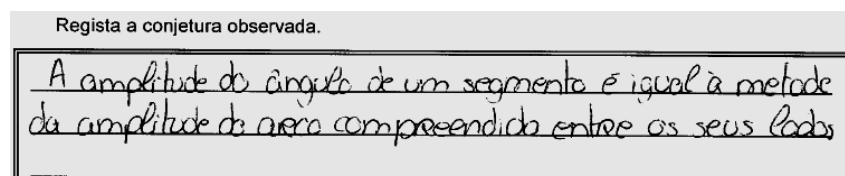


Figura 22 - Exemplo de uma resposta ao ponto 15 da tarefa 10 (anexo 12)

No ponto 19 da tarefa 10, um aluno não conseguiu estabelecer a conjectura pedida, cinco estabeleceram a conjectura usando uma linguagem pouco cuidada e os restantes cinco pares de alunos estabeleceram corretamente a conjectura (ver figura 23).

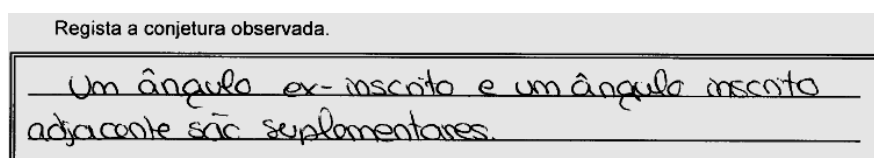


Figura 23 - Exemplo de uma resposta ao ponto 19 da tarefa 10 (anexo 12)

De um modo geral, pode-se concluir que, aquando da aplicação desta sequência de tarefas com recurso ao *GeoGebra*, os alunos conseguiram construir, visualizar, explorar e investigar figuras geométricas com recurso ao software e estabelecer conjecturas, tal como sustentam Matos (2011), Fernandes (2011) e Santos (2012). Na minha opinião, que vai, aliás, ao encontro de Santos (2012), a aplicação deste tipo de tarefas com recurso ao *GeoGebra* contribuiu para o estabelecimento do quinto objetivo da Matemática, estabelecido no PMEB, e já enunciado anteriormente (ME-DGIDC, 2007, p. 5).

5. COMUNICAÇÃO MATEMÁTICA

Segundo as *Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar* (NCTM, 2007), a comunicação matemática é vista como “uma forma de partilhar ideias e de clarificar a compreensão matemática” (p. 66). Ainda neste documento, considera-se importante que os alunos saibam ouvir, questionar e interpretar as ideias dos outros, o que os poderá ajudar a melhorar o modo como comunicam o seu pensamento matemático aos colegas, professores e outros.

O *Programa de Matemática do Ensino Básico* (ME-DGIDC, 2007) considera a comunicação matemática como uma importante capacidade transversal a toda a aprendizagem da Matemática, a par da resolução de problemas e do raciocínio matemático. Nas orientações do referido documento, pode ler-se: “os alunos devem ser capazes de comunicar as suas ideias e interpretar as ideias dos outros, organizando e clarificando o seu pensamento matemático” (p. 5). Nesse sentido, os alunos devem ser capazes de interpretar enunciados apresentados de forma oral ou escrita, expressar ideias usando uma linguagem matemática precisa, descrever e explicar estratégias e processos utilizados nas suas produções, argumentar e discutir argumentações apresentadas por outros (ME-DGIDC, 2007).

Na organização desta sequência de tarefas, optei pelo trabalho em pares e em grupo-turma, uma vez que estas modalidades permitem, entre os alunos, a troca de impressões, o esclarecimento de dúvidas, a partilha de informações (Guita, 2013); por outro lado, ao ouvirem os argumentos dos colegas e ao refletirem sobre eles, os alunos aprendem a criticar matematicamente. Os diálogos que se apresentam, extraídos do diário de bordo, são esclarecedores quanto a esses factos:

Exercício 1.1.:

Neste exercício foram muitos os alunos que sentiram dificuldades:

Rute: Stora, como é que se resolve esta questão?

Inês: Eu também não consigo fazer!

Duarte: Eu também não!

Matilde: Não há dados nenhuns!

Professora: Leiam com atenção o enunciado do exercício.

Dei-lhes um tempo para a leitura do enunciado, mas como não houve reação por parte dos alunos, decidi questionar:

Professora: Há alguma informação no enunciado que seja importante para a resolução do exercício?

Joana: Apenas indica que os cinco arcos são congruentes.

Professora: E o que são arcos congruentes?

João: São arcos que têm a mesma amplitude.

Fiz uma pausa. De repente, o David afirma:

David: Ah! Já sei! Basta dividir 360° por 5. Não é?

Professora: De onde vem os 360° ?

David: É a amplitude total da circunferência.

De seguida todos os alunos se debruçaram sobre a tarefa e continuaram a trabalhar.

DB7, Anexo 21

Ponto 9:

Carlos: Stora, aqui na tabela, o que se verifica é que o valor da amplitude do ângulo ao centro é maior que o valor da amplitude do ângulo inscrito. É essa a relação?

Professora: Analisem atentamente a tabela, pois podem aferir algo mais sobre os dados.

Voltei a circular pela sala, dando tempo a que o par de alunos, Carlos e Miguel, pensasse na questão, mas este continuava sem avançar. Mais uma vez aproximei-me deles e acabei por lhes sugerir o uso da calculadora dizendo:

Professora: E se usassem a calculadora?

Nesse momento, vários alunos abriram a calculadora do computador e começaram a fazer cálculos.

Daniela: Stora, chegámos à conclusão que a amplitude de um ângulo inscrito é metade da amplitude de um ângulo ao centro.

Professora: Muito bem!

De repente, um aluno refere:

Pedro: Oh Stora, mas na nossa tabela isso não acontece para todos os valores. Olhe aqui (o aluno apontou para a sua folha de cálculo)

Matilde: A nós também não!

Inês: E a nós também não!

De repente diz o Fábio:

Fábio: Será que é o *GeoGebra* que está a medir mal as amplitudes?

Professora: Não, está tudo correto. Pensem um pouco e tentem analisar por que é que isso acontece.

A Rute, que é uma aluna muito perspicaz, coloca o dedo no ar:

Professora: Diz Rute.

Rute: Penso que é o próprio programa que faz os arredondamentos desses valores.

Professora: É isso mesmo.

Todos os alunos da turma ouviram o comentário da Rute e logo começaram a responder aos pontos 9 e 10 sem mais ajudas.

DB8, Anexo 22

Para que as capacidades de comunicação matemática e de argumentação sejam desenvolvidas, é importante que haja discussão em grupo-turma de modo a possibilitar o confronto de estratégias, hipóteses ou justificações construídas pelos próprios alunos (Ponte, Matos, & Abrantes, 1998).

Os momentos de discussão das tarefas em grupo-turma, logo após a realização destas, também foram uma opção refletida, tendo-se revelado muito importantes no desenvolvimento da comunicação matemática, uma vez que proporcionaram, aos alunos, a partilha, a discussão e a sistematização e institucionalização de conhecimentos e ideias matemáticas, tal como é referido por Guita (2013). O próximo trecho do diário de bordo destaca uma das situações em que houve partilha e discussão de ideias matemáticas entre os alunos:

A aula iniciou-se com a discussão da tarefa 2 – Exercícios de aplicação e da tarefa 3.

A tarefa 2 – Exercícios de aplicação, foi apresentada pelo par Carlos e Joana. A questão 1 não gerou grande discussão, no entanto, a questão 2 já suscitou alguma polémica. Carlos: Como os arcos BC e AE estão compreendidos entre duas retas paralelas secantes, então são congruentes, ou seja, têm ângulos iguais.

Miguel: Falas em retas, mas no exercício não há retas, há apenas cordas. Portanto, acho que na justificação deves referir-te a cordas paralelas e não a retas paralelas.

O Carlos e a Joana olharam para mim com o intuito de que dissesse algo. Esperei um pouco, para que todos os alunos pensassem na observação feita pelo Miguel.

Professora: Os outros alunos concordam com o Miguel?

Na generalidade, os alunos não concordaram com a afirmação do Miguel.

Sara: Apesar de visualizarmos na figura as cordas BC e AD, podemos imaginar duas retas a passar nos mesmos pontos. Portanto, podemos falar em cordas ou retas paralelas. Nesse instante, verifiquei que muitos alunos acenavam com a cabeça, em sinal de concordância com a opinião da Sara.

DB4, Anexo 18

No decorrer das aulas, aquando da resolução das tarefas e sempre que eu era solicitada pelos alunos para o esclarecimento de dúvidas, tive o máximo de cuidado na tentativa de os conduzir às conclusões pretendidas, recorrendo a um conjunto de questões, sem lhes fornecer diretamente as respostas.

Exercício 1.2.:

A propósito da questão 1.2., verifiquei que a maior parte dos alunos a lia sem, porém, a resolver. Entretanto, começou a haver conversas paralelas entre os vários grupos sobre a resolução possível do exercício. Perante esta atitude, fiquei preocupada, uma vez que receei que os alunos se desmotivassem. Assim, decidi lançar a questão em voz alta para todos:

Professora: Como é que classificam o triângulo [ABO] quanto aos lados?

Duarte: É um triângulo isósceles.

Professora: Porquê?

Carlos: Porque tem dois lados com o mesmo comprimento.

Professora: Quais?

Carlos: Os lados AO e BO.

Professora: Como é que justificam que os lados AO e BO têm o mesmo comprimento?

Paulo: Vê-se na figura.

Professora: Não podem dizer uma afirmação por se ver na figura. Têm de a justificar com argumentos válidos. Que nome se dá ao segmento de reta [AO]?

Joana: É um raio da circunferência.

Professora: E o segmento de reta [BO]?

David: Ah! Também é um raio da circunferência.

Professora: Logo, como é que justificam que o triângulo é isósceles?

Matilde: O triângulo é isósceles, porque os lados AO e BO são raios da circunferência, logo têm o mesmo comprimento.

De seguida, os alunos voltaram à resolução dos exercícios de aplicação e continuaram a trabalhar entusiasmados.

DB4, Anexo 18

Outras vezes, quando os alunos me pediam que validasse as suas respostas e estas se encontravam incompletas, eu usava questões como “Porquê?”, no sentido de os levar a pensar e a refletir, de forma a completarem os seus raciocínios, como se pode ver na situação que se segue:

Muitos foram os pares que me chamaram para validar as respostas aos exercícios 2.1. e 2.2.. Muitos deles encontravam-se incompletos; como tal, a minha intervenção foi mais no sentido de questionar “Porquê?”. E, de imediato, os alunos justificavam todos os cálculos efetuados.

DB7, Anexo 21

Durante a realização de alguns exercícios de aplicação, detetei falta de rigor nas justificações das afirmações apresentadas pelos alunos, por pensarem que não havia necessidade de o fazer. Assim, procurei alertá-los para o facto de terem de justificar todos os seus procedimentos e raciocínios:

Circulando pela sala, apercebi-me de que a maior parte dos pares apresentava apenas o cálculo para determinar a amplitude do ângulo pedido ($\widehat{OAB} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$), sem o justificar. Perante esta situação decidi intervir em voz alta, do seguinte modo:

Professora: Vejo que todos concluíram que $\widehat{OAB} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ e está correto. Mas questiono, de onde surgiram os 90° ?

Anabela: É fácil, a reta é tangente à circunferência.

Professora: Alguém escreveu isso para justificar?

Os alunos responderam quase em coro: Não!

Elisabete: Mas ó stora, é preciso colocar isso?

Professora: Sim, têm de justificar todas as etapas que fizeram, apresentando todos os argumentos que vos permitem tirar as conclusões.

DB4, Anexo 18

Em certos momentos, houve necessidade, por parte dos alunos, de acrescentar letras para assinalar os pontos situados sobre a circunferência, uma vez que isso permitiria, mais facilmente, a comunicação matemática, quer escrita (símbolos), quer oral. O diário de bordo que se segue, bem como a figura 24, confirmam essa ocorrência:

Exercício 2.1.:

Sara: Stora, podemos acrescentar letras à figura, mais precisamente nos pontos que pertencem à circunferência? Para indicarmos os ângulos é mais fácil usarmos as letras.

Professora: Claro que sim!

Aproveitando esta intervenção, dirigi-me a toda a turma e referi que, se necessitassem, poderiam acrescentar letras aos pontos que se encontram sobre a circunferência, pois isso poderia facilitar, em termos de escrita, a resolução do exercício.

Circulando pela sala, pude constatar que a maior parte dos alunos tinha acrescentado letras aos pontos que se encontram sobre a circunferência.

DB7, Anexo 21

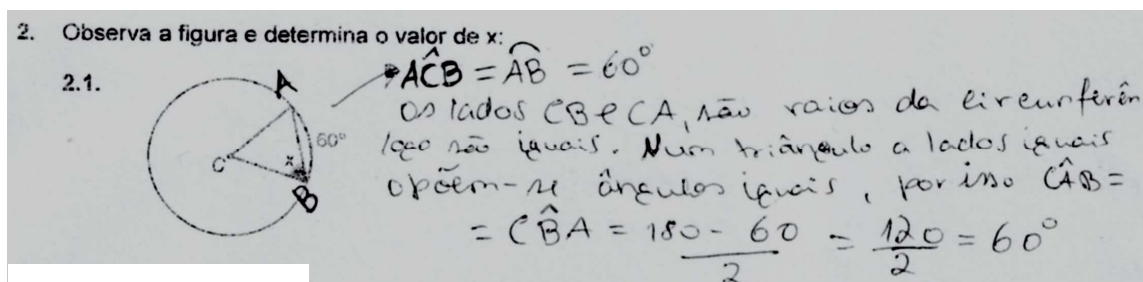


Figura 24 - Exemplo de uma resposta ao exercício de aplicação 2.1. da tarefa 6 (anexo 8)

Na minha perspectiva, esta situação foi uma mais-valia, uma vez que facilitou a comunicação matemática aquando da discussão com o grupo-turma.

Porém, também surgiram dificuldades na comunicação matemática, principalmente, ao nível da escrita. Dessa forma, os alunos acusaram, por vezes, dificuldades na expressão e comunicação das suas ideias e reflexões, relacionadas, sobretudo, com a formulação de conjecturas, tal como se pode ver na situação que se segue:

Ponto 11:

O par Beatriz e João chamou-me:

João: Stora, como é que vamos escrever a conjectura do que observámos?

Professora: Olhando para a vossa construção, qual é a posição da reta AB em relação à circunferência?

Beatriz: A reta é tangente à circunferência.

Professora: Qual a posição relativa entre o raio AO e a reta tangente?

Beatriz: Elas são perpendiculares.

Professora: De acordo com o que disseram, tentem estabelecer a conjectura.

João: Uma reta tangente à circunferência é perpendicular ao raio AO.

Professora: Em que ponto?

João: No ponto A.

Professora: Como se chama esse ponto?

João: Não sei!

Professora: Qual a posição relativa de uma reta relativamente a uma circunferência?

João: A reta pode ser exterior à circunferência, secante à circunferência e tangente à circunferência.

Professora: Muito bem! Então, quando a reta é tangente à circunferência, ela passa por quantos pontos da circunferência?

Beatriz: Por um ponto.

Professora: Como se chama esse ponto?

Daniela, uma colega de outro grupo que estava a ouvir o diálogo, afirmou: Ponto de tangência.

João: Ah! Então, uma reta tangente à circunferência é perpendicular ao raio AO no ponto de tangência.

De imediato, o grupo da Beatriz e do João debruçou-se sobre a tarefa e escreveu a conjectura.

DB4, Anexo 18

Na minha opinião, e tal como referi anteriormente, esta dificuldade deveu-se ao facto de os alunos se depararem, pela primeira no seu percurso escolar, com o conceito de “conjectura”.

Outra dificuldade exibida pelos alunos relaciona-se com o uso da linguagem simbólica da Matemática, aquando da comunicação escrita. O excerto, que seguidamente se apresenta, traduz a dificuldade de uma aluna no que se refere à notação a utilizar para definir a amplitude de um ângulo:

Exercício 1.1.:

Iniciou-se, então, o seguinte diálogo:

Daniela: Stora, é assim que se representa a amplitude do ângulo OAB (ângulo OAB)?

Professora: Essa notação indica o ângulo OAB, sendo o mais correto escrever \widehat{OAB} .

Perante esta intervenção, dirigi-me ao quadro e procedi ao mesmo esclarecimento para toda a turma.

DB4, Anexo 18

De um modo geral, nesta sequência de tarefas, o trabalho a pares teve um papel fundamental, na medida em que permitiu, aos alunos, promover a discussão e fomentar o desenvolvimento da argumentação e comunicação matemáticas. Igualmente pertinentes foram os momentos de discussão, após a realização da tarefa, uma vez que possibilitaram, aos alunos, refletir sobre a sua atividade, comparar as suas ideias com as dos outros, “alterar, consolidar ou fortalecer os seus argumentos ou raciocínio” (NTCM, 2008, p. 64).

6. RACIOCÍNIO

O *Programa de Matemática do Ensino Básico* (ME-DGIDC, 2007) considera o raciocínio matemático como uma capacidade transversal, que deve ser desenvolvida ao longo de todo o ensino básico e que deve estar presente em todos os temas. Para além disso, o mesmo documento aponta o raciocínio matemático como uma capacidade fundamental que envolve a formulação e o teste de conjecturas e que “envolve a construção de cadeias argumentativas que começam pela simples justificação de passos

e operações na resolução de uma tarefa e evoluem progressivamente para argumentações mais complexas” (p. 8).

Esta ideia é, também, corroborada pelas *Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar* (NCTM, 2007), que destacam ainda a importância desta capacidade, na medida em que “ser capaz de raciocinar é essencial para a compreensão da matemática” (p. 61).

Na aplicação desta sequência de tarefas, o trabalho a pares e as discussões em grupo-turma permitiram a partilha de descobertas e o entendimento de diversos processos de raciocínio, tal como refere Martins (2010).

Um desses momentos foi aquando da resolução do exercício de aplicação 1.4. da tarefa 8 (ver figura 25), onde são apresentadas diferentes estratégias de raciocínio para determinar a amplitude do ângulo PBC (ver figuras 26 e 27):

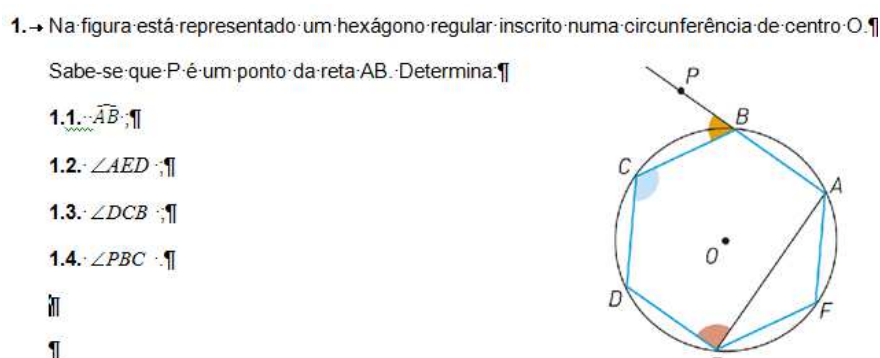


Figura 25 - Imagem do exercício de aplicação 1.4. da tarefa 8 (anexo 10)

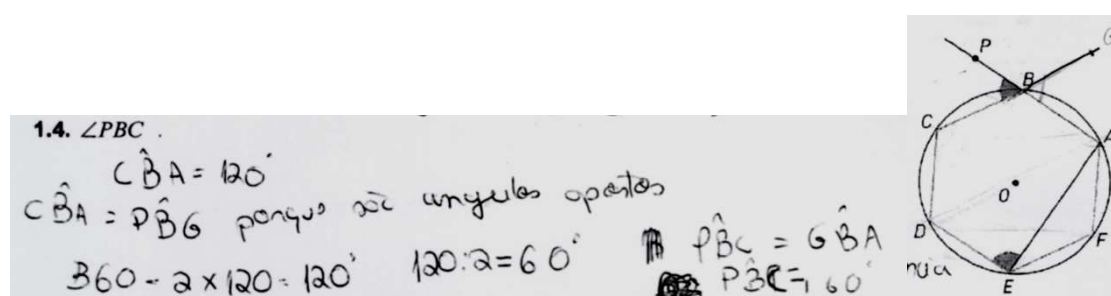


Figura 26 - Exemplo de uma resposta ao exercício de aplicação 1.4. da tarefa 8 (anexo 10)

$$\begin{array}{l}
 \text{1.4. } \angle PBC \\
 \widehat{CEA} = 240^\circ \\
 \angle CBA = \frac{240}{2} = 120^\circ \\
 \angle PBC = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ
 \end{array}$$

Figura 27 - Exemplo de uma resposta ao exercício de aplicação 1.4. da tarefa 8 (anexo 10)

Examinando as produções dos alunos no que respeita às justificações efetuadas neste exercício, é de salientar que todos tiveram sucesso. Assim, um pequeno grupo de alunos começou por assinalar um ângulo auxiliar, determinando a amplitude do ângulo pedido com base em conceitos apreendidos anteriormente, nomeadamente, a noção de ângulo verticalmente oposto e a noção de ângulo giro (ver figura 26). Os restantes alunos determinaram a amplitude do ângulo pedido usando a propriedade estudada, amplitude de um ângulo inscrito, e a noção de ângulo raso (ver figura 27).

No que respeita ao exercício 2 da mesma tarefa (ver figura 28), e uma vez que o grau de dificuldade, ao nível do raciocínio, é mais elevado do que o do exercício anterior, a análise das produções dos alunos revela que sete pares de alunos apresentaram todas as justificações corretas para o cálculo das amplitudes de ângulos e arcos pedidos, mostrando mesmo diferentes estratégias de raciocínio e clareza na apresentação da comunicação matemática (ver figuras 29 e 30). Os restantes alunos não apresentaram justificações completas (ver figura 31):

2. Considera a circunferência de centro O representada ao lado. Sabe-se que o arco EI mede 64° .

Determina \widehat{EOI} , \widehat{IOU} , \widehat{AOU} , \widehat{EAI} , \widehat{AEU} , \widehat{AU} , \widehat{UI} e \widehat{EA} .

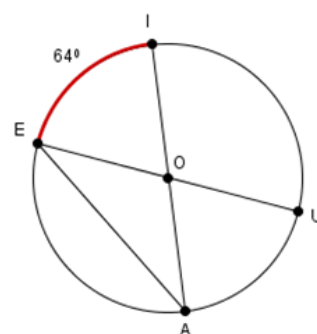


Figura 28 - Imagem do exercício de aplicação 2. da tarefa 8 (anexo 10)

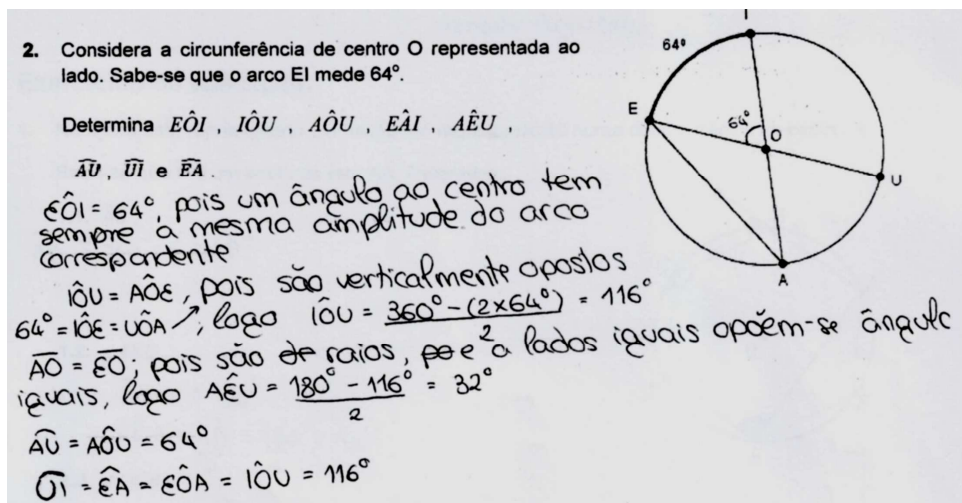


Figura 29 - Exemplo de uma resposta ao exercício de aplicação 2. da tarefa 8 (anexo 10)

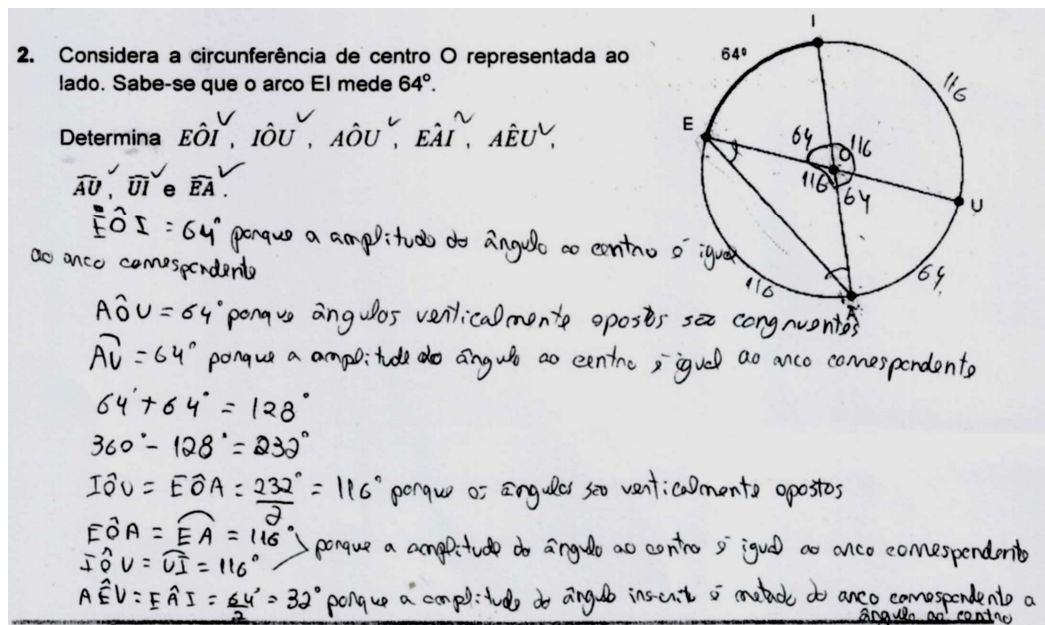


Figura 30 - Exemplo de uma resposta ao exercício de aplicação 2. da tarefa 8 (anexo 10)

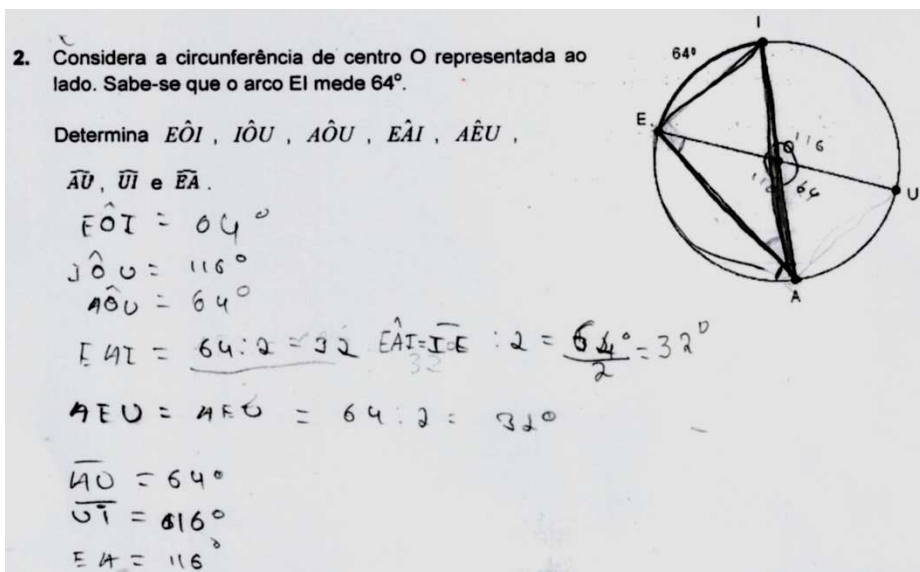


Figura 31 - Exemplo de uma resposta ao exercício de aplicação 2. da tarefa 8 (anexo 10)

Nos momentos em que se exigia a formulação de conjecturas, nem sempre os alunos conseguiram, autonomamente, estabelecer relações, visualizar regularidades e, consequentemente, estabelecer as conjecturas das relações estudadas. Enquanto professora, o meu papel foi, aqui, particularmente relevante na orientação do raciocínio, dando pistas aos alunos e encorajando-os à descoberta das conjecturas. O excerto do diário de bordo que seguidamente se expõe comprova-o inequivocamente (ver figuras 32 e 33):

Ponto 5:

No ponto 5 surgiram muitas dificuldades. Alguns pares de alunos olhavam-se e encolhiam os ombros e outros questionavam os colegas, mas sem resposta. Nessa altura, a Rute questionou-me:

Rute: Stora, não conseguimos responder ao ponto 5.

Neste momento, vários alunos referiram:

João: Nós também não conseguimos!

Carolina: Nós também não!

Daniela: Nós também!

Professora: Já registaram os valores na tabela?

Praticamente todos em coro: Já!

Professora: Observem os valores e tentem compará-los...

De repente a Beatriz interrompeu-me e referiu:

Beatriz: Stora, nós já tentámos comparar. Tentámos ver se era o dobro ou se era a diferença e não é nenhum destes casos.

Bruno: Stora, e nós tentámos ver se era a soma ou se era a diferença e também não é.

Não querendo dar-lhes a resposta e aproveitando a intervenção do Bruno, fiz a seguinte sugestão:

Professora: E se usassem a calculadora e a sugestão do Bruno?

Nesse momento, os alunos abriram a calculadora do computador e começaram a fazer cálculos. Posteriormente, vários foram os pares que me chamaram apenas para lhes validar as respostas.

DB12, Anexo 26

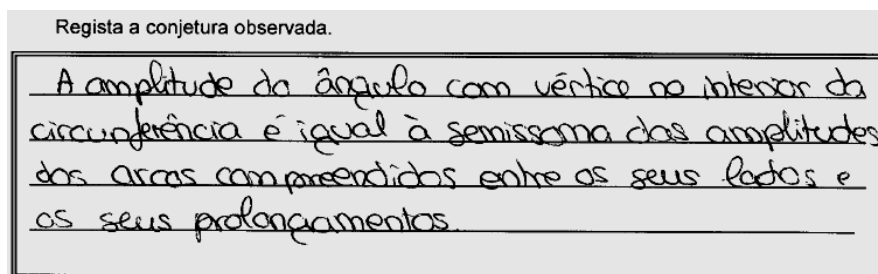


Figura 32 - Exemplo de uma resposta ao ponto 5. da tarefa 10 (anexo 12)

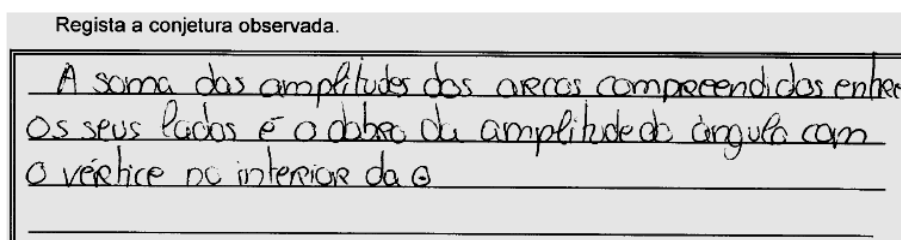


Figura 33 - Exemplo de uma resposta ao ponto 5. da tarefa 10 (anexo 12)

Durante a realização dos exercícios de aplicação, alguns pares de alunos manifestaram raciocínios incompletos, mostrando incompreensão face à necessidade de justificar as suas ideias/respostas usando propriedades dos ângulos ou conceitos geométricos. O exercício de aplicação 3, da tarefa 5 (anexo 7), constitui disso exemplo (ver figura 34):

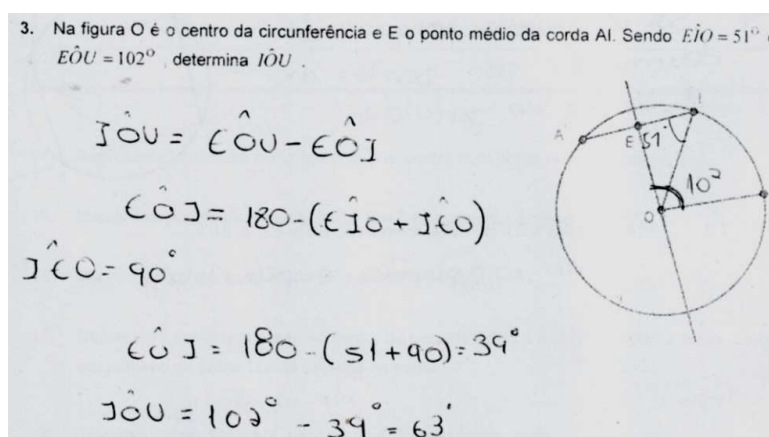


Figura 34 - Exemplo de uma resposta ao exercício de aplicação 3. da tarefa 5 (anexo 7)

A análise às produções dos alunos revela que apenas quatro pares de alunos justificaram todo o raciocínio (ver figura 35), apesar de terem sido alertados pela professora para a

necessidade de justificarem a amplitude do ângulo OEI, como demonstra o excerto do diário de bordo:

Daniela: Stora, está correto (referindo-se ao exercício 3)?

Professora: Em termos de raciocínio, está certo, no entanto, não justificaram este ângulo ($\widehat{OEI} = 90^\circ$). Por que é que ele tem de amplitude 90° ?

Daniela: É preciso justificar? Nós já sabemos pela conjectura registada no ponto 13 que a reta EO é perpendicular à corda AI.

Professora: Então devem justificar o ângulo escrevendo essa conjectura.

DB6, Anexo 20

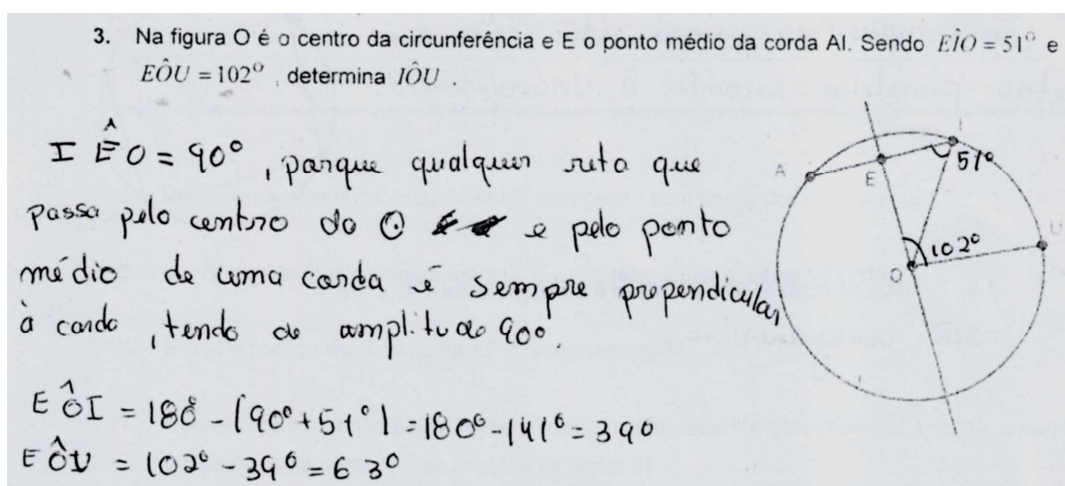


Figura 35 - Exemplo de uma resposta ao exercício de aplicação 3. da tarefa 5 (anexo 7)

Na minha perspetiva, nesta sequência de tarefas, é fundamental que o aluno discuta o seu raciocínio tanto com o seu par, como com o professor ou até mesmo com o grupo-turma, de forma a elaborar, defender e analisar argumentos matemáticos para explicar a base das suas conjecturas e dos seus resultados (Santos, 2011). Não menos importante, foi o meu papel como orientadora do raciocínio dos alunos, uma vez que, ao questioná-los, tentava orientá-los na procura de conjecturas e na construção de conclusões matematicamente fundamentadas.

7. PERSPETIVAS DOS ALUNOS SOBRE A UTILIZAÇÃO DE TAREFAS COM RECURSO AO GEOGEBRA

Nesta secção são apresentados os resultados do questionário, anexo 14, aplicado aos alunos no final da implementação das tarefas para leção do tópico “Circunferência”, com recurso ao *GeoGebra*. Este inquérito teve como principal

objetivo analisar a perspetiva dos alunos sobre a realização de tarefas com recurso ao referido software.

Seguidamente, procede-se à apresentação e análise dos dados referentes às respostas dadas pelos vinte e dois alunos inquiridos. No momento em que foi aplicado o referido inquérito, dois dos vinte e quatro alunos encontravam-se doentes. A maioria dos alunos, com uma percentagem de 54,5%, pertencia ao género feminino.

No gráfico 1 observa-se que 54,5% dos alunos concordaram totalmente e que os restantes 45,5% concordaram com a afirmação “Foi fácil adaptar-me ao ambiente de trabalho do *GeoGebra*”. É de salientar o facto de nenhum aluno ter discordado, parcial ou totalmente, ou ter hesitado entre uma e outra respostas.

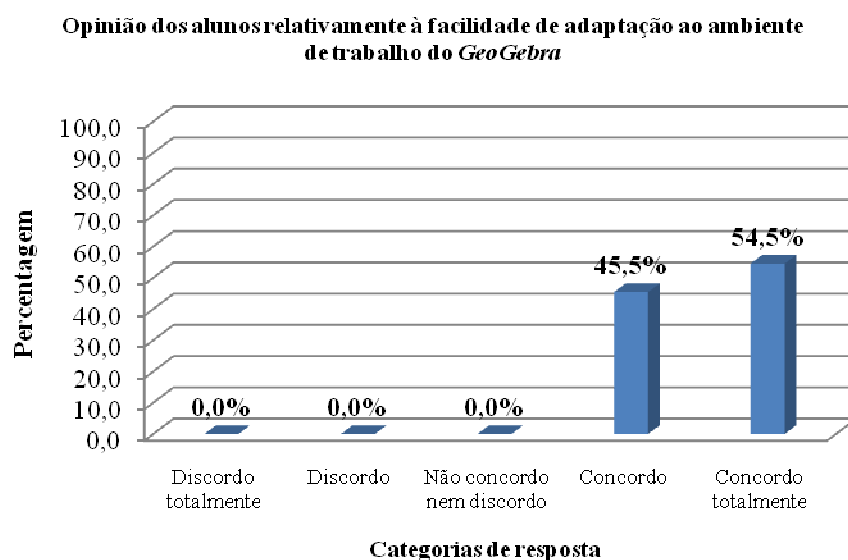


Gráfico 1 – Resposta dos alunos no item “Foi fácil adaptar-me ao ambiente de trabalho do *GeoGebra*”

Perante o gráfico 2 constata-se que 63,6% dos elementos inquiridos reconheceram a facilidade em efetuar construções com o *GeoGebra*, seguindo-se 31,8% que concordaram totalmente com esta afirmação. Apenas 4,5% manifestaram dúvida tendo respondido que nem concordavam nem discordavam.

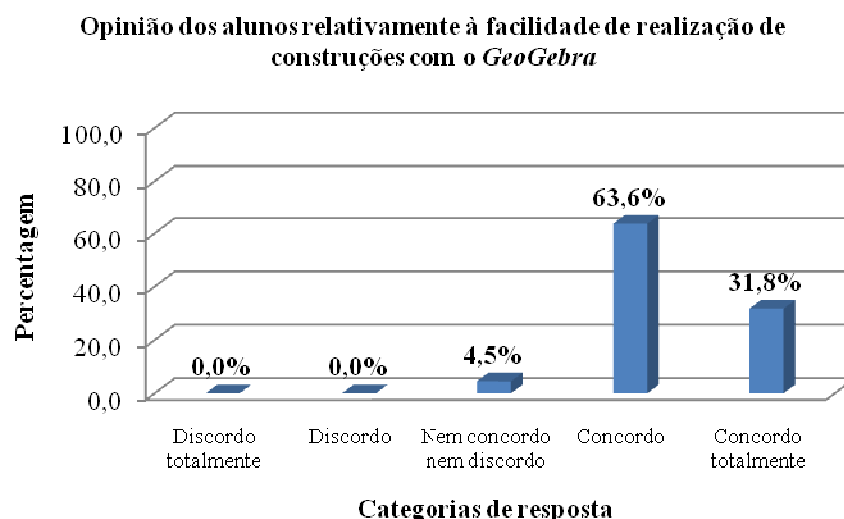


Gráfico 2 – Resposta dos alunos no item “Foi fácil efetuar as construções com o *GeoGebra*”

Quanto ao item referente ao facto de o estudo do tópico Circunferência, através do *GeoGebra*, ter sido mais motivador, constata-se, através do gráfico 3, que 63,6% dos alunos manifestaram total concordância, seguindo-se 18,2% que concordaram com o item e, em igual percentagem, alunos que manifestaram dúvida perante este facto, não concordando nem discordando do item em causa.

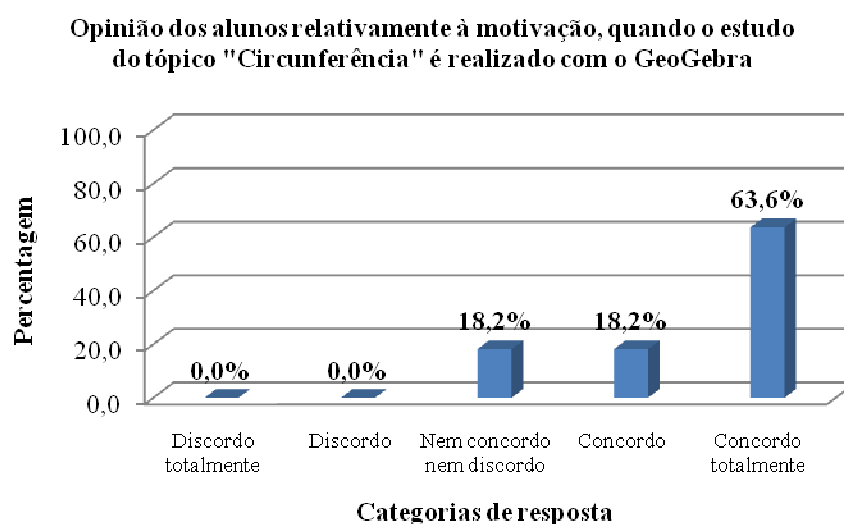


Gráfico 3 – Resposta dos alunos no item “O estudo do tópico Circunferência através do *GeoGebra* foi mais motivador”

O gráfico 4 evidencia que, perante o item “O estudo do tópico Circunferência através da realização de tarefas foi abordado de forma mais inovadora”, 40,9% dos alunos manifestaram total concordância e que igual percentagem de alunos concordaram com a

afirmação. Apenas 18,2% apresentaram dúvidas tendo respondido que não concordavam nem discordavam.

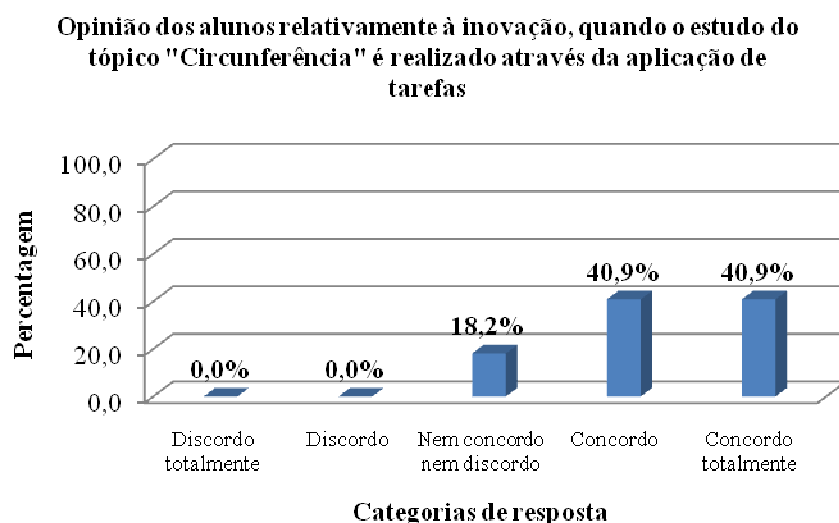


Gráfico 4 – Resposta dos alunos no item “O estudo do tópico Circunferência através da utilização de tarefas foi abordado de forma mais inovadora”

Confrontados com a afirmação de que as indicações contidas nas tarefas foram suficientes para o desenvolvimento do trabalho proposto, o gráfico 5 revela que 45,5% dos alunos concordaram com a afirmação, indicador seguido de 40,9%, que concordaram totalmente. Verificamos, ainda, que 9,1% revelaram indecisão no posicionamento e que 4,5% discordaram daquela afirmação.

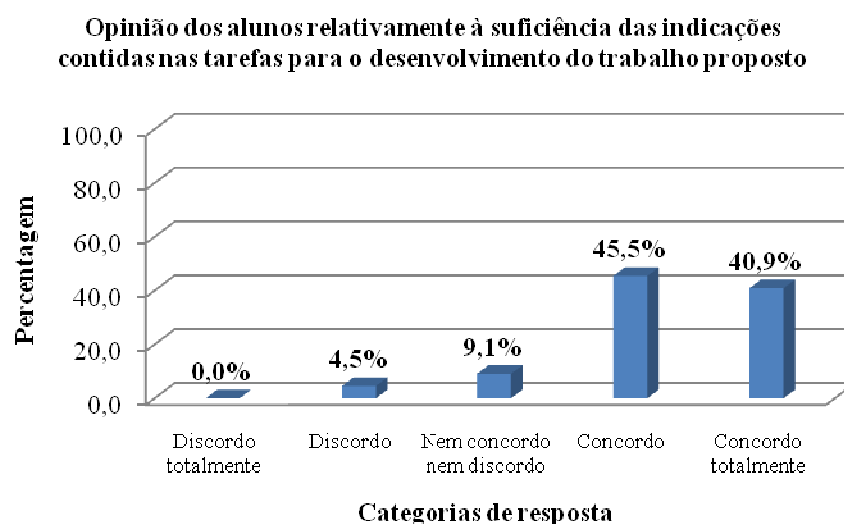


Gráfico 5 – Resposta dos alunos no item “As indicações contidas nas tarefas foram suficientes para o desenvolvimento do trabalho proposto”

O gráfico 6 evidencia que metade dos alunos (50,0%) concordaram com a afirmação de que foi necessário o apoio da professora em sala de aula para realizar as tarefas, enquanto 27,3% concordaram totalmente. Observa-se, também, que 18,2% não concordaram nem discordaram e que 4,5% discordaram totalmente da afirmação.

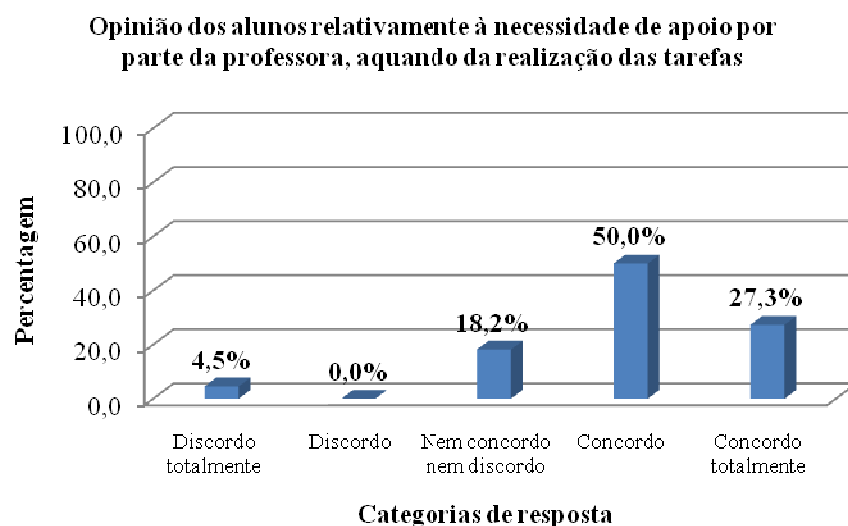


Gráfico 6 – Resposta dos alunos no item “Foi necessário o apoio da professora em sala de aula para conseguir realizar as tarefas”

O gráfico 7 revela que 40,9% dos alunos concordaram totalmente com o facto de o *GeoGebra* lhes ter permitido compreender mais facilmente as propriedades de ângulos, cordas e arcos definidos numa circunferência e que igual percentagem concordou com este item. Verificamos, ainda, que 13,6% revelaram indecisão e que os restantes 4,5% discordaram da afirmação.

Opinião dos alunos relativamente à facilidade de compreensão das propriedades de ângulos, cordas e arcos definidos numa circunferência, proporcionada pelo *GeoGebra*

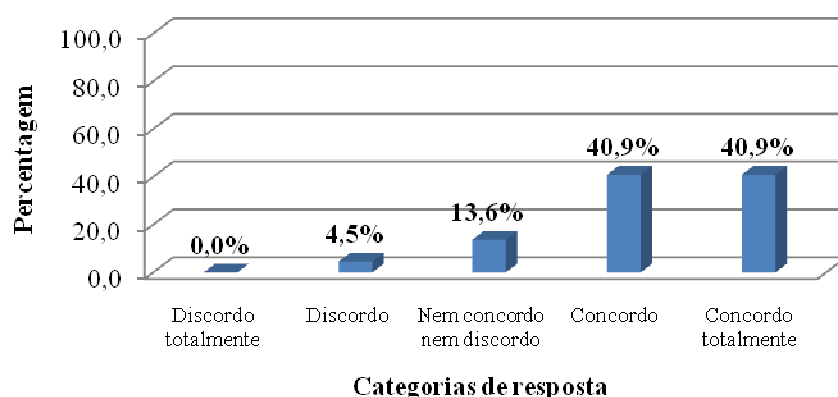


Gráfico 7 – Resposta dos alunos no item “O *GeoGebra* permitiu-me compreender mais facilmente as propriedades de ângulos, cordas e arcos definidos numa circunferência”

Observando o gráfico 8 verificamos que perante a afirmação “A manipulação de objetos no *GeoGebra* facilitou o estabelecimento de conjecturas”, 40,9% dos inquiridos concordaram, seguindo-se 27,3% que concordaram totalmente e igual percentagem de alunos que não concordaram nem discordaram. Apenas 4,5% discordaram desta afirmação.

Opinião dos alunos relativamente à facilidade de estabelecer conjecturas, proporcionada pela manipulação de objetos no *GeoGebra*

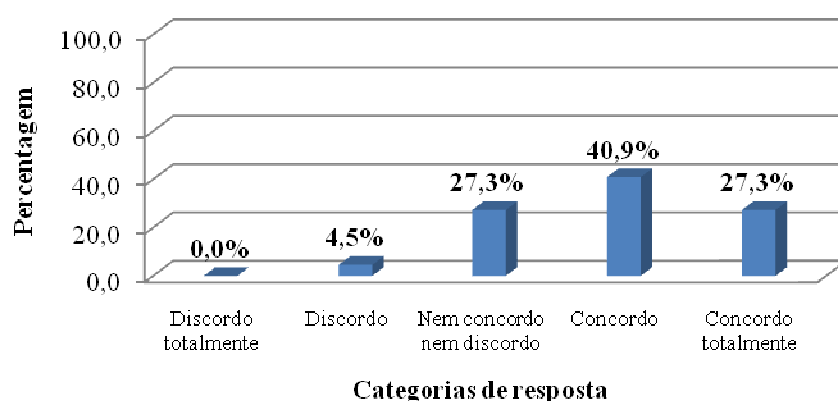


Gráfico 8 – Resposta dos alunos no item “A manipulação de objetos no *GeoGebra* facilitou o estabelecimento de conjecturas”

O gráfico 9 revela que 40,9% dos alunos concordaram totalmente com o item “A sequência de tarefas, com recurso ao *GeoGebra*, facilitou a minha aprendizagem da Geometria”, seguindo-se 36,4% que concordaram e de 18,2% que evidenciaram indecisão na resposta. Constatamos, ainda, que 4,5% discordaram da afirmação em causa.

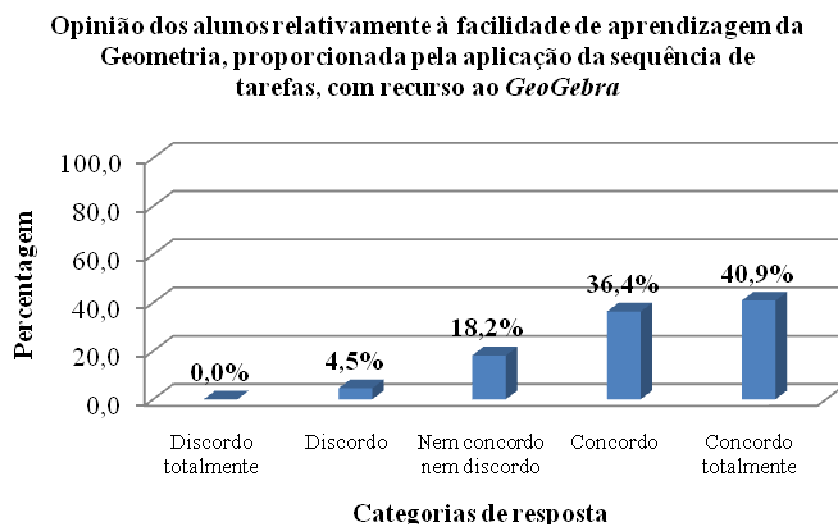


Gráfico 9 – Resposta dos alunos no item “A sequência de tarefas, com recurso ao *GeoGebra*, facilitou a minha aprendizagem da Geometria”

Todos os alunos responderam afirmativamente, que gostariam de voltar a repetir a experiência de aprendizagem com o *GeoGebra*, aplicada a outras temáticas.

Em síntese, pelos dados recolhidos, pode-se concluir que os alunos manifestaram uma opinião favorável à realização de tarefas com recurso ao *GeoGebra* na aprendizagem da Geometria (Matos, 2011). Também consideraram que a utilização do *GeoGebra* permitiu compreender mais facilmente as propriedades e que facilitou o estabelecimento de conjecturas (Santos, 2012). Referiram, ainda, que o *GeoGebra* facilitou as construções geométricas, que a adaptação ao seu ambiente de trabalho é simples (Martins, 2012; Santos, 2012) e que as aulas com o *GeoGebra* promovem uma aprendizagem mais motivadora (Martins, 2012). Para além disso, consideraram ainda que a resolução de tarefas na sala de aula, com recurso ao *GeoGebra*, é geradora de uma abordagem inovadora no ensino e aprendizagem do tópico “Circunferência” (Abrantes, Serrazina, & Oliveira, 1999).

CAPÍTULO V – CONCLUSÕES

Neste capítulo, começo por apresentar as principais conclusões do estudo realizado, atendendo aos resultados obtidos, procurando responder às questões de investigação. Seguidamente, faço referência às principais limitações que estiveram subjacentes a este trabalho e saliento algumas recomendações para trabalhos futuros.

1. CONCLUSÕES DO ESTUDO

A investigação realizada teve como objetivo construir, implementar e avaliar uma sequência de tarefas para leção do tópico “Circunferência”, com recurso ao *GeoGebra*. Nesse sentido, estabeleceram-se as seguintes questões de investigação:

- Quais as implicações, em diferentes dimensões da prática letiva, da utilização do *GeoGebra* no tópico curricular “Circunferência”?
- O *GeoGebra* potencia a descoberta das propriedades de ângulos, cordas e arcos definidos numa circunferência?
- Que visão têm os alunos da realização de tarefas com recurso ao *GeoGebra* em Geometria?

A recolha de dados foi efetuada durante as aulas da disciplina de Matemática e envolveu uma turma do 9.º ano de escolaridade, da Escola Secundária Dr. Joaquim de Carvalho da Figueira da Foz, constituída por 24 alunos, que trabalhou um total de nove blocos de noventa minutos e quatro blocos de quarenta e cinco minutos. O trabalho de campo foi organizado em grupos de dois alunos para a exploração das tarefas e, posteriormente, para apresentação das conclusões obtidas nas suas explorações, em grupo-turma. A preparação e a implementação deste estudo seguiram as orientações curriculares espelhadas no Programa de Matemática do Ensino Básico (ME-DGIDC, 2007) e as planificações em vigor na escola.

A investigação desenvolvida seguiu uma metodologia de natureza predominantemente qualitativa, de índole interpretativa, uma vez que o pressuposto da investigação é analisar os dados a partir de situações reais. Desempenhando, simultaneamente, os

papéis de professora da turma e de investigadora, fui, eu própria, o principal instrumento de recolha de dados.

Na tentativa de alcançar o objetivo deste estudo, construí uma sequência de dez tarefas (anexos 3 a 12), de forma a proporcionar aos alunos a resolução de problemas, a procura de generalizações e o estabelecimento de conjecturas, com recurso ao ambiente de geometria dinâmica *GeoGebra*.

A atividade dos alunos implicou: a construção, exploração e manipulação de objetivos e relações geométricas, com recurso ao *GeoGebra*; a discussão de ideias entre os elementos dos pares; o registo das suas conclusões, formulação de conjecturas e resolução de exercícios de aplicação no enunciado das tarefas propostas; a discussão e correção, em grupo-turma das tarefas realizadas.

Dada a natureza da metodologia adotada, as técnicas utilizadas na recolha de dados para análise foram o diário de bordo (anexo 15 a 27), as produções dos alunos e o inquérito (anexo 14).

No que diz respeito à primeira questão de investigação, pude concluir que a utilização do *GeoGebra* no tópico curricular *Circunferência* gerou diferentes tipos de interação na sala de aula: professor-aluno, professor-turma, aluno-turma e aluno-aluno.

A interação professor-aluno permitiu que os alunos partilhassem as suas ideias, esclarecessem as suas dúvidas e relembassem alguns conceitos. Nestas interações, assumi, predominantemente, uma postura de questionamento de forma a dar pistas, em vez de dar respostas e de corrigir erros.

Relativamente à interação professor-turma, esta possibilitou o esclarecimento de dúvidas relativamente a conceitos apreendidos anteriormente e à interpretação dos enunciados e também o desenvolvimento da capacidade de argumentação. Para além disso, permitiu apoiar os alunos relativamente a raciocínios incompletos, formulando questões orientadoras que lhes permitissem completar esses raciocínios.

A interação aluno-aluno revelou-se especialmente profícua na construção de figuras geométricas, na resolução dos exercícios, no esclarecimento de dúvidas e na partilha de ideias.

A interação aluno-turma ocorreu aquando da discussão das tarefas em grupo-turma e permitiu verificar que, quando os alunos se envolvem em discussões, conseguem encontrar a resposta correta e chegar a um consenso, tal como enfatiza Santos (2012).

De facto, a interação entre alunos contribuiu para desenvolver a capacidade de comunicação matemática e a compreensão dos conceitos. Na minha ótica, estas interações foram muito benéficas, uma vez que permitiram que ocorresse aprendizagem e partilha de conhecimentos, aspeto também sublinhado por Dias (2013).

Durante a implementação da sequência de tarefas, com recurso ao *GeoGebra*, as interações mais relevantes e frequentes foram a interação professor-aluno, por iniciativa deste último, e a interação gerada entre os próprios discentes.

Nessa medida, sou defensora de um processo interativo na sala de aula, onde todos os intervenientes tenham a possibilidade de expor as suas dúvidas (Santos, 2012), levantar as suas hipóteses e chegar às suas conclusões, tal como enfatiza Martins (1997, citado por Cadavez, 2013). Qualquer professor deve considerar a importância que as interações assumem no processo de aprendizagem da Matemática, uma vez que elas são os grandes veículos do processo de ensino e aprendizagem (Vaccari, 2007).

Durante a utilização do *GeoGebra* na leção do tópico *Circunferência*, a gestão do tempo revelou-se algo problemática. Na implementação das dez tarefas, pude constatar que algumas delas não foram concretizadas no tempo previsto. A tarefa inicial foi justamente um desses momentos, tendo a maioria dos alunos necessitado de mais tempo para a sua completa resolução. Consequentemente, tive necessidade de reformular a minha estratégia, permitindo que os alunos finalizassem a tarefa e que a sua correção/discussão em grande grupo tivesse lugar na aula seguinte. Mas outros fatores contribuíram, igualmente, para as dificuldades verificadas neste âmbito: a falta de domínio, por parte dos alunos, de algumas ferramentas do *GeoGebra*, assim como as dificuldades na formulação de conjeturas e de justificações. Aponto ainda um fator de ordem técnica, já que a inesperada avaria de um computador me obrigou à reorganização dos alunos na sala de aula.

A exploração de tarefas requer tempo, forçosamente. E, não raro, esta realidade acaba por se constituir num obstáculo, já que para que esta metodologia de ensino – onde está subjacente a construção do conhecimento – tenha sucesso, é essencial que alunos e professores tenham tempo para se familiarizar com este tipo de metodologias e de atividades, tal como refere Maneca (2010).

Um outro aspeto sensível no decurso desta investigação foi a autonomia dos alunos. Com reflexos ao nível da comunicação matemática e dos raciocínios efetuados – e no que concerne à utilização do software, ao estabelecimento de conjecturas e à resolução dos exercícios – a capacidade de os alunos avançarem por si mesmos levantou maiores problemas numa fase inicial mas que se foram, progressivamente, dissipando ao longo da implementação das tarefas. Esse desenvolvimento gradual da autonomia foi já apontado por Santos (2012).

No entanto, houve momentos em que essa evolução não se verificou. Um desses momentos foi aquando da utilização do software para determinar a amplitude de um arco, aspeto que esteve sempre presente ao longo de todo o processo. Na minha perspetiva, esta dificuldade era expectável pelo grau de dificuldade da sua construção e pela inexperiência dos alunos no manuseamento do software. Outra circunstância em que os alunos revelaram pouca autonomia - tendo, conseqüentemente, solicitado com maior frequência o meu apoio - foi a respeito da aplicação de conceitos apreendidos anteriormente e necessários à resolução das tarefas. Creio que estas dificuldades se ficaram a dever à falta de pré-requisitos e/ou ao facto de ser mais fácil e mais rápido, para os alunos, questionarem a professora na tentativa de obterem a resposta.

De facto, a aprendizagem efetuada de forma autónoma e com compreensão torna mais fácil a aprendizagem subsequente, indo ao encontro de um dos principais objetivos dos programas de matemática escolar referido pelo NCTM (2007): “um dos principais objetivos dos programas de matemática escolar consiste em fomentar a autonomia dos alunos e a aprendizagem com compreensão suporta este objetivo”(p.22).

Relativamente à segunda questão de investigação foi possível concluir que, ao longo da implementação das tarefas, a generalidade dos alunos mostrou ser capaz de explorar e formular conjecturas com alguma facilidade, quando utiliza o *GeoGebra*, realidade para que também aponta Santos (2012).

Para o fazer, os alunos recorreram às potencialidades do *GeoGebra*: construíam a figura que representava a situação proposta, exploravam e formulavam a conjectura pedida. Esses momentos revelaram-se bastante importantes, na medida em que, através do arrastamento dos elementos da figura e do seu movimento, os alunos formulavam as suas conjecturas através da observação. Com efeito, o facto de o *GeoGebra* permitir o arrastamento de pontos ou partes da figura e garantir as propriedades das construções geométricas, leva a que os alunos criem muitos exemplos, facilitando assim a descoberta de propriedades e o estabelecimento de conjecturas.

Não menos importante foi a construção e preenchimento de tabelas, procedimento que permitiu aos alunos organizar os dados e, através da sua análise, estabelecer relações, procurar regularidades e, conseqüentemente, estabelecer conjecturas acerca das relações estudadas.

De um modo geral, pode-se concluir que, aquando da aplicação desta sequência de tarefas com recurso ao *GeoGebra*, os alunos conseguiram construir, visualizar, explorar e investigar figuras geométricas com recurso ao software e estabelecer conjecturas, tal como sustentam Matos (2011), Fernandes (2011) e Santos (2012). Na minha opinião, e de acordo, também, com Santos (2012), a aplicação deste tipo de tarefas com recurso ao *GeoGebra* contribuiu para o cumprimento do quinto objetivo da disciplina de Matemática, estabelecido no PMEB, e já referido anteriormente (ME-DGIDC, 2007), nomeadamente no que concerne à capacidade de os alunos formularem e investigarem conjecturas matemáticas (p. 5).

O *Programa de Matemática do Ensino Básico* (ME-DGIDC, 2007) considera a comunicação matemática e o raciocínio matemático como importantes capacidades transversais a toda a aprendizagem da Matemática.

Assim, na preparação desta sequência de tarefas, a organização do trabalho em pares e em grupo-turma foi uma opção minha, uma vez que estas modalidades permitem a troca de impressões, o esclarecimento de dúvidas e a partilha de informações entre os alunos, tal como é referido por Guita (2013); por outro lado, ao ouvirem os argumentos dos colegas e ao refletirem sobre eles, os alunos aprendem a criticar matematicamente.

Uma outra opção que tomei foi a da criação dos momentos de discussão das tarefas em grupo-turma, logo após a realização destas, uma vez que proporcionavam, aos alunos, a partilha, a discussão e a sistematização e institucionalização de conhecimentos e ideias matemáticas, tal como é referido por Guita (2013).

Não obstante, também surgiram dificuldades na comunicação matemática ao longo da implementação das tarefas. Uma delas foi ao nível da escrita, quando os alunos acusaram dificuldades na expressão das suas ideias e reflexões, relativas à formulação de conjecturas. Quanto a mim, esta dificuldade sentida pelos alunos deveu-se ao facto de o conceito conjectura ter surgido pela primeira vez no seu percurso escolar. Outra dificuldade evidenciada pelos alunos relaciona-se com o uso da linguagem simbólica da matemática, aquando da comunicação escrita.

Entendo que, nesta sequência de tarefas, o trabalho de pares foi uma opção fundamental, na medida em que favoreceu a discussão e fomentou o desenvolvimento da argumentação e comunicação matemáticas. Não menos importantes, foram os momentos de discussão, após a realização da tarefa, uma vez que possibilitaram ao aluno refletir sobre a sua atividade, comparar as suas ideias com as dos outros, “ alterar, consolidar ou fortalecer os seus argumentos ou raciocínio” (NTCM, 2008, p. 64).

Outra mais-valia alcançada com o trabalho de pares e com as discussões em grupo-turma foi a partilha de descobertas e o entendimento de diversos processos de raciocínio, tal como refere Martins (2010).

Na minha perspetiva, nesta sequência de tarefas é fundamental que o aluno discuta o seu raciocínio tanto com o seu par, como com o professor ou até mesmo com o grupo-turma, de forma a elaborar, defender e analisar argumentos matemáticos para explicar a base das suas conjecturas e dos seus resultados (Santos, 2011). O meu papel enquanto orientadora do raciocínio dos alunos foi também significativo uma vez que tentei conduzi-los na procura de conjecturas e na construção de conclusões matematicamente fundamentadas, através das questões que lhes ia colocando.

No que respeita à terceira questão de investigação foi possível constatar que os alunos, em geral, manifestaram uma opinião favorável à realização de tarefas com recurso ao *GeoGebra* na aprendizagem da Geometria, como, de resto, já havia acontecido nos estudos de Matos (2011) e Santos (2012). Também consideraram que a utilização do *GeoGebra* permitiu compreender mais facilmente as propriedades e que facilitou o estabelecimento de conjecturas. Referiram, igualmente, que o *GeoGebra* facilitou as construções geométricas, que a adaptação ao seu ambiente de trabalho é simples (Martins, 2012; Santos, 2012) e que as aulas com o *GeoGebra* promovem uma aprendizagem mais motivadora (Martins, 2012). Consideraram ainda que a realização de tarefas na sala de aula, com recurso ao *GeoGebra*, promove uma abordagem inovadora no ensino e aprendizagem do tópico “Circunferência” (Abrantes, Serrazina, & Oliveira, 1999).

2. LIMITAÇÕES DO ESTUDO

A reflexão sobre a realização desta investigação, em função da análise e discussão dos resultados, permite fazer um balanço bastante positivo. No entanto, alguns fatores de ordem interna e externa ao estudo permitem identificar algumas limitações.

O facto de desempenhar, simultaneamente, o papel de professora e de investigadora dificultou o trabalho de observação no que respeita ao registo de notas de campo, uma vez que, enquanto professora, tinha de gerir a aula, intervindo e dando apoio às solicitações dos alunos.

Neste âmbito, outro fator que também pesou foi o tempo – associado aos imperativos do calendário escolar – uma vez que a implementação da sequência de tarefas ocorreu antes da realização do teste intermédio. Dessa forma, tive de fornecer, aos alunos, as construções das quatro circunferências necessárias à realização da última tarefa, uma vez que não havia tempo útil para as desenvolver.

3. RECOMENDAÇÕES

Atendendo aos resultados obtidos, seria interessante estender este estudo a outros conteúdos ou a outros anos de escolaridade, mediante a elaboração de outras tarefas, pois só assim poderíamos avaliar com maior profundidade a autonomia dos alunos no estabelecimento de conjeturas.

Não menos interessante seria levar a cabo um estudo que abordasse o tópico “Circunferência” com recurso a diferentes *softwares* e que permitisse estabelecer comparações entre eles, no sentido de perceber qual o mais vantajoso para determinadas situações ou abordagens.

Outro ângulo de estudo possível traduzir-se-ia em alargar esta experiência de aprendizagem a outros públicos, principalmente da escolaridade básica e, designadamente, a crianças com necessidades educativas especiais.

BIBLIOGRAFIA

Abrantes, P., Serrazina, L., & Oliveira, I. (1999). *A Matemática na Educação Básica*. Lisboa: Ministério da Educação.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação - uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

Borrvalho, A., & Neutel, S. (2011). O currículo nacional do ensino básico e a prática lectiva dos professores de Matemática. *Revista Ibero-Americana de Educação*, 56 , pp. 227-246.

Branco, M. (2011). *Tarefas de exploração e investigação no ensino e na aprendizagem da Geometria: uma experiência com alunos do 10.º ano de escolaridade*. Minho: Universidade do Minho.

Cadavez, C. (2013). *A utilização de software educativo na aprendizagem da Geometria por alunos do 3º Ciclo do Ensino Básico*. Bragança: Instituto Politécnico de Bragança, Escola Superior de Educação.

Candeias, N. (2005). *Aprendizagem em Ambientes de Geometria Dinâmica*. Lisboa: Universidade de Lisboa.

Cardoso, M., Nogueira, T., Sampaio, A., & Santos, G. (2013). Software gratuitos de Geometria Dinâmica. *Nuevas Ideas en Informática Educativa TISE* , pp. 515-518.

Conceição, A., & Almeida, M. (2012). *Matematicamente falando 9*. Lisboa: Areal Editores.

Costa, B., & Rodrigues, E. (2012). *Novo Espaço*. Lisboa: Porto Editora.

Coutinho, C. (2014). *Metodologia de Investigação em Ciências Sociais e Humanas: Teoria e Prática*. Coimbra: Edições Almedina, S. A.

Dias, E. (2013). *A Geometria Sona e as isometrias: uma experiência no ensino básico*. Aveiro: Universidade de Aveiro.

Dias, P. (2013). *Práticas letivas promotoras da regulação da aprendizagem matemática pelos alunos*. Universidade de Lisboa: Lisboa.

Faria, L., Almeida, P. R., Antão, C., & Ferreira, M. (2012). *Matemática Dinâmica 9*. Lisboa: Porto Editora.

Fernandes, A. (2011). *As TIC no desenvolvimento da capacidade de argumentação dos alunos do 9º ano na aprendizagem de Geometria*. Minho: Universidade do Minho.

Fernandes, A., & Viseu, F. (2011). Os ambientes de geometria dinâmica no desenvolvimento da capacidade de argumentação de alunos de 9º ano na aprendizagem da geometria. *Actas ProfMat 2011*.

Gafanhoto, A., & Canavarro, A. (2011). Representações múltiplas de funções em ambiente com Geogebra: um estudo sobre o seu uso por alunos de 9º ano. EIEM, *Actas do Encontro de Investigação em educação Matemática - Ensino e Aprendizagem da Álgebra*, pp. 125-148.

Guita, C. (2013). *Implementação do Novo Programa de Matemática: um estudo numa turma do 6º ano do ensino básico*. Lisboa: Universidade Aberta.

Hohenwarter, M., & Jones, K. (2007). Ways of linking geometry and algebra: the case of Geogebra. In D. Kuchemaaan (Ed.) *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 27(3). <http://www.geogebra.org/publications/2007-BSRLM-Hohenwarter-Jones-Northampton.pdf>. Consultado a 22 de novembro de 2013.

Hohenwarter, M., & Fuchs, K. (2004). *Combination of dynamic geometry, algebra and calculus in the software GeoGebra*. http://www.geogebra.org/publications/pecs_2004.pdf. Consultado a 19 de novembro de 2013.

Hohenwarter, M., & Hohenwarter, J. (2009). *Ajuda Geogebra: Manual Oficial da Versão 3.2*. www.geogebra.org/help/docuPT.pdf. Consultado a 15 de novembro de 2013.

Lessard-Hébert, M., Goyette, G., & Boutin, G. (2008). *Investigação qualitativa: fundamentos e práticas*. Lisboa: Instituto Piaget.

Lisbôa, E., Teixeira, G., Jesus, A., Varela, A., & Coutinho, C. (2009). O computador e a internet como instrumentos pedagógicos: estudo exploratório com professores de duas

escolas do norte de Portugal. *Actas do X Congresso Internacional Galego-Português de Psicopedagogia, Universidade do Minho*, pp. 5842-5857.

Ludke, M., & André, M. (1986). *Pesquisa em educação: abordagens qualitativas*. São Paulo: Editora Pedagógica e Universitária.

Magro, F. C., Fidalgo, F., & Louçano, P. (2012). *PI 9*. Lisboa: ASA.

Maneca, C. (2010). *Relatório de Estágio*. Lisboa: Universidade Nova de Lisboa.

Martins, C. (2012). *Sistemas de Equações - uma abordagem criativa*. Aveiro: Universidade de Aveiro.

Martins, I. (2010). *O raciocínio matemático em actividades de investigação numa turma do 5º ano do ensino básico*. Faro: Universidade do Algarve.

Matos, J., & Serrazina, M. (1996). *Didáctica da Matemática*. Lisboa: Universidade Aberta.

Matos, L. (2011). *Abordagem das rotações centrada nos padrões - um estudo de caso com alunos do 9º ano*. Aveiro: Universidade de Aveiro.

ME (1991). *Programa de Matemática*. Lisboa: Ministério da Educação, Direção do Ensino Básico e Secundário.

ME-DEB (2001). *Currículo Nacional do Ensino Básico: Competências Essenciais*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento de Educação Básica.

ME-DGIDC (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação, Direção Geral de Inovação Curricular.

NCTM (1991). *Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar*. Lisboa: Associação de professores de Matemática e Instituto de Inovação Educacional.

NCTM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Neves, M. A., Silva, A. P., Raposo, M. J., & Silva, J. N. (2012). *Matemática 9*. Lisboa: Porto Editora.

Nogueira, R. (2013). *A jogar também se aprende...* Hanga do Heroísmo: Universidade dos Açores.

Oliveira, M. (2012). *Utilização do Geogebra no tópico Reflexão, Rotação e Translação - um estudo no 6º ano de escolaridade*. Leiria: Instituto Politécnico de Leiria.

Pereira, M. (2012). *Contributos de um ambiente de geometria dinâmica (geogebra) e do geoplano na compreensão das propriedades e relações entre quadriláteros - um estudo com alunos do 4º ano*. Lisboa: Instituto Politécnico de Lisboa, Escola Superior de Educação.

Pereira, P. P., & Pimenta, P. (2012). *Xis - 9º ano*. Lisboa: Texto.

Ponte, J. (1995). Novas Tecnologias na aula de Matemática. *Educação e Matemática*, 34, pp. 2-7.

Ponte, J. (2009). O novo programa de matemática como oportunidade de mudança para os professores do ensino básico. *INTERACÇÕES*, 12, pp. 96-114.

Ponte, J. P. (2002). Investigar a nossa própria prática. In *GTI (Org), Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 5-28). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2004). Pesquisar para compreender a transformar a nossa própria prática. *Educar em Revista*, 24, pp. 37-66.

Ponte, J., & Canavarro, A. (1997). *Matemática e as novas tecnologias*. Lisboa: Universidade Aberta.

Ponte, J., Matos, J. M., & Abrantes, P. (1998). *Investigação em educação matemática: implicações curriculares*. Lisboa: IIE.

Ponte, J., Serrazina, L., Guimarães, H., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., et al. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação, Direção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular.

Professores das turmas piloto do 9º ano de escolaridade (2011). *Circunferência - Proposta de sequência de tarefas para o 9ºano - 3º ciclo*. Novo Programa de Matemática do Ensino Básico. Lisboa: Ministério da Educação, DGIDC. http://area.dgidc.min-edu.pt/materiais_npmeb/062-cadeia_Circunfer%C3%Aancia.pdf . Consultado a 28 de novembro de 2013.

Ribeiro, A. (2005). *O Cabri-Géomètre e a construção de uma nova cultura matemática - um estudo no âmbito da formação inicial de professores do 1º CEB*. Aveiro: Universidade de Aveiro.

Rosa, R. (2008). *Aprendizagem de conceitos geométricos em ambiente de geometria dinâmica - uma análise da produção de alunos de 7ª e 8ª séries do ensino fundamental*. Porto Alegre: Faculdade de Física.

Salvador, C. (2013). *Geometria: um estudo sobre ângulos e polígonos, no 9º ano de escolaridade, com recurso ao Geogebra*. Lisboa: Universidade Nova de Lisboa, Faculdade de Ciências e Tecnologia.

Santos, M. (2012). *O Geogebra no estudo de triângulos e quadriláteros: uma experiência no 7º ano de escolaridade*. Leiria: Instituto Politécnico de Leiria.

Silva, J. C. (2003). A Matemática, a Tecnologia e a Escola. *Educação Matemática*. 71, pp. 1-2.

Silva, R., & Cabrita, I. (2005). Avaliação do Cabri-Géomètre - um estudo no 9º ano de escolaridade. *Actas do Challenges, 5: IV Conferência Internacional sobre Tecnologias da Informação e Comunicação na Educação*, pp. 141-153.

Silveira, A., & Cabrita, I. (2013). O Geogebra como ferramenta de apoio à aprendizagem significativa das Transformações Geométricas Isométricas. *Tecnologias da Informação em Educação, CIDTFF - Indagatio Didactica*, vol. 5 (1).

Thudichum, B., Passos, I. C., & Correia, O. F. (2012). *Matemática em ação 9*. Lisboa: Raiz Editora.

Vaccari, B. (2007). *As interações na sala de aula de matemática*. Universidade Luterana do Brasil: Canoas.

Vieira, M. (2011). *O estudo de Pavimentações Regulares e Semi-Regulares com Ambientes de Geometria Dinâmica*. Lisboa: Universidade Nova de Lisboa.

ANEXOS

ANEXO 1 – PEDIDO DE AUTORIZAÇÃO AO CONSELHO PEDAGÓGICO PARA REALIZAÇÃO DO ESTUDO

Exmo. Senhor:

Diretor da Escola Secundária Dr. Joaquim de Carvalho, Figueira da Foz

Ana Luísa Paulo Domingues, docente de carreira do Departamento de Matemática e Ciências Exatas e da Informação, Grupo 500, NIF: 203349628, aluna do Mestrado em Ciências da Educação, da Escola Superior de Educação e Ciências Sociais do Instituto Politécnico de Leiria, pretende desenvolver um projeto de investigação, envolvendo os alunos da turma D, do nono ano, desta Escola, subordinado ao tema *O GeoGebra na aprendizagem do tema circunferência – um estudo com alunos do 9.º ano de escolaridade*.

De um modo muito sucinto, este projeto tem por objetivo construir, implementar e avaliar uma sequência de tarefas para lecionação do tópico “Circunferência”, com recurso ao *GeoGebra*.

Pelo exposto, vem solicitar ao Conselho Pedagógico, a que V.^a Ex.^a preside, autorização para proceder à recolha de dados, prevista para os meses de janeiro e fevereiro do corrente ano.

Figueira da Foz, 3 de dezembro de 2013

A Docente

ANEXO 2 – PEDIDO DE AUTORIZAÇÃO AOS ENCARREGADOS DE EDUCAÇÃO PARA UTILIZAR AS PRODUÇÕES DOS ALUNOS NO RELATÓRIO

Exmo(a). Sr(a).

Encarregado(a) de Educação

Como é do conhecimento do seu educando, sou aluna do Mestrado em Ciências da Educação - Especialização em Utilização Pedagógica das TIC e pretendo desenvolver o trabalho de investigação da minha tese com os alunos da turma D do 9.º ano. A recolha de dados foi autorizada pelo Conselho Pedagógico desta Escola, terá início a 21 de janeiro e consiste na implementação de uma sequência de tarefas para lecionar a unidade "Circunferência", com recurso ao software de Geometria Dinâmica *GeoGebra*.

Um dos objetivos deste trabalho é construir, implementar e avaliar uma sequência de tarefas para leção do tópico "Circunferência", com recurso ao GeoGebra. Assim, venho solicitar autorização para utilizar algumas partes do trabalho realizado pelo seu educando, na sequência de tarefas anteriormente mencionada, no meu trabalho final (tese de Mestrado), garantindo desde já que será mantido o anonimato de todos os alunos.

Grata pela atenção dispensada

(Professora de Matemática)

Eu, _____, Encarregado de Educação do aluno _____, n.º _____, da turma D, do 9.º ano, declaro que **autorizo/não autorizo** (riscar o que não interessa) a professora de Matemática a utilizar, no âmbito da sua tese de Mestrado, as produções do meu educando, realizadas na unidade "Circunferência".

Figueira da Foz, ____/____/2014

O Encarregado de Educação

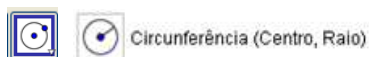
ANEXO 3 – TAREFA 1: ELEMENTOS DA CIRCUNFERÊNCIA

Algumas instruções para a utilização do Geogebra:

- Para esconder os eixos coordenados, basta clicar com o botão direito do rato na folha gráfica e desativar **Eixos**.
- No menu **Opções**, coloca a opção **Rotular** em **Apenas pontos novos**.
- Em cada uma da barra de ferramentas existe uma pequena seta que permite visualizar todas as opções dessa categoria de ferramentas.
- Sempre que seleccionares uma ferramenta aparece à direita da barra de ferramentas a forma de a aplicar.
- Para apagar um objeto “indesejado”, basta clicar sobre ele com o botão direito do rato e seleccionar **Apagar**.
- No canto superior direito encontram-se duas setas que permitem desfazer os passos realizados anteriormente.
- Após a realização de cada uma das tarefas grava-a com um nome alusivo à mesma (**Exemplo:** T2_2Ana_17Raquel).
- Lê atentamente cada instrução até ao fim.

Identificar elementos da circunferência

1. Representa uma circunferência com centro num ponto C e raio qualquer.
 - Para construíres a circunferência, c, usa a ferramenta **Circunferência (Centro, Raio)**, clicando uma vez na *Janela Gráfica* de modo a criar o ponto, centro da circunferência, e atribui um raio de 3 cm.



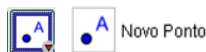
- Clica no botão direito do rato sobre o ponto A (centro da circunferência) e seleciona a opção **Renomear**. Renomeia o ponto A para C.



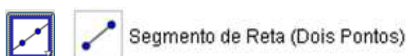
Descreve essa circunferência como um lugar geométrico:

2. Marca um ponto na circunferência e representa-o por P. Traça o segmento de reta [CP].

- Para marcar o ponto P, seleciona a ferramenta **Novo Ponto** e marca sobre a circunferência o ponto.



- Para traçar o segmento de reta [CP], usa a ferramenta **Segmento de Reta (Dois Pontos)**.



Que nome dás ao segmento de reta [CP]? _____

3. Desenha dois segmentos de reta que unam dois pontos da circunferência:

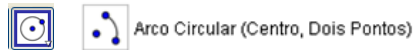
- um segmento de reta [AB] que contenha o centro C;
- um segmento de reta [EF] que não contenha o centro da C.

Que nome dás ao segmento de reta [AB]? _____

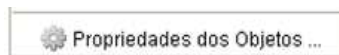
Que nome dás ao segmento de reta [EF]? _____

4. Assinala com uma cor uma semicircunferência.

- Para construir o arco de circunferência, d , usa a ferramenta **Arco Circular** (**Centro, Dois Pontos**), clicando em primeiro no centro da circunferência e de seguida nos pontos A e B no sentido contrário dos ponteiros do relógio.

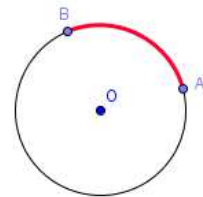


- Clica no botão direito do rato sobre o arco AB e selecciona a opção **Propriedades dos objetos**. Escolhe uma cor para o arco AB.



Arcos

Chama-se **arco de circunferência** a uma parte da circunferência compreendida entre dois pontos da circunferência. Na figura está realçado o arco AB (escreve-se \widehat{AB}).



5. Com outras cores assinala:

- Um **arco menor** que a semicircunferência que assinalaste;

O **arco** de circunferência que é menor do que uma semicircunferência, designa-se por **arco menor**.

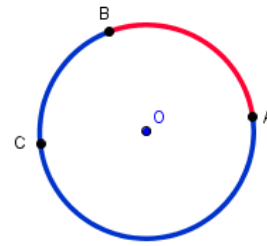
- Um **arco maior** que essa semicircunferência.

O **arco** de circunferência que é maior do que uma semicircunferência, designa-se por **arco maior**.

Numa circunferência, ao escrevermos apenas “arco AB” não sabemos se nos estamos a referir ao arco menor ou ao arco maior.

Assim, convencionou-se que, ao escrevermos “arco AB”, referimo-nos ao **arco menor**.

Para nos referirmos ao arco maior de extremos B e A, indicamos mais um dos seus pontos. O arco BCA é o **arco maior**.

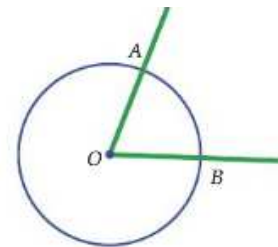


O arco AB é o arco _____.

O arco BCA é o arco _____.

Ângulo ao centro:

Numa circunferência, chama-se **ângulo ao centro** a um ângulo cujo vértice é o centro da circunferência.



6. Representa uma outra circunferência com centro num ponto O e raio qualquer.
7. Marca dois pontos na circunferência, A e B.
8. Traça as semirretas \vec{OA} e \vec{OB} .
 - Para traçar a semirreta \vec{OA} , usa a ferramenta **Semirreta (dois pontos)**, clicando no ponto de origem da semirreta, ponto O, e de seguida no outro ponto da mesma, ponto A.



9. Traça a corda AB, o arco AB e o ângulo AOB.

- Para desenhar o ângulo ao centro AOB, usa a ferramenta **Ângulo**, clicando sobre os três pontos seguindo no sentido contrário dos ponteiros do relógio e clicando em segundo lugar obrigatoriamente no vértice do ângulo.



Na figura, o ângulo AOB é um **ângulo** _____

Qual o arco compreendido entre os seus lados? _____

Qual a corda compreendida entre os seus lados? _____

Completa:

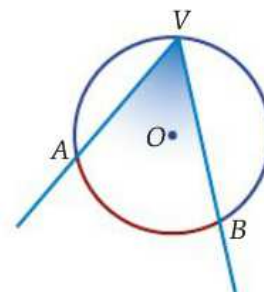
A cada **ângulo ao centro** corresponde um _____ de circunferência e uma _____ com extremos nos pontos de interseção dos lados do ângulo com a circunferência.

De um modo geral:

- ❖ Numa circunferência, **a cada ângulo ao centro corresponde um arco e, reciprocamente, a cada arco corresponde** _____.
- ❖ Numa circunferência, **a cada ângulo ao centro corresponde uma corda e, reciprocamente, a cada corda corresponde** _____.
- ❖ Numa circunferência, **a cada arco corresponde uma corda e, reciprocamente, a cada corda corresponde** _____.

Ângulo inscrito:

Numa circunferência, chama-se **ângulo inscrito** a um ângulo que tem o vértice sobre a circunferência e cujos lados contêm cordas da circunferência.



10. Representa uma outra circunferência com centro num ponto O e raio qualquer.

11. Marca três pontos na circunferência, A, B e V.

12. Traça as semirretas \vec{VA} e \vec{VB} .

13. Traça a corda AB, o arco AB e o ângulo AVB.

Na figura, o ângulo AVB é um **ângulo** _____

Qual o arco compreendido entre os seus lados? _____

Qual a corda compreendida entre os seus lados? _____

Posição relativa de uma reta e de uma circunferência:

14. Representa uma circunferência com centro num ponto O e raio qualquer.

15. Marca um ponto P exterior à circunferência.

16. Pelo ponto P faz passar uma reta:

✓ que não intersesta a circunferência.

Que nome dás à reta? _____

✓ que intersesta a circunferência em dois pontos.

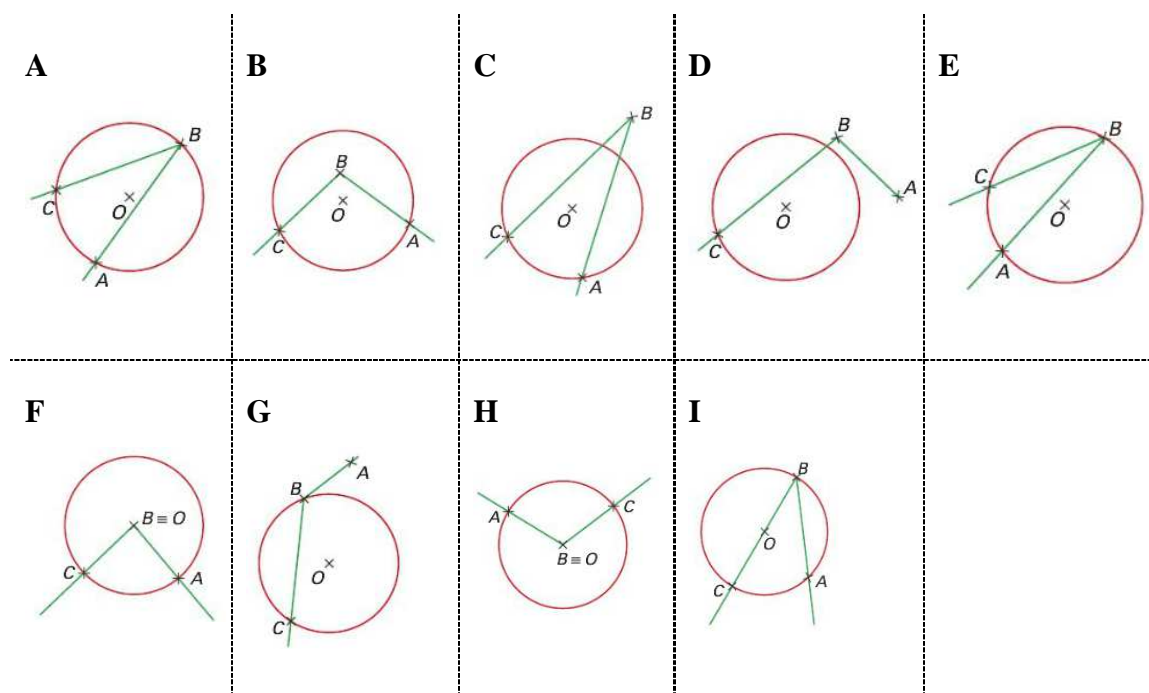
Que nome dás à reta? _____

✓ que intersesta a circunferência apenas num ponto.

Que nome dás à reta? _____

Exercícios de aplicação:

1. Observa a figura.



1.1. Identifica as circunferências que têm desenhado ângulos ao centro.

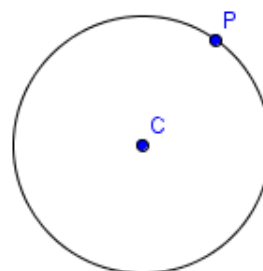
1.2. Identifica as circunferências que têm desenhado ângulos inscritos.

2. Lugares geométricos relacionados com a circunferência usando o *Geogebra*

(manual adotado – 2ª parte: pág. 53 – exercício 98)

Desenha uma circunferência, de centro C, passando pelo ponto P.

Contendo P, desenha:



- 2.1.** uma corda PA;
- 2.2.** um diâmetro PB;
- 2.3.** um arco menor AP;
- 2.4.** uma reta PD secante à circunferência;
- 2.5.** uma reta PE tangente à circunferência;
- 2.6.** um ângulo ao centro ACP;
- 2.7.** Um ângulo inscrito DPB;
- 2.8.** Um ângulo com o vértice no exterior da circunferência.

(Guarda o ficheiro com o nome da tarefa e o teu nome)

ANEXO 4 – TAREFA 2: CORDAS E ARCOS ENTRE RETAS PARALELAS

Relacionar os comprimentos das cordas e dos arcos entre retas paralelas

1. Representa uma circunferência com centro num ponto O e raio qualquer.
2. Traça uma reta AB, secante à circunferência.
3. Marca o ponto médio da corda AB, através da ferramenta *Ponto Médio ou Centro*, e designa-o por M.
4. Traça a reta perpendicular a AB que passa no ponto M, através da ferramenta *Reta Perpendicular*, clicando em primeiro na reta AB e de seguida no ponto M.
5. A reta MO é um eixo de simetria da circunferência? Justifica.

6. Traça uma reta CD, secante à circunferência e paralela à reta AB, através da ferramenta *Reta Paralela*, clicando sobre a reta AB e de seguida num ponto qualquer da circunferência.
7. Traça as cordas AC e BD (escolhe uma cor para as cordas).
8. Traça os arcos AC e DB (escolhe uma cor para os arcos).
9. Em relação à reta MO, qual o simétrico do ponto A? _____
10. Em relação à reta MO, qual o simétrico do ponto C? _____
11. Qual é a corda simétrica à corda AC relativamente a MO? _____
12. Qual é o arco simétrico ao arco DB relativamente a MO? _____

13. Os arcos AC e DB são congruentes? Justifica.

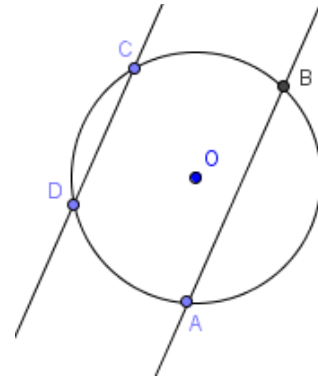
14. Que relação existe entre os arcos compreendidos entre retas paralelas secantes a uma circunferência? Formula a conjectura observada.

15. As cordas AC e BD são congruentes? Justifica.

16. Que relação existe entre as cordas compreendidos entre retas paralelas secantes a uma circunferência? Formula a conjectura observada.

Exercícios de aplicação:

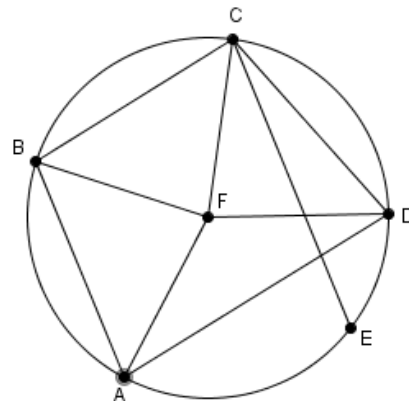
1. Usando o programa Geogebra, constrói uma circunferência com duas retas paralelas AB e CD como sugere a figura ao lado:



- 1.1. Assinala os arcos BC e AD e justifica que são congruentes.

- 1.2. Traça as cordas BC e AD e justifica que são congruentes.

2. Na figura ao lado, a corda BC é paralela à corda AD e a corda AB é paralela à corda EC. Justifica cada uma das seguintes afirmações:



- 2.1. Os arcos BC e AE têm a mesma amplitude.

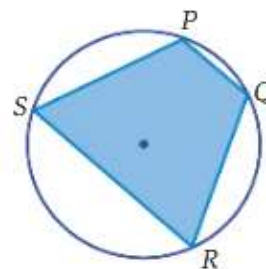
- 2.2. As cordas AB e CD são congruentes.

2.3. As cordas BC e AE têm o mesmo comprimento.

2.4. Os arcos AB e CD são congruentes.

3. Manual (2ª parte): pág. 30 – exercício 51

A figura representa um trapézio inscrito numa circunferência.



Justifica que:

a) O trapézio é isósceles.

b) O arco PS é congruente com o arco QR.

ANEXO 5 – TAREFA 3: CONGRUÊNCIA DE CORDAS, ARCOS E ÂNGULOS AO CENTRO CORRESPONDENTES

Relacionar cordas, arcos e ângulos ao centro correspondentes

1. Representa uma circunferência com centro num ponto O e raio qualquer.
2. Traça um eixo de simetria na circunferência.
3. Numa das semicircunferências, marca dois pontos, A e B, e representa a corda AB, o arco AB e o ângulo AOB.
4. Marca o ponto D simétrico do ponto A relativamente ao eixo de simetria, usando a ferramenta **Reflexão Axial (Objeto, Eixo)**, clicando no ponto A e no eixo de simetria.
5. Marca o ponto E simétrico do ponto B relativamente ao eixo de simetria.
6. Traça a corda DE, o arco DE e o ângulo DOE.
7. Mede as amplitudes dos ângulos AOB e DOE.

O que concluis?

8. Determina o comprimento das cordas AB e DE, usando a ferramenta **Distância ou Comprimento**, clicando nos dois pontos.

O que concluis?

9. Determina as amplitudes dos arcos AB e DE.

Sugestão para determina a amplitude de um arco:

- Na caixa de **Entrada**, introduz a expressão, por exemplo:
 $m = g * 180 / (\pi * \text{Raio}[c])$

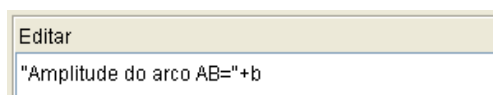
(na janela algébrica, por exemplo, g – representa o arco AB e c representa a circunferência)



Para acederes ao símbolo π seleciona o menu **Vista** e escolhe a opção **Teclado Virtual**.



- Para indicar a amplitude do arco em graus, introduz na caixa de **Entrada**, *por exemplo*, a expressão: **$n = m^\circ$** .
- Indica na zona gráfica a amplitude do arco, introduzindo na ferramenta **Inserir Texto** o seguinte texto: **“Amplitude do arco AB=”+n**



O que concluis?

-
- 10.** Move o ponto A ou B e observa as alterações na construção.

O que acontece aos comprimentos das cordas, às amplitudes dos arcos e às amplitudes dos ângulos?

11. Quando os ângulos ao centro AOB e DOE são congruentes, o que podes dizer acerca:

- dos comprimentos das cordas AB e DE?

- das amplitudes dos arcos AB e DE?

12. Formula a conjectura que observaste:

<hr/> <hr/> <hr/>

13. Quando os comprimentos das cordas AB e DE são congruentes, o que podes dizer acerca:

- das amplitudes dos arcos AB e DE?

- das amplitudes dos ângulos ao centro AOB e DOE?

14. Formula a conjectura que observaste:

<hr/> <hr/> <hr/>

15. Quando as amplitudes dos arcos AB e DE são congruentes, o que podes dizer acerca:

- dos comprimentos das cordas AB e DE?

- das amplitudes dos ângulos AOB e DOE?

16. Formula a conjectura que observaste:

<hr/> <hr/> <hr/>

ANEXO 6 – TAREFA 4: RETA TANGENTE A UMA CIRCUNFERÊNCIA

Relacionar uma reta tangente a uma circunferência e o raio que contém o ponto de tangência

1. Representa uma circunferência com centro num ponto O e raio qualquer.
2. Marca um ponto na circunferência e designa-o por A.
3. Traça o raio OA.
4. Traça a reta perpendicular ao raio OA que passa no ponto A.
5. Marca sobre a reta perpendicular ao raio OA um ponto B.
6. Determina a amplitude do ângulo OAB.
7. Move o ponto A e observa as alterações na construção.
8. A reta perpendicular ao raio intersecta a circunferência em quantos pontos?

9. Como classificas a posição da reta relativamente à circunferência?

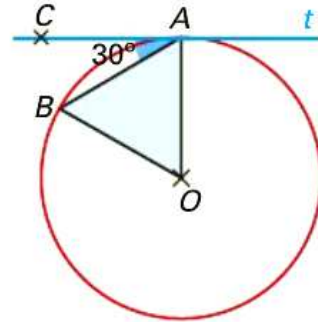
10. Qual a posição relativa entre o raio AO e a reta tangente que desenhaste?

11. Regista a conjectura que observaste:

<hr/> <hr/> <hr/> <hr/>

Exercícios de aplicação:

1. Na figura, a reta t é tangente à circunferência de centro O no ponto A . O ponto C pertence à reta t . $\widehat{CAB} = 30^\circ$.

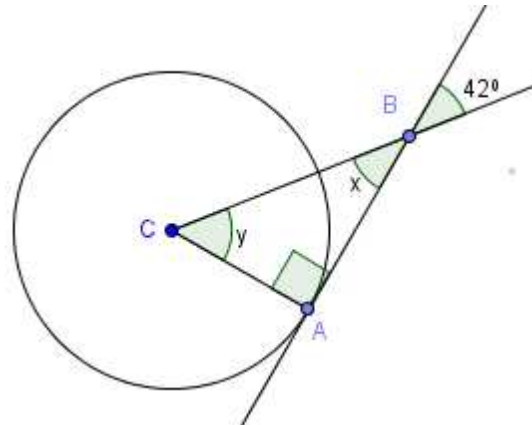


- 1.1. Diz, justificando, qual é a amplitude do ângulo OAB .

- 1.2. Qual é a amplitude do ângulo ABO ?

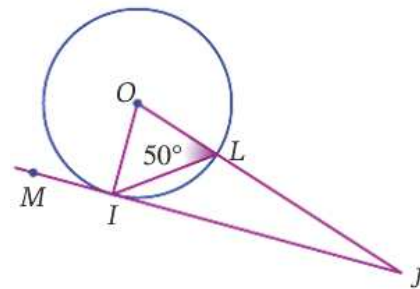
- 1.3. O que podes dizer acerca do triângulo $[ABO]$ quanto à amplitude dos ângulos? E quanto ao comprimento dos lados?

2. Observa a figura e determina os valores de x e de y .



3. Manual (2ª parte): pág. 30 – exercício 52.1.

Na figura, a circunferência tem centro O e a reta IJ é tangente à circunferência em I . O ponto L pertence ao segmento de reta $[OJ]$.



- Determina a amplitude de todos os ângulos que existem na figura.
- Explica como pensaste para calculares a amplitude do ângulo OIL e do ângulo LIJ .

ANEXO 7 – TAREFA 5: RETA PERPENDICULAR A UMA CORDA NO SEU PONTO MÉDIO

Reta perpendicular a uma corda no seu ponto médio

1. Representa uma circunferência com centro num ponto O e raio qualquer.
2. Marca dois pontos da circunferência, A e B, e representa a corda AB.
3. Marca o ponto médio da corda AB e representa-o por M.
4. Traça a reta perpendicular a AB que passa no ponto M.
5. Move o ponto A ao longo da circunferência e observa as alterações na construção.

A mediatriz passa no centro da circunferência?

Mediatriz de um segmento de reta –
reta perpendicular ao segmento e que
passa no seu ponto médio.

Regista a conjectura que observas:

<hr/> <hr/> <hr/> <hr/> <hr/>

6. Representa uma outra circunferência com centro num ponto O e raio qualquer.
7. Marca dois pontos da circunferência, C e D e representa a respetiva corda.
8. Marca o ponto médio da corda CD e designa-o por M.
9. Representa a reta que passa no centro da circunferência e no ponto médio da corda CD.
10. Determina a amplitude do ângulo CMO.
11. A reta é perpendicular à corda? Qual a sua amplitude?

12. Move o ponto C ao longo da circunferência e observa as alterações na construção.

Regista a conjectura que observas:

<hr/> <hr/> <hr/> <hr/>

13. Representa uma outra circunferência com centro num ponto O e raio qualquer.
14. Marca dois pontos da circunferência, E e F e representa a respetiva corda.
15. Marca o ponto médio da corda EF e designa-o por M.
16. Representa a reta que passa no centro da circunferência e é perpendicular à corda, clicando em primeiro no ponto O e de seguida na corda EF.
17. Traça os segmentos de reta EM e MF, escolhendo uma cor para cada um deles.

- 18.** Determina o comprimento dos segmentos de reta EM e MF. O que conclusis?

- 19.** Move o ponto E ou F ao longo da circunferência e observa os comprimentos dos segmentos de reta.

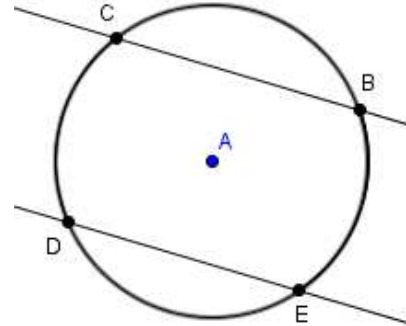
Regista a conjectura que observas:

<hr/>
<hr/>
<hr/>
<hr/>

Exercícios de aplicação:

1. Na figura ao lado os pontos B, C, D e E são pontos da circunferência de centro em A. As retas BC e DE são paralelas.

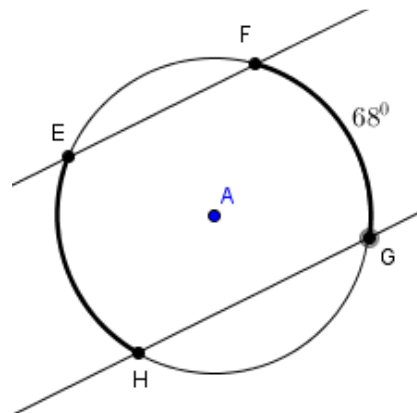
- 1.1. Justifica que os arcos CD e BE são congruentes.



- 1.2. Traça as cordas CD e BE. Qual é a relação entre \overline{CD} e \overline{BE} ?

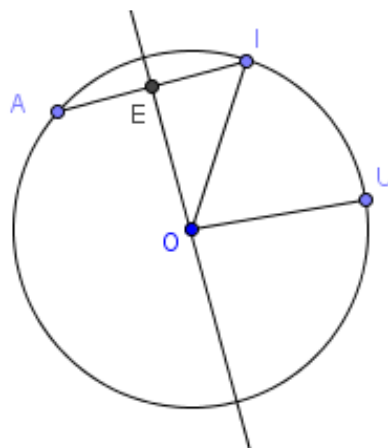
2. Observa a figura seguinte:

- 2.1. Sabendo que as retas EF e HG são paralelas e que o arco GF tem de amplitude 68° , determina a amplitude, em graus, do arco EH.



- 2.2. Se o arco FE tiver de amplitude 100° , qual é a amplitude do arco HG? Explica o teu raciocínio.

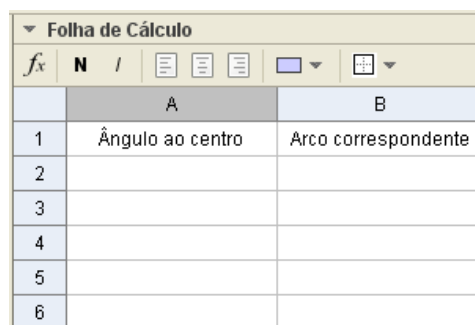
3. Na figura O é o centro da circunferência e E o ponto médio da corda AI. Sendo $\widehat{EIO} = 51^\circ$ e $\widehat{EOU} = 102^\circ$, determina \widehat{IOU} .



ANEXO 8 – TAREFA 6: AMPLITUDE DE UM ÂNGULO AO CENTRO

Reta perpendicular a uma corda no seu ponto médio

1. Representa uma circunferência com centro num ponto O e raio qualquer.
2. Marca dois pontos da circunferência, A e B, e determina a amplitude do arco AB.
3. Traça as semirretas \vec{OA} e \vec{OB} .
4. Determina a amplitude do ângulo AOB.
5. Move o ponto A ou B sobre a circunferência e compara a amplitude do ângulo ao centro AOB com a amplitude do arco AB.
6. Regista os teus valores numa tabela da folha de cálculo, semelhante à figura, seleccionando a *Folha de Cálculo* no menu *Exibir (Vista)* e observa a relação entre as duas amplitudes (amplitude do ângulo ao centro e amplitude do arco correspondente).



	A	B
1	Ângulo ao centro	Arco correspondente
2		
3		
4		
5		
6		

7. Qual é a relação entre a amplitude do ângulo ao centro e a amplitude do arco correspondente?

<hr/> <hr/>

Regista a conjetura observada.

Exercícios de aplicação:

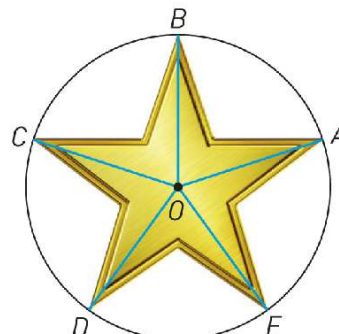
1. Na figura, os vértices da estrela dividem a circunferência de centro O em cinco arcos congruentes.

Determina a medida da amplitude:

1.1. do arco AB ;

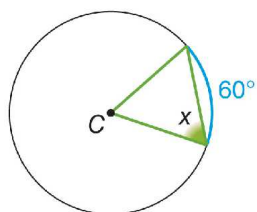
1.2. do ângulo ao centro COE ;

1.3. do arco CE .

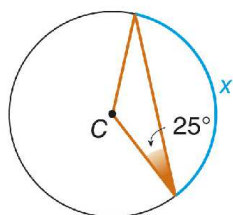


2. Observa a figura e determina o valor de x :

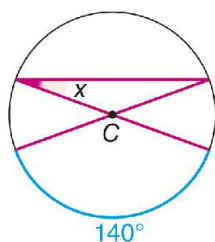
2.1.



2.2.



2.3.



ANEXO 9 – TAREFA 7: ÂNGULO INSCRITO E ÂNGULO AO CENTRO COM O MESMO ARCO DE CIRCUNFERÊNCIA

Relacionar a amplitude de um ângulo inscrito com a amplitude do respetivo ângulo ao centro.

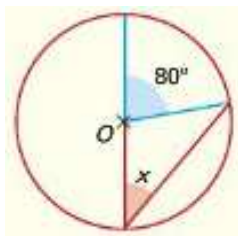
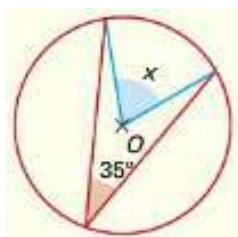
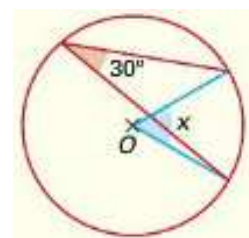
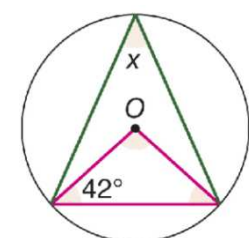
1. Representa uma circunferência com centro num ponto O e raio qualquer.
2. Desenha três pontos A, B e C na circunferência de centro no ponto.
3. Traça as semirretas \overrightarrow{OA} , \overrightarrow{OB} , \overrightarrow{CA} , e \overrightarrow{CB} .
4. Como se denomina o ângulo BOA? _____
5. Como se denomina o ângulo BCA? _____
6. Qual o arco correspondente a ambos os ângulos? _____
7. Determina as amplitudes dos ângulos BOA e BCA usando a ferramenta Ângulo.
8. Move os pontos livres da circunferência. À medida que vais movendo os pontos compara a amplitude do ângulo inscrito e a amplitude do ângulo ao centro correspondente.
9. Regista os valores numa tabela da folha de cálculo e observa a relação entre as duas amplitudes (amplitude do ângulo inscrito e amplitude do ângulo ao centro correspondente).
10. Qual é a relação entre a amplitude do ângulo inscrito e a amplitude do ângulo ao centro correspondente?

Regista a conjetura observada:

<hr/>
<hr/>
<hr/>

Exercícios de aplicação:

1. Observa a figura e determina x :

ANEXO 10 – TAREFA 8: AMPLITUDE DE UM ÂNGULO INSCRITO

Relacionar a amplitude de um ângulo inscrito com a do arco correspondente.

1. Representa uma circunferência com centro num ponto O e raio qualquer.
2. Marca três pontos da circunferência, A, B e V e traça as semirretas \vec{VA} e \vec{VB} .
3. Determina a amplitude do arco AB e a amplitude do ângulo AVB.
4. Move o ponto A ou B sobre a circunferência e compara a amplitude do ângulo inscrito AVB com a amplitude do arco AB.
5. Regista os valores numa tabela da folha de cálculo e observa a relação entre as duas amplitudes (amplitude do ângulo inscrito e amplitude do arco correspondente).
6. Qual é a relação entre a amplitude do ângulo inscrito e a amplitude do arco correspondente?

<hr/> <hr/>

Regista a conjectura observada.

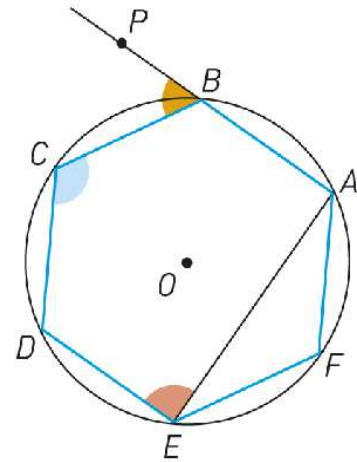
<hr/> <hr/> <hr/> <hr/>

Exercícios de aplicação:

1. Na figura está representado um hexágono regular inscrito numa circunferência de centro O .

Sabe-se que P é um ponto da reta AB . Determina:

1.1. Erro! A origem da referência não foi encontrada.



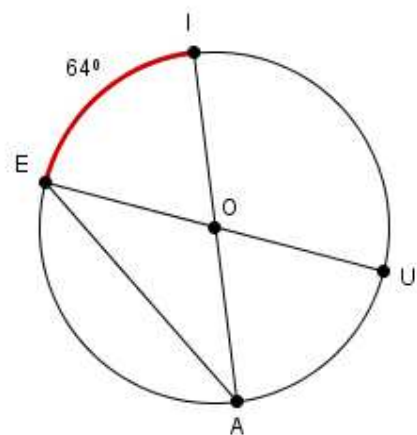
1.2. $\angle AED$;

1.3. $\angle DCB$;

1.4. $\angle PBC$.

2. Considera a circunferência de centro O representada ao lado. Sabe-se que o arco EI mede 64° .

Determina \widehat{EOI} , \widehat{IOU} , \widehat{AOU} , \widehat{EAI} , \widehat{AEU} , \widehat{AU} , \widehat{UI} e \widehat{EA} .



ANEXO 11 – TAREFA 9: ÂNGULOS INSCRITOS NO MESMO ARCO. ÂNGULO INSCRITO NUMA SEMICIRCUNFERÊNCIA

Relacionar as amplitudes dos ângulos inscritos com as amplitudes dos arcos correspondentes.

1. Constrói uma circunferência com centro num ponto O.
2. Desenha quatro pontos livres A, B, C e D na circunferência de centro no ponto O e traça as semirretas \overrightarrow{DA} , \overrightarrow{DB} , \overrightarrow{CA} , e \overrightarrow{CB} .
3. Como se denomina o ângulo BCA? _____
4. Como se denomina o ângulo BDA? _____
5. Qual o arco correspondente a ambos os ângulos? _____
6. Determina as amplitudes dos ângulos BDA e BCA.
7. Move os pontos livres D ou C da circunferência. À medida que vais movendo os pontos compara as amplitudes dos ângulos inscritos que possuem o mesmo arco de circunferência.
8. Qual a relação existente entre os dois ângulos inscritos que têm o mesmo arco de circunferência?

Regista a conjectura que estabeleceste.

<hr/> <hr/> <hr/> <hr/>

Determinar a amplitude de um ângulo inscrito numa semicircunferência

1. Constrói uma circunferência com centro num ponto O.
2. Desenha um ponto livre A na circunferência de centro no ponto O
3. Obtém o ponto A' , simétrico de A em relação a O, usando a ferramenta **Reflexão Central (Objeto, Ponto)**, clicando no ponto A e de seguida no ponto O.
4. Renomeia o ponto A' para B.
5. Traça o segmento de reta [AB], diâmetro da circunferência de centro em O.
6. Desenha um outro ponto livre C na circunferência de centro no ponto O.
7. Traça as semirretas \overrightarrow{CA} e \overrightarrow{CB} .
8. Como se denomina o ângulo ACB? _____
9. Qual o arco correspondente ao ângulo ACB? _____
10. Determina a amplitude do ângulo ACB.

11. Move o ponto livre C da circunferência. À medida que vais movendo o ponto C observa a amplitude do ângulo ACB.
12. Qual a relação existente entre o ângulo inscrito e o arco correspondente ao ângulo?

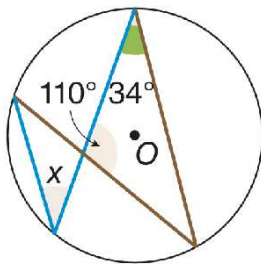
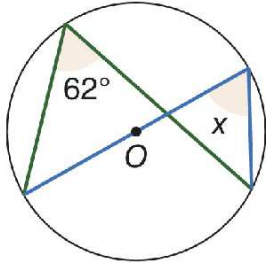
<hr/> <hr/>

Regista a conjectura que estabeleceste.

<hr/> <hr/> <hr/> <hr/>

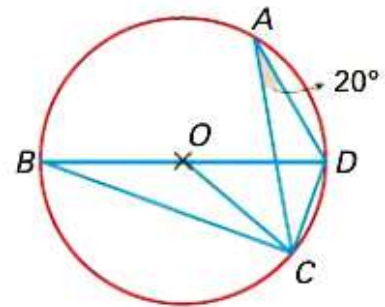
Exercícios de aplicação:

1. Observa a figura e determina x :



2. Na figura:

- O ponto O é o centro da circunferência.
- A, B, C e D são pontos da circunferência.
- $[BD]$ é um diâmetro.
- $\widehat{CAD} = 20^\circ$.



Qual é a amplitude do ângulo:

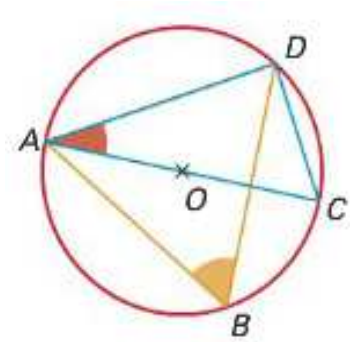
2.1. \widehat{CBD} ?

2.2. \widehat{COD} ?

2.3. \widehat{BDC} ?

3. Na figura está representada uma circunferência de centro O.

- [AC] é um diâmetro da circunferência.
- D e B são pontos da circunferência.
- $\widehat{DA} = 128^\circ$



3.1. Justifica que o triângulo [ACD] é um triângulo retângulo.

3.2. Justifica que $\widehat{DCA} = \widehat{DBA}$.

3.3. Determina:

a) \widehat{DBA} ;

b) \widehat{CAD} .

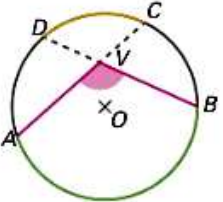
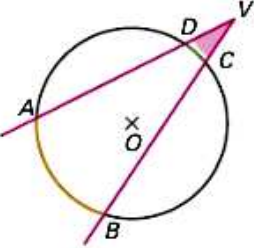
ANEXO 12 – TAREFA 10: ÂNGULOS EXCÊNTRICOS

Ângulo excêntrico a uma circunferência

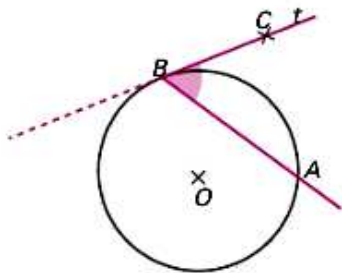
Um ângulo diz-se **excêntrico a uma circunferência** quando não tem o vértice no centro da circunferência.

Nota – um **ângulo inscrito** numa circunferência é um **ângulo excêntrico**

Ângulos excêntricos:

Ângulo	Caraterização
<p>Ângulo com o vértice no interior da circunferência</p> 	<p>O arco AB é o arco compreendido entre os lados do ângulo AVB. O arco CD é o arco compreendido entre os prolongamentos dos lados do ângulo AVB.</p>
<p>Ângulo com o vértice no exterior da circunferência</p> 	<p>Os arcos AB e CD estão compreendidos entre os lados do ângulo AVB.</p>

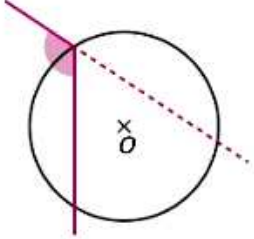
Ângulo de um segmento



É um ângulo em que um dos lados é tangente à circunferência e o outro lado contém o ponto de tangência e outro ponto da circunferência.

O arco AB é o arco compreendido entre os lados do ângulo ABC.

Ângulo ex-inscrito



É um ângulo que tem o vértice na circunferência e esta é intersectada por um dos seus lados e pelo prolongamento do outro lado.

Relacionar a amplitude de um ângulo com o vértice no interior da circunferência e as amplitudes dos arcos compreendidos entre os seus lados e os seus prolongamentos

1. Abre o ficheiro *tarefa 10_1*.
2. Observa a figura e move o ponto A da circunferência.
3. Compara a amplitude do ângulo com o vértice no interior da circunferência e as amplitudes dos arcos compreendidos entre os seus lados e os seus prolongamentos.

4. Regista os valores na tabela seguinte:

Amplitude do ângulo com o vértice no interior da circunferência (BAC)	Amplitudes dos arcos compreendidos entre os seus lados e os seus prolongamentos

5. Qual a relação entre a amplitude do ângulo com o vértice no interior da circunferência e as amplitudes dos arcos compreendidos entre os seus lados e os seus prolongamentos?

<hr/> <hr/>

Regista a conjectura observada.

<hr/> <hr/> <hr/> <hr/>

Relacionar a amplitude de um ângulo com o vértice no exterior da circunferência e as amplitudes dos arcos compreendidos entre os lados e os seus prolongamentos

6. Abre o ficheiro *tarefa 10_2*.
7. Observa a figura e move o ponto A da circunferência.
8. Compara a amplitude do ângulo com o vértice no exterior da circunferência e as amplitudes dos arcos compreendidos entre os seus lados e os seus prolongamentos.
9. Regista os valores na tabela seguinte:

Amplitude do ângulo com o vértice no exterior da circunferência (BAC)	Amplitudes dos arcos compreendidos entre os seus lados e os seus prolongamentos

10. Qual a relação entre a amplitude do ângulo com o vértice no exterior da circunferência e as amplitudes dos arcos compreendidos entre os seus lados e os seus prolongamentos?

Regista a conjectura observada.

Relacionar a amplitude de um ângulo de um segmento e a amplitude do arco compreendido entre os lados

11. Abre o ficheiro *tarefa 10_3*.
12. Observa a figura e move o ponto A da circunferência.
13. Compara a amplitude do ângulo de um segmento e a amplitude do arco compreendido entre os seus lados.
14. Regista os valores na tabela seguinte:

Amplitude do ângulo de um segmento (BAC)	Amplitude do arco compreendido entre os seus lados

15. Qual a relação entre a amplitude do ângulo de um segmento e a amplitude do arco compreendido entre os seus lados?

<hr/> <hr/>

Regista a conjectura observada.

<hr/> <hr/> <hr/> <hr/>

Relacionar um ângulo ex-inscrito e o ângulo inscrito adjacente

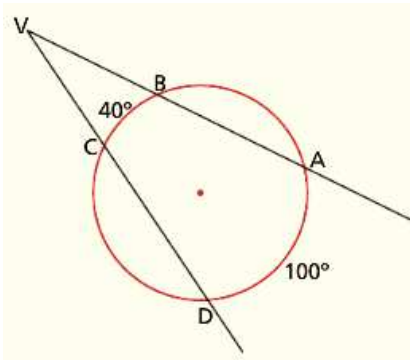
16. Abre o ficheiro *tarefa 10_4*.
17. Como se denomina o ângulo CAD? _____
18. Indica dois ângulos adjacentes. _____
19. Qual a relação entre a amplitude do ângulo ex-inscrito e a amplitude do ângulo inscrito adjacente?

<hr/> <hr/>

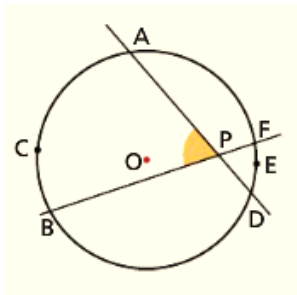
Regista a conjetura observada.

Exercícios de aplicação:

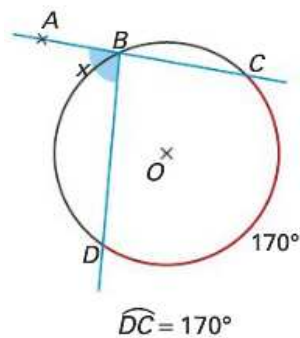
1. Determina o ângulo AVD , sabendo que o arco AD tem de amplitude 100° e o arco BC tem de amplitude 40° .



2. Determina a amplitude do ângulo APB , sabendo que a amplitude do arco AB é 100° e a do arco DF é 36° .

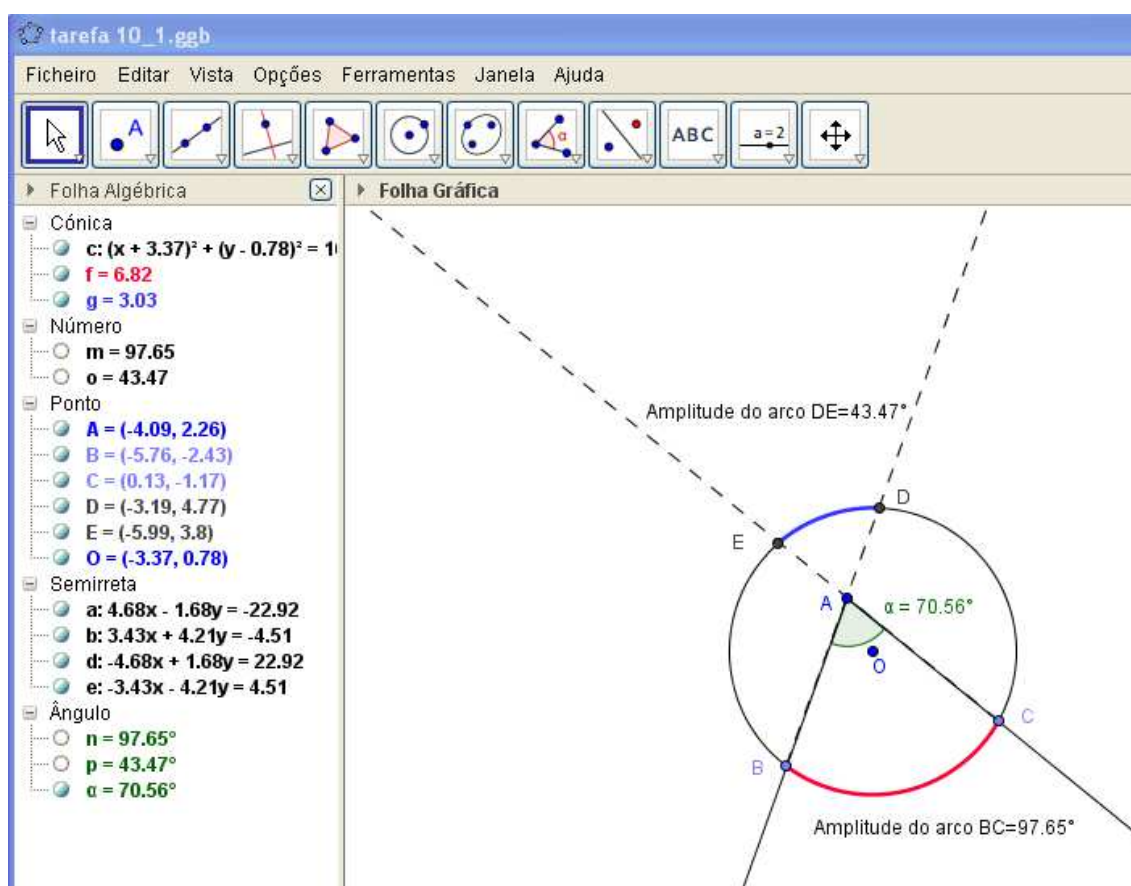


3. De acordo com os dados da figura determina x .

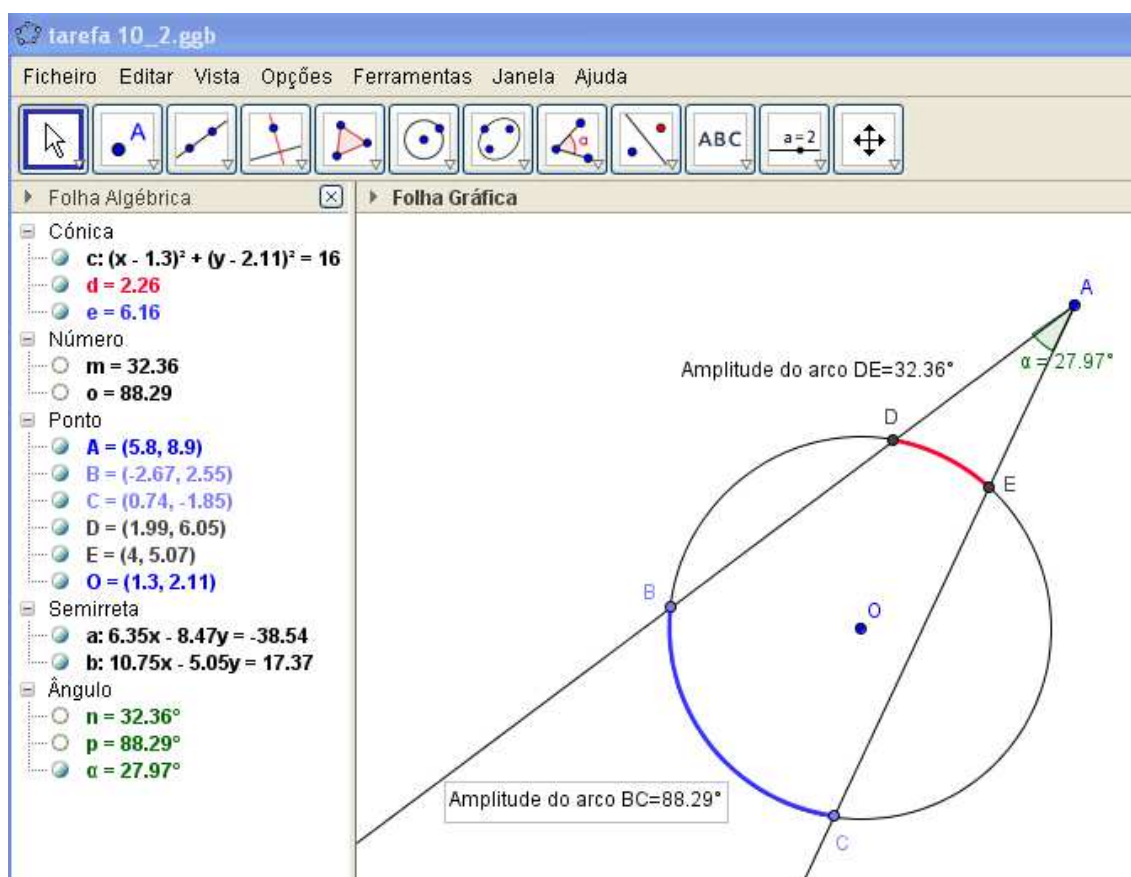


ANEXO 13 – FICHEIROS DA TAREFA 10 FORNECIDO AOS ALUNOS

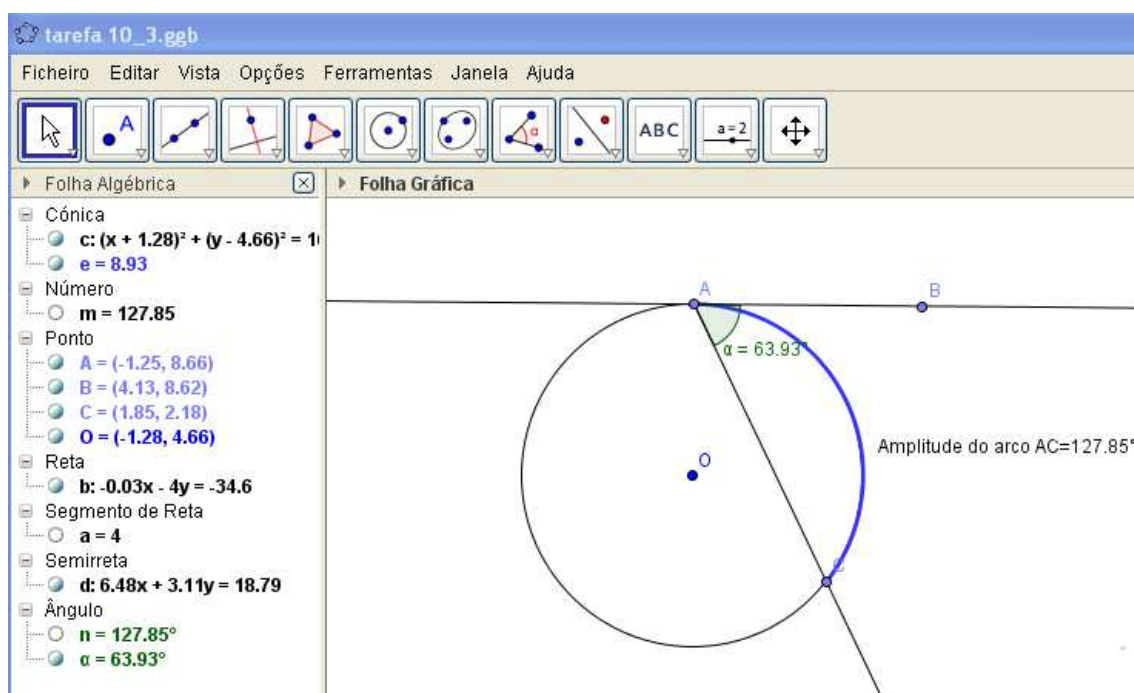
Ficheiro *tarafa 10_1*:



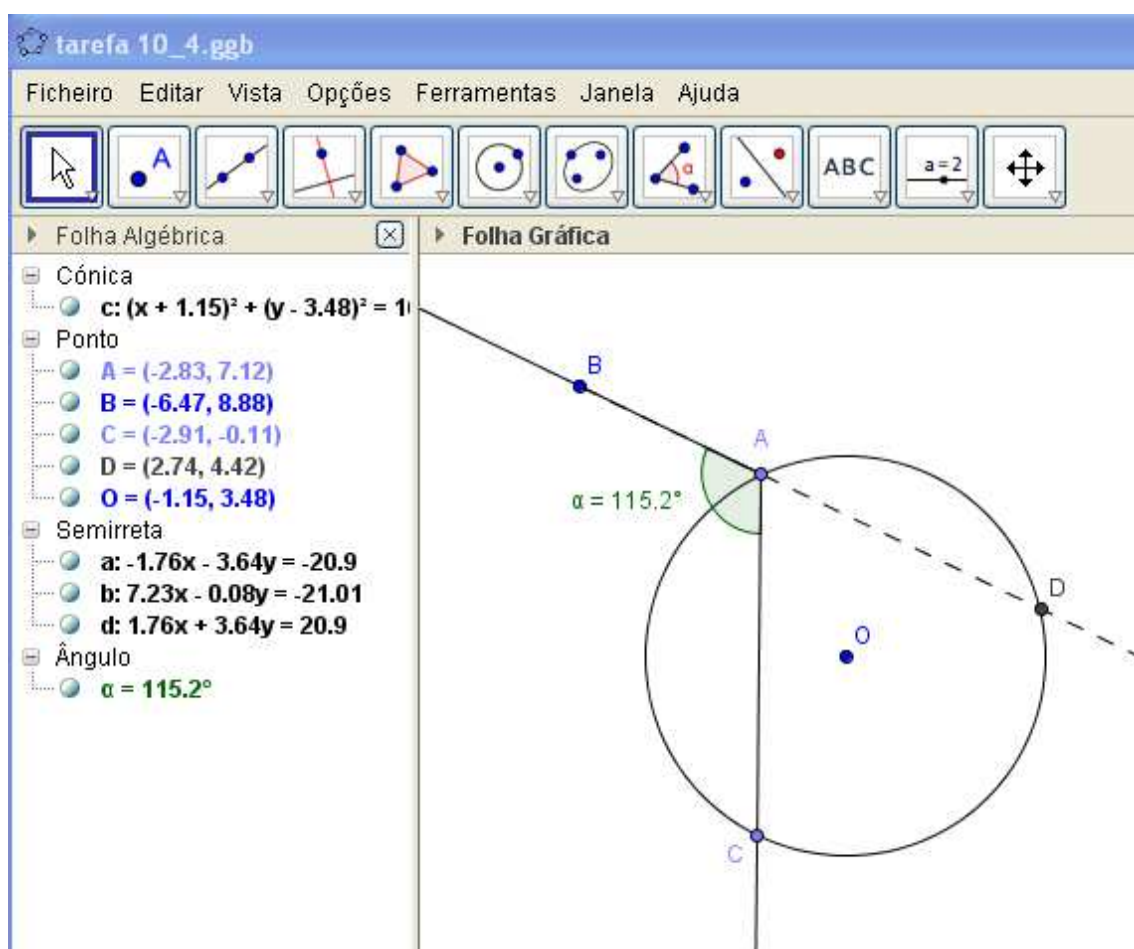
Ficheiro *tarefa 10_2*:



Ficheiro *tarefa 10_3*:



Ficheiro *tarefa 10_4*:



ANEXO 14 – INQUÉRITO NO GOOGLE DRIVE APLICADO AOS ALUNOS

[Editar este formulário](#)

Geogebra na aprendizagem do tópico Circunferência

Para responderes ao presente questionário deverás clicar na opção que no teu entender mais se adequa à tua experiência com o Geogebra ao longo das aulas em que o utilizaste para estudar o tópico Circunferência. O questionário é individual e anónimo.

***Obrigatório**

1. Género *

☐ Feminino

☐ Masculino

2. Para avaliar o trabalho desenvolvido no tópico Circunferência, assinala com uma X a opção que melhor traduz a tua opinião: *

	Discordo totalmente	Discordo	Não concordo nem discordo	Concordo	Concordo totalmente
Foi fácil adaptar-me ao ambiente de trabalho do Geogebra.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Foi fácil efetuar as construções com o Geogebra.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
O estudo do tópico Circunferência através do Geogebra foi mais motivador.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
O estudo do tópico Circunferência através da utilização de tarefas foi abordado de forma mais inovadora.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
As indicações contidas nas tarefas foram suficientes para o desenvolvimento do trabalho proposto.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Foi necessário o apoio da professora em sala de aula para conseguir realizar as tarefas.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
O Geogebra permitiu-me					

compreender
mais facilmente
as propriedades
de ângulos,
cordas e arcos
definidos numa
circunferência.

☐☐☐☐☐

A manipulação de
objetos no
Geogebra facilitou
o
estabelecimento
de conjecturas.

☐☐☐☐☐

A sequência de
tarefas, com
recurso ao
Geogebra,
facilitou a minha
aprendizagem da
Geometria.

☐☐☐☐☐

3. Gostarias de voltar a repetir esta experiência de aprendizagem aplicado a outras temáticas? *

☐ Sim

☐ Não

Obrigada pela tua colaboração!

Enviar

Nunca envie palavras-passe através dos Formulários do Google.

Com tecnologia
 Google Forms

Este conteúdo não foi criado nem aprovado pela Google.

[Denunciar abuso](#) - [Termos de Utilização](#) - [Termos adicionais](#)

ANEXO 15 – DB1

Data: 21/01/2014

Hora: 10h15min – 11h45min

Para poder dar início à aula, foi assegurado o material necessário: oito computadores portáteis da escola foram distribuídos por oito grupos; dois alunos pertencentes a dois grupos distintos trouxeram computador pessoal; a professora cedeu o seu computador a um grupo; uma aluna trouxe um tablet. Todos os computadores, bem como o tablet, possuem o Geogebra instalado.

Antes de distribuir qualquer tarefa, informei os alunos de que todo o tópico “Circunferência” seria trabalhado através da implementação de uma sequência de tarefas com recurso ao *GeoGebra*. Na resolução das tarefas iriam trabalhar em pares, devendo produzir as respostas em conjunto e executar os mesmos registos, uma vez que apenas uma das tarefas seria recolhida e de forma aleatória. Dei igualmente a indicação de que a discussão de cada tarefa seria feita no final da realização da mesma e após a recolha de uma das tarefas; sempre que necessário, poderiam solicitar o meu apoio. Alertei, ainda, que não seria feita qualquer leitura inicial dos enunciados por mim, que lessem com atenção as informações dadas nas tarefas e que, entre os pares, as discutissem.

Depois destas informações, distribuí a primeira tarefa. Os alunos mostravam-se ansiosos e, ao mesmo tempo, entusiasmados. Os seus olhares não eram de admiração – pois já haviam trabalhado com o software *GeoGebra* nas aulas de Matemática do ano letivo anterior, a respeito do tema “Isometrias” –, mas de alegria e de interesse pelo que se iria passar.

Os alunos começaram por ler as instruções dadas na tarefa para a utilização do Geogebra. Nenhum aluno solicitou, nesse momento, o meu apoio.

Ponto 1:

Inês: Stora, o que se faz no ponto um, quando pede para descrever a circunferência como um lugar geométrico?

Professora: Os lugares geométricos já foram aqui abordados. De quais é que falámos?

Sara: Circunferência, círculo, coroa circular, mediatriz, bissetriz, superfície esférica, esfera e plano mediador.

Professora: Muito bem! Então já sabem o que é uma circunferência.

Inês: Podemos usar o manual ou o caderno diário?

Professora: Podem. Não há nenhuma indicação em contrário na tarefa.

Inês: Ótimo!

Outros alunos comentaram: Ai sim! Que bom! Assim é uma grande ajuda!...

Ponto 2:

Nenhum aluno solicitou o meu apoio. Observei a turma e, em geral, todos construíram o segmento de reta e responderam ao que era pedido sem dificuldades.

Ponto 3:

Circulei pela sala e observei a Alexandra e o Duarte a resolverem a questão sem problemas. O Miguel explicava, com muito entusiasmo, à sua colega Elisabete como resolver a questão. De repente, um aluno chamou-me:

Rodrigo: Stora, como é que fazemos esta construção?

Professora: O que se pede para ser desenhado no primeiro ponto da questão 3?

Carolina: Pede-se um segmento de reta que contenha C e um ponto da circunferência?

Professora: Não é isso! Lê novamente a questão.

Após alguns instantes, o Rodrigo diz: Já sei! Pede para desenhar um segmento de reta AB, sendo A e B pontos da circunferência, mas que passa no centro da circunferência.

Professora: Muito bem! Continuem a trabalhar.

Ponto 4:

A Marta colocou-me a seguinte pergunta: Ó stora, quando assinalamos o arco menor e o arco maior com cores, a semicircunferência que eu tinha a azul desapareceu. É possível? Em resposta, disse-lhe: Qual é a amplitude resultante da soma dos arcos menor e maior que tu escolheste?

Pedro, colega da Marta: É 360° . Ah! A semicircunferência que desenhámos anteriormente está por baixo destas.

Nas questões seguintes, nenhum aluno pediu o meu apoio.

Entretanto, o grupo que trabalhava com o tablet questionou-me: Stora, podemos ir para o computador da sua secretária? Estamos a ter algumas dificuldades em manusear o *GeoGebra* no tablet.

Professora: Podem ir. Esse computador passa a ser o vosso computador de trabalho.

Ponto 9:

Joana: Stora, o ângulo que é pedido neste ponto é este? (o grupo tinha assinalado o ângulo côncavo AOB em vez do ângulo convexo AOB).

Professora: Não! Se nada for dito, considera-se ângulo ao centro apenas o ângulo convexo.

Joana: Então, o ângulo pedido é este e não o que assinalámos (a aluna apontou para o ângulo convexo AOB). Como é que volto atrás?

Professora: Leram, na primeira página da tarefa, as instruções para a utilização do *GeoGebra*?

Carlos, colega da Joana: Ah! Está aqui! (o aluno apontou para um dos pontos das instruções na primeira página). Basta usar estas setas (o aluno apontou para as setas do canto superior direito do ecrã) para desfazer o que fizemos.

Aproveitando esta intervenção, dirigi-me a toda a turma e procedi ao mesmo esclarecimento.

Voltei a circular pela sala e verifiquei que o grupo da Daniela e do Ricardo discutia a resposta da questão 9 (*Na figura, o ângulo AOB é um ângulo _____*). A Daniela dizia ao colega que o ângulo era obtuso e o Ricardo dizia que o ângulo era ao centro.

Então, decidi intervir, questionando: Na pergunta, é-vos pedido para classificar o ângulo quanto à sua amplitude?

Diana: Não! Então o Ricardo tem razão? O ângulo é ao centro?

Ricardo: Claro!

Neste momento, chamei a atenção dos alunos, dizendo que à, medida que vão realizando as tarefas, devem ter em atenção os conceitos apreendidos anteriormente, bem como a nomenclatura a usar.

Nos pontos seguintes, os alunos não apresentaram dúvidas.

Ponto 16:

Ao observar os vários grupos, pude verificar que alguns manifestaram dificuldade em traçar uma reta que intersetasse a circunferência apenas num ponto e que passasse pelo ponto P.

Num grupo, sugeri que fizessem a construção para eu acompanhar. O grupo da Anabela e da Matilde usou a ferramenta *reta*, clicou no ponto P e, de seguida, num ponto qualquer da circunferência, traçando uma reta (reta secante). Questionei as alunas: A reta que traçaram interseta a circunferência em quantos pontos?

Matilde: Em dois pontos.

Professora: Logo, que nome se dá a essa reta?

Ainda a Matilde: Reta secante.

Professora: Mas o que é pedido é que a reta passe apenas por um ponto da circunferência.

Anabela: Vamos tentar novamente. Matilde, desfaz o que fizemos.

Eu continuava a observar a construção do grupo e constatei que as alunas, por tentativas, conseguiram traçar a reta pedida.

Nesse momento, e estando o grupo do Fábio e do Bruno a ouvir o grupo anterior, foi perguntado: Como é que fizeram?

Matilde: Stora, posso ir ajudá-los?

Professora: Claro que sim!

A Matilde e a Anabela ajudaram os colegas que também sentiram dificuldades na questão.

De seguida, procedi à recolha de todas as produções.

Considero que o trabalho realizado foi bastante produtivo, tendo em conta o trabalho realizado em sala de aula, a participação ativa e o empenho dos alunos. Algumas vezes, para prosseguirem com a realização da tarefa solicitavam a minha presença para validar o trabalho realizado. Sempre que tal aconteceu, procurei clarificar os alunos fazendo a mesma pergunta de outra forma ou remetendo para outros conhecimentos já adquiridos.

Durante a realização da tarefa, verifiquei que os alunos iam consultando o manual, o que os ia ajudando, cientificamente, a responder a algumas questões.

Constatei ainda que, embora nos primeiros minutos, os alunos pudessem parecer pouco à vontade com o manuseamento do *GeoGebra*, tudo se desvaneceu num curto espaço de tempo e estes começaram a adotar atitudes mais descontraídas no decorrer da realização da tarefa.

No final da aula, verifiquei que a maior parte dos alunos levou mais tempo na realização da tarefa do que o tempo que tinha previsto inicialmente. Assim, apurei que dos doze grupos, oito tinham realizado a tarefa até ao exercício 1 dos exercícios de aplicação; um grupo tinha realizado a tarefa até ao ponto 16; um grupo até ao ponto 13 (este foi o grupo que tinha iniciado a tarefa no tablet); e apenas dois grupos tinham terminado a tarefa.

ANEXO 16 – DB2

Data: 23/01/2014

Hora: 10h15min – 11h45min

No início da aula, foi distribuído novamente o enunciado da tarefa 1. Os alunos continuaram a resolução dos exercícios de aplicação com o mesmo entusiasmo e interesse da aula anterior.

Exercício 2.1.:

Alexandra: Stora, pede para traçar a corda PA. Onde está o ponto A?

Professora: O que é uma corda?

Alexandra: É um segmento de reta que une dois pontos da circunferência.

Professora: Então, para traçares a corda PA, o que é que tens de ter marcado na circunferência?

Alexandra: Os dois pontos, P e A.

Professora: Onde estão os pontos?

Alexandra: Só está o ponto P, o ponto A não está lá!

Professora: Logo, o que deves fazer?

Alexandra: Já percebi! Tenho que marcar o ponto A e de seguida traçar a corda PA.

Andando pela sala, entre as questões 2.2. e 2.5., constatei que os alunos desenharam o que era pedido sem dificuldades. Apenas alguns pares solicitaram o meu apoio, para que lhes validasse a sua construção.

Exercício 2.6.:

Quando circulava pela sala observei que, nesta questão, um grupo de alunos apresentava um ângulo sem as semirretas desenhadas. Perante esta situação, decidi intervir do seguinte modo:

Professora: Sara e Inês, o que é um ângulo?

Sara: Para que eu tenha um ângulo tenho que ter um vértice e duas semirretas.

Professora: Mas, o vosso ângulo não tem semirretas. Onde estão?

Inês: Ah! Pois é! Não as desenhámos.

Alertei-as para a necessidade de uma leitura cuidada do enunciado, bem como dos conceitos anteriormente apreendidos para os poderem aplicar corretamente.

Exercício 2.8.:

Nesta questão, surgiram alguns pedidos de apoio no sentido de os esclarecer sobre o que é um ângulo com o vértice no exterior da circunferência. Face a estes pedidos, questionei toda a turma em voz alta:

Professora: O que é um ponto exterior à circunferência?

Marta: É um ponto que se situa no exterior da circunferência.

Professora: Na vossa construção, conseguem dizer-me um ponto que se situe no exterior da circunferência?

Bruno: É o ponto E.

Logo de seguida, verifiquei que vários pares se debruçaram sobre a tarefa e continuaram o seu trabalho.

Cerca das 10 horas e 35 minutos, os alunos terminaram a tarefa 1. Procedi, então, à recolha das produções dos alunos (uma por par) e iniciou-se a sua discussão, não tendo havido grandes discordâncias. O par Rute e Paulo ofereceram-se voluntariamente para apresentar este trabalho.

Por volta das 10 horas e 55 minutos, distribuí a tarefa 2. Os alunos rapidamente deram início à sua resolução, quando, de súbito, ouvi o Ricardo questionar o seu par:

Ricardo para a Daniela: O que é uma reta secante à circunferência?

Daniela: Ainda agora estivemos a corrigir a tarefa 1. Não estiveste atento! Agarra na tarefa e consulta-a.

O Ricardo pegou na tarefa 1 e depois de a folhear afirmou: Está aqui! É uma reta que intersesta a circunferência em dois pontos da circunferência.

Ponto 3:

Joana: Stora, chegue aqui!

Carlos: Onde está a ferramenta *Ponto médio ou centro*?

Professora: O que querem construir? Um ponto, uma reta uma circunferência, ...?

Carlos: Um ponto!

Professora: Então, têm que procurar em que separador?

Joana: No dos pontos (depois de procurarem no separador dos pontos, os alunos encontraram a ferramenta em questão).

Ainda outro par:

Paula: Stora, como é que marcamos o ponto M?

Professora: Já encontraram a ferramenta?

Paula: Já, mas a professora não indica na tarefa o procedimento a seguir, isto é, onde é que se clica em primeiro lugar.

Professora: A partir do momento em que conhecem a ferramenta a usar ou mesmo quando é indicada, vocês têm de ir à descoberta de como a devem usar. Tentem fazê-lo! Observei o par na sua construção e verifiquei que o fez corretamente.

Ponto 5:

A respeito do ponto 5, apercebi-me de que o Pedro, pertencente a um grupo, questionou o Rodrigo que pertencia a outro grupo, mas que se situava ao seu lado:

Pedro: O que é um eixo de simetria?

Rodrigo: É uma reta que passa pelo centro da circunferência e que a divide em duas semicircunferências. Percebeste?

Pedro: Acho que sim! Então, neste caso (apontado para a construção do seu computador) a reta MO é um eixo de simetria!?

Rodrigo: Sim.

Ponto 6:

Andando pela sala, notei que o par Daniela e Ricardo tinha traçado uma reta tangente à circunferência em vez de uma reta secante. Assim, comecei por questionar:

Professora: No ponto 6, o que se pede para traçar?

Ricardo: Pede para traçar uma reta secante à circunferência.

Professora: O que é uma reta tangente à circunferência e uma reta secante à circunferência?

Daniela: Uma reta tangente é uma reta que intersesta a circunferência num ponto e uma reta secante intersesta a circunferência em dois pontos.

Professora: Certo! Olhem para a vossa construção. A reta que traçaram intersesta a circunferência em quantos pontos?

Ricardo: Num ponto.

De repente, diz a Daniela: Então está errado! Nós traçámos uma reta tangente. Ricardo, desfaz o que fizemos para traçarmos a reta secante.

Ponto 8:

Circulando pela sala, observei que vários pares tentavam traçar os arcos pedidos no ponto 8 e não se lembravam do procedimento para os traçar. Aguardei algum tempo para ver as suas reações, mas alguns continuavam perplexos. Perante esta situação, decidi intervir, dizendo:

Professora: Para traçarem os arcos pedidos, devem ir à tarefa anterior, pois já foi efetuado este tipo de construção.

Rapidamente, os vários pares começaram a folhear a tarefa 1 e, na generalidade, todos conseguiram dar continuidade ao trabalho sem mais apoio.

Os pontos 9., 10., 11., e 12. foram resolvidos por todos os pares sem ajuda.

Ponto 13:

Neste ponto, o Pedro chamou-me e disse: Stora, os arcos são congruentes. Mas como é que justificamos? Isso vê-se na figura!

Professora: Como?

Marta: Parecem ser iguais.

Professora: O facto de parecer que são iguais não significa que o sejam. Têm que usar os dados que vos dão na tarefa e os conhecimentos já adquiridos até este momento.

O Fábio e o Bruno chamaram-me e o Bruno disse:

Bruno: Stora, eles são congruentes (referindo-se aos arcos AC e DB) porque MO é um eixo de simetria. Não é?

Professora: Muito bem. Agora escrevam o que disseram.

Neste momento verifiquei que alguns alunos ouviram o diálogo e logo se debruçaram sobre a tarefa, respondendo ao ponto 13.

Ponto 14:

Nesta etapa, surgiram alguns pedidos de auxílio. A Joana chamou-me e expôs a seguinte dúvida:

Joana: Stora, nesta questão diz para formularmos a conjectura observada. O que devemos escrever?

Nessa altura, apercebi-me de que vários alunos olharam, pois também eles se encontravam neste ponto.

Professora: Observando a construção que fizeram, que relação existe entre os arcos compreendidos entre as retas secantes à circunferência?

Joana: Os arcos são congruentes.

Professora: Escrevam exatamente o que acabaram de dizer.

Os alunos que se encontravam neste ponto, debruçaram-se novamente sobre a tarefa.

Passado algum tempo, o Miguel perguntou: É isto?

Professora: É isso mesmo! Podem continuar.

Entretanto, fui chamada pelos outros pares para verificar as suas conjecturas e encontrei situações diferentes. Uns responderam corretamente, ao passo que outros responderam

apenas “São congruentes” ou “Os arcos são congruentes”. Nestes casos, esclareci os alunos de que, ao formular as conjecturas, não devem particularizar, mas sim generalizar. Nestes dois últimos pontos, verifiquei que o tempo de resolução foi muito superior ao previsto.

Ponto 15 e 16:

Apercebi-me de que os alunos já estavam a resolver os pontos 15. e 16. quando surgiu a questão seguinte:

Paulo: Os pontos 15. e 16. são iguais aos pontos 13. e 14.!

Professora: Não são não! Repara bem e compara.

Fez-se silêncio. Após algum tempo o mesmo aluno comenta: Ah! Estes pontos falam das cordas e os pontos 13. e 14. falam dos arcos.

Nos minutos seguintes, não foram colocadas mais questões, os alunos terminaram os seus trabalhos e eu procedi à recolha das suas produções (uma por par) antes da realização dos exercícios de aplicação.

Nesta tarefa e nas restantes, optarei por recolher as tarefas e fazer a sua discussão antes da realização dos exercícios de aplicação, para que os alunos corrijam as suas respostas e conjecturas de forma a poderem aplicá-las corretamente na realização dos referidos exercícios.

Seguidamente, iniciou-se a discussão da tarefa 2. A Alexandra e o Duarte foram os alunos que se voluntariaram para apresentar o seu trabalho, não tendo havido grande discussão.

Durante a aula, os alunos participaram ativamente, quer na realização das tarefas quer na discussão da primeira tarefa, pelo que considero que o trabalho realizado foi bastante produtivo. No entanto, penso que algumas intervenções poderiam ter sido evitadas se os alunos tivessem feito uma leitura mais cuidadosa de algumas questões.

ANEXO 17 – DB3

Data: 28/01/2014

Hora: 10h15min – 11h45min

No início da aula, distribuí os exercícios de aplicação da tarefa 2 e os alunos começaram a trabalhar.

Exercício 1.1.:

Inês: Stora, na nossa construção, os pontos assinalados na circunferência não têm a mesma designação que a da tarefa.

Professora: Então, o que devem fazer?

Sara: Devemos alterá-los?

Professora: Sim, devem renomear os pontos de acordo com os pontos indicados na figura dada na tarefa.

Após este diálogo, observei o grupo a folhear a tarefa 1 para descobrir a opção a usar para renomear os pontos.

Outro grupo:

Pedro: Stora, nestes exercícios podemos usar as conjecturas da tarefa 2 que corrigimos na aula anterior?

Professora: Podem usar tudo o que aprenderam até este momento, as tarefas anteriores, o caderno diário, o manual,...

Exercício 2.:

Quase em sincronia, o Ricardo e a Paula perguntaram-me se, na questão 2, era para fazer a construção da figura no *GeoGebra*.

Respondi, em voz alta, para toda a turma: Nas questões 2. e 3. não é necessário fazerem as construções, uma vez que tal não é pedido. Apenas têm de observar a figura dada e lerem com atenção o enunciado.

Fábio: Estes exercícios são quase iguais. Para justificar as afirmações, apenas usamos as duas conjecturas da tarefa 2.

Professora: Meninos, continuem a trabalhar...

Exercício 3.:

Daniela: Stora, o que é um trapézio isósceles?

Professora: Como podemos classificar um trapézio quanto aos lados?

Carolina, de outro grupo: Pode ser isósceles, retângulo ou escaleno.

Professora: Muito bem! E o que é um trapézio retângulo?

Daniela: Esse eu sei! É aquele que tem dois ângulos retos.

Professora: E um trapézio escaleno?

João: É aquele em que os lados não paralelos não são congruentes.

Professora: E um trapézio isósceles?

João: É aquele em que os lados não paralelos são congruentes.

Após estas intervenções, dirigi-me ao quadro e optei por fazer um esquema resumo da classificação de trapézios quanto aos lados.

Por volta das 10 horas e 45 minutos, o grupo da Matilde e da Anabela interveio, dizendo:

Matilde: Stora, já terminámos. O que é que fazemos agora?

Neste momento, verifiquei que alguns alunos se encontravam ainda na questão 2., dos exercícios de aplicação, e outros, a finalizar a tarefa. Assim, optei por recolher os exercícios de aplicação da tarefa 2 e distribuir a tarefa 3. Esta estratégia deveu-se ao facto de os alunos estarem empenhados na realização das tarefas e de, assim, não perderem o entusiasmo demonstrado até ao momento. Por outro lado, tal era possível pois a concretização da tarefa 3 não dependia dos exercícios de aplicação da tarefa 2. Assim, no final da resolução da tarefa 3 proceder-se-á à discussão dos exercícios de aplicação das tarefas 2 e 3.

À medida que os alunos da turma concluíam os exercícios de aplicação da tarefa 2, recolhia um exemplar por grupo e distribuía a tarefa 3.

Tarefa 3:

Ponto 2:

Daniela: Stora, para traçar o eixo de simetria escolhe-se a ferramenta *reta* ou *segmento de reta*?

Professora: O que é um eixo de simetria?

Ricardo: É uma reta que divide uma figura em duas figuras congruentes.

Daniela: Então escolho a ferramenta *reta*!

Professora: Continuem a trabalhar...

Circulei pela sala e observei que os ângulos AOB e DOE desenhados pelo grupo da Alexandra e do Duarte não tinham as semirretas desenhadas. Decidi intervir:

Professora: Isto são os ângulos pedidos (apontando para os ângulos AOB e DOC)?

Duarte: Sim!

Professora: O que é um ângulo?

Duarte: É uma porção de plano que possui um vértice e duas semirretas.

Professora: Indiquem-me as semirretas do ângulo AOB.

Fez-se silêncio, por momentos. De repente, a Alexandra comenta: Não temos as semirretas.

Professora: Pois não! Vamos lá corrigir.

Ponto 8:

Circulei pela sala e observei a Rute e o Paulo a responderem à questão sem problemas.

De repente, um aluno chamou-me:

Bruno: Já determinámos o comprimento das cordas AB e DE e verificamos que têm o mesmo comprimento. Como é que respondemos à questão?

Professora: Escrevam o que acabaram de dizer.

Bruno: Mas respondemos por palavras ou por símbolos matemáticos?

Professora: Podem responder por palavras ou por símbolos ou misturando ambas.

Ponto 9:

Carolina: Stora, nós não conseguimos determinar as amplitudes dos arcos AB e DE.

Professora: Segue as instruções.

Carolina: Já fizemos isso e não aparece nada.

Professora: Repitam todo o procedimento dado na sugestão para que eu possa acompanhar.

Os alunos mostraram grande dificuldade na introdução da expressão dada na sugestão, pelo que tive de mostrar todo o processo para determinar a amplitude do arco pedido (arco AB).

Nesta fase, as dificuldades para determinar as amplitudes dos arcos foram muitas. Quase todos os pares estiveram parados à espera de ajuda, pelo que pedi aos colegas que já tinham determinado as amplitudes dos arcos que ajudassem os que estavam com dificuldades.

Verifiquei, todavia, que nenhum grupo conseguiu determinar as amplitudes dos arcos AB e DE de forma autónoma.

Nota: Dadas as dificuldades sentidas na determinação das amplitudes dos arcos usando o software, este ponto revelou-se bastante moroso e não se desenrolou de acordo com o previsto. Numa futura aplicação desta tarefa, penso que será necessário apresentar uma sugestão mais perceptível de como determinar a amplitude de um arco.

Ponto 12:

Miguel: Stora, como é que escrevemos a conjectura observada?

Professora: O que responderam no ponto 11?

Elisabete: Que os comprimentos das cordas são congruentes e as amplitudes dos arcos também.

Professora: Então já têm tudo. É só formular a conjectura observada.

Miguel: Então respondemos que as cordas e os arcos são congruentes?

Professora: Devem escrever uma frase de forma generalizada e o mais completa possível, atendendo ao que observaram.

Elisabete: O que o Miguel disse está incompleto, devemos escrever que a ângulos ao centro congruentes correspondem cordas e arcos congruentes.

Neste momento, verifiquei que alguns pares ouviam o diálogo e logo se debruçaram sobre a tarefa fazendo o registo.

Nas questões seguintes, alguns pares chamaram-me para que lhes validasse as respostas. Os alunos terminaram os seus trabalhos e eu procedi à recolha das suas produções (uma por par), uma vez que faltavam apenas cinco minutos para terminar a aula.

A aula foi positiva, na medida em que os alunos trabalharam com bastante empenho e entusiasmo. No entanto, os alunos demoraram muito mais tempo do que o esperado no ponto 9 da tarefa 3, no manuseamento do *GeoGebra*.

ANEXO 18 – DB4

Data: 30/01/2014

Hora: 10h15min – 11h45min

Nesta aula não esteve presente um aluno. Como tal, dei a escolher ao seu par se gostaria de trabalhar individualmente ou se preferia trabalhar com um outro grupo. A aluna optou por trabalhar com outro grupo.

A aula iniciou-se com a discussão da tarefa 2 – Exercícios de aplicação e da tarefa 3.

A tarefa 2 – Exercícios de aplicação, foi apresentada pelo par Carlos e Joana. A questão 1. não gerou grande discussão, no entanto, a questão 2 já suscitou alguma polémica.

Carlos: Como os arcos BC e AE estão compreendidos entre duas retas paralelas secantes, então são congruentes, ou seja, têm ângulos iguais.

Miguel: Falas em retas, mas no exercício não há retas, há apenas cordas. Portanto, acho que na justificação deves referir-te a cordas paralelas e não a retas paralelas.

O Carlos e a Joana olharam para mim com o intuito de que dissesse algo. Esperei um pouco, para que todos os alunos pensassem na observação feita pelo Miguel.

Professora: Os outros alunos concordam com o Miguel?

Na generalidade, os alunos não concordaram com a afirmação do Miguel.

Sara: Apesar de visualizarmos na figura as cordas BC e AD, podemos imaginar duas retas a passar nos mesmos pontos. Portanto, podemos falar em cordas ou retas paralelas. Nesse instante, verifiquei que muitos alunos acenavam com a cabeça, em sinal de concordância com a opinião da Sara.

As questões seguintes não levantaram grandes dúvidas, mas apercebi-me de que os pares Pedro e Marta e Fábio e Bruno corrigiram algumas das respostas dadas.

Relativamente à tarefa 3, o par Beatriz e João procedeu à apresentação do seu trabalho. Não se registando grandes discordâncias, deu-se por terminada a discussão da tarefa.

Cerca das 11 horas, comecei por distribuir o enunciado da tarefa 4. Os alunos, calmamente, iniciaram o seu trabalho, não tendo sido necessário prestar-lhes qualquer tipo de apoio na fase da construção.

Ponto 9:

Fábio: Stora, o que quer dizer com a posição da reta relativamente à circunferência?

Professora: Têm que mobilizar os conhecimentos das aulas/tarefas anteriores. Vai à tarefa 1, pode ser que te ajude.

O Bruno, colega do Fábio, começou a folhear a tarefa 1 e responde: Está aqui! É uma reta tangente à circunferência.

Ponto 10:

Chegados ao ponto 10, surgiram algumas dificuldades, tendo vários alunos exposto as suas dúvidas.

Matilde: Ó stora, esta pergunta não é igual à anterior?

Elisabete, de outro grupo: Ó stora, o que é a posição relativa?

Pedro, de outro grupo: Ó stora, não percebo o que pede no ponto 10.

Professora: Calma! Para vos ajudar, vamos relembrar a posição relativa de duas retas. Quem se lembra?

Carlos: Duas retas podem ser perpendiculares.

Fábio: Também podem ser oblíquas.

Alexandra: As retas também podem ser paralelas.

Assim, dirigi-me ao quadro e fiz uma síntese sobre a posição relativa de retas no plano. Os alunos registaram no caderno diário.

Ponto 11:

O par Beatriz e João chamou-me:

João: Stora, como é que vamos escrever a conjectura do que observámos?

Professora: Olhando para a vossa construção, qual é a posição da reta AB em relação à circunferência?

Beatriz: A reta é tangente à circunferência.

Professora: Qual a posição relativa entre o raio AO e a reta tangente?

Beatriz: Elas são perpendiculares.

Professora: De acordo com o que disseram, tentem estabelecer a conjectura.

João: Uma reta tangente à circunferência é perpendicular ao raio AO.

Professora: Em que ponto?

João: No ponto A.

Professora: Como se chama esse ponto?

João: Não sei!

Professora: Qual a posição relativa de uma reta relativamente a uma circunferência?

João: A reta pode ser exterior à circunferência, secante à circunferência e tangente à circunferência.

Professora: Muito bem! Então, quando a reta é tangente à circunferência, ela passa por quantos pontos da circunferência?

Beatriz: Por um ponto.

Professora: Como se chama esse ponto?

Daniela, uma colega de outro grupo que estava a ouvir o diálogo, afirmou: Ponto de tangência.

João: Ah! Então, uma reta tangente à circunferência é perpendicular ao raio AO no ponto de tangência.

De imediato, o grupo da Beatriz e do João debruçou-se sobre a tarefa e escreveu a conjectura.

Nota: Nesta tarefa, penso que seria importante introduzir uma questão logo a seguir ao ponto 8.: “Que nome se dá a esse ponto?”, uma vez que ajudaria a formular a conjectura observada.

Às 11 horas e 20 minutos, os alunos terminaram a tarefa até ao ponto 11.. Procedi à recolha das produções dos alunos (um por cada par) e fez-se a sua discussão. O par João e Beatriz ofereceu-se para apresentar o seu trabalho. O facto de não ter havido interrupções por parte dos colegas, deixa transparecer que a tarefa terá sido resolvida com sucesso.

Pelas 11 horas e 30 minutos, distribuí os exercícios de aplicação da tarefa 4 e os alunos deram calmamente início ao seu trabalho.

Exercício 1.1.:

Iniciou-se, então, o seguinte diálogo:

Daniela: Stora, é assim que se representa a amplitude do ângulo OAB (ângulo OAB)?

Professora: Essa notação indica o ângulo OAB, sendo o mais correto escrever \widehat{OAB} .

Perante esta intervenção, dirigi-me ao quadro e procedi ao mesmo esclarecimento para toda a turma.

Circulando pela sala, apercebi-me de que a maior parte dos pares apresentava apenas o cálculo para determinar a amplitude do ângulo pedido ($\widehat{OAB} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$), sem o justificar. Perante esta situação decidi intervir em voz alta, do seguinte modo:

Professora: Vejo que todos concluíram que $\widehat{OAB} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$; e está correto. Mas questiono, de onde surgiram os 90° ?

Anabela: É fácil, a reta é tangente à circunferência.

Professora: Alguém escreveu isso para justificar?

Os alunos responderam quase em coro: Não!

Elisabete: Mas ó stora, é preciso colocar isso?

Professora: Sim, têm de justificar todas as etapas que fizeram, apresentando todos os argumentos que vos permitem tirar as conclusões.

De imediato, todos se debruçaram sobre os exercícios de aplicação e completaram as suas respostas.

Neste momento, verifiquei que duas alunas, cada uma delas de grupos diferentes, trabalhavam juntas resolvendo os exercícios de aplicação, enquanto que os seus pares resolviam as questões sozinhos. Abeirei-me dos dois grupos e perguntei o que se passava, questionando as alunas sobre qual a razão de não estarem a trabalhar com os respetivos pares.

Joana: Ó stora, o Carlos não faz nada, eu tenho que fazer tudo sozinha. Ele só quer trabalhar no computador. Por isso virei-me para a Elisabete e trabalho com ela.

Carlos: Stora, eu posso trabalhar com o Miguel, ela não me deixa fazer nada!

Perante esta situação e com receio de que os alunos se desinteressassem, coloquei a troca de pares à consideração dos quatro alunos. Todos concordam e, a partir desse momento, os pares iniciais trocaram e a situação resolveu-se.

A partir desse momento os dois grupos passaram a trabalhar com maior entusiasmo e sem qualquer conflito.

Exercício 1.2.:

A propósito da questão 1.2., verifiquei que a maior parte dos alunos a lia sem, porém, a resolver. Entretanto, começou a haver conversas paralelas entre os vários grupos sobre a resolução possível do exercício. Perante esta atitude, fiquei preocupada, uma vez que receei que os alunos se desmotivassem. Assim, decidi lançar a questão em voz alta para todos:

Professora: Como é que classificam o triângulo [ABO] quanto aos lados?

Duarte: É um triângulo isósceles.

Professora: Porquê?

Carlos: Porque tem dois lados com o mesmo comprimento.

Professora: Quais?

Carlos: Os lados AO e BO.

Professora: Como é que justificam que os lados AO e BO têm o mesmo comprimento?

Paulo: Vê-se na figura.

Professora: Não podem dizer uma afirmação por se ver na figura. Têm de a justificar com argumentos válidos. Que nome se dá ao segmento de reta [AO]?

Joana: É um raio da circunferência.

Professora: E o segmento de reta [BO]?

David: Ah! Também é um raio da circunferência.

Professora: Logo, como é que justificam que o triângulo é isósceles?

Matilde: O triângulo é isósceles, porque os lados AO e BO são raios da circunferência, logo têm o mesmo comprimento.

De seguida, os alunos voltaram à resolução dos exercícios de aplicação e continuaram a trabalhar entusiasmados.

Exercício 1.3.:

Quase em simultâneo, o João e a Beatriz perguntaram-me o que era um triângulo quanto à amplitude dos ângulos.

Dirigi-me a toda a turma, amplificando a questão: Como se classificam os triângulos quanto aos ângulos?

Inês: Podem ser retângulos, acutângulos ou obtusângulos.

Professora: Justifica!

Inês: Se o triângulo tiver um ângulo reto é retângulo, se tiver um ângulo obtuso é obtusângulo e se tiver os ângulos todos agudos é acutângulo.

Toda a turma prestou atenção ao esclarecimento e começou a resolver a questão.

Exercício 2.:

A questão foi resolvida por, praticamente, todos os pares sem solicitação de apoio.

Apenas alguns pares me chamaram para que validasse as suas respostas.

Exercício 3.:

Nesta questão, alguns pares questionaram-me sobre se tinham que justificar todos os passos que apresentaram. Respondi-lhes que sim.

Às 11 horas e 45 minutos terminou a aula e passei a recolher as produções de todos os alunos para voltar a distribuir na aula seguinte. A maioria dos pares de alunos encontrava-se a resolver a questão 3 sem a finalizar; porém, três pares já tinham concluído a tarefa.

ANEXO 19 – DB5

Data: 04/02/2014

Hora: 10h15min – 11h45min

No início da aula, distribuí novamente todos os enunciados da tarefa 4 – exercícios de aplicação, mesmo aos grupos de alunos que já tinham finalizado a tarefa na última aula. A estes chamei a atenção para que lessem com cuidado o enunciado do exercício de aplicação 3., uma vez que verifiquei que não tinham determinado a amplitude de todos os ângulos que existiam na figura.

Toda a turma se debruçou sobre a resolução da tarefa com entusiasmo e empenho.

Exercício 3.:

O par Miguel e Carlos chamou-me:

Carlos: Stora, na alínea a) é para determinar as amplitudes dos ângulos LOI e OIL?

Professora: Observando a figura, só visualizas esses ângulos?

Miguel: Não. Também temos os ângulos do triângulo IJL.

Por volta das 10horas e 30 minutos os alunos terminaram a tarefa, procedi à recolha das produções (uma por grupo) e iniciou-se a sua discussão. A Marta e o Pedro foram por mim escolhidos para proceder à apresentação do seu trabalho até ao ponto 11. Esta apresentação decorreu sem registo de discussões. De seguida, o par Paula e David apresentou o trabalho realizado nos exercícios de aplicação da tarefa 4. No exercício 1. não houve controvérsia, mas no exercício 2. houve alguma polémica. O João questionou o par sobre o facto de não terem justificado todos os passos efetuados. O David respondeu-lhes que não era necessário. Nesse momento, interrompi o diálogo para informar toda a turma de que, na resolução de exercícios, era essencial justificar todas as etapas percorridas.

Logo de seguida, o João prontificou-se para justificar todos os ângulos calculados pelo par Paula e David. Relativamente ao exercício 3. a), o par Paula e David apenas tinha determinado os ângulos internos do triângulo ILO. O par Inês e Sara ofereceu-se para determinar as amplitudes dos ângulos em falta. A sua apresentação não gerou discussão, no entanto, observei alguns pares a corrigirem algumas das suas respostas.

Cerca das 10 horas e 50 minutos distribuí a tarefa 5. Os alunos rapidamente começaram a resolver a tarefa e não foi pedido qualquer esclarecimento nos vários pontos da tarefa, tendo os alunos registado as várias conjecturas. No entanto, surpreendi vários alunos a usar o manual.

Nota: Na resolução desta tarefa, foi assinalável a postura mais autónoma dos alunos face ao manuseamento do *GeoGebra*.

Pelas 11 horas e 10 minutos foram recolhidas as produções (uma por par) e deu-se início à discussão da tarefa. Desta vez, o par Pedro e Marta apresentou o seu trabalho sem ter sido interrompido. Apenas me apercebi de que alguns alunos alteraram os seus registos, no enunciado que ficou na sua posse.

De seguida, distribuí os exercícios de aplicação da tarefa 5, tendo os alunos começado de imediato a resolvê-los, com grande entusiasmo.

Exercício 1. e 2.:

Comecei a circular pela sala, quando o par Elisabete e Joana me chamou:

Joana: Stora, neste exercício não se aplicam as conjecturas formuladas nesta tarefa, pois não?

Professora: Tens razão, têm de mobilizar todos os conhecimentos das aulas anteriores.

Logo de seguida, observei muitos dos pares a manusearem as tarefas anteriores.

Nota: Numa futura aplicação desta tarefa, penso que seria mais correto estes dois exercícios fazerem parte dos exercícios de aplicação da tarefa 2, uma vez que são aplicadas as conjecturas registadas nessa tarefa.

No final da aula faltava, praticamente, resolver o último exercício, pelo que recolhi todos os enunciados. Os mesmos seriam distribuídos no início da aula seguinte para, de seguida, passar à sua correção/discussão.

ANEXO 20 – DB6

Data: 05/02/2014

Hora: 12h – 12h45min

Depois de distribuídos os enunciados dos exercícios de aplicação da tarefa 5, deu-se continuidade à sua resolução.

A maioria dos alunos encontrava-se a resolver o exercício 3 da tarefa quando, de repente, me chamaram:

Daniela: Stora, está correto (referindo-se ao exercício 3)?

Professora: Em termos de raciocínio, está certo, no entanto, não justificaram este ângulo ($\widehat{OEI} = 90^\circ$). Por que é que ele tem de amplitude 90° ?

Daniela: É preciso justificar? Nós já sabemos pela conjectura registada no ponto 13 que a reta EO é perpendicular à corda AI.

Professora: Então devem justificar o ângulo escrevendo essa conjectura.

Mais nenhum par solicitou o meu apoio para o exercício 3, pelo que, por volta das 12 horas e 25 minutos, recolhi as produções dos alunos (uma de cada par) e deu-se início à discussão da tarefa. O trabalho foi apresentado pelo Rodrigo e pela Carolina, tendo o Rodrigo apresentado os exercícios 1 e 2 e a Carolina o exercício 3. As suas apresentações estavam muito claras e pormenorizadas, não tendo surgido situações de discussão.

ANEXO 21 – DB7

Data: 11/02/2014

Hora: 10h15min – 11h45min

A aula teve início com a entrega e correção de uma questão aula sobre lugares geométricos que os alunos efetuaram no dia 29 de Janeiro.

Decorrido o tempo necessário à preparação do material para a realização da tarefa 6, o grupo constituído pelos alunos Paula e David chamou-me para me informar que o seu computador não arrancava. Voltámos a reiniciar o computador, mas este manteve-se inoperacional. Para além disto, não estava presente o aluno Paulo e, como tal, os alunos Paula e David juntaram-se à colega e trabalharam juntos até ao final das restantes tarefas. Este grupo manteve-se junto até ao final da implementação das restantes tarefas, uma vez que o aluno Paulo esteve ausente durante aproximadamente um mês por motivos de doença e o computador foi para arranjo.

Por fim, por volta das 10 horas e 50 minutos distribuí a tarefa 6 e os alunos começaram de imediato a construir a circunferência pedida.

Ponto 2:

Mais uma vez, a maior parte dos alunos revelou dificuldade na utilização do software para determinar a amplitude do arco AB, pois não se lembravam do procedimento a seguir. Esperei algum tempo, pois não lhes quis revelar, de imediato, todo o procedimento. Alguns pares de alunos continuaram parados, pelo que acabei por lhes sugerir a consulta da tarefa 3, pois esta continha todos os passos para determinar a amplitude de um arco. Rapidamente, quase todos os pares começaram a folhear a tarefa 3 mas, mesmo assim, foi necessário indicar, a alguns pares de alunos, todas as instruções necessárias para determinar a amplitude do arco pedido. O tempo de resolução deste ponto excedeu largamente o previsto.

Ponto 6:

A maior parte dos grupos iniciava este ponto, quando o Rodrigo exclamou:

Rodrigo: Stora, a nossa tabela fica sobreposta à circunferência! Há algum processo para mover a circunferência para a esquerda e colocá-la mais pequena?

Professora: Para diminuir a dimensão da circunferência, basta colocarem o cursor em cima da circunferência e rodarem o botão do rato. Para deslocarem a circunferência mais para a esquerda, basta usar a ferramenta *Mover*, colocar o cursor sobre a circunferência e arrastá-la para a esquerda.

Rodrigo: Já percebi!

O Rodrigo seguiu a sugestão dada e prosseguiu com o trabalho.

De imediato, outro par chamou-me:

Carlos: Stora, como é que se alargam estas células? Queria que aparecessem unicamente estas duas (apontando para as células que tinham as frases “*Ângulo ao centro*” e “*Arco correspondente*”).

Depois de lhes dar as instruções necessárias, os alunos continuaram a resolver a tarefa.

Circulando pela sala observei que, após fazerem os seus registos na tabela, os alunos facilmente chegaram à conjectura pedida. Um aluno fez o seguinte comentário:

Fábio: Stora, esta conjectura foi fácil de escrever com os valores da tabela.

Outro aluno, ainda, comentou:

Ricardo: As construções que fazemos no *GeoGebra* e o facto de podermos mover certos pontos e observar o que acontece, permite-nos registar as conjecturas facilmente.

Às 11 horas e 20 minutos terminaram a tarefa, procedi à recolha das produções dos alunos (uma por cada par) e iniciou-se a sua correção/discussão. A Joana e a Elisabete foram por mim designadas para procederem à apresentação do seu trabalho. A sua apresentação não gerou discussão. Observei que nenhum aluno corrigiu as suas respostas, pelo que depreendo que a tarefa terá sido resolvida com sucesso por todos.

A tarefa 6 – Exercícios de aplicação foi distribuída por volta das 11 horas e 30 minutos e de imediato os alunos se debruçaram sobre ela a trabalhar com grande entusiasmo para a resolver.

Exercício 1.1.:

Neste exercício foram muitos os alunos que sentiram dificuldades:

Rute: Stora, como é que se resolve esta questão?

Inês: Eu também não consigo fazer!

Duarte: Eu também não!

Matilde: Não há dados nenhuns!

Professora: Leiam com atenção o enunciado do exercício.

Dei-lhes um tempo para a leitura do enunciado, mas como não houve reação por parte dos alunos, decidi questionar:

Professora: Há alguma informação no enunciado que seja importante para a resolução do exercício?

Joana: Apenas indica que os cinco arcos são congruentes.

Professora: E o que são arcos congruentes?

João: São arcos que têm a mesma amplitude.

Fiz uma pausa. De repente, o David afirma:

David: Ah! Já sei! Basta dividir 360° por 5. Não é?

Professora: De onde vêm os 360° ?

David: É a amplitude total da circunferência.

De seguida todos os alunos se debruçaram sobre a tarefa e continuaram a trabalhar.

Exercício 2.1.:

Sara: Stora, podemos acrescentar letras à figura, mais precisamente nos pontos que pertencem à circunferência? Para indicarmos os ângulos é mais fácil usarmos as letras.

Professora: Claro que sim!

Aproveitando esta intervenção, dirigi-me a toda a turma e referi que, se necessitassem, poderiam acrescentar letras aos pontos que se encontram sobre a circunferência, pois isso poderia facilitar, em termos de escrita, a resolução do exercício.

Circulando pela sala, pude constatar que a maior parte dos alunos tinha acrescentado letras aos pontos que se encontram sobre a circunferência.

Muitos foram os pares que me chamaram para validar as respostas aos exercícios 2.1. e 2.2.. Muitos deles encontravam-se incompletos; como tal, a minha intervenção foi mais no sentido de questionar “Porquê?”. E, de imediato, os alunos justificavam todos os cálculos efetuados.

Às 11 horas e 45 minutos tocou para saída, os alunos abandonaram a sala e deixaram todo o material em cima da mesa, pois iriam ter outra aula de Matemática, de noventa minutos, às 12 horas.

Esta aula resultou de uma permuta efetuada com a disciplina de Língua Portuguesa devido ao teste intermédio, que se realizou no dia 6 de Fevereiro, numa aula de Matemática. Assim, neste dia, 11 de Fevereiro, os alunos tiveram dois blocos de aula de noventa minutos, com quinze minutos de intervalo entre os dois blocos.

ANEXO 22 – DB8

Data: 11/02/2014 – 2ª aula

Hora: 12h00min – 13h30min

Por volta das 12 horas, os alunos regressaram à sala de aula e deram continuidade ao trabalho da aula anterior. Uns encontravam-se a resolver o exercício 2.2. mas outros já iriam dar início ao exercício 2.3..

Exercício 2.3.:

As dificuldades para justificar este exercício foram muitas. Alguns pares de alunos estiveram algum tempo parados, outros queriam entregar a tarefa deixando o exercício totalmente em branco.

A Matilde colocou-me a seguinte pergunta: Ó stora, estes ângulos são iguais, mas não me lembro da propriedade que o possa justificar (referindo-se aos ângulos verticalmente opostos).

Depois desta intervenção, dirigi-me ao quadro e elaborei um esquema-resumo sobre a classificação de pares de ângulos. Assim questionei os alunos:

Professora: Como se podem classificar dois ângulos?

Carolina: Podem ser complementares.

Professora: E o que são ângulos complementares?

Miguel: São ângulos cuja soma é um ângulo reto, isto é, 90° .

Anabela: Também podem ser suplementares.

Professora: O que são ângulos suplementares?

Anabela: São ângulos cuja soma é 180° .

David: Podem ser adjacentes.

Professora: O que são ângulos adjacentes?

Sara: São ângulos que têm o vértice e um lado comum aos dois ângulos.

Carolina: Além disso, os dois ângulos não podem estar sobrepostos.

Professora: Mais ângulos?

Beatriz: Podem ser verticalmente opostos.

Professora: E o que são ângulos verticalmente opostos?

Beatriz: Dois ângulos são verticalmente opostos quando têm o mesmo vértice e os lados de um estão no prolongamento dos lados do outro.

Pedro: Também podem ser de lados paralelos.

Professora: O que são ângulos de lados paralelos?

Ricardo: São ângulos em que os lados de um são paralelos aos lados do outro.

Bruno: Há também os ângulos alternos internos e alternos externos.

À medida que os alunos indicavam os ângulos, foi feito no quadro um esboço de cada par de ângulos e os alunos procederam ao seu registo no caderno diário.

Ainda a Matilde: Então, quando indico que estes dois ângulos são iguais, tenho de o justificar.

Professora: Sim, deves justificar todos os cálculos ou ângulos que indiques.

Após este diálogo, vários foram os pares que me chamaram, ou para verificar se estavam a resolver bem o exercício, ou para lhes validar as respostas.

Quando tudo indicava que a tarefa tinha sido concluída, procedi à recolha das produções dos alunos (uma por par) e deu-se início à sua correção/discução.

O par Fábio e Bruno disponibilizou-se para apresentar o seu trabalho. Nos exercícios 1.1. e 1.3. não houve polémica, mas no exercício 1.2. já houve discussão. Apesar da apresentação do Bruno estar correta, a Rute interveio referindo que tinha chegado ao mesmo valor mas usando outro processo. Após a intervenção da Rute, todos os alunos verificaram que ambas as apresentações estavam corretas.

Outro exercício que gerou controvérsia foi o 2.3., uma vez que o Fábio determinou o ângulo pedido, apresentando todos os cálculos corretamente, mas sem os justificar. O Rodrigo foi o aluno que se voluntariou para justificar os cálculos apresentados pelo Fábio e deu-se por terminada a discussão da tarefa.

Por volta das 12 horas e 45 minutos, distribuí o enunciado da tarefa 7 e, logo começaram a resolvê-la, mas não com o mesmo entusiasmo que lhes é característico. Depreendo que este facto se deve ao cansaço dos alunos por terem dois blocos de aula, no mesmo dia.

Ao circular pela sala verifiquei que os alunos não manifestaram dificuldades na construção da circunferência, mas no ponto 9 muitos foram os pedidos de ajuda.

Ponto 9:

Carlos: Stora, aqui na tabela, o que se verifica é que o valor da amplitude do ângulo ao centro é maior que o valor da amplitude do ângulo inscrito. É essa a relação?

Professora: Analisem atentamente a tabela, pois podem aferir algo mais sobre os dados.

Voltei a circular pela sala, dando tempo a que o par de alunos, Carlos e Miguel, pensasse na questão, mas este continuava sem avançar. Mais uma vez aproximei-me deles e acabei por lhes sugerir o uso da calculadora dizendo:

Professora: E se usassem a calculadora?

Nesse momento, vários alunos abriram a calculadora do computador e começaram a fazer cálculos.

Daniela: Stora, chegámos à conclusão que a amplitude de um ângulo inscrito é metade da amplitude de um ângulo ao centro.

Professora: Muito bem!

De repente, um aluno refere:

Pedro: Oh Stora, mas na nossa tabela isso não acontece para todos os valores. Olhe aqui (o aluno apontou para a sua folha de cálculo)

Matilde: A nós também não!

Inês: E a nós também não!

De repente diz o Fábio:

Fábio: Será que é o *GeoGebra* que está a medir mal as amplitudes?

Professora: Não, está tudo correto. Pensem um pouco e tentem analisar por que é que isso acontece.

A Rute, que é uma aluna muito perspicaz, coloca o dedo no ar:

Professora: Diz Rute.

Rute: Penso que é o próprio programa que faz os arredondamentos desses valores.

Professora: É isso mesmo.

Todos os alunos da turma ouviram o comentário da Rute e logo começaram a responder aos pontos 9 e 10 sem mais ajudas.

Às 13 horas e 15 minutos recolhi as produções dos alunos (uma por par) e procedeu-se à sua discussão.

Como nenhum par de alunos se ofereceu, o Pedro e a Marta foram o par escolhido por mim para apresentar o seu trabalho, não tendo surgido nenhuma dúvida.

ANEXO 23 – DB9

Data: 12/02/2014

Hora: 12h – 12h45min

A aula teve início com a distribuição da tarefa 7 - exercícios de aplicação e logo os alunos começaram a trabalhar.

Ricardo: Stora, nas figuras dadas posso atribuir letras aos pontos situados sobre a circunferência?

Professora: Claro!

Circulando pela sala, observei que a maior parte dos alunos acrescentou, na figura, as letras necessárias à resolução dos exercícios para, mais facilmente, usarem linguagem matemática.

Na realização desta tarefa, os alunos mostraram muita autonomia, pois não se registaram pedidos de ajuda para a resolução dos vários exercícios.

Por volta 12 horas e 25 minutos e após a recolha das produções dos alunos (uma por par) passou-se à correção/discussão da tarefa.

O par que logo se voluntariou para apresentar a sua resolução, foi o da Elisabete e da Joana. A Elisabete deu início à correção do primeiro exercício. Após a sua conclusão, foi interrompida pela Carolina, afirmando que tinha resolvido o exercício de forma diferente. A Carolina fez a sua apresentação, tendo todos os alunos chegado à conclusão de que ambas as apresentações estavam corretas.

A Joana deu continuidade à apresentação dos exercícios, não tendo havido interrupções por parte dos colegas. Apenas observei dois pares de alunos a corrigirem os seus registos. A Elisabete apresentou o último exercício de uma forma cuidada e pormenorizada, tendo justificado convenientemente todas as etapas. Neste exercício, todos os alunos concordaram com a apresentação feita pela Elisabete.

ANEXO 24 – DB10

Data: 19/02/2014

Hora: 12h – 12h45min

Distribuído o enunciado da tarefa 8, os alunos começaram de imediato a construir a circunferência.

Ponto 3:

Mais uma vez se verificou que a grande maioria dos alunos revelou dificuldades na utilização do software para determinar a amplitude do arco AB. Alguns alunos pediram-me ajuda, tendo sido fornecido todos os passos necessários para a sua construção, mesmo usando a sugestão dada na tarefa 3 para determinar a amplitude de um arco. À medida que os alunos determinavam a amplitude do arco pedido, estes ajudam outros colegas na sua determinação.

O tempo necessário para a resolução deste ponto excedeu bastante o previsto pelo que depreendo que os alunos mostram dificuldades no manuseamento do software quando é pedido para determinar a amplitude de um arco de circunferência.

Pelas 12 horas e 20 minutos procedi à recolha das produções dos alunos (uma por cada par) e fez-se a sua discussão. O par Anabela e Matilde quis apresentar o seu trabalho, não tendo havido interrupções por parte dos colegas, o que deixa prever que a tarefa terá sido resolvida com sucesso.

Às 12 horas e 30 minutos, distribuí os exercícios de aplicação da tarefa 8 e os alunos deram calmamente início ao seu trabalho.

Exercício 1.:

De seguida, desenrolou-se o seguinte diálogo:

Sara: Stora, os arcos de um hexágono inscrito numa circunferência são congruentes?

Antes de responder à aluna, o Miguel, de outro grupo, respondeu:

Miguel: Claro que sim!

E logo a Sara e o seu par, a Inês, se debruçaram sobre a tarefa resolvendo-a com entusiasmo.

Durante a resolução do exercício 1., nenhum par de alunos solicitou o meu apoio.

Às 12 horas e 45 minutos terminou a aula e passei a recolher as produções de todos os alunos para voltar a distribuir na aula seguinte. A maioria dos alunos estava prestes a iniciar a resolução do exercício 2.

ANEXO 25 – DB11

Data: 20/02/2014

Hora: 10h15min – 11h45min

Depois de distribuídos, novamente, os enunciados dos exercícios de aplicação da tarefa 8, os alunos deram continuidade à sua resolução.

Exercício 2.:

Na generalidade, todos os pares solicitaram ajuda neste exercício, sobretudo para lhes validar as suas respostas ou justificações. A maior parte da minha intervenção resumiu-se a “Porquê?” ou “Devem justificar este cálculo” ou “Devem justificar esta etapa”.

Cerca das 10 horas e 35 minutos, quando tudo indicava que os alunos tinham terminado todos os exercícios, recolhi as produções dos alunos (uma por par) e deu-se início à sua correção/discussão. O par que logo se disponibilizou para apresentar o seu trabalho foi a Beatriz e o João. A Beatriz apresentou o exercício 1. e o João o exercício 2., não tendo surgido situações de discussão.

Pelas 10 horas e 50 minutos e depois de distribuída a tarefa 9, os alunos começaram, de imediato, a construir a circunferência sem solicitarem apoio.

Ponto 8:

Neste ponto, um par de alunos solicitou a minha ajuda:

Duarte: Stora, neste ponto conclui-se que os ângulos inscritos têm a mesma amplitude. Certo?

Como não quis logo afirmar que sim, pois senti que a intervenção do Duarte não fora feita com convicção, então questionei-o do seguinte modo:

Professora: Move o ponto C ou D da circunferência. Que conclusão tiras relativamente aos dois ângulos inscritos?

Duarte: Têm a mesma amplitude.

Professora: Move novamente o ponto C ou D. O que concluis?

Duarte: Também têm a mesma amplitude.

Professora: Então responde ao ponto 8!

Duarte: Como?

Professora: Basta escreveres o que disseste.

Nota: Nesta tarefa, penso que após o ponto 7 deveria constar um ponto para os alunos registarem, numa tabela da folha de cálculo, os valores das amplitudes dos dois ângulos inscritos observados, pois seria mais fácil tirar conclusões olhando para os valores registados na tabela.

No registo da conjectura pedida, vários foram os pares que me chamaram apenas para a validar.

Na construção da segunda circunferência, alguns pares mostraram dificuldades no manuseamento do software para obter o ponto simétrico de um ponto dado relativamente ao centro da circunferência, mesmo sendo dado a sugestão para a sua construção.

Ponto 11:

Inês: Stora, não conseguimos obter o simétrico do ponto A em relação ao ponto O, usando a ferramenta sugerida no ponto 11.

Joana: Nós também não!

Pedro: E nós também não!

Professora: Seguiram as instruções dadas?

Responderam ao mesmo tempo que sim.

Como me encontrava perto do par Inês e Sara, pedi-lhes que me mostrassem todo o procedimento que tinham efetuado. Como verifiquei que, ao clicarem no ponto A, não o fizeram com rigor, ou seja, não clicaram em cima do ponto, mas sim ao lado dele, alertei-as para o facto e de imediato todos os alunos se debruçaram sobre os computadores na tentativa de voltarem a encontrar o ponto simétrico. Após este episódio, não voltei a ser solicitada, pelo que deparei que os alunos conseguiram marcar o ponto simétrico pedido.

Às 11 horas e 20 minutos terminaram a tarefa, procedi à recolha das produções dos alunos (uma por par) e iniciou-se a sua correção. O par Miguel e o Carlos avançou para apresentar o seu trabalho; não surgiram situações de discussão.

Por volta das 11 horas e 30 minutos distribuí os exercícios de aplicação – tarefa 9 e os alunos deram início à sua resolução.

Exercício 1:

Marta: Nos pontos situados sobre a circunferência posso atribuir letras?

Professora: Podes!

Exercício 2.3.:

Circulando pela sala, observei dois pares de alunos a discutirem a resolução do exercício 2.3.. Como a aula estava no seu término e como nenhum dos grupos solicitou o meu apoio, decidi não intervir.

Os exercícios 1. e 2. foram resolvidos, na generalidade, por todos os pares.

No final da aula faltava resolver o exercício 3., pelo que recolhi todos os enunciados para voltarem a ser distribuídos na aula seguinte.

ANEXO 26 – DB12

Data: 25/02/2014

Hora: 10h15min – 11h45min

No início da aula distribuí novamente todos os enunciados da tarefa 9 – exercícios de aplicação e os alunos deram continuidade à sua resolução.

Exercício 3.1.:

Neste exercício, o Pedro e a Marta, assim como a Alexandra e o Duarte pediram apoio:

Pedro: Stora, não conseguimos justificar que o triângulo é retângulo.

Alexandra, que estava sentada atrás do Pedro e da Marta: Nós também não!

Quando me dirigia aos quatro alunos, o Fábio que se encontrava sentado numa carteira ao lado deles, respondeu-lhes:

Fábio: Vão à tarefa 9 e vejam as conjecturas que escrevemos.

O Duarte e a Alexandra logo começaram a folhear a tarefa 9 à procura das conjecturas.

Esperei algum tempo. O Duarte referiu, então:

Duarte: Já sei, é a última conjectura.

Marta: Qual?

Alexandra: Esta que diz, a amplitude de um ângulo inscrito numa semicircunferência tem de amplitude 90° .

Marta: Ah! Já vi.

Os quatro alunos continuaram a trabalhar, pelo que decidi não intervir e estes não voltaram a pedir o meu apoio.

Nos restantes exercícios, mais nenhum aluno pediu ajuda.

Pelas 10 horas e 40 minutos recolhi as produções dos alunos (uma por par) e fez-se a sua correção/discussão. O par que se ofereceu para apresentar o seu trabalho foi a Inês e a Sara.

A apresentação do exercício 1. foi feita pela Sara e decorreu sem interrupções por parte dos colegas, o que deixa antever que tenham resolvido o exercício com sucesso. O exercício 2. foi apresentado pela Inês. Após a apresentação do exercício 2.1., a Matilde interveio referindo que tinha resolvido o mesmo exercício de outra forma. A Matilde

apresentou a sua resolução e todos os alunos chegaram à conclusão de que ambas as apresentações estavam corretas. O mesmo aconteceu com os exercícios 2.2. e 2.3..

O exercício 3. foi apresentado pela Sara, não tendo surgido situações de discussão. Apenas observei quatro pares de alunos a fazerem os registos, pois não tinham realizado o exercício 3. da tarefa. Perante esta situação, fiquei na dúvida sobre se o facto de não terem realizado o exercício 3. se deveu a falta de tempo ou se tiveram dúvidas na sua realização, pois os mesmos não pediram mais tempo aquando da recolha das produções, nem pediram ajuda durante a sua realização.

Por volta das 11 horas, os alunos ligaram os computadores, distribuí o enunciado da tarefa 10 e procedi ao seguinte esclarecimento:

Professora: Nos vários computadores foi instalado uma pasta com o nome “*Tarefa_10*” onde existem quatro ficheiros. Estes ficheiros só serão abertos e explorados quando, ao longo da tarefa, vos remeter para os mesmos.

Nota: Na tarefa 10 optei por fornecer aos alunos quatro ficheiros com as construções das várias circunferências para os mesmos explorarem, uma vez não havia tempo útil para os alunos as construírem, já que o teste intermédio seria realizado em breve e ainda havia conteúdos por lecionar que faziam parte da matriz do teste; havia, também, que preparar os alunos para a realização do mesmo.

De seguida, foi feita uma leitura cuidada da tarefa, acerca dos ângulos excêntricos. Após alguns esclarecimentos, os alunos procederam à sua realização.

Ponto 5:

No ponto 5 surgiram muitas dificuldades. Alguns pares de alunos olhavam-se e encolhiam os ombros e outros questionavam os colegas, mas sem resposta. Nessa altura, a Rute questionou-me:

Rute: Stora, não conseguimos responder ao ponto 5.

Neste momento, vários alunos referiram:

João: Nós também não conseguimos!

Carolina: Nós também não!

Daniela: Nós também!

Professora: Já registaram os valores na tabela?

Praticamente todos em coro: Já!

Professora: Observem os valores e tentem compará-los...

De repente a Beatriz interrompeu-me e referiu:

Beatriz: Stora, nós já tentámos comparar. Tentámos ver se era o dobro ou se era a diferença e não é nenhum destes casos.

Bruno: Stora, e nós tentámos ver se era a soma ou se era a diferença e também não é.

Não querendo dar-lhes a resposta e aproveitando a intervenção do Bruno, fiz a seguinte sugestão:

Professora: E se usassem a calculadora e a sugestão do Bruno?

Nesse momento, os alunos abriram a calculadora do computador e começaram a fazer cálculos. Posteriormente, vários foram os pares que me chamaram apenas para lhes validar as respostas.

Neste ponto, o tempo de resolução foi superior ao previsto.

Nos restantes pontos os alunos não revelaram dificuldades.

Pelas 11 horas e 35 minutos, procedi à recolha das produções (uma por par) e procedeu-se à sua correção/discussão.

O par que se voluntariou para apresentar o seu trabalho foi o Pedro e a Marta, não tendo havido interrupções por parte dos colegas, o que permite pensar que a tarefa terá sido resolvida com sucesso.

ANEXO 27 – DB13

Data: 26/02/2014

Hora: 12h – 12h45min

Antes de distribuir o enunciado da tarefa 10 – exercícios de aplicação, informei os alunos de que, no final da mesma, e um de cada vez, iriam ao computador da sala responder a um questionário online de modo a avaliar o trabalho desenvolvido neste tópico, "Circunferência", e que este seria anónimo (não responderam ao questionário dois alunos que se encontravam doentes).

Entretanto, distribuí a tarefa 10 – exercícios de aplicação e os alunos começaram a responder às questões, sem revelarem dificuldades.

Pelas 12 horas e 20 minutos, procedi à recolha das produções (uma por par) e iniciámos a discussão do trabalho.

O par Beatriz e João foi um dos que se disponibilizou para esta apresentação. Foi uma apresentação bastante tranquila, tendo decorrido sem interrupções.

Por volta das 12 horas e 30 minutos, deu-se por terminado a realização e a discussão das várias tarefas. Os alunos, um de cada vez, responderam ao questionário e até ao final da aula trocaram-se algumas impressões e fizeram-se alguns comentários sobre estas aulas.

Alguns comentários:

Marta: Estas aulas foram muito fixes!

João: Ó stora, as aulas deveriam ser sempre assim!

Carolina: Foi fácil chegar às conjecturas com o *GeoGebra*!

Sara: Gostei muito de trabalhar com o *GeoGebra*!